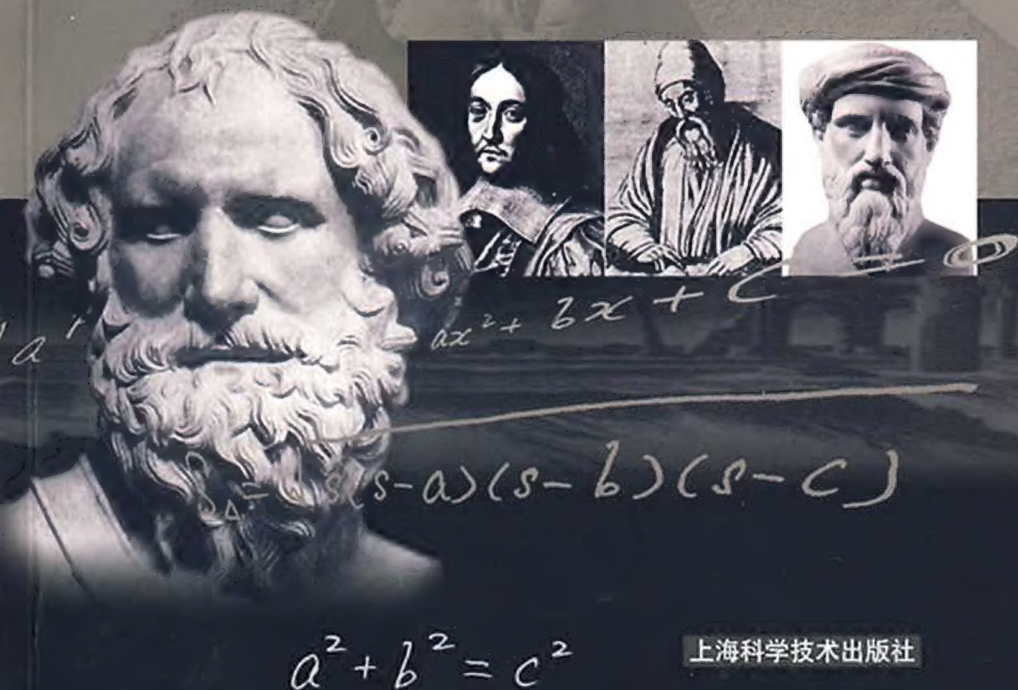
(第一册)

古今数学思想

[美] 莫里斯·克莱因 著



上海科学技术出版社

(第二册)

古今数学思想

[美] 莫里斯·克莱因 著



上海科学技术出版社

（第三册）

古今数学思想

[美] 莫里斯·克莱因 著





上海科学技术出版社

（第四册）

古今数学思想

[美] 莫里斯·克莱因 著





上海科学技术出版社

古今数学思想

（第三册）

［美］莫里斯·克莱因　著

万伟勋　石生明　孙树本　等译



上海科学技术出版社

古今数学思想

（第四册）

［美］莫里斯·克莱因　著

邓东皋　张恭庆　等译

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

古今数学思想.第1册/(美)克莱因著;张理京,张锦炎,江泽涵译.—上海:上海科学技术出版社,2002
ISBN 7-5323-6172-1

Ⅰ.古… Ⅱ.①克…②张…③张…④江…
Ⅲ.数学史 Ⅳ.011

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第002388号

责任编辑 田廷彦
张 晨
静晓英

上海科学技术出版社出版发行
(上海瑞金二路450号 邮政编码200020)
常熟市兴达印刷有限公司印刷 新华书店上海发行所经销
2002年7月第1版 2002年7月第1次印刷
开本850×1168 1/32 印张11.625 字数283千
印数1—5 200 定价:32.00元



《古今数学思想》译者录

第一册(序,第 1 章至第 14 章):

江泽涵(序);张理京(第 1 章至第 10 章,第 13 章,第 14 章);张锦炎(第 11 章,第 12 章)

第二册(第 15 章至第 26 章):

申又枨(第 15 章,第 16 章);朱学贤(第 17 章,第 18 章,第 25 章);钱敏平(第 19 章);邓东皋(第 20 章);丁同仁(第 21 章);刘西垣(第 22 章);叶其孝(第 23 章,第 24 章);庄圻泰(第 26 章)

第三册(第 27 章至第 39 章):

庄圻泰(第 27 章);万伟勋(第 28 章至第 30 章);石生明(第 31 章至第 33 章);张顺燕(第 34 章);姜伯驹(第 35 章);孙树本(第 36 章,第 38 章,第 39 章);章学诚(第 37 章)

第四册(第 40 章至第 51 章):

叶其孝(第 40 章);程民德(第 41 章);朱学贤(第 42 章);张恭庆(第 43 章,第 44 章);邓东皋(第 45 章至第 47 章);章学诚(第 48 章);聂灵沼(第 49 章);江泽涵(第 50 章);吴光磊(第 51 章)

翻译说明

很多数学工作者、数学教师和数学爱好者早就希望能有一本比较简明的、阐述一些重要数学思想的来源和发展的书．看到 Morris Kline 教授写的这本 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*（1972），我们感到相当满意，就组织人力把它翻译出来．

这本书内容丰富，全面论述了近代数学大部分分支的历史发展；篇幅不大，简明扼要．正如书名所指出的，本书着重论述数学思想的古往今来，而不是单纯的史料传记，努力说明数学的意义是什么，各门数学之间以及数学和其他自然科学尤其是和力学、物理学的关系是怎样的．本书厚今薄古，主要篇幅是叙述近二三百年的数学发展，着重在 19 世纪，有些分支写到 20 世纪 30 年代或 40 年代，作者对一些重要数学分支的历史发展，对一些著名数学家的评论，都很有一些独到的见解，并且写得很引人入胜．Morris Kline 教授本人深受格丁根大学数学传统的影响，注意研究数学史和数学教育，是一位著名的应用数学家和数学教育家，因此，他很能体会读者的心情，在书中能通过比较丰富的史料来阐述观点，把科目的历史叙述和内容介绍结合起来．另外，为了方便读者，对许多古代的数学成就或资料都翻译成近代数学的语言，通俗易懂．这些都是本书突出的优点．

当然，本书也有不足之处，例如忽视了我国的数学成就及其对

数学发展的影响，这对于论述数学的发展来说，无疑是有片面性的. 关于对现代数学高度抽象这一特征的看法，作者是持一定保留态度的，他的这种态度，给本书带来了某种倾向性，我们认为这是可以商榷的. 另外，关于数学中的有些问题，在历史上一直是争论不休的，而数学就在这种争论中发展着；作者的一些看法，也只是一家之言，还是值得研究的. 但是总的看来，本书仍不失为一本难得的好书. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1974, 9, Vol. **80**, No. 5:805—807 的书评文章说："就数学史而论，这是迄今为止最好的一本."

参加本书翻译的有张理京、江泽涵、张锦炎、申又枨、朱学贤、钱敏平、邓东皋、丁同仁、刘西垣、叶其孝、庄圻泰、万伟勋、石生明、张顺燕、姜伯驹、孙树本、章学诚、程民德、张恭庆、聂灵沼和吴光磊. 第一册是张理京校阅的；参加第二册校阅的有申又枨、江泽涵、冷生明；第三册主要由冷生明校阅，其中有一部分是张理京校阅的；第四册主要由申又枨、冷生明校阅. 另外，叶其孝、朱学贤参加校阅了全书的部分章节，并协同做了许多组织工作.

本书是在 1976 年初，由北京大学数学系的几位教授与部分教师，主要是申又枨、江泽涵、吴光磊、冷生明等建议组织翻译的. 当时主要目的是便于自己学习.

由于版权的关系，近经上海科学技术出版社向牛津大学出版社购得中文版权，才使这一中译本得到正式出版. 从开始翻译到现在，25 年过去了，Kline 教授和多位当年参加翻译的老一辈数学家相继去世，我们深深地怀念他们. 原书虽再没有新的版本，但其在国际上的影响仍然很大. 为了保证质量，冷生明曾对译稿进行了全面校勘，改正了许多误译和其他差错. 在原译本中，数以千计的人名、地名译法都不规范，为纠正这些错误，出版社的几位编辑也花费了大量心血. 另外，在本书的出版过程中，吴文俊教授给予很大的关怀与支持，我们表示衷心的感谢！

序

如果我们想要预见数学的将来,适当的途径是研究这门科学的历史和现状.

Henri Poincaré

本书论述从古代一直到20世纪头几十年中的重大数学创造和发展.目的是介绍中心思想,特别着重于那些在数学历史的主要时期中逐渐冒出来并成为最突出的、并且对于促进和形成尔后的数学活动有影响的主流工作.本书所极度关心的还有:对数学本身的看法,不同时期中这种看法的改变,以及数学家对于他们自己的成就的理解.

必须把本书看作是历史的一个概述.当人们想到Euler全集满满的约70卷,Cauchy的26卷,Gauss的12卷,人们就容易理解只凭本书一卷的篇幅不能给出一个详尽的叙述.本书的一些篇章只提出所涉及的领域中已经创造出来的数学的一些样本,可是我坚信这些样本最具有代表性.再者,为了把注意力始终集中于主要的思想,我引用定理或结果时,常常略去严格准确性所需要的次要条件.本书当然有它的局限性,但我相信它已给出整个历史的一种概貌.

本书的组织着重在居领导地位的数学课题,而不是数学家.数学的每一分支打上了它的奠基者的烙印,并且杰出的人物在确定数学的进程方面起决定性作用.但是,特意叙述的是他们的思想,传记完全是次要的.在这一点上,我遵循Pascal的意见:"当我们

援引作者时,我们是援引他们的证明,不是援引他们的姓名."

为使叙述连贯,特别是在1700年以后的时期,对于每一发展要等到它已经成熟、在数学中占重要地位并且产生影响的时候,我才进行论述.例如,我把非欧几里得几何放在19世纪的时期介绍,虽然企图寻找欧几里得平行公理的替代物或证明早在Euclid时代就开始了并且继续不断.当然,有许多问题会在不同的时期反复提及.

为了不使资料漫无边际,我忽略了几种文化,例如中国的①、日本的和玛雅的文化,因为他们的工作对于数学思想的主流没有重大的影响.还有一些数学中的发展,例如概率论和差分演算,它们今天变得重要,但在所考虑的时期中并未起重要作用,从而也只得到很少的注意.这最后的几十年的大发展使我不得不在本书中只收入那些20世纪的,并且在该时期变成有特殊意义的创造.我没有在20世纪时期继续讨论像常微分方程或变分法的扩展,因为这将会需要很专门的资料,而它们只对于这些领域的研究工作者有兴趣,并且将会大大增加本书的篇幅.此外还考虑到,对于许多较新的发展的重要性,目前还不能作客观的估价.数学的历史告诉我们,许多科目曾经激起过很大的热情,并且得到最好的数学家的注意,但终于湮没无闻.我们只需要回忆一下Cayley的名言:射影几何就是全部几何,以及Sylvester的断言:代数不变量的理论已经总结了数学中的全部精华.确实的,历史给出答案的有趣问题之一便是:数学中哪些东西还生存着而未被淘汰?历史作出它自己的而且更可靠的评价.

通过几十项重要发展的即使是基础的叙述,也不能指望读者知道所有这些发展的内容.因此,我在本书中论述某科目的历史

---

① 中国数学的历史的一个可喜的叙述,已见于Joseph Needham(李约瑟)的*Science and Civilization in China*,剑桥大学出版社,1959,卷3,第1~168页.

时，除去一些极初等的领域外，也说明科目的内容，把科目的历史叙述和内容说明融和起来．对各种数学创造，这些说明也许不能把它们完全讲清楚，但应能使读者对它们的本质得到某些概念．从而，在某种程度上，本书也可作为一本从历史角度来讲解的数学入门书．这无疑是使读者能获得理解和鉴赏的最好的写法之一．

我希望本书对于专业的数学家和未来的数学家都有帮助．专业的数学家今天不得不把这么多的时间和精力倾注到他的专题上去，使得他没有机会去熟悉他的学科的历史．而实际上，这历史背景是重要的．现在的根深扎在过去，而对于寻求理解“现在之所以成为现在这样子”的人们来说，过去的每一事件都不是无关的．再者，虽然数学大树已经伸张出成百的分支，它毕竟是一个整体，并且有它自己的重大问题和目标．如果一些分支专题对于数学的心脏无所贡献，它们就不会开花结果．我们的被分裂的学科就面临着这种危险；跟这种危险作斗争的最稳妥的办法，也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标得到一些知识，使得能把研究工作导入有成果的渠道．如同 Hilbert 所说的：“数学是一个有机体，它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合．”

对于学数学的学生来说，本书还会另有好处．通常一些课程所介绍的是一些似乎没有什么关系的数学片断．历史可以提供整个课程的概貌，不仅使课程的内容互相联系，而且使它们跟数学思想的主干也联系起来．

在一个基本方面，通常的一些数学课程也使人产生一种幻觉．它们给出一个系统的逻辑叙述，使人们有这种印象：数学家们几乎理所当然地从定理到定理，数学家能克服任何困难，并且这些课程完全经过锤炼，已成定局．学生被湮没在成串的定理中，特别是当他正开始学习这些课程的时候．

历史却形成对比．它教导我们，一个科目的发展是由汇集不同方面的成果点滴积累而成的．我们也知道，常常需要几十年，甚至

几百年的努力才能迈出有意义的几步.不但这些科目并未锤炼成无缝的天衣,就是那已经取得的成就,也常常只是一个开始,许多缺陷有待填补,或者真正重要的扩展还有待创造.

课本中的斟字酌句的叙述,未能表现出创造过程中的斗争、挫折,以及在建立一个可观的结构之前,数学家所经历的艰苦漫长的道路.学生一旦认识到这一点,他将不仅获得真知灼见,还将获得顽强地追究他所攻问题的勇气,并且不会因为他自己的工作并非完美无缺而感到颓丧.实在说,叙述数学家如何跌跤,如何在迷雾中摸索前进,并且如何零零碎碎地得到他们的成果,应能使搞研究工作的任一新手鼓起勇气.

为了使本书能包罗所涉及的这个大范围,我曾经试着选择最可靠的原始资料.对于微积分以前的时期,像 T. L. Heath 的《希腊数学史》(*A History of Greek Mathematics*)无可否认地是第二手的资料,可是我并未只依靠这样的一个来源.对于以后时期中的数学发展,通常都能直接查阅原论文;这些都幸而可以从期刊或杰出的数学家的全集中找到.对研究工作的大量报道和概述也帮助了我,其中一些实际上也就在全集里.对于所有的重要结果,我都试着给出出处.但并没有对于所有的断言都这么做;否则将会使引证泛滥,浪费篇幅,而这些篇幅还不如用来充实报道.

每章中的参考书目指出资料来源.如果读者有兴趣,他能从这些来源得到比本书中所说的更多的报道.这些书目中还包括许多不应而且没有作为来源的文献.把它们列在书目中,是因为它们供给额外的报道,或者表达的水平可以对一些读者更有帮助,或者它们比原始资料更易于找到.

在此,我想对我的同事 Martin Burrow, Bruce Chandler, Martin Davis, Donald Ludwig, Wilhelm Magnus, Carlos Moreno, Harold N. Shapiro 和 Marvin Tretkoff 表示谢意,感谢他们回答了大量的问题,阅读了本书的许多章节,提出了许多宝贵

的批评意见.我特别感激我的妻子 Helen,她以批评的眼光编辑我的手稿,广泛地核对人名、日期和出处,而且极仔细地阅读尚未分成页的校样并给它们编上页码. Eleanore M. Gross 夫人做了大量的打字工作,对我是一个极大的帮助.我想对牛津大学出版社的编辑部表示感激,感谢他们细心地印刷了本书.

Morris Kline
纽约 1972 年 5 月

目　录

目　录

目　录

目　　录

第 1 章

美索不达米亚的数学

逻辑可以等待,因为它是永恒的.

Oliver Heaviside

1. 数学是在哪里开始出现的

数学作为一门有组织的、独立的和理性的学科来说,在公元前 600 到前 300 年之间的古典希腊学者登场之前是不存在的. 但在更早期的一些古代文明社会中已产生了数学的开端和萌芽. 在这些原始文明社会中,有好些社会只能分辨一、二和许多,并没有更多的数学知识;有些则知道并且能够运算大的整数. 还有一些能够把数作为抽象概念来认识,并采用特殊的字来代表个别的数,引入数的记号,甚至采用十、二十或五作为基底来表示较大的数量. 也可以发现他们知道四则运算,不过仅限于小的数;并且具有分数的概念,不过只限于$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$之类,而且是用文字表达的. 此外,古人也认识到最简单的几何概念如直线、圆和角. 也许值得一提的是,角的概念想必是从观察到人的大小腿(股)或上下臂之间形成的角而产生的,因为在大多数语言中,角的边常是用股或臂的字来代表的. 例如在英文中,直角三角形的两边叫两臂.(在汉文中直角三角形的一条直角边也叫股. ——译者)在这些原始文明中,数学的应用只限于简单交易,田地面积的粗略计算,陶器上的几何图案,织在布上的花格和记时等方面.

在公元前 3000 年左右巴比伦和埃及的数学出现以前,人类在数学上没有取得更多的进展. 由于原始人早在公元前一万年就开

始定居在一个地区,建立家园,靠农牧业生活,可见最初等的数学迈出头几步是多么费时;更由于许许多多古代文明社会竟然没有什么数学可言,足见能培育出这门科学的文明是多么稀少.

2. 美索不达米亚的政治史

在上述两个古代文明社会中,巴比伦人是首先对数学主流作出贡献的. 由于我们对近东的特别是对巴比伦古代文明的知识,大部分来自近百年来考古研究的结果,所以这一知识是不完整的,而且会因以后的新发现而必须加以改正."巴比伦人"这个名词包括好些同时或先后居住在底格里斯(Tigris)和幼发拉底(Euphrates)两河之间及其流域上的一些民族. 这块地方古代叫美索不达米亚(Mesopotamia),是今日伊拉克的一部分. 这些民族居住在独立的城邑如巴比伦(Babylon),乌尔(Ur),尼普尔(Nippur),苏萨(Susa),阿塞尔(Aššur),乌鲁克(Uruk),拉格什(Lagash),启什(Kish)等. 公元前4000年左右,同闪族及印度-日耳曼族不同种族的苏美尔人(Sumerians)在美索不达米亚的部分地区定居了下来. 他们的首都是乌尔,他们所控制的地区叫苏美尔. 虽然他们的文化在公元前2250年达到最高点,但甚至在更早的时候,公元前2500年左右,苏美尔人就受阿卡得人(Akkadians)的政治控制. 这阿卡德人是闪族,他们的主要城市是阿卡得,当时的统治者是Sargon. 于是苏美尔文化就被阿卡得文化所淹没了. 在Hammurabi王(公元前1700年左右)统治期间,文化得到高度发展. 这位君王也以制定一部著名法典而垂名后世.

公元前1000年左右,民族迁徙和铁器的使用产生了进一步的变革. 其后到公元前8世纪,这地区为原住在底格里斯河上游的亚述人(Assyrians)所统治. 据今日所知,亚述人对文化没有什么新贡献. 一个世纪之后,亚述帝国为迦勒底人(Chaldeans)和米提亚

人(Medes)所割据,而米提亚人则与更往东的波斯人种族接近.美索不达米亚史上的这段时期(公元前 7 世纪)通常称为迦勒底时期.公元前 540 年左右,近东地区为居鲁士(Cyrus)统治下的波斯人所征服.波斯数学家如 Nabu-rimanni(公元前 490 年左右)和 Kidinu(公元前 480 年左右)开始为希腊人所知悉.

公元前 330 年,希腊军事领袖 Alexander the Great 征服了美索不达米亚.从公元前 330 年迄基督诞生这一段历史时期世称为塞琉西时期(Seleucid period),这是从公元前 323 年 Alexander 死后统治该地区的希腊将领 Seleucus 得名的.但其时希腊数学之花已盛开,所以自 Alexander 迄公元 7 世纪阿拉伯人到来这一段时期内,希腊人的影响遍及近东.巴比伦人所创造的数学大部分出现在塞琉西时期以前.

尽管美索不达米亚地区的统治者变动频繁,但数学的知识、传统和使用,从古代起至少一直到 Alexander 时代,始终连绵不断.

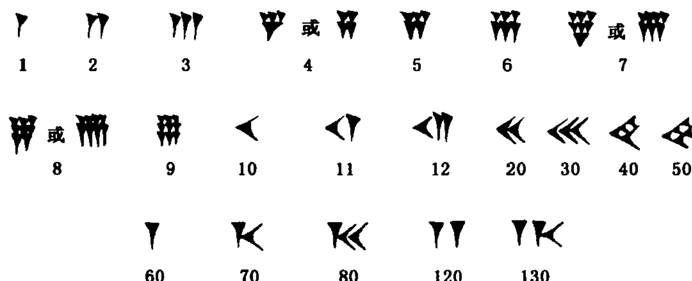
3. 数的记号

我们对巴比伦文明和数学的知识,无论是其古代的或较近期的,都得自其泥版的文书.这些泥版是在胶泥尚软时刻上字然后晒干的.因而那些未被毁坏的就能完整保存下来.这些泥版的制作大抵在两段时期,有些是公元前 2000 年左右的,而大部分是公元前 600 年到公元 300 年间的.较早的泥版对数学史来说重要性更大些.

较早期泥版上刻的是阿卡得文字,这是附加到较早的苏美尔文字上的一种文字.阿卡得语中的字含有一个或多个音节;每个音节则用一批基本上是线条形式的记号表示.阿卡得人用一种断面呈三角形的笔斜刻泥版,在版上按不同方向刻出楔形刻痕.因此这

种文字就叫楔形文字.楔形文字的英文字 cuneiform 就是从拉丁文 *cuneus* 而来的,而 *cuneus* 的原意就是“楔”或尖劈.

巴比伦文化中发展程度最高的算术是阿卡得人的算术.他们的整数写法如下:



巴比伦数系的突出之点是以 60 为基底并采用进位记号.

起初巴比伦人没有用什么记号来表示某一位上没有数,因此他们写的数是意义不定的.例如可以表示 80 或 3 620,这要取决于头一个记号是表示 60 还是 3 600.他们往往空出一些地方来表明哪一位上没有数,但这当然还会引起误解的.在塞琉西时期他们引入了一种特别的分开记号来表示哪一位上没有数.例如 $= 1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 4 = 3\,604$.但即使在这段时期也还未采用一个记号来表明最右端的一位上没有数,如同我们今日所记的 20 那样.在这两段时期,人们都得依靠文件的内容,才能定出整个数字的确切数值.

巴比伦人也用进位记法来表示分数.例如,作为分数来记时,可以表示 20/60,而作为分数来记,可表示 21/60 或 $20/60 + 1/60^2$.所以他们数字系统的混淆不清比上面所指出的还要厉害.

少数几个分数有其特定记号.例如我们可以看到 $= \frac{1}{2}$,

$=\frac{1}{3}$，$=\frac{2}{3}$. 这些特殊分数$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$，对巴比伦人来说，在量的度量意义上是作为“整体”看待的，而不是一的几分之几，虽则它们是从量的度量(同另一量相比有这相应关系)所得出的结果. 例如把一角钱与元对比时我们可以把1角钱写成$\frac{1}{10}$，但又把这$\frac{1}{10}$本身看成是一个单位.

实际上巴比伦人并不到处都用60进制. 有时他们把年数写成2*me*25，这里*me*代表百，用我们的记号这就是225. 他们也用*limu*代表1 000，这一般用在非数学的文件上，然而也出现在塞琉西时代的数学文件上. 有时10和60进位是混用的. 如2*me*1，10，这表示$2\times100+1\times60+10=270$. 他们以60，24，12，10，6，2混合进位制写出的数，表示日期、面积、重量、钱币，正如我们今日的钟点数用12进位，分、秒数用60进位，英寸数用12进位而普通计数则用10进位一样. 巴比伦人的数制也像今日所用的一样，是由许多历史条件和地区习惯形成的混合数制. 不过在数学和天文上，他们则是一贯用60进制的.

我们不能明确地知道基底60是怎么来的. 这也许是由于他们采用一系列重量单位制的结果. 假如我们有一个重量单位制，其各单位所含重量之比为

$$1/2,\ 1/3,\ 2/3,\ 1,\ 10.$$

又假如另外还有一种重量单位制，其单位不同但重量值之比相同，而政治或社会力量要求把这两种衡制合并起来.(例如我们有米和码.)如果较大的单位是较小单位的60倍，那么较大单位的1/2，1/3和2/3将是较小单位的整倍数. 因而为了使用方便就采纳较大的单位.

关于进位记数法的来源有两种可能的解释. 在较早的记数法中，他们用较大的𒁹代表1乘60而以较小的这种记号代表1.

在写法简化以后,的外形减小了但仍放在代表 60 的那个位置上,因而所在的位置就变成代表 60 的倍数记号. 另一种可能的解释来自币制. 他们可能把 1talent(古币单位)和 10mana 写作,这里表示 1talent,它等于 60mana. 正如我们所写 $1.20中的 1 代表 100 分那样. 于是记钱数的写法就采用到一般算术上来了.

4. 算术运算

在巴比伦记数制中,代表 1 和 10 的记号是基本记号. 从 1 到 59 这些数都是用几个或者更多一些基本记号结合而成的. 因此这种数的加减法就不过是加上或去掉这种记号就是了. 巴比伦人把数字合在一起用来表示相加,例如表示 16. 减法用记号表示. 如即 40－3. 在较晚期的天文文件中则出现 *tab* 这个字,它表示加法.

他们也做整数的乘法. 比方说,乘以 37,他们的做法是乘以 30,另外再乘以 7,然后把结果相加. 乘法记号是,读作 *a-rá*,意思是"去".

巴比伦人也做整数除以整数的运算. 由于除以一个整数 a 就是乘以倒数 $\frac{1}{a}$,这就牵涉到分数的运算. 巴比伦人把倒数化成 60 进制的"小数",而除了上面指出的几个分数以外,不用分数的特殊记号. 他们有数字表,可以查出 $1/a$ 形式的数(其中 $a=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$)怎样写成有限位的 60 进制"小数". 有些数表给出 1/7, 1/11, 1/13 等的近似值,因为这些分数所化成的 60 进制小数是无限循环的. 在一些老问题里所出现的分数中,如果分母里含有 2, 3 或 5 之外的因子,分子里也有这种因子,那就彼此约掉.

巴比伦人完全靠倒数表来作计算. 例如,他们的表中有:

igi 2 *gál* - *bi* 30	*igi* 8 *gál* - *bi* 7, 30
igi 3 *gál* - *bi* 20	*igi* 9 *gál* - *bi* 6, 40
igi 4 *gál* - *bi* 15	....
igi 6 *gál* - *bi* 10	*igi* 27 *gál* - *bi* 2, 13, 20

这些显然表示 $1/2 = 30/60$, $1/3 = 20/60$ 等等. 至于 *igi* 和 *gál* - *bi* 的确切意义则不知道. 60 进制分数(即小于 1 的数)用 60 乘幂 60, 60^2 等的逆方幂表示,不过分母并未明确写出. 这种写法仍为希腊人 Hipparchus 和 Ptolemy 所采用,并且一直沿用到 16 世纪文艺复兴时的欧洲,这之后才被以 10 为底的 10 进制小数所代替.

巴比伦人也有表示平方、平方根、立方和立方根的数表. 当方根是整数时,给出的是准确值. 对于其他的方根,相应的 60 进制数值只是近似的. 无理数当然是不能用有限位的 10 进制或 60 进制小数来表示的. 不过,没有事实可以证明巴比伦人懂得这一点. 他们很可能相信,只要用足够多的位数,就可用 60 进制小数准确表达无理数. 巴比伦人给出的$\sqrt{2}$的近似值是$\sqrt{2} = 1.414\,213\cdots$ 而不是 $1.414\,214\cdots$

在他们计算高 h 宽 w 的矩形对角线 d 时出现平方根. 有一个问题是求给定宽和高的一扇门的对角线. 给出的解答并未说明是怎么求得的,但相当于用了求对角线 d 的近似公式,即

$$d \approx h + \frac{w^2}{2h}.$$

这公式在 $h > w$ 时是 d 的很好的近似式,例如在他们的一个问题中有 $h > w$ 的情形,可以看出这解答是合理的,因为

$$d = \sqrt{h^2 + w^2} = h\sqrt{1 + \frac{w^2}{h^2}} = h\left(1 + \frac{w^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果把二项式展开并只取头两项,那就得出上面的近似式. 他们还给出了求平方根问题的其他近似解答,这些可能是用了巴比伦人数字表中的数而得出的.

5. 巴比伦的代数

从载有数字表的文件中，可以获得巴比伦人的数系和数字运算方面的许多知识. 还有一些文件与此不同，它们是处理代数与几何问题的. 早期巴比伦代数的一个基本问题，是求出一个数，使它与它的倒数之和等于已给数. 用现代的记号来说，即巴比伦人要求出这样的 x 与 $\bar{x}$，使

$$x\bar{x}=1,\ x+\bar{x}=b.$$

从这两个方程得出 x 的一个二次方程，即 $x^2-bx+1=0$. 他们作出 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$；再作出 $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$，然后得出解答：

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}\quad 及 \quad \frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}.$$

这就是说巴比伦人实际上知道二次方程根的公式. 有些别的问题，如给定两数之和与两数之积而求出这两数，也可化为上述问题. 由于巴比伦人不用负数，故二次方程的负根是略而不提的. 虽然他们只给出具体例题，但好些问题是打算说明二次方程的一般解法的，他们用变量置换把更为复杂的代数问题化成较简单的问题.

巴比伦人能解出含五个未知量的五个方程这类个别的问题. 在校正天文观测数据而引起的一个问题中，包括含十个未知量的十个（大多数是线性的）方程. 他们用一种特殊的方法结合各个方程，最后算出了所有未知量.

他们的代数方程是用语文叙述并用语文来解出的. 他们常用 *uś*（长），*sag*（宽）和 *aša*（面积）这些字来代表未知量，并不一定因为所求未知量确实是这些几何量，而可能是由于许多代数问题来自几何方面，因而用几何术语成了标准做法. 我们举下面一个例子，来说明他们是怎样用这些术语表示未知量和陈述问题的："我把长乘宽得面积 10. 我把长自乘得面积，我把长大于宽的量自乘，

再把这个结果乘以 9. 这个面积等于长自乘所得的面积. 问长和宽是多少?”很明显,这里的文字**长**、**宽**和**面积**,只不过是分别代表两个未知量及其乘积的方便说法①.

这问题现今的写法是

$$xy = 10,$$
$$9(x-y)^2 = x^2.$$

附带说明一下,求解时得出 x 的一个四次方程,但其中缺少 x 和 x^3 项,因而可作为 x^2 的二次方程来解出.

他们也搞需要求三次根的问题. 其中一个问题若用现今的记号来写是这样的:

$$12x = z,\ y = x,\ xyz = V,$$

这里 V 是个给定的体积. 求这里的 x 时必须算立方根. 巴比伦人用上述的立方根数字表来算这个根. 他们也计算复利问题,其中需要求出一个未知的指数函数值.

巴比伦人有时也用记号表示未知量,但这种记法只是偶尔用之. 在有些问题里,他们用两个苏美尔文字(字尾变形有点受阿卡得文的影响)表示两个互为倒数的未知量. 又因这两个文字在古苏美尔文里是用象形记号的,而这两个象形记号当时已不流行,所以结果就等于用两个特殊记号来表示未知量. 他们反复运用这些记号,因而虽不懂得这两个记号在阿卡得文里的读法,我们也可以认出它们来.

他们解代数问题时只指出求解的步骤. 例如,10 平方得 100;从 1 000 减去 100 得 900;等等. 由于他们并不说明每步做法的理由,所以只能推想他们是怎么知道这种做法的.

他们在具体问题里算出了算术数列和几何数列之和;对于后者,用我们的记号是:

---

① 在 van der Waerden 一书 pp. 65～73 中可找到许多代数问题的例子. 请参看本章末的文献.

$$1+2+4+\cdots+2^9=2^9+(2^9-1)=2^{10}-1.$$

他们也给出了从1到10的整数平方和,好像是应用了下列公式似的:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\left(1\times\frac{1}{3}+n\times\frac{2}{3}\right)(1+2+3+\cdots n).$$

在处理这方面的特殊问题时,他们没有给出推导.

巴比伦代数中也含有一些数论.他们求出了好几批 Pythagoras 三元数组,并且很可能是用正确方法得出的;即,若 $x=p^2-q^2$, $y=2pq$, $z=p^2+q^2$,则 $x^2+y^2=z^2$.他们还求出了 $x^2+y^2=2z^2$ 的整数解.

6. 巴比伦的几何

几何在巴比伦人的心目中是不重要的.几何并不是他们一门独立的学科.关于划分土地或计算某项工程所需砖数之类的问题很易于化为代数问题.面积和体积的一些算法是按固定法则或公式给出的.不过,那些说明几何问题的图画得很粗,所用的公式也可能不正确.例如,在巴比伦人计算面积的问题里,我们分不清其中的三角形是否为直角三角形,也不知其四边形是否为正方形,因而不知其对有关图形所用的公式是否正确.不过,Pythagoras 定理中的关系,三角形的相似以及相似三角形对应边成比例的关系他们是知道的,他们似用 $A=\frac{c^2}{12}$(其中 c 表圆周长)这个法则得出圆面积.在这个法则里,他们等于用3代替了 π.不过,在他们给出正六边形及其外接圆周长之比时,其中的结果说明他们用 $3\frac{1}{8}$ 作为 π 值.在计算一些特定物理问题时,他们算出了一些体积,有些算对了,有些算得不对.

除了计算一个给定的等腰三角形的外接圆半径之类这一些特

殊的实际知识外,巴比伦人的几何的内容只是收集了一些计算简单平面图形面积和简单立体体积的法则,而平面图形中则包括正多边形. 他们并不专为几何而研究几何,总是在解决实际问题时才去搞几何的.

7. 巴比伦人对于数学的使用

尽管巴比伦人的数学知识有限,但数学在他们生活的许多方面都起作用. 巴比伦位于古代贸易通道上,他们商业活动范围很广. 巴比伦人用他们的算术和简单代数知识来表示长度和重量,来兑换钱币和交换商品,来计算单利和复利,来计算税额,来给农民、教会和国家之间分配收获的粮食. 划分土地和遗产的问题引出代数问题. 牵涉到数学的大多数楔形文字著作(除了数字表和解题的文件之外)都是关于经济问题的. 在他们的早期历史中,经济对算术发展的影响是毋庸置疑的.

挖运河,修堤坝以及搞其他水利工程都需要用到计算. 关于砖的需用量问题就引起许多数字计算和几何问题. 他们需要计算谷仓和房屋的容积以及田地的面积. 巴比伦数学和实际问题之间的紧密联系可从下例看出:要挖一条运河,其横断面为给定的梯形,其长、阔、深是已知的. 每人每天的挖土量是已知的,挖土人数和他们的工作日数之和也是已知的. 问题是要算出人数和工作日数.

由于从希腊时代起数学和天文学之间的关系就非常重要,所以我们这里要指出巴比伦人在天文学方面有哪些知识并做了些什么工作. 苏美尔人的天文知识如何我们一无所知,而阿卡得时代的天文知识是粗糙的并缺乏数量关系;在出现值得一提的天文学之前,数学先有了发展. 在亚述时代(公元前 700 年左右)的天文学中开始有了对现象的数学描述,并有系统地记录观测数据. 在公元

前的最末三个世纪里,数学的应用多了起来,特别是用于计算月球和行星的运动.天文学方面的文件大多产生在这个塞琉西时期.这种文件有两类,一类是程式文书,一类是天文历书,即给出天体在不同时期所处位置的书表.程式文书是说明怎样计算天文历书的.

从他们对月日观察数据所作的算术,可以看出巴比伦人计算了相继数据之间的一次和二次差分,观察到了一次或二次差分等于常数时的情况,并对数据作了外插与内插.他们算法的程式等于利用了这一事实:所观测的数据可用多项式函数来拟合,这样使他们能预测各行星在每一天的位置.他们颇为准确地知道一些行星的运动周期,并利用亏蚀现象来作为计算的基础.但在巴比伦人的天文学里,并没有对行星运动或月球运动给出几何概型.

塞琉西时期的巴比伦人已对太阳和月球的运动记录了很多的数据,其中给出变动的速度和位置.这些数据表里还列有(或者易于从中推算出)太阳和月球的特定位置和亏蚀时间.他们的天文学家能把新月和亏蚀出现的时间算准到几分钟之内.从他们的数据说明他们知道太阳年或回归年(季节年)等于 $12+22/60+8/60^2$ 个月(从新月出现到下次新月出现为一月),并把恒星年(太阳相对于恒星的位置复原所需之时)准确算到 $4\frac{1}{2}$ 分.

黄道带里相应于十二宫的星座是他们早就知道的,但黄道带的名称是在公元前419年的一项文件中才首次出现的.黄道带每宫占 $30°$.天上行星的位置以恒星为依据来确定,也用其在黄道带中的位置来确定.

天文学有许多用处.其一是要用它来算出历书,这是由太阳、月球和恒星的位置推定的.年、月、日这些天文上的数量要准确算出,才能知道播种日和宗教节日.部分地由于日历同宗教节日和宗教仪式的关系,部分由于他们认为天体都是神,所以在巴比伦由祭

司掌管日历.

他们的日历是阴历.每月是在月球全黑(我们今日所谓的新月)后首次出现蛾眉月时开始的.日子从首次出现蛾眉月的那天晚上开始算起,并把从日落到第二次的日落之间的时间作为一天.阴历是难办的,因为虽然使一个月有整数的日子是件方便的事,但根据太阳月球接连有同样相对位置(即从新月到新月)之间相隔日数来算的阴历月份,有的是 29 天,有的是 30 天.这就出现该定哪些月为 29 天和哪些月为 30 天的问题.更重要的一个问题是怎样使阴历符合季节.这问题的解答很复杂,因它要取决于月球和太阳的运行路径和它们的速度.阴历里还插进了额外的月份,使得在 19 年里这样插进了 7 个月之后,才能让阴历约摸符合太阳年.这样 235 个阴历月份等于 19 个太阳年.他们逐年算出了夏至的时间,然后取相等的分段,定出冬至和春分、秋分的时间.这种历法为犹太人、希腊人所沿用,罗马人起初也沿用,直到公元前 45 年他们采用 Julian 历法时为止.

把圆分为 360 度是巴比伦天文学家在公元前最末一个世纪里首创的.这跟他们早先用 60 做基底一事不相干;不过 60 却用来作为把度分成分和把分分成秒的底数.天文学家 Ptolemy(公元 2 世纪)也沿用巴比伦人的这种分法.

与天文学密切相关的是占星术.巴比伦人也像其他许多古代文明社会中的人一样,认为天体都是神,因而认为它们能影响甚至主宰人间的事.如果我们想想太阳的重要性:它给我们以光和热,对植物生长的影响,日蚀时所引起的恐惧,以及动物交配的季节性现象,那就很可以理解,为什么古人相信天体甚至能影响人的一生中的日常事务.

古代社会中伪科学性的预卜并非都用天文.他们认为数本身有神秘特性并可用之于预卜未来.我们可在但以理书及新旧约先知的著述中看出巴比伦人预卜未来的做法,希伯来人的"科学"测

字术(*gematria*)(希伯来传统神秘主义的一种形式)就是根据这一事实而来的,即因希伯来人用字母来表示数,所以他们认为由字母组成的每个字都具有一个数值.如果两个字的字母值之和相同,那就表明这两个字所代表的两种概念、两个人或两件事之间有重要的联系.在以赛亚的预言里(21:8),狮子宣告巴比伦城的沦落,因为希伯来文中狮子这个字和巴比伦这个字里,其字母所代表的数字之和是一样的.

8. 对巴比伦数学的评价

巴比伦人用特殊的名称和记号来表未知量,采用了少数几个运算记号,解出了含有一个或较多未知量的几种形式的方程,特别是解出了二次方程,这些都是代数的开端.他们对整数和分数搞出了有系统的写法,这使他们能把算术推进到相当高的程度,并用之于解决许多实际问题特别是天文上的问题.他们在解特殊型高次方程方面具有一些代数技能,但总的说来,他们的算术和代数是很初等的.虽然他们算的都是具体的数和具体问题,但他们对抽象数学也有部分掌握,因为他们认识到某些运算过程对某些类方程具有典型性.

问题是巴比伦人在采用数学证明这方面做到什么程度.他们确曾用正确的有系统的步骤,解出了含未知量的颇为复杂的方程.但他们只用语言说出该做的步骤,没有说出做那一步的理由根据什么.几乎可以肯定地说,他们的算术和代数步骤以及几何法则都是根据物理事实、边试边改以及从直观认识得出的结果.如果有些方法行之有效,巴比伦人便认为这就有充分理由继续加以采用.关于证明的想法,依据于决定取舍原则的逻辑结构的思想,以及问题的解在什么条件下存在这些方面的考虑,在巴比伦人的数学里都是找不到的.

参考书目

Bell, E. T.: *The Development of Mathematics*, 2nd ed., McGraw-Hill, Chaps. 1～2.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chap. 3.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1894, Vol. 1, Chap. 1.

Chiera, E.: *They Wrote on Clay*, Chicago University Press, 1938.

Childe, V. Gordon: *Man Makes Himself*, New American Library, 1951, Chaps. 6～8.

Dantzig, Tobias: *Number: The Language of Science*, 4th ed., Macmillan, 1954, Chaps. 1～2.

Karpinski, Louis C.: *The History of Arithmetic*, Rand McNally, 1925.

Menninger, K.: *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1969.

Neugebauer, Otto: *The Exact Sciences in Antiquity*, Princeton University Press, 1952, Chaps. 1～3 and 5.

Neugebauer, Otto: *Vorgriechische Mathematik*, Julius Springer, 1934, Chaps. 1～3 and 5.

Sarton, George: *A History of Science*, Harvard University Press, 1952, Vol. 1, Chap. 3.

Sarton, George: *The Study of the History of Mathematics and the History of Science*, Dover (reprint), 1954.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, Chap. 1.

Struik, Dirk J.: *A Concise History of Mathematics*, 3rd ed., Dover, 1967, Chaps. 1～2.

van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, P. Noordhoff, 1954, Chaps. 2～3.

第 2 章

埃及的数学

所有科学,包括逻辑和数学在内,都是有关时代的函数——
所有科学连同它的理想和成就统统都是如此.

E. H. Moore

1. 背　景

当美索不达米亚地区的统治民族迭经更替从而接受新的文化影响之际,埃及的文明却在不受外来势力的影响下独自发展. 埃及文明源自何处至今未知,但它肯定在公元前 4000 年之前就已存在. 正如希腊史学家 Herodotus 所说,埃及是受尼罗河恩施的. 这条河把南方的水一年一度地泛滥到沿河两岸之后留下沃土. 他们的大多数人自古以来就一直靠耕种这片沃土谋生. 这国家的其余部分是荒漠.

在今日埃及这块地方,古代有两个王国,一个在北方,一个在南方. 在公元前 3500 年到前 3000 年之际,他们的一个统治者 Mena(或 Menes)统一了南、北(或上、下)埃及. 嗣后埃及历史的主要时期就按统治的朝代来命名,而以 Menes 为第一朝代的创建人. 埃及文化在第三朝代(公元前 2500 年左右)到达最高点,当时的统治者建立了至今闻名的金字塔. 一直到公元前 332 年 Alexander the Great 征服它以前,埃及文明按着它自己的道路延续着. 此后一直到公元 600 年左右,埃及的历史和数学就附属于希腊文明了. 因此,除了受 Hyksos 人的一次小小入侵(公元前 1700—前 1600)和跟巴比伦文明的轻微接触(这从尼罗河谷发现公元前 1500 年左右

的 Tell al-Amarna 楔形文字泥版 ·事推知)之外,埃及文明是其本地居民的创造物.

古埃及人造出了他们自己的几套文字.其中有一套是象形文字,每个文字记号是某件东西的图形.直到基督降生的年代,埃及象形文字还用在纪念碑文和器皿上.从公元前 2500 年左右起,埃及人用一种所谓僧侣文(hieratic writing)来作日常书写.这套文字所用的人为记号起初只是象形字的简缩.僧侣文是拼音的,每个音节由一个会意文代表,而整个文字则由一些会意文组成.整个文字的意义并不受个别会意文的限制.

书写的方式是用墨水写在草片(papyrus)上,这是把一种木髓紧压后切成的薄片.因草片会干裂成粉末,所以除了铭刻在石头上的象形文字外,古埃及的文件很少保存下来.

现存的数学文件主要是两批草片文书: ·批是保存在莫斯科的,叫莫斯科草片文书;一批是 1858 年英国人 Henry Rhind 发现的,现存英国博物馆,叫 Rhind 草片文书. Rhind 草片文书又叫 Ahmes 草片文书,因其作者叫 Ahmes.他在这文书的开首写了如下这句话:"获知 ·切奥秘的指南".这两批草片文书都是公元前 1700 年左右的东西.此外还存有写于这 ·时代及其后的一些草片文书的片断.数学草片文书的作者是在古埃及政府和教会行政机构中工作的书记.

草片文书里含有数学问题和解答——在 Rhind 草片文书里有 85 题,在莫斯科草片文书里有 25 题.这些想必是书记们在工作中所碰到的问题,而人们则指望他们求出解答.这两大批草片文书中的问题很可能是作为一些典型问题和典型解法的示范例子而记下来的.虽然这些草片文书的撰写年代在公元前 1700 年左右,但其中所含的数学是埃及人早在公元前 3500 年就已经知道的,而从那时起直到希腊人征服他们以前,他们很少增加新的知识.

2. 算　　术

埃及人用的象形数字记号是：| 表 1，∩ 表 10，𓍢及𓍢表 100，𓆼表 1 000，𓂭表 10 000，以及表示更大单位的其他记号．介乎其间的各数则由这些记号组合而成．书写的方式是从右往左的，故||||∩∩表 24．这套数字写法是以 10 为底的，但不是进位制的．

埃及僧侣文的整数写法可用下面几个记号作为例子：

1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

他们的算术主要用叠加法．做通常加减法时，他们只是靠添上或划掉一些记号，以求得最后结果．乘除法也是化成叠加步骤来做的．比如说，计算 12 乘 12 时，埃及人的做法如下：

1	12
2	24
4	48
8	96

每行是由上一行取二倍得出的．有了 $4 \cdot 12 = 48$ 和 $8 \cdot 12 = 96$，把 48 和 96 相加，这就得到 $12 \cdot 12$．这种算法当然同分别乘以 10 和乘以 2 然后相加的算法很不一样．乘以 10 的算法他们也做，这时他们把表示 1 的记号改成表示 10 的记号，把表示 10 的记号改成表示 100 的记号．

埃及人做一个整数除以另一整数的算法也是怪有意思的．例如，他们做 19 除以 8 的算法如下：

1　　　　8

2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

于是得解答为 2 + 1/4 + 1/8. 求解的思想无非是取 8 的倍数和部分数,使之合并成 19.

埃及数系中分数的记法比我们今日的复杂得多. 记号⬭读作 *ro*,原表示$\frac{1}{320}$蒲式耳(谷物容量,一蒲式耳合八加仑——译者),埃及人用来表示一个分数. 在僧侣文中把这卵形改成一个点. 这卵形⬭或点通常记在整数上,表明它是个分数. 例如在象形文字写法中,

$$\overset{\frown}{\text{IIIII}} = \frac{1}{5},\quad \overset{\frown}{\cap} = \frac{1}{10},\quad \overset{\frown}{\cap\,\text{IIIII}} = \frac{1}{15}.$$

少数几个分数用特殊记号表示. 如象形记号⊂⊃表示 1/2;⊓表示 2/3;×表示$\frac{1}{4}$.

除了几个特殊分数之外,所有分数都拆成一些所谓单位分数. 例如,Ahmes 把 2/5 写成 1/3 + 1/15. 加法记号是没有的,但从上下文可以看出加的意思. Rhind 草片文书里有个数表,把分子为 2 而分母为 5 到 101 的奇数的这类分数,表达成分子为 1 的分数之和. 利用这表,可把 7/29 这样一个分数(这在 Ahmes 看来是整数 7 除以整数 29)表达成单位分数之和. 由于 7 = 2 + 2 + 2 + 1,他把每个 2/29 表达成分子为 1 的分数之和. 把这些结果加起来,并作进一步的变换,最后得到一些单位分数之和,其中每个分数的分母各不相同. 所得 7/29 的最后这种表达式是

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{232}.$$

这里凑巧 7/29 还可表达成 1/5 + 1/29 + 1/145, 不过用了 Ahmes

的 $2/n$ 数表会得出头一个结果，所以他就用头一个表达式．把分数 a/b 表达成单位分数之和是系统地按照老办法做的．埃及人利用单位分数就可对分数进行四则运算．埃及人之所以未能把算术和代数发展到高的水平，其分数运算之繁复也是原因之一．

埃及算术里也如巴比伦一样未能认识到无理数的性质．代数问题中出现的简单平方根，他们是能够用整数和分数来表达的．

3. 代数与几何

草片文书中有求一个未知量问题的解法，这个问题大体上相当于今日的一元一次方程．不过用的方法纯粹是算术的，并且在埃及人心目中这并不成其为一门独特的学科——解方程．问题是用文字叙述的，仅告诉得出解的步骤，不说明为什么用这些方法，也不说明为什么这些方法能行．例如 Ahmes 草片文书中的第 31 题，直译出来是："一个数量，它的 2/3，它的 1/2，它的 1/7，它的全部，加起来总共是 33"．用我们的记号就是

$$\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} + x = 33.$$

这个题只要用埃及人的简单算术就可解出．

草片文书中的第 63 题如下："把 700 块面包分发给四人，第一人 2/3，第二人 1/2，第三人 1/3，第四人 1/4"．这对我们来说就是

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 700.$$

Ahmes 给出的解法是这样的："把 $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$ 加起来，得 $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$．以 $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ 除 1，得 $\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$．现求 700 的 $\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$．这是 400．"

在解有些问题时，Ahmes 用了"错位法则". 例如，为定出算术数列中的五个数，需使它们的和等于 100，Ahmes 先取公差 d 为最小那个数的 $5\frac{1}{2}$ 倍. 然后他把其中最小的数取为 1，于是得数列 1，$6\frac{1}{2}$，12，$17\frac{1}{2}$，23. 但这些数相加得 60 而所需的和应是 100. 于是他把各项乘以 5/3.

草片文书中只涉及到最简单的二次方程如 $ax^2 = b$. 即使在出现两个未知量时，方程的类型也是

$$x^2 + y^2 = 100,\ y = \frac{3}{4}x,$$

所以消去 y 后，x 的方程仍是前述类型. 草片文书中也可看到牵涉算术数列和几何数列的具体问题. 从所有这些问题及其解法中，我们不难推知他们所用的一般法则.

在埃及人有限的代数里实际上没有成套的记号. 在 Ahmes 草片文书中，加法和减法用一个人走近和走开(来和去)的腿形和来表示，记号Γ用来表示平方根.

埃及人的几何是怎样的呢？他们并不把算术和几何分开. 草片文书中都有这两方面的问题. 埃及人也像巴比伦人那样，把几何看作实用工具. 他们只是把算术和代数用来解有关面积、体积及其他几何性质的问题. 据希腊历史学家 Herodotus 说，埃及是因为尼罗河每年涨水后需要重定农民土地的边界才产生几何的. 但巴比伦人并无这种需要却也在几何上作出同样多的贡献. 埃及人有计算矩形、三角形和梯形面积的死方法. 就计算三角形面积而论，他们虽用一数乘以另一数的一半来做，但我们不能肯定这方法是否正确，因从题中所用的字语不能肯定相乘的两个长度代表底和高还是只代表两条边. 又由于图是画得那么不清，使人不能确定究竟所求的是哪块面积或哪块体积. 他们对圆面积的计算好得惊人，用的公式是 $A = (8d/9)^2$，其中 d 是直径. 这就等于取 π 为 3.160 5.

略举一例便可说明埃及人的面积公式多么“准确”. 在埃德富(Edfu)一个庙宇的墙上刻有一个捐献给庙宇的田地表. 这些田地一般有四边,今将其记之为 a, b, c, d,其中 a 与 b 以及 c 与 d 是两批相对的边. 铭文给出的这些田地的面积是 $\frac{(a+b)}{2}\cdot\frac{(c+d)}{2}$. 但有些田地是三角形的,这时他们认为 d 就没有了,面积的算法变成 $\frac{(a+b)}{2}\cdot\frac{c}{2}$. 即使对四边形来说,这种算法也只是粗略的近似.

埃及人也有算立方体、箱体、柱体和其他图形体积的法则. 有些法则是对的,有些只是近似. 草片文书中给出的一个截锥水钟的体积,用我们的记号是

$$V=\frac{h}{12}\left(\frac{3}{2}(D+d)\right)^2,$$

这里 h 是高, $(D+d)/2$ 是平均周长. 这个公式相当于取 π 为 3.

埃及几何里最了不起的一个法则是计算截棱锥体的体积公式. 锥体的底是正方形,这公式用现代的记号是

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2),$$

其中 h 是高,a 和 b 是上下底的边. 这公式之所以了不起,乃是因为它正确,而且表达的形式是对称的(当然不是用我们的记法). 它只是用具体数字写出的. 不过我们并不知道棱锥体的底是否确为正方形,因为草片文书中的图作得很马虎.

我们也不知道埃及人是否认识到 Pythagoras 定理. 我们知道他们有拉绳人(测量员),但所传他们在绳上打结,把全长分成长度各为 3 比 4 比 5 的三段,然后用来形成直角三角形之说,则从未在任何文件上得到证实.

他们的法则并不用记号表示. 埃及人是用语文来表述数学问题的;他们的解题步骤基本上同我们在套公式进行计算时的做法一样. 例如,对于求截棱锥体体积这样一个几何问题,如果大体上

逐字逐句译出来便是:"若有人告诉你说:有截棱锥,高为6,底为4,顶为2.你就要取这4的平方,得结果为16.你要把它加倍,得结果8.你要取2的平方,得4.你要把16、8和4加起来,得28.你要取6的三分之一,得2.你要取28的两倍,得56.你看,它等于56.你可以知道它是对的."

埃及人究竟懂不懂证明,或者懂不懂他们的算法和公式需要有根据?有一种说法认为Ahmes草片文书是按教科书格式写给当时学生学习用的,因此虽然Ahmes在解一些类型的方程时没有叙述一般法则,但很可能他懂得这些法则,但想让学生自己去体会出这些法则,或者想让教师教给他们.按照这种观点,Ahmes草片文书是颇为高深的算术课本.别的一些人又说这是一个学生的笔记本.不管怎样,几乎可以肯定地说,草片文书中所载的问题是当时的商业人员和行政管理人员应该解决的那类问题,而求解的方法则是从工作经验中得出的实用法则.谁也不会相信埃及人有一种依据可靠公理形成的演绎结构,来证明他们所用的法则是正确的.

4. 埃及人对数学的使用

埃及人用数学来管理国家和教会的事务,确定付给劳役者的报酬,求谷仓的容积和田地的面积,征收按土地面积估出的地税,从一种度量单位换算成另一种度量单位,计算修造房屋和防御工程所需的砖数.草片文书中还有一些问题,计算酿造一定量啤酒所需的谷物数量,以及用一种出酒率与他种谷物之比为已知的谷物酿出与他种谷物同样的酒所需的数量.

同巴比伦人一样,埃及数学的一个主要的用途是天文,这是从第一朝代就开始做的.尼罗河是埃及人的生命源泉,他们靠耕种尼罗河每年泛滥的淤土所覆盖的田地谋生.但他们也得准备好应付

洪水的危害，他们得把家、农具和耕畜暂时迁至别处，并做好安排，使洪水过后能立即播种. 因此就得预报洪水到来的日期，这就要知道洪水到来前的天文现象.

有了天文学才可能有历法. 除了在商业上的需要之外，预报宗教节日也需要历法. 他们认为，为要求得天神保佑，节日必须按时庆贺，同巴比伦人一样，历法是由教士来管的.

埃及人靠观察天狼星算得太阳年的日子数. 这颗星在夏季的某一天可在太阳快出来的时候在地平线上看到. 在其后一些日子里，在太阳升起以前可以在较长的时间里看到它. 把在太阳快升起时能看到它的那第一天，叫做天狼星的先阳升日(heliacal rising of Sirius)，两个先阳升日之间大约相隔 $365\frac{1}{4}$ 天；因此埃及人(一般认为是在公元前 4241 年)采用以 365 日为一年的民历. 他们之所以集中观察天狼星，无疑是因为尼罗河水在那天开始上涨，而那天也就被选定为一年的第一天.

他们把 365 天的一年分为 12 个月，每月 30 天，年末外加 5 天. 因埃及人没有在每四年内加插一天，他们的民历就要慢慢落后于季节. 这种民历需要经 1 460 年之后才能又符合季节；这段时期叫索特周期(Sothic cycle)，这是因为埃及人称天狼星为索特. 但埃及人是否知道索特周期是有疑问的. 他们的历法在公元前 45 年为 Julius Caesar 所采用，但他采纳亚历山大城希腊人 Sosigenes 的建议，把一年改为 $365\frac{1}{4}$ 天. 埃及人虽在定出一年的天数和历法上作出了有价值的贡献，但这并不是由于他们的天文学高明，实际上他们的天文学是粗浅的，并且远不如巴比伦人的天文学.

埃及人把他们的天文知识和几何知识结合起来用于建造他们的神庙，使一年里某几天的阳光能以特定方式照射到庙宇里. 例如他们把某些庙宇修得这样，使一年中白昼最长的那天，阳光能直接进入庙宇，照亮祭坛上的神像. 巴比伦人和希腊人，也在某种程度

上按这种方式确定庙宇的方向和位置. 金字塔的方位也朝向天上特定的方向,而斯芬克斯(即狮面人身像——译者)的面则是朝东的. 虽则这些工程的修建细节对我们无关宏旨,但值得指出的是,金字塔代表埃及人对几何的另一种用法. 金字塔是帝王的陵墓;因埃及人相信灵魂不灭,所以他们相信合适修造陵墓对死者的阴间生活大有影响. 事实上,每个金字塔里都专设一间房,供帝王和王后死后居住. 他们竭力使金字塔的底有正确的形状;底和高的尺寸之比也是意义非常重大的. 但我们不应把有关工程的复杂性或想法的深奥性过分强调. 埃及人的数学是简单粗浅的,并不像过去经常有人宣称的那样包含着深刻的原理.

5. 总　　结

我们来回顾一下希腊人出场之前的数学状况. 在巴比伦和埃及文明中,我们发现有整数和分数的算术,包括进位制记数法,有初步的代数和几何上的一些经验公式. 几乎还没有成套的记号,几乎没有有意识的抽象思维,没有搞出一般的方法论,没有证明甚或直观推理的想法,使人能深信他们所作的运算步骤或所用的公式是正确的. 实际上,他们没有想到需要任何理论科学.

除了巴比伦人偶然得出的少数结果外,在这两个文明里,数学并不成其为独立的一门学科,也未曾为数学本身进行过研究. 它只是一种工具,形式上是些无联系的简单法则,用于解决人们日常生活中所碰到的问题. 他们肯定没有在数学上做出什么能改变或影响生活方式的大事. 虽然巴比伦数学比埃及数学高明些,但我们对两者至多只能说他们表现出一些活力,虽还谈不上什么严密性;他们的毅力超过他们的才力.

凡作评价总得有个标准. 把这两种文明同其后的希腊文明相比可能并不公允,然而却很自然. 按这标准说,埃及人和巴比伦人

好比粗陋的木匠,而希腊人则是大建筑师.我们确实看到有些书上把巴比伦人和埃及人的成就说得更好些甚至加以赞扬.不过那是某些专家们所做的事情,他们也许无意中对其兴趣所专注的领域作了过分热情的传颂.

参考书目

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chap. 2.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1894, Vol. 1, Chap. 3.

Chace, A. B., *et al.*, eds.: *The Rhind Mathematical Papyrus*, 2 vols., Mathematical Association of America, 1927—1929.

Childe, V. Gordon: *Man Makes Himself*, New American Library, 1951.

Karpinski, Louis C.: *The History of Arithmetic*, Rand McNally, 1925.

Neugebauer, O.: *The Exact Sciences in Antiquity*, Princeton University Press, 1952, Chap. 4.

Neugebauer, O.: *Vorgriechische Mathematik*, Julius Springer, 1934.

Sarton, George: *A History of Science*, Harvard University Press, 1952, Vol. 1, Chap. 2.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, Chap. 2; Vol. 2, Chaps. 2 and 4.

van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, P. Noordhoff, 1954, Chap. 1.

第 3 章

古典希腊数学的产生

> 所以说数学就是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知.
>
> Proclus

1. 背　景

希腊人在文明史上首屈一指，在数学史上至高无上. 他们虽也取用了周围其他文明世界的一些东西，但希腊人创造了他们自己的文明和文化，这是一切文明中最宏伟的，是对现代西方文化的发展影响最大的，是对今日数学的奠基有决定作用的. 文明史上的重大问题之一，是探讨何以古代希腊人有这样的才气和创造性.

虽然我们对希腊早期历史的知识，会因考古研究工作的进展而必须加以纠正和补充，但是根据 Homer 的《伊里亚特》(*Iliad*) 和《奥德赛》(*Odyssey*)，根据对古代语文和古籍的阐释以及古物考察的结果，我们有理由相信希腊文明可追溯到公元前 2800 年. 古代希腊人定居在小亚细亚(这可能是他们的老家)，欧洲大陆上如今希腊所在地区，以及意大利南部，西西里(Sicily)，克里特(Crete)，罗得斯(Rhodes)，得洛斯(Delos)和北非. 在公元前 775 年左右，希腊人把他们用过的各种象形文字书写系统改换成腓尼基人的拼音字母(这些也为希伯来人所采用). 采用了拼音字母之后，希腊人变得更通文达理，更有能力来记载他们的历史和思想了.

希腊人定居创业之后，便游访埃及、巴比伦，并与之贸易往来.

古典希腊著述中有许多地方提及埃及人的学问,他们错误地认为埃及人是科学(特别是测量、天文学和算术)的创始者.许多希腊人到埃及去游历和学习.又有一些人则去巴比伦.到那里去学习数学和科学.

小亚细亚爱奥尼亚(Ionia)地区的一个城市米利都(Miletus)是希腊哲学、数学和科学的诞生地.那里几乎肯定受到了埃及和巴比伦的影响.米利都是濒临地中海的一个富庶商业大城.来自希腊本土、腓尼基和埃及的船舶都驶进它的港口;往东有商队大道与巴比伦相通.公元前540年左右,爱奥尼亚地区落入波斯人之手,但仍允许米利都保持一些独立性.在公元前494年爱奥尼亚人反抗波斯的起义被镇压后,爱奥尼亚的重要地位就此衰落.当希腊人在公元前479年击败波斯后,爱奥尼亚又成为希腊领土,但此后文化活动地区便移到希腊本土,而雅典则为其活动中心.

古代希腊文明虽然一直延续到公元600年,但从数学史的观点讲,需要把它分为两段时期:一段是从公元前600年到公元前300年的古典时期;一段是从公元前300年到公元600年的亚历山大时期(或称希腊时期).由于采用了拼音文字(前面已经提过)并且公元前7世纪时希腊人已经有了草片当纸张用,这可能说明何以公元前600年左右的文化活动繁荣起来.有了这种书写纸,无疑能帮助思想的传播.

2. 史料的来源

说来奇怪,我们对希腊数学史知识的来源,反而没有像早得多的巴比伦数学史料和埃及数学史料那样确凿可靠,因为现在已经没有重要的希腊数学家的原文手稿.其原因之一是草片易于损毁.埃及人虽然也用草片,但幸而他们的一些数学文件确实保留了下来.还有希腊人的大图书馆后来毁于兵燹,否则也许今日还能看到

卷帙浩繁的希腊著述中的一些材料.

今日希腊数学著作的主要来源是拜占庭的希腊文手抄本,这是在希腊原著写成后 500 年到 1 500 年之间录写的. 这些抄本并不是逐字不变的原著抄录本而是评述本,因此我们不能确定编述者作了些什么修改. 我们还有希腊著作的阿拉伯文译本和转译自阿拉伯文的拉丁文译本. 这里我们又不知道译者可能作了什么修改,也不知道译者对原著了解到什么程度. 而且甚至阿拉伯人和拜占庭编述者所用的希腊文件本身也是有疑问的. 例如,我们虽无亚历山大时代希腊人 Heron 的手稿,但我们知道他对 Euclid 的《原本》(*Elements*)作了若干改动. 他作出了不同的证明,添补了一些定理的新例子和逆定理. 同样,亚历山大的 Theon(公元 4 世纪末)告诉我们,他在自己的编述本中改动了《原本》中的若干部分. 我们今日看到的拉丁文(原著为"希腊文",可能系作者笔误——译者)和阿拉伯文译本可能是根据原著的这种修改本译出的. 不过我们确实能看到用这种形式保存下来的希腊学者们的著作,如 Euclid, Apollonius, Archimedes, Ptolemy, Diophantus 和其他希腊学者的著作. 许多写于古典希腊时代和亚历山大时代的希腊著作并没有流传下来,因为即使在希腊时代,他们的作品已被上述这些学者的著作所取代.

希腊人写了一些数学史和科学史. Aristotle 学派中的一员 Eudemus(公元前 4 世纪)写过一本算术史,一本几何史,一本天文史. 但除了后世作者引述过的片断材料外,这些史书都失传了. 几何学史叙述了 Euclid 以前的几何学状况,如果还在,那将是无价之宝. Aristotle 的另一个学生 Theophrastus(约公元前 372—前 287)写了一本物理学史,但这书(除了片断材料外)也失传了.

除上述材料之外,我们有两批评述本. Pappus(公元 3 世纪末)写过《数学汇编》(*Synagoge* 或者 *Mathematical Collection*),

它的几乎全部的内容流传在12世纪的抄本中.这书介绍了希腊古典时期和亚历山大时期的许多数学著作,从 Euclid 一直到 Ptolemy. Pappus 自己又补充了一些引理和定理,帮助读者理解. Pappus 又写了一本书叫《分析集锦》(*Treasury of Analysis*),那是希腊著作本身的汇编本.这书已失传.但 Pappus 在他那《数学汇编》的第七篇里告诉我们《集锦》中有哪些内容.

第二位重要的评述者是 Proclus(410—485),他是个多产的作家.他的材料取自希腊数学家的原著和他以前的评述本.保留下来的他的一些作品中,最有价值的是《评述》(*Commentary*),内容是介绍 Euclid《原本》的第一篇.看来 Proclus 是打算讨论《原本》中更多内容的,但没有材料可以证明他确实这样做了.《评述》中有一段文字是后人引用的三段文字中的一段.第三段文字相传认为是 Eudemus《几何史》(*History of Geometry*,参看第10节)中的话,但可能引自较晚的修订本.这特别提及的一段引文是三段引文中最长的,后人称之为 Eudemus 总结. Proclus 也提到 Pappus 书中的一些内容,所以除了一些希腊经典著作本身的后世版本和译本外,Pappus 的《数学汇编》和 Proclus 的《评述》也是我们研究希腊数学史的两大史料.

关于原著的文字(但非手稿),我们如今只知道 Simplicius(6世纪前半叶)引自 Eudemus 那本失传的《几何史》中的片断文字,那是有关 Hippocrates 月牙形的一些话.此外还有 Archytas 关于倍立方体问题的片断文字.至于原著手稿,至今还有希腊亚历山大时代撰写的一些草片本材料.同希腊数学有关的史料也是大有价值的.例如希腊哲学家特别是 Plato 和 Aristotle 关于数学发表过许多意见,而他们的许多著作也颇像数学著作似地保留了下来.

要把希腊数学史从上述这些史料中重新整理出来,这是一项浩繁而复杂的工作.尽管学者进行了广泛的工作,我们的知识还有

欠缺之处,有些结论也有争议.不过基本事实是清楚的.

3. 古典时期的几大学派

古典时期数学成就的精华是 Euclid 的《原本》和 Apollonius 的《圆锥曲线》(*Conic Sections*).为领略这些著作,须对当时数学的本质所产生的巨大变革以及希腊人所面临的和所解决的问题有所了解.此外,从这些精心撰述的著作中,我们看不出此前三百年间数学上的创造性工作,或此后数学史上关系重大的一些问题.

古典希腊数学是在先后相继的几个中心地点发展起来的,每处都在前人工作的基础上进行添筑.在每个中心地点.总有无正式组织的成群学者在一两个伟大学者领导下开展活动.这类组织在现代也是习见的,它之所以存在也是可以理解的.今日,当一位大学者住在某一处——通常是个大学——时,其他学者就接踵而去,向大师学习.

第一个学派是爱奥尼亚学派,是米利都地方的 Thales(约公元前 640—前 546)创立的.我们并不知道 Thales 授徒讲业的全部情况,但肯定知道哲学家 Anaximander(约公元前 610—前 547)和 Anaximenes(约公元前 550—前 480)是他的学生,Anaxagoras(约公元前 500—前 428)是属于这学派的,Pythagoras(约公元前 585—前 500)据信也是跟 Thales 学过数学的.其后 Pythagoras 在意大利南部形成他自己的学派.在公元前 6 世纪末之际,爱奥尼亚地区科勒芬(Colophon)城的 Xenophanes 迁居到西西里,在那里建立一个中心,属于这学派中的人有哲学家 Parmenidēs(公元前 5 世纪)和 Zeno(公元前 5 世纪).这两人住在意大利南部埃利亚(Elea),学派也随之迁到那里,因此这群学者就叫埃利亚学派.自公元前 5 世纪下半叶起进行学术活动的诡辩学派(Sophists)则主要集中在雅典.最出名的学派是 Plato(公元前 427—前 347)在雅典的学院派(Academy),

Aristotle就是那里的一个学生.学院派在希腊思想史上有无与伦比的重要性.它的学生和学友是当时最伟大的哲学家、数学家和天文学家;甚至在数学方面的领导地位转移到亚历山大之后,这一学派仍在哲学上保持其领先的地位. Eudoxus(约公元前408—前355)的数学知识主要是从西西里太兰吐姆(Tarentum)地方的Archytas学来的,之后他在小亚细亚北部的城市基齐库斯(Cyzicus)成立了他自己的学派. Aristotle离开Plato的学院之后在雅典成立另一学派——学园学派(Lyceum).学园学派通常称为漫步学派(Peripatetic school).并不是古典时期的所有大数学家必定都属于某一学派,不过为叙述连贯起见,我们有时把某人的著作同某一学派结合起来讨论,虽然那人同该学派的联系并不密切.

4. 爱奥尼亚(Ionian)学派

这学派的领袖和创立人是Thales.关于此人的生平和学术工作虽然没有确切可靠的材料,但他可能就是生长和工作于米利都的人.他游迹甚广,曾一度住在埃及进行商务活动,并据说学了不少埃及的数学.传说Thales还是一个精明的商人.在一次油橄榄大丰收的季节,他垄断了米利都和希俄斯(Chios)两地的所有油坊之后以高价出租.据说Thales预报了公元前585年的一次日蚀,但因当时天文知识没有那么高明,所以有人否认此说.

据传他曾用一根已知长度的杆子,通过同时测量竿影和金字塔影之长,求出了金字塔的高度.据信他利用关于相似三角形的这一类知识计算过船舶到海岸的距离.后人也把数学之成为抽象理论和有些定理的演绎证明归功于他,但这两项功劳是否属实是可疑的.后人也把磁铁和静电吸引力的发现归功于他.

就对于数学本身的贡献来说,爱奥尼亚学派只值得稍加提及,不过它在哲学特别是自然哲学方面的重要性是无与伦比的(见第

7 章第 2 节). 在波斯人征服这地区之后,爱奥尼亚学派的重要地位就下落了.

5. Pythagoras 派

Pythagoras 据信是曾就学于 Thales 的. 他继而拾起学术事业的火炬,在意大利南部的希腊居留地克罗顿(Croton)成立了他自己的学派. Pythagoras 派学者没有书面著作,我们是通过他人如 Plato 和 Herodotus 的著作知悉他们的. 特别是我们对 Pythagoras 及其门徒的生平不清楚,也不能肯定一些发现该归功于 Pythagoras 本人还是应归功于他的门人. 因此,在谈到 Pythagoras 的工作时,实际是指这批学者在公元前 585 年(所传 Pythagoras 出生之年)到公元前 400 年左右这一段时间里所做的工作. Philolaus(公元前 5 世纪)和 Archytas(公元前 428—前 347)是这个学派中的杰出成员.

Pythagoras 生于靠近小亚细亚海岸的萨摩斯岛(Samos). 他在米利都 Thales 那里学了一段时期之后就到别处游历,其中有埃及和巴比伦,并可能在那里学到一些数学和神秘主义的教条. 然后他卜居于克罗顿. 在那里他成立了一个宗教、科学和哲学性质的帮会. 这是个正式的学派组织,会员人数是限定的,并由领导人传授知识,会员对学派中所传授的知识要保密,不过有些史学家否定数学和物理知识保密的说法. 据信 Pythagoras 派的人参与政治活动;他们同贵族党派结盟,因而被民主党派赶走. Pythagoras 逃奔到邻近的米太旁登(Metapontum),公元前 497 年被害于该处. 他的门人散居到希腊其他学术中心,继续传授他的教导.

希腊人对数学看法本身的一个重大贡献是有意识地承认并强调:数学上的东西如数和图形是思维的抽象,同实际事物或实际形象是截然不同的. 有些原始文明社会(埃及和巴比伦人肯定如此)

诚然也知道把数脱离实物来思考,但他们对这种思考的抽象性质究竟自觉认识到何种程度是颇成问题的. 而且在希腊人之前的所有文明中,几何思想肯定是离不开实物的. 例如,埃及人的直线就无非是拉紧的绳或田地的一边,而矩形则是田地的边界.

数学研究抽象概念,这种认识肯定要归功于 Pythagoras 学派. 不过在他们开始进行工作时情况可能并不如此. Aristotle 曾说,Pythagoras 学派把数看作是真实物质对象的终极组成部分①. 数不能离开感觉到的对象而独立存在. 早期 Pythagoras 学派说到一切对象由(整)数组成,或者说到数乃宇宙的要素时,他们所要说的意思就是字面上的意思,因他们心目中的数就如同我们心目中的原子一样. 也有人相信,公元前 6 世纪和前 5 世纪的 Pythagoras 学派实际上并不把数和几何上的点区分开来. 因此他们从几何角度把一个数看作是扩大了的一个点或很小的一个球. 但据 Proclus 的记载,Eudemus 说 Pythagoras 认识到较高(比之于埃及人和巴比伦人)的原理,并且纯凭心智来考虑抽象问题. Eudemus 还说 Pythagoras 创立了纯数学,把它变成一门高尚的艺术.

Pythagoras 学派常把数描绘成沙滩上的点子或小石子. 他们按点子或小石子所能排列而成的形状来把数进行分类. 例如,1, 3, 6 和 10 这些数叫三角形数,因为相应的点子能排列成正三角形(图 3.1). 第四个三角形数 10 特别使 Pythagoras 学派神往,因为这是他们所珍爱的数,并且这三角形的每边有 4 点,而 4 又是另一个得宠的数. 他们认识到 1, 1+2, 1+2+3 等等这些和数都是三角形数,并且知道 $1+2+\cdots+n=(n/2)(n+1)$.

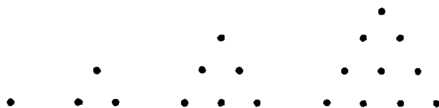


图 3.1

① 《形而上学》(*Metaphys*)卷 I ,986a 及 986a21, Loeb 经典图书版.

1, 4, 9, 16,…这些数他们称之为正方形数,因为用点表示时可把它们排成正方形(图 3.2). 复合数(非质数)中凡不恰好是正方形数的,则叫做长方形数.

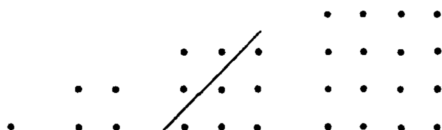


图 3.2

把代表数的点子排成几何图形后,整数的一些性质就变得很明显. 例如在图 3.2 的第三个图形中画了一道斜杠之后,便可看出相继两个三角形数之和是个正方形数. 这个关系是普遍成立的,因若用现代记法,我们可以看出

$$\frac{n}{2}(n+1)+\frac{n+1}{2}(n+2)=(n+1)^2.$$

至于说 Pythagoras 学派能证明这个一般结论,那却是成问题的.

Pythagoras 派再用图 3.3 所示的方案从一个正方形数得出下一个正方形数. 图中折线右方和下方的那些点所形成的数,他们称作一个 gnomon. 他们从这图里所看出的事实,若用记号表示出来就是 $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$. 其次,若从 1 起加上 gnomon 3,再加上 gnomon 5 等等,其结果用我们的记号来表示便是

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

"gnomon"这个字在巴比伦人的原意可能是指日规上的直杆,用它的阴影来指示时刻. 在 Pythagoras 时代 gnomon 指木匠用的

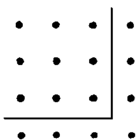


图 3.3

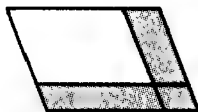


图 3.4 有阴影的那块面积称为 gnomon

方尺，它的形状就像图 3.3 中的 gnomon 那样. 它还表示从正方形的一角割掉一个小正方形后所余的图形. 以后，Euclid 又把 gnomon 表示从平行四边形一角割掉一个较小的相似平行四边形后所余的图形(图 3.4)

Pythagoras 派还搞多角数，如五边形数、六边形数和其他多边形数. 图 3.5 中的每个点代表数 1. 从这图可看出第一个五边形数是 1；次一个(其各点排成一个五角形的顶点)是 5；第三个数是 1+4+7 即 12 等等. 第 n 个五边形数，用我们的记号是 $(3n^2-n)/2$. 同样有六边形数(图 3.6)1，6，15，28，…而一般是 $2n^2-n$.

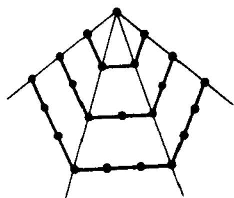


图 3.5 五边形数

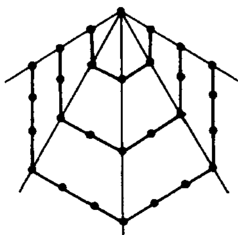


图 3.6 六边形数

若一数等于它的所有因数(能除尽该数的数，包括 1，但不包括该数本身)之和，他们称之为完全数，如 6，28 和 496 便是完全数. 数本身大于其因数之和的叫盈数，小于其因数之和的则叫亏数. 若有两数彼此等于另一数的因子之和，他们称这两数是亲和数，例如 284 与 220 便是亲和数.

Pythagoras 派搞出了一个法则，能求出可排成直角三角形三边的三元数组. 从这一法则说明他们知道 Pythagoras 定理，关于这定理以后还要细讲. 他们发现，若 m 是奇数，则 m，$(m^2-1)/2$ 及 $(m^2+1)/2$ 便是这样的三元数组. 不过这法则只给出一部分的这种三元数组. 如今我们把能形成直角三角形三条边的三个整数所构成的任何集合统统称为 Pythagoras 三元数组.

Pythagoras 派研究了质数，递进数列，以及他们认为美的一些

比和比例关系. 例如,若 p 和 q 是两数,它们的算术平均值 A 是 $(p+q)/2$, 几何平均值 G 是 $\sqrt{pq}$,而调和平均值 H,即 $1/p$ 和 $1/q$ 的算术平均值取倒数,是 $2pq/(p+q)$. 但我们可看出 G 是 A 和 H 的几何平均值. $A/G = G/H$ 这个比例便叫完全比例, 而 $p:(p+q)/2 = 2pq/(p+q):q$ 这个比例他们称之为音乐比例.

Pythagoras 派所说的数仅指整数. 和现代人不一样,他们不把两个整数之比看成是一个分数从而是另一类数. 实际的分数是用于商业上的,以表示钱币或度量单位的若干部分,但算术在商业上的这类应用是属于正统希腊数学范围之外的. 因此当 Pythagoras 派发现有些比——例如等腰直角三角形斜边与一直角边之比或正方形对角线与其一边之比——不能用整数之比表达时,他们就感到惊奇不安. 由于 Pythagoras 派关心能形成直角三角形三边的三元整数组,他们很可能是在搞这项工作时发现这些新比的. 他们把那些能用整数之比表达的比称做可公度比,意即相比两量可用公共度量单位量尽,而把不能这样表达的比称做不可公度比. 例如我们今日写成 $\sqrt{2}/2$ 的比便是不可公度比. 不可公度量之比希腊人称做 αλογος(*algos*,意即"不能表达"). 他们也用 αρρητος(*arratos*,没有比)这个词来表达. 后人把不可公度比的发现归功于米太旁登的 Hippasus(公元前 5 世纪). 相传当时 Pythagoras 派的人正在海上,就因这一发现而把 Hippasus 投到海里,因为他在宇宙间搞出这样一个东西否定了 Pythagoras 派的信条:宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比.

$\sqrt{2}$ 与 1 不能公度的证明是 Pythagoras 派给出的. 据 Aristotle 说, 他们用的是*归谬法*——即间接证法. 这个证明指出, 若设斜边能与一直角边公度, 则同一个数将又是奇数又是偶数. 证明过程如下: 设等腰直角三角形斜边与一直角边之比为 $\alpha:\beta$ 并设这个比已表达成最小整数之比. 于是根据 Pythagoras 定理得 $\alpha^2 = 2\beta^2$. 由于 α^2 为偶数, α 必然也是偶数, 因任一奇数的平方

必是奇数[1]. 但比 $\alpha:\beta$ 是既约的,因此 β 必然是奇数. α 既是偶数,故可设 $\alpha=2\gamma$. 于是 $\alpha^2=4\gamma^2=2\beta^2$. 因此 $\beta^2=2\gamma^2$, 这样 β^2 是个偶数. 于是 β 也是偶数. 但 β 同时又是奇数,这就产生了矛盾.

这个证明当然和现今对$\sqrt{2}$为无理数的证明相同,它原来是包括在 Euclid《原本》的早期版本中的,作为第十篇的命题 117. 不过 Euclid 原书中很可能是没有的,所以现代版本已经把它删去.

现代数学中用无理数来表示不可公度比. 但 Pythagoras 派不愿意接受这样的数. 巴比伦人是运用这种数的,用时取它们的近似值,但他们可能不知道他们的 60 进制近似分数是决不能确切等于这种数的. 埃及人也没有认识到无理数有不同的性质. Pythagoras 派则至少认识到不可公度比与可公度比的性质完全不同.

这发现提出了希腊数学里的一个中心问题. 在这之前 Pythagoras 派是把数与几何等同起来的. 但不可公度比的存在打破了这种等同的看法. 他们并不因此不再在几何里考察所有种类的长度、面积和比,但对于数的比则只限于考察可公度比. 关于不可公度比以及一切量的比例,它们的理论是 Eudoxus 提出的,这人的工作我们不久就要讲到.

有些几何结果也算是归功于 Pythagoras 派的. 最出名的是 Pythagoras 定理本身,这是 Euclid 几何的一个关键定理. 人们认为我们所学的关于三角形、平行线、多边形、圆、球和正多面体的一些定理也是 Pythagoras 派发现的. 特别是他们知道三角形三角之和是 180°. 关于相似形的一套有限的理论,以及平面可为等边三角形、正方形和正六边形所填满这一事实,都属于 Pythagoras 派的研究结果.

Pythagoras 派开头研究的一类问题叫面积应用问题. 其中最简单的一个问题是求作一多边形使其面积与一已给多边形相等而

---

① 任一奇整数可表为 $2n+1$, 于是 $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$, 这必然是奇数.

形状与另一已给多边形相似. 另一个是求作一特定图形,使其面积超过或小于另一图形的面积,其差为一给定的数值. 面积应用问题的最重要形式是:在一已知线段的一部分或其延长线上作一平行四边形,使其与一给定直线图形等面积,并使其小于(在第一种情况下)或超过(在第二种情况下)整个线段上的平行四边形的部分,与一已给的平行四边形相似. 我们在研究 Euclid 著作时将要讨论面积应用问题.

希腊人对数学的最重大贡献是坚持一切数学结果必须根据明白规定的公理用演绎法推出. 这就要问 Pythagoras 派是否证明了他们的几何结果. 对此我们不能给出明确的回答,不过在 Pythagoras 派数学的早期或中期,说已要求根据任何一种公理系统(明确规定的或蕴含的)来作演绎证明,这种说法是非常值得怀疑的. Proclus 确实说过他们证明了三角形内角之和的定理;但这证明可能是晚期 Pythagoras 派学者作出的. 至于他们是否证明了 Pythagoras 定理这一问题,曾有许多人探讨过,而答案则是他们可能并未证明. 如果用相似三角形,这是相当容易证明的,但 Pythagoras 派并没有完整的相似形理论. Euclid《原本》第一篇第 47 命题给出的证明(见第 4 章第 4 节)是难的,因它并未应用相似形理论,而 Proclus 是把这一证明归功于 Euclid 本人的. 关于 Pythagoras 派几何里有没有证明这一问题,最合理的结论是:在该学派存在的大部分时间里,他们是根据一些特例来肯定所得的结果的. 不过到了学派晚期即公元前 400 年左右,由于其他方面的发展,证明在数学中所处的地位改变了;所以学派晚期的成员可能作出了合法的证明.

6. 埃利亚(Eleatic)学派

Pythagoras 派发现不可公度比这一事实出了使所有希腊数学

家迫切要想解决的一个难点:离散与连续的关系.整数代表离散的对象,可公度比代表两批离散对象间的关系,或代表有公共度量单位的两个长度间的关系,因这时每个长度都可看成度量单位的离散集合.不过,长度一般说并非度量单位的离散集合;这就是出现不可公度长度之比的原因.换言之,长度、面积、体积、时间和其他一些量是连续量.例如,我们说一根线段用某一单位来量可以有无理的或有理的长度.但希腊人没有获得这种观点.

Zeno 把离散与连续的关系问题惹人注意地摆了出来. Zeno 住在意大利南部埃利亚城,出生于公元前 495 到 480 年之间.他与其说是数学家莫如说是哲学家.他同他的老师 Parmenides 一样,据说原来也是 Pythagoras 派学者.他提出一些悖论,其中四个是关于运动的.他提出这些悖论的目的何在并不清楚,因为如今对希腊哲学史还知道得不够. Parmenides 曾争论说运动或变动是不可能的,而据说 Zeno 为之辩护. Zeno 攻击过 Pythagoras 派,因他们相信几何上的点是有大小但不能分的单元.我们不确切知道 Zeno 所说的话,只能依靠 Aristotle 的引述,而 Aristotle 引他的话则是为了要批评他.此外我们还依据 6 世纪 Simplicius 的引述,但他的话又是根据 Aristotle 的著作而来的.

关于运动的四个悖论是各不相关的,但四者总的用意可能是为提出同一个重要的论点.当时人们对空间和时间有两种对立的看法:一种认为空间和时间无限可分,那样的话运动是连续而又平顺的;另一种认为空间和时间是由不可分的小段组成的(像放映电影时那样),那样的话运动将是一连串的小跳动. Zeno 的争论是针对这两种理论的,他那关于运动的头两个悖论是反对第一种学说的,而后两个悖论则是反对第二种学说的.这两对悖论中,每一对的头一个悖论考察单独一个物体的运动,其第二个则考察若干物体的相对运动.

Aristotle 在他的《物理》(*Physics*)中陈述了第一个悖论,叫

做两分法悖论(Dichotomy),其说如下:"第一个悖论说运动不存在,理由是运动中的物体在到达目的地前必须到达半路上的点."这话的意思是说为通过 AB(图 3.7),必须先到达

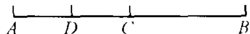


图 3.7

C,为到达 C 必须先到达 D;等等.换言之,若设空间无限可分,从而有限长度含无限多的点,这就不可能在有限时间内通过有限长度.

Aristotle 在驳斥 Zeno 时,说关于一个事物的无限性有两种意义:无限可分或无限宽广.在有限时间内可以接触从可分意义上是无限的东西,因为从这意义上讲时间也是无限的;所以在有限时间内可以通过有限的长度.另外有人把 Zeno 的悖论理解为:要通过有限长度就必须通过无穷多的点,这就意味着必须到达没有终点的某种东西的终点.

第二个悖论叫 Achilles(希腊的神行太保——译者)和乌龟赛跑.据 Aristotle 所述:"它说动得最慢的东西不能被动得最快的东西赶上,因为追赶者首先必须到达被追者出发之点,因而行动较慢的被追者必定总是跑在前头.这论点同两分法悖论中的一样,所不同者是不必再把所需通过的距离一再平分."之后 Aristotle 说,如果动得较慢的对象通过一段有限的距离,则根据他答复第一个悖论所述的那个理由,它是可以被追上的.

后两悖论是针对"影片式运动"而言的.第三个关于箭的悖论照 Aristotle 所述是这样的:"他(Zeno)讲的第三个悖论是说飞矢不动.他是在假定了时间由瞬刻组成之后得出这结论来的.如果没有这假定也就不会有这结论."据 Aristotle 说,Zeno 的意思是箭在运动的任一瞬刻必在一确定位置因而是静止的.所以箭就不能处于运动状态.Aristotle 说如果我们不承认时间具有不可分的单元,这悖论就站不住脚了.

第四个悖论叫操场或游行队伍悖论,用 Aristotle 的话来说是

这样的:"第四个悖论是关于一组物体沿跑道挨着另一组个数相同的物体彼此相向移动,一组是从末端出发而另一组是从中间开始移动,两者移动速度一样;他(Zeno)就作出结论说由此可知一半的时间等于双倍的时间.错误在于假定了以相同速度移动的两物体,其一通过一个移动物体,而另一通过一个等长的静止物体,所需时间相等,而这个假定是错的."

我们可把 Zeno 第四悖论中可能的要点陈述如下:设有 A, B, C 三队兵(图 3.8),并设在最小的时间单位内,B 往左移动一位而 C 则往右移动一位.于是相对于 B 而言 C 就移动了两位.因此必有一个使 C 向 B 的右方移动一位所需的较小时间单位,否则半个时间单位将等于一个时间单位.

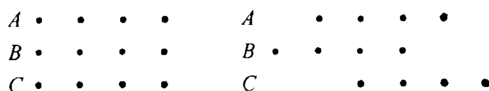


图 3.8

可能 Zeno 只是想指出速度是相对的. C 相对于 B 的速度并非 C 相对于 A 的速度. 或者他的意思是说没有什么绝对空间可作为规定速度的依据. Aristotle 说 Zeno 的谬误在于假定以相同速度移动的两物体在通过一移动物体与通过一固定物体之际需要同样时间. Zeno 的论点和 Aristotle 的批驳都说得不清楚. 但若把这悖论看作是为攻击时间和空间具有不可分的最小段落之说而作的(因 Zeno 当时在攻击此说), 那么他的论点就有了意义.

我们可把色雷斯地区阿布德拉(Abdera in Thrace)的 Democritus(约公元前 460—前 370)也归入埃利亚学派.据说他很聪明,研究许多学问,其中包括天文.由于 Dēmocritus 原属 Leucippus 学派而后者为 Zeno 的学生,故他所考察的许多数学问题必定是为 Zeno 的思想所启发的.他写出关于几何,关于数,关

于连续的直线和立体的书.他的几何著作很可能是 Euclid《原本》问世以前的重要著作.

Archimedes 说 Democritus 发现圆锥和棱锥的体积等于同底同高的圆柱和棱柱体积的三分之一,但证明是由 Eudoxus 作出的. Dēmocritus 把圆锥看作是一系列不可分的薄层叠成的(图 3.9),但若设各层相等则得圆柱,而若设各层不等,则圆锥面不能光滑,因而这使他感到苦恼.

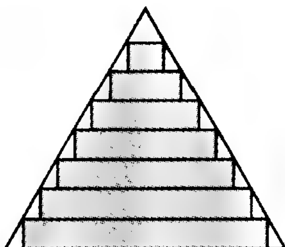


图 3.9

7. 诡辩(Sophist)学派

自公元前 479 年波斯人在迈开里(Mycale)地方最后战败之后,雅典便成为希腊城邦联盟中的主要城市和商业中心.从事贸易所得的财富使雅典成为当时最富庶的城市,他们的出名领袖 Pericles 就利用这财富来修建和美化这一城市.爱奥尼亚派的、Pythagoras 派的以及其他的学者都被吸引到雅典来.这里人们的重点就放在抽象推理方面,并以使理性统治遍及整个自然界和人类作为其宗旨.

在雅典的第一个学派——诡辩派中包括各方面的学者大师,如文法、修辞、辩证法、演讲术、人伦,以及对本书有关的几何、天文和哲学方面的学者.他们研究的主要目标之一是用数学来了解宇宙是怎样运转着的.

有好些数学结果是为解决三个著名的作图问题而得出的副产品.这三个作图题是:作一正方形使其与给定的圆等面积;给定立方体的一边,求作另一立方体之边,使后者体积两倍于前者体积;以及用尺规三等分任意角.

这些著名作图题的起因有各种说法.例如关于倍立方问题起

因,在 Eratosthenes(约公元前 284—前 192)的一本书中的一种说法是:得洛斯(Delos)地方的人遭瘟疫求教于巫神,巫神告诉他们应把现有立方祭坛加倍.得洛斯人知道把祭坛一边加倍是不能把体积加倍的,就去找 Plato 解决. Plato 告诉他们说巫神之意并不在于要双倍大的祭坛,而只是为借此谴责希腊人不重视数学并对几何不够尊崇.传记家 Plutarch 也记载了这一故事.

实际上这些作图题是希腊人在解出了一些作图题之后的引申.因任意角可二等分,自然就想搞三等分.因以正方形对角线为一边的正方形有两倍于前者的面积,就理所当然地提出相应的立方体问题.化圆为方问题是希腊人求作一定形状的图形使之与给定图形等面积这类问题中的典型问题.此外还有求作正七边形或更多边数的正多边形问题就不那么出名了.但这也是在作出正方形、正五边形、正六边形之后引申出来的问题.

作图之限于用尺规①一事也有各种解释.希腊人认为直线和圆是基本图形,而直尺和圆规是其具体化.所以用这两种工具比较好.有一种理由是说 Plato 反对用其他机械工具,因其过于依赖感觉境界而不甚依赖思想境界,而 Plato 认为后者是第一性的.但很可能在公元前 5 世纪时对这种限制不甚严格.不过我们以后可以看到作图题在希腊几何中起重要作用,而 Euclid 公理确实限制只许用尺规作图.自他以后这一限制就严格要求了.例如 Pappus 说若图形能用尺规作出,那么用其他方法来解就不可取.

最早试图解这三大名题的是爱奥尼亚派学者 Anaxagoras,据说他在牢房里还搞化圆为方问题,但他的结果如何不得而知.搞得最出名的是伊利斯城[Elis,希腊伯罗奔尼撒(Peloponnesus)的城市]的 Hippias.此人是诡辩学派的头面人物,生于公元前 460 年左右,是 Socrates 的同时代人.

---

① "尺规"两字是按习惯说法译的,这里的"尺"实际应是"直边",应理解为没有刻度的尺.——译者注

Hippias 在设法三等分一角时发明了一种新曲线叫割圆曲线,只可惜这曲线本身也是不能用尺规作出的. 割圆曲线是这样形成的:设 AB(图 3.10)顺时针方向以匀速绕 A 转到 AD 的位置. 同时让 BC 平行于其自身以匀速下移到 AD. 设 AB 转到 AD'时 BC 移到 $B'C'$. 令 E' 为 AD' 与 $B'C'$的交点. 则此 E'便是割圆曲线 $BE'G$ 上的一个典型点. G 是割圆曲线的终点①.

图 3.10

割圆曲线在笛卡儿直角坐标系中的方程可如下得出:设 AB 转到 AD 总共需要时间 T,令 AD'到达 AD 所需的那部分时间是 t/T. 因 AD'与 $B'C'$都是匀速运动的,故 $B'C'$在移过 BA 中的$E'H$ 这一段路时所需的那部分时间也是 t/T. 所以

$$\frac{\phi}{\pi/2} = \frac{E'H}{BA}.$$

若以 y 记$E'H$,以 a 记 BA,则有

(1) $$\frac{\phi}{\pi/2} = \frac{y}{a}$$

或 $$y = a \cdot \phi \cdot \frac{2}{\pi}.$$

---

① 点 G 不能直接根据曲线的定义求得,因 AB 与 BC 在同一顷刻到达 AD 处,故旋转线和水平线在那里没有交点. 不过只要把 G 看作割圆曲线上较早形成的一些点的极限就能定出 G. 用微积分法可得 $AG = 2a/\pi$, 此处 $a = AB$.

但若 $AH = x$，则

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}.$$

于是
$$y = \frac{2a}{\pi}\arctan \frac{y}{x}$$

或
$$y = x\tan \frac{\pi y}{2a}.$$

这曲线若能作出，就可三等分任一锐角. 令 ϕ 是这个角. 把 y 三等分使 $E'H' = 2H'H$. 过 H' 作 $B''C''$ 令其交割圆曲线于 L. 作 AL. 于是便有 $\angle LAD = \phi/3$，因根据得出(1)的那些理由，可知

$$\frac{\angle LAD}{\pi/2} = \frac{H'H}{a}$$

或
$$\frac{\angle LAD}{\pi/2} = \frac{y/3}{a}.$$

但据(1)有

$$\frac{\phi}{\pi/2} = \frac{y}{a},$$

故
$$\angle LAD = \frac{\phi}{3}.$$

由作图题而引出的另一著名发现是开奥斯的 Hippocrates(公元前5世纪)得出的. 此人是他那个世纪中最出名的数学家，但读者不要把他和希腊医学祖师科斯(Cos)地方的 Hippocrates 混为一谈. 数学家 Hippocrates 于该世纪下半叶谋生于雅典，他不属诡辩派，但很可能属 Pythagoras 派. 据说定理按其证明所需依据来排先后次序(这是大家在学习 Euclid 著作时所熟悉的做法)是他最早想出来的. 最早把间接证法引用到数学里的据说也是他. 他所著的几何书叫《几何原本》(*Elements*)，已经失传.

Hippocrates 当然没有解决化圆为方问题，但确实解决了一个有关的问题. 设 ABC 是一等腰直角三角形(图 3.11)，并设它内接于中心为 O 的半圆. 设 AEB 是以 AB 为直径的半圆. 则有

$$\frac{\text{半圆 } ABC \text{ 的面积}}{\text{半圆 } AEB \text{ 的面积}} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{2}{1}.$$

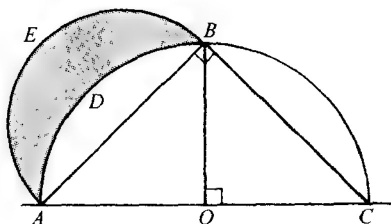


图 3.11

因此 $OADB$ 的面积等于半圆 AEB 的面积. 现在把两者的公共面积 ADB 去掉,则知月牙形(阴影部分)的面积等于三角形 AOB 的面积. 这样, 一个以曲线弧为边的月牙形面积等于一个直边图形的面积;或者说把曲边图形化成了直边图形. 这个结果叫做求积(quadrature);就是说曲边图形的面积求出来了,因为得出了与它等面积的直边形,而直边形的面积是能计算的.

Hippocrates 在这个证明里应用了圆面积之比等于其直径平方之比这一事实. 但 Hippocrates 是否确实能证明这一事实则令人怀疑,因为它的证明需要用到后日由 Eudoxus 所发明的穷竭法.

Hippocrates 还搞出了另外三个月牙形的等积直边形. 关于月牙形的这项工作我们是从 Simplicius 的著作中得知的,这也是古典希腊数学出现在希腊人原著中的唯一的较大片断.

Hippocrates 又指出倍立方问题可化为在一线段与另一双倍长的线段之间求两个比例中项的问题. 用我们的代数记法来写,令 x 与 y 是这样两个量,使得

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a},$$

则 $$x^2=ay,\ y^2=2ax.$$

因 $y=x^2/a$, 故自第二式得

$$x^3=2a^3.$$

x 便是所要求的解答,但不能用尺规作出. 当然 Hippocrates 必定是从几何上来进行推理的,这种推理方式我们在考察 Apollonius 的《圆锥曲线》时可以看得比较清楚.

还有一个很重要的想法是诡辩派学者 Antiphon(公元前 5 世纪)和 Bryson(约公元前 450 年)搞出来的. Antiphon 在搞化圆为方问题时想起用边数不断增加的内接多边形来接近圆面积. Bryson 则又用外切多边形来丰富这一思想. Antiphon 进一步提出把圆看作是无穷多边的正多边形. 以后可以看到(第 4 章第 9 节)Eudoxus 在穷竭法里是怎样采纳了这些想法的.

8. Plato 学派

继诡辩学派之后领导数学活动的是 Plato 派. 这派学者的先驱者是北非昔勒尼(Cyrene)地方的 Theodorus(生于公元前 470 左右)和意大利南部太兰吐姆(Tarentum)的 Archytas(公元前 428—前 347). 他们是 Pythagoras 派学者,并且都教过 Plato. 他们的教导可能使整个 Plato 学派受到 Pythagoras 派的强烈影响.

Theodorus 因证明我们今日记为$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\cdots$, $\sqrt{17}$的这些比同 1 没有公度一事而闻名. Archytas 引入把曲线作为动点的轨迹,把曲面作为是由曲线移动而产生的看法. 他还从求出两已给量之间的两个比例中项来解决倍立方问题. 这两个比例中项他是用几何方法在求出三个曲面交点之后作出的. 这三个曲面是:圆绕其一切线旋转而生成的曲面,一个锥面,一个柱面. 这种作法很麻烦,不值得在这里占篇幅. Archytas 还写了关于数学力学的书,设计过机器,研究过声学,对音阶作出过创造并制订出一些理论.

Plato 学派的领袖是 Plato,成员有 Menaechmus(公元前 4 世纪),他的兄弟 Dinostratus(公元前 4 世纪),以及 Theaetetus(公

元前约 415—前 369). 其他许多成员我们只知道名字.

Plato 出生于名门,早年就有政治抱负. 但 Socrates 的命运使他深信有良心的人不能搞政治. 他游历过埃及并在意大利南部交游于 Pythagoras 派学者之间. Pythagoras 派对他的影响可能是通过这些接触得来的. 公元前 387 年左右他在雅典成立学院,它在好多方面像现代的大学. 学院有场地、房屋、学生,并有 Plato 及其助手讲授的正式课程. 在古希腊时期,数学和哲学是学院里所喜爱的学科. 数学的主要活动中心虽在公元前 300 年左右移到亚历山大,但在整个亚历山大时代学院派仍旧领导哲学界. 学院维持了九百年之久,直到 529 年因它传授“异端邪说”被信奉基督教的罗马王 Justinian 查封.

Plato 是他那时代最有学问的人,但他不是数学家;不过他热心这门科学,并深信其对哲学和了解宇宙的重要作用,这就鼓励了数学家们钻研数学. 值得指出的是,公元前 4 世纪时几乎所有重要的数学工作都是 Plato 的朋友和学生搞的. Plato 本人则似乎更关心把已有的数学知识加以改进并使之完美.

虽然我们也许不能确定,在 Plato 之前数学概念的抽象化究竟搞到什么程度,但 Plato 和他的后继者无疑是把数学概念看作抽象物的. Plato 说数同几何概念不含物质性,因而和具体事物不相同. 数学概念不依赖于经验而自有其实在性. 它们只能为人所发现,并非为人所发明或塑造. 抽象事物同物质对象之间的这种区分可能得自 Socrates.

我们引录 Plato《理想国》(*Republic*)中的一段话,由此可以说明当时对数学概念的看法. Socrates 对 Glaucon 说:

> 整个算术和计算都要用到数.
>
> 是的…….
>
> 因此这就是我们所追求的那种学问,它有双重用途——

> 军事上的和哲学上的;因为打仗的人必须学习数的技巧,否则他就不知道如何布置他的部队,哲学家也要学,因为他必须跳出茫如大海的万变现象而抓住真正的实质,所以他必须是个算术家…….因此这是可以在立法上适当规定的那种学问;而我们必须竭力奉劝我国未来的主人翁学习算术,不是像业余爱好者那样来学,而必须学到他们唯有靠心智才能认识数的性质那种程度;也不像商人和小贩那样,仅是为着做买卖去学,而是为了它在军事上的应用,为了灵魂本身去学的;而且又因为这是使灵魂从暂存过渡到真理和永存的捷径…….我所说的意思是算术有很伟大和崇高的作用,它迫使灵魂用抽象的数来进行推理,而厌弃在辩论中引入可见和可捉摸的对象……①.

另一段引文②是讨论几何概念的. Plato 说:“你是否也知道,他们虽继续利用可见的形象并拿来进行推理,但他们想的并不是这些东西,而是类似于这些东西的理想形象……但他们力求看到事物本身,而这只有用心灵之目才能看到.”

从这些引述显然可知 Plato 以及他所代表发言的其他希腊人重视抽象观念,并要把数学思想当作进入哲学的阶梯. 数学家所处理的抽象观念跟其他的抽象观念,比如善良和公正,是同一类的,而了解这两者乃是 Plato 哲学的目标. 数学是认识理想世界的准备工具.

为什么希腊人爱好并强调数学的抽象概念呢? 我们不能回答这个问题,但应指出早期希腊数学家是哲学家,而哲学家普遍地对希腊数学的发展有着决定性的影响. 哲学家喜欢搞观念,并在许多领域里显出他们偏于搞抽象的典型作风. 希腊哲学家对于真理、善

---

① B. Jowett《Plato 的对话》第Ⅶ篇,525 节,Clarendon Press 版,1953,共 2 卷(原文为卷 2,疑误).

② 《理想国》第Ⅵ篇,510 节.

良、慈爱和智慧就是这样来思考的. 他们设想理想的社会和完善的国家. 晚期 Pythagoras 派学者和 Plato 派学者把观念世界和实物世界严格区别开来. 物质世界中的关系是会变的,因而并不代表终极真理,但理想世界中的关系是不变的,因而是绝对真理;而绝对真理才是哲学家应该关心的.

Plato 这人特别相信唯有具体对象的完美理想才是实在. 唯有理想世界以及理想间的关系才是永恒的,不受时代影响的,不朽的,而且是普遍的. 物理世界是理想世界的不完善的体现,因而它是会枯朽的,所以只有理想世界才值得进行研究. 只有在纯理性的形式上,才能获得绝对正确的知识. 关于物理世界我们只能有人们的种种意见;因而物理科学陷落在感觉世界的糟粕之中了.

Plato 学派是否对数学的演绎结构作出过贡献,我们不能肯定. 他们关心证明,关心推理过程的方法论,Proclus 和 Diogenes Laertius(3 世纪)把两类方法论归功于 Plato 学派. 第一类是分析方法,用这方法时,我们把待证的事项作为已知,然后由此推导出一些结论,直到得出一个已知的真理或得到矛盾. 若得出矛盾,则待证的结论谬误. 若得出一个已知真理,则(如若可能)便把推理步骤倒过来,于是就作出证明. 第二类是**归谬法**或间接法. 第一类方法对 Plato 来说也许并不新鲜,但可能他要强调其后有加以综合的必要. 至于间接法,如前所说,则有人归功于 Hippocrates.

演绎结构在 Plato 心目中的地位如何,最好用《理想国》[①]中的一段话来加以说明. 他说

> 你们知道几何、算术和有关科学的学生,在他们的各科分支里,假定奇数和偶数、图形以及三种类型的角等等是已知的;这些是他们的假设,是大家认为他们以及所有人都知道的事,因而认为是无需向他们自己或向别人再作任

① 第Ⅵ篇,510 节.

> 何交代的;但他们是从这些事实出发的,并以前后一贯的方式往下推,直到得出结论.

如果这段话确实道出了当时数学的状况,那么他们肯定是作证明的,不过公理基础却不是明显的,或者可能随不同的数学家而稍有不同.

Plato确乎肯定知识有加以演绎整理的需要.科学的任务是发现(理想)自然界的结构,并把它在演绎系统里表述出来.Plato是第一个把严密推理法则加以系统化的人,而大家认为他的门人按逻辑次序整理了定理.我们还知道Plato的学院里曾提出过这样的疑问,即根据已知的事实和问题中给定的假设,所给问题究竟是否可解.不管Plato派有否根据明确的公理真正用演绎法整理过数学,有一点是毋庸置疑的,即至少从Plato时代起,数学上要求根据一些公认的原理作出演绎证明.由于坚持要有这种形式的证明,希腊人得以把此前几千年来数学里的所有法则、步骤和事实全部抛弃.

为什么希腊人坚持要作演绎证明呢?既然归纳、观察和实验一直是获得知识的重要来源,并且被各门科学用得很多很好,那为什么希腊人喜欢在数学里用演绎推理而排斥其他一切方法呢?我们知道希腊人(人们称之为有哲学思想的几何学家)喜欢搞推理和设想,这从他们对哲学 逻辑和理论科学所作出的巨大贡献可以得到证明.另外,哲学家是关心于获得真理的,而归纳、实验以及根据经验作出的一般结论只能给出可能正确的知识,而演绎法在前提正确的条件下则给出绝对肯定的结果.在古希腊社会中,数学是哲学家所追求的真理总体的一部分,因而认为必须是演绎性的.

希腊人喜欢演绎法的另一个原因可能是由于古希腊时期享受教育的阶级轻视实际事务.雅典虽是商业中心,但操商业和医药之类行业的是奴隶阶级.Plato坚决主张自由民搞买卖应看作是犯罪

而要受到惩罚，Aristotle 也说在完善的国家里公民（相对于奴隶而言）不应该搞任何机械行业，对于这种社会里的思想家来说，实验和观察就成为陌生的事. 因此科学或数学上的结果都不会从这种来源得出.

顺便提起一点，有证据可以说明公元前 6 世纪和 5 世纪时希腊人对工作、贸易和机械技巧的看法与此不同，并且他们曾把数学应用于实际技术. Thales 曾用他的数学知识来改进航海技术. 公元前 6 世纪时的希腊统治者 Solon 给予各种匠人以荣誉并宠崇发明者. Sophia 这个希腊字通常用来表示明智和抽象思维，而在当时的意思却是专业技能. 据 Proclus 说，把“数学变成自由学科”（即是说，教给自由民的学问而不是传给奴隶的技巧）的正是 Pythagoras 派人.

Plutarch 在所写 Marcellus 的传记里具体说出了人们对机械工具这类东西的态度是怎样改变的：

> Eudoxus 和 Archytas 是这一闻名的、高度受人珍视的机械技能的首创人. 他们用机械工具来巧妙地说明几何真理，并从实验上以此来证实那些用图形和言语证起来过于复杂的结论，使人看了一目了然便能信服. 例如，给定两线求其两个比例中线的问题是许多作图题里常要碰到的，这两位数学家在解决这问题时都借助于仪器，使其适用于他们所需要的某些曲线和线段. 但由于 Plato 对此表示愤慨，并由于他对此大加谴责，说它只不过是搞坏和消灭了几何学的一个优点，使其如此可耻地不顾纯理智的抽象对象，而回复到感性，并求助（这种帮助非得卑躬屈膝丧尽尊严才能获得）于物质. 由于这种谴责，就产生了这样的情况，使机械学（力学）和数学分了家，并由于它被哲学家所蔑弃和忽视，它就只在军事技术上占有地位了.

这就可以说明为什么古希腊时代的实验科学和机械科学发展得那么差劲.

不管历史研究的结果有没有把希腊人何以偏爱演绎推理的有关因素一个个找出来,我们肯定知道他们最早坚持数学里必须用演绎推理作为求证的唯一方法. 自此以后这便成为数学所特有的要求,并使数学区别于所有别的知识领域或研究领域. 不过后代数学家对这一原则忠实恪守到什么程度,还有待于此后的考察.

就数学内容而论,Plato 和他的学派改进了定义,并据说也证明了平面几何中的新定理. 此外,他们推动了对立体几何的研究. Plato 在《理想国》的第七篇 528 节中说,由于天文学是同运动着的立体打交道的,故在研究天文学以前需要懂得这种立体的科学. 但是(他说)这种科学被人忽视了. 他抱怨国家没有支持研究立体图形的人. Plato 和他的同事着手研究立体几何,并据说证明了新的定理. 他们研究了棱柱、棱锥、圆柱和圆锥;而且他们知道正多面体最多只有五种. Pythagoras 派无疑知道,他们可以用 4, 8, 20 个等边三角形做出其中的三种正多面体,用 6 个正方形做成立方体,并用 12 个正五角形做成正十二面体,但关于正多面体不能多于五种这一事实,则可能是由 Theaetetus 所证明的.

Plato 派的最重要发现是圆锥曲线(conic sections). 亚历山大时代的 Eratosthenes 把这个发现归功于 Menaechmus. 此人是几何学家兼天文学家,他是 Eudoxus 的学生,但系 Plato 学院中的一员. 我们虽不能肯定发现圆锥曲线的起因,但一般相信这是由于搞那几个著名作图题而引起的. 前面已经讲过开奥斯的 Hippocrates 解决了倍立方问题,其法是求出这样的 x 和 y,使

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

但这些方程无异于

$$x^2 = ay,\ y^2 = 2ax,\ xy = 2a^2.$$

所以从坐标几何可知 x 和 y 就是两抛物线的交点或一抛物线和一

双曲线的交点的坐标. Menaechmus 研究了这问题,并看出两种纯粹用几何方法的解法. 根据数学史家 Otto Neugebauer (1899—1990)的意见,圆锥曲线可能是在制作日规的工作过程中搞出来的.

Menaechmus 是这样引入圆锥曲线的:他利用三种圆锥(图 3.12):直角的、锐角的和钝角的圆锥,再用垂直于锥面一母线的平面来割每个锥面. 当时他们只知道双曲线的一个支.



图 3.12

Plato 学派的其他数学研究工作中还包括 Theaetetus 对不可公度量的研究. 在这之前,昔勒尼的 Theodorus 已证明(用我们的记法和语言)$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$和其他一些平方根是无理数. Theaetetus 考察了其他一些而且属于更高类型的无理数并将其分类. 以后在研究 Euclid《原本》第十篇时,我们将指出这些类型. 我们从 Theaetetus 的这一工作中看出数系是怎样推广到更多的无理数的,但他所研究的那些不可公度比只是在几何的想法中产生的,而且是能用几何方法作为长度画出的. 另一 Plato 派学者 Dinostratus 指出怎样用 Hippias 的割圆曲线来化圆为方. 据 Pappus 说,老 Aristaeus(约公元前 320 年) 写过一本包含五篇的书,叫《圆锥曲线述要》(*Elements of Conic Sections*).

9. Eudoxus 学 派

Eudoxus 是古希腊时代最大的数学家,并且在整个古代仅次于 Archimedes. Eratosthenes 说他是"神明似的"人. 他在公元前 408 年左右生于小亚细亚的尼多斯(Cnidos),曾在太兰吐姆求学

于 Archytas,去埃及游历过,在那里学了些天文知识,然后在小亚细亚北部的基齐库斯(Cyzicus)成立了一个学派.公元前 368 年左右他和他的门徒加入 Plato 学派.几年之后他回到尼多斯并于公元前 355 年左右死于该地.他是一位天文学家、医生、几何学家、立法家和地理学家.他最出名的工作是创立了天体运动的第一个天文学说(见第 7 章).

他在数学上的第一个大贡献是关于比例的一个新理论.越来越多无理数(不可公度比)的发现迫使希腊人不得不研究这些数.它们确实是数吗?它们出现于几何论证过程中,而整数和整数之比则既出现于几何也出现于一般的数量研究中.此外,用于可公度的长度、面积和体积的几何证明,怎样才能推广用之于不可公度的这些量呢?

Eudoxus 引入了变量(或简称为量)这个概念(第 4 章第 5 节).它不是数,而是代表诸如线段、角、面积、体积、时间这些能够(用我们的语言来说)连续变动的东西.量跟数不同,数是从一个跳到另一个,例如从 4 跳到 5.对于量是不指定数值的.然后 Eudoxus 定义两个量之比并定义比例(即两个比相等的关系),把可公度比与不可公度比都包括在内.但他仍不用数表达这种比.比和比例的概念是同几何学分不开的,这在我们研究 Euclid 书中第五篇时可以看出来.

Eudoxus 所做的这项工作是为了避免把无理数当作数.实际上,他连线段长度、角的大小以及其他的量和量的比,都避免给予数值.Eudoxus 的这个理论诚然给不可公度比提供了逻辑依据,从而使希腊数学家大大推进了几何学,但也产生了一些不幸的后果.

这种后果之一是它硬把数同几何截然分开,因为只有几何能处理不可公度比.它也把数学家赶到几何学家的队伍里去,因为在此后两千年间几何学变成几乎是全部严密数学的基础.我们如今

仍把 x^2 读作 x 平方，把 x^3 读作 x 立方，而不把它们读作 x 二次或 x 三次，因为对希腊人来说，x^2 和 x^3 这些量只有几何意义.

Eudoxus 处理不可公度长或无理数问题的办法实际上把以前希腊数学的重点颠倒了过来. 早期 Pythagoras 派肯定是重视数，把它当作基本概念的，并且 Eudoxus 的老师太兰吐姆的 Archytas 也曾说过只有算术——而不是几何——能提供满意的证明. 然而，古希腊数学家虽把几何搞得能够处理无理数，却因此放弃了真正的代数和无理数. 当二次方程的解确实是无理数时他们对于解二次方程的事怎么办呢？当矩形的两边不可公度时，他们对于求矩形面积这样一个简单问题又怎么办呢？回答是他们把大部分代数都化成了几何，其办法我们在下一章里就要考察. 用几何来表示无理数和无理数的运算当然是不合实用的，把 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ 当作矩形面积来设想，这在逻辑上可能是足够令人满意的，但若为了想买地板漆布而需要知道乘积究竟等于多少，你就得不出结果.

虽然希腊人把他们在数学上的最大气力化在几何方面，但我们必须记住整数和整数之比仍是他们认为可以接受的概念. 在下一章中可以看到，数学的这个领域在 Euclid 书中第七至九篇里是用演绎法建立起来的. 其内容基本上属于我们所说的数论(或整数性质论).

问题又出来了：古希腊人在科学工作中以及在商业和其他实务中需要用到数的时候怎么办呢？我们以后能知道，古希腊时代的科学仅仅是定性的. 至于数的实际应用，我们以前就说过，那个时期的知识分子只限于搞哲学和科学工作，不去搞商业和贸易；有教养的人不关心实际问题，他们可以在几何学里考察所有的矩形而不去关心哪怕是一个矩形的实际大小. 他们就这样把数学思维同实际需要割裂开来，而且数学家也没有感到有去改进算术方法和代数方法的压力. 只有当有文化的阶级与奴隶阶级之间的壁垒在亚历山大时期(公元前 300 年—约公元 600 年)被冲破而且有教

养的人关心实际事务的时候,重点才转移到数量知识以及发展算术和代数方面.

现在言归正传再来谈 Eudoxus 的贡献.希腊人确定曲边形面积和曲面体体积的得力方法——现今称作穷竭法,也属于 Eudoxus.我们以后将考察这方法以及 Euclid 对它的用法.这确实是微积分的第一步,但并没有用明确的极限理论.举几个例说,Eudoxus 用这方法证明两圆面积之比等于其半径平方之比,两球体积之比等于其半径立方之比,棱锥体积是同底同高棱柱体积的三分之一,以及圆锥体积是其相应的圆柱体积的三分之一.

从 Thales 起的每个学派,都曾被某个权威说成是用演绎法整理过数学的.但 Eudoxus 的工作建立了数学上**以明确公理为依据的**演绎整理,这一点是无可怀疑的.对不可公度比进行了解和运算的需要,无疑是促使他做这步工作的原因.由于 Eudoxus 要着手给这些比提供逻辑依据,他很可能就此认识到有必要列出公理,并逐一推出结果,以保证在处理这些不熟悉而麻烦的量时不致出错.处理不可公度比的这一需要,无疑又增强了此前只凭演绎推理来作证明的决心.

因希腊人要寻求真理并决心用演绎证明,就要找出一些其本身便是真理的公理.他们确乎找出了一些他们认为真实性是不言而喻的命题,但把公理接受下来作为无可置辩的真理一事,所根据的理由却因人而异.几乎所有希腊学者都相信心灵能够认识真理.Plato 有一种前世追忆说(theory of anamnesis),认为灵魂在投生到世间以前能直接体验真理,他只要追忆这种体验就能认识到几何公理是包括在这些真理之内的.人世间的经验是不必要的.有些数学史家从 Plato 和 Proclus 所说的话里捉摸出这样一种意思,即公理带有一些随意性,只要在个别人的心眼里感到它是清楚而真实的就行.重要的事情是根据所选取的公理来按演绎法作推理.Aristotle 关于公理发表过许多意见,我们即将指出他的看法.

10. Aristotle 及其学派

Aristotle(公元前 384—前 322)生于马其顿的一个城市史太其拉(Stageira). 他是 Plato 的学生和同事,相处二十年之久,并从公元前 343—前 340 年当 Alexander the Great 的老师. 公元前 335 年他成立了自己的学派学园学派. 学园里有个花园、一个课堂和一所艺神(Muses)的祭坛.

Aristotle 的著作涉及到机械学(力学)、物理学、数学、逻辑、气象学、植物学、心理学、动物学、伦理学、文学、形而上学、经济学和其他许多领域. 他没有专门写一本关于数学的书,但在许多地方讨论过数学,并用数学说明他的一些观点.

他认为科学可分三类:理论性的、生产性的和实务性的. 理论性科学是探求真理的,包括数学、物理学(光学和声学以及天文学)以及形而上学;其中数学是最精确的科学;生产性科学是各项工艺;而实务性科学,例如伦理学和政治学,则是为了摆正人的行为动作. 在理论科学中,逻辑是其中各门科学的先行学科,而形而上学家则要讨论并解释数学家和自然哲学家(科学家)认为是不言而喻的东西,例如研究对象的存在性或真实性问题以及公理的本性问题.

Aristotle 虽在发现新的数学结果上没有重要贡献(Euclid 书中有几个定理是属于他的),但他对数学的本性及其与物理世界的关系所发表的看法却影响很大. Plato 相信有一个独立、永恒的观念世界,认为它就是宇宙的真实存在,而数学概念是这世界中的一部分东西;Aristotle 则不然,他把具体物质看成是更为可取的. 不过他也有重视观念之处,例如,他认为物理对象有其一些普遍性的本质,诸如硬、软、重、轻、球状性、冷和暖. 数及几何形状也是实物的属性;它们是通过抽象思维为人所认识的,但它们是从属于实物的. 所以数学是搞抽象概念的,而抽象概念则来自实物的属性.

Aristotle 讨论定义. 他对定义的想法是合乎现代精神的;他说定义只不过是给一批文字定个名. 他又指出定义必须用先存在于所定义事项的某种东西来表述. 因此他批评"点是没有部分的那种东西"这一定义,认为"那种东西"这几个字没有说出所指的究竟是什么,除非所指的可能就是"点",因而这定义并不合适. 他承认未经定义的名词是需要的,因为在一系列的定义里总得有个开头,但其后的数学家漠视这一需要,直到 19 世纪之末.

他又指出(据 Plutarch 说 Plato 较早指出过)一个定义只能告诉我们一件事物是什么,并不说明它一定存在. 定义了的东西是否存在有待于证明,除非是少数几个第一性的东西诸如点和直线,它们的存在是同公理(第一性原理)一起事先为人们所接受的. 例如我们可以定义一个正方形,而这种图形可能不存在;就是说,定义中所要求的诸属性可能无法并存. Leibniz 就举出过正十面体这样一个例子;我们可以定义这样一个图形,但它并不存在. 如果有人并未意识到这图形不存在就着手去证明有关这图形的定理,那他得出的结果将是胡说一气. Aristotle 和 Euclid 所采取的用以证明存在性的方法是构造(construction). Euclid《原本》中头三个公理承认直线和圆的构造;所有其他数学概念则必须构造出来以证明其存在,例如角的三等分线虽可定义,但不能用直线和圆构造出来,所以在希腊几何学里不能加以考虑.

Aristotle 也讨论数学的基本原理. 他把公理和公设加以区别,认为公理是一切科学所公有的真理,而公设则只是为某一门科学所接受的第一性原理. 他把逻辑原理(诸如矛盾律、排中律、等量加减等量后结果相等的公理以及其他这类原理)都列为公理. 公设无需是不言自明的,但其是否属真应受所推出结果的检验. 所列出的一批公理或公设,数目应该愈少愈好,只要它们能用以证明所有结果. 虽然 Euclid 也采用 Aristotle 之说,把公理和公设区别开来(从下章可知),但直到 19 世纪末期为止的所有数学家都漠视这一

区别,把公理和公设都当作是同样不言自明的. Aristotle 认为公理是从观察实物(物理对象)得出的. 它们是直接为人们所理解的一般性认识. Aristotle 和他的门人给出了许多定义和公理,或是改进了前人的这些东西. Aristotle 的有些定义和公理是被 Euclid 所采纳的.

Aristotle 讨论了怎样能把点同线联系起来这个基本问题. 他说点不可分,然而占有位置. 但那样的话,不论聚集起多少点来,还总是聚不成能分的东西,而线段则肯定是能分的量. 因此点不能形成像线这类连续的东西,因为点与点不能自己连续在一起. 他说一点好比是时间中的"此刻"(现在). 此刻不可分,因而并非时间的一部分. 一点可能是一线的末端、开端或其上的分界处,但它不能是线的一部分,也不成其为量. 一点只有通过**运动**才能产生一线从而成其为量的本原. 他又论证说点没有长度,因此若一线由点组成,它将没有长度. 同样,如果时间由瞬刻组成,那就没有整个的时段了. 关于线所具有的连续性,他是这样定义的:如果一件东西的任何两个相继部分在其接触处的两个界限合而为一,这东西就是连续的. 实际上 Aristotle 讲过许多次关于连续量的话,讲法都不一致. 但他那个主张的实质是:点和数是离散量,必须同几何上的连续量区别开来. 在算术上没有连续集合(连续统). 至于就两门学科的关系来说,他认为算术(即数论)是更准确的,因为数比几何概念更易于抽象化. 他又认为算术要先行于几何,因为在考察三角形之前先需要有三这个数.

在讨论到无穷(大)这个概念的问题时,他提出要把潜在的无穷(大)和真实的无穷(大)加以区别(这在今日有重要意义). 地球如果有个突然的开始,那么它的年龄是潜在无穷(大),但在任何一刻都不是真实无穷(大). Aristotle 认为只存在潜在的无穷(大). 他承认正整数是潜在无穷的,因给任何数加上 1 后总能得一新数,但无穷集合这类集合是不存在的. 其次,大多数的量甚至不能是潜

在无穷的,因它们若不断增加,就会超出宇宙范围.但空间是潜在无穷的,因它能反复往下细分,而时间则在两个方向上都是潜在无穷的.

Aristotle 的一个重大贡献是创立逻辑学.希腊人在搞出正确的数学推理规律时就已奠立了逻辑的基础,但要等到有 Aristotle 这样的学者才能把这些规律典范化和系统化,使之形成一门独立学科.从 Aristotle 的著作中,可以十分清楚地看出,他是从数学得出逻辑来的.他的基本逻辑原理——矛盾律,指出一个命题不能既是真的又是假的;排中律,它指出一个命题必然是真的或者是假的——就是数学里间接证法的核心. Aristotle 用当时课本中的数学例子来说明他的推理原则. Aristotle 的逻辑一直到 19 世纪无人能挑出它的毛病.

逻辑这门科学虽来自数学,但其后却被人们认为是独立于并且先行于数学的,而且能应用于一切推理过程.如前所述,甚至 Aristotle 自己也认为逻辑先行于科学和哲学.在数学里他强调演绎证明,认为这是确定事实的唯一基础.就 Plato 而论,他相信数学真理早先存在于或独立于物质的世界,故认为推理不足以保证定理正确;他认为逻辑的作用是第二位的.逻辑无非是把我们已知其为真的命题明白说出来罢了.

Aristotle 学派中有一人特别值得一提,这就是洛得斯(Rhodes)的 Eudemus.此人生活于公元前 4 世纪后期,是为 Proclus 和 Simplicius 所引述过的那本书(Eudemus 的总结)的作者.前面指出过,Eudemus 写过算术、几何及天文学方面的历史.他是有案可查的第一位科学史家.但更重要的一点是,只有当一门科学在他那个时代的知识足够丰富广博的才值得为之写出历史.

本书所要提到的古典时期那些人里的最后一人是皮坦尼(Pitane)的 Autolycus,他是个天文学家兼几何学家,生活于公元前 310 年前后.他不是 Plato 或 Aristotle 学派的人,虽然他曾教过

Plato之后的一位学派领袖.他所写的三本书中,有两本流传到今天;这是保存完整的最早的希腊书,虽然流传下来的只是Autolycus原书的抄写手稿.这两本书的书名叫《论运动的球》(*On the Moving Sphere*)和《论升和落》(*On Risings and Settings*),其后被人编入《小天文》(*Little Astronomy*)文集中[以别于日后Ptolemy的《大汇编》(*Great Collection*)或《*Almagest*》].《论运动的球》中研究了球面上的子午圈,一般的大圆,以及我们今日称之为纬度线的圆,并论述一远处光源照到一旋转球上(如同太阳照射地球那样)时的受光区域与黑暗区域.书中内容需要一些球面几何的定理,由此可以知道这些定理必是当时希腊人已经知道的.Autolycus的第二本书谈恒星的升和落,是关于观测天文学方面的著作.

《论运动的球》那本书的形式是很有意义的.图上的点是用字母来代表的.命题是按逻辑次序排列的.每个命题先作一般性的陈述,然后再重复,但重复陈述时明确参照附图;到最后给出证明.这是Euclid著述中所采用的风格.

参考书目

Apostle, H. G.: *Aristotle's Philosophy of Mathematics*, University of Chicago Press, 1952.

Ball, W. W. Rouse: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, Chaps. 2～3.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chaps. 4～6.

Brumbaugh, Robert S.: *Plato's Mathematical Imagination*, Indiana University Press, 1954.

Gomperz, Theodor: *Greek Thinkers*, 4 vols., John Murray, 1920.

Guthrie, W. K. C.: *A History of Greek Philosophy*, Cambridge University Press, 1962 and 1965, Vols. 1 and 2.

Hamilton, Edith: *The Greek Way to Western Civilization*, New American Library,

1948.

Heath, Thomas L.: *A History of Greek Mathematics*, Oxford University Press, 1921, Vol. 1.

Heath, Thomas L.: *A Manual of Greek Mathematics*, Dover (reprint), 1963, Chaps 4～9.

Heath, Thomas L.: *Mathematics in Aristotle*, Oxford University Press, 1949.

Jaeger, Werner: *Paideia*, 3 vols., Oxford University Press, 1939—1944.

Lasserre François: *The Birth of Mathematics in the Age of Plato*, American Research Council, 1964.

Maziarz, Edward A., and Thomas Greenwood: *Greek Mathematical Philosophy*, F. Unger, 1968.

Sarton, George: *A History of Science*, Harvard University Press, 1952, Vol. 1, Chaps. 7, 11, 16, 17, and 20.

Scott, J. F.: *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, 1958, Chap. 2.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, Chap. 3.

van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, P. Noordhoff, 1954, Chaps. 4～6.

Wedberg, Anders: *Plato's Philosophy of Mathematics*, Almqvist and Wiksell, 1955.

第 4 章

Euclid 和 Apollonius

> 这门科学的先驱者本人的教导使我们懂得:在碰到要不要把推理列入我们的几何原理时,不要对那些仅仅是颇为可信的设想稍有顾惜.
>
> Proclus

1. 引　言

古典时期学者们的数学工作的精华,幸运地在 Euclid 和 Apollonius 两个人的著作中流传到今天. 从生活年代来说,两人都属于希腊历史上第二个大分期,即亚历山大时期(见第 3 章第 1 节). Euclid 在公元前 300 年左右生活在亚历山大城并在该处授徒,这一点是很肯定的,虽然他本人的教育可能得自 Plato 的学院. 我们对 Euclid 个人的生平几乎就只知道这点情况,而且连这点情况也还是从 Proclus《评述》的一段文字中得来的. Apollonius 死于公元前 190 年,所以他也是生活在亚历山大时代的人. 但通常把 Euclid 的工作归到古典时期,因为他书里的内容是讲解古典时代所发展的数学. Euclid 的著作实际是古希腊时期一些个别发现的整理,这只要把他书里的内容和我们所知道的较早的数学工作比较一下就可以清楚. 特别是《原本》一书,不仅是对这门学科作逻辑讲解的书,同样也是刚过去的那个时代的一本数学史. Apollonius 的工作一般归入亚历山大时期,但其主要著作《圆锥曲线》的内容和精神是属于古典时期的. 事实上,Apollonius 承认在他那本有八篇的书中,前四篇只是 Euclid 所写关于圆锥曲线的那本失传

了的著作的修订本. Pappus 提到 Apollonius 曾在亚历山大城同 Euclid 的门徒相处很久,这就立即可以说明他同 Euclid 的学术关系. 当我们懂得亚历山大时期数学工作的特点之后,把 Apollonius 列为古典时期作者的理由就更加明显了.

2. Euclid《原本》的背景

Euclid 最出名的著作是《原本》. 书中材料的主要来源一般都能查到,尽管我们对古典时期所知甚少. 他的大部分材料无疑得自同他一起学习的 Plato 派. 此外,据 Proclus 说,Euclid 把 Eudoxus 的许多定理收入《原本》中,完善了 Theaetetus 的定理,并对前人只有马虎证明的结果给予无懈可击的论证.

对公理的特定的选择,把定理排列起来以及一些定理的证明,这些是属于他的,正如论证之精彩和严密应归功于他一样. 不过陈述证明的那种形式在 Autolycus 的著作里已可看出,并且相当肯定地已为 Euclid 以前的其他人所采用. 尽管他从前人书里或从其他来源取用许多材料,但 Euclid 无疑是个大数学家. 他的其他著作也可以证明这个判断不错,尽管有人疑问《原本》中究竟有多少材料是他所独创的. Proclus 明白说过希腊人对《原本》评价甚高,并引述许多评语以作佐证. 这些人中最重要的有 Heron(公元前约 100 年—公元约 100 年),Porphyry(3 世纪)和 Pappus. 或许因 Euclid 的书写得那么好,所以它才取代了相传开奥斯的 Hippocrates 和 Plato 派学者 Leon 及 Theudius 所写的书.

Euclid 本人写的手稿现已无存. 所以他的著作只能参考其他作者的许多修订本、评注本和简评,重新整理出来. Euclid《原本》的所有英文版和拉丁文版都来源于希腊人的手稿. 这些来源是亚历山大城的 Theon(4 世纪末)对 Euclid《原本》的修订本,Theon 修订本的抄本,Theon 讲课的记录,以及 François Peyrard(1760—

1822)在梵蒂冈图书馆里发现的一本希腊手稿.这本10世纪的手稿是Theon以前出版的一本Euclid著作的抄本.因此数学史家J. L. Heiberg和Thomas L. Heath在研究Euclid时主要利用这手稿,当然同时也跟现有的其他手稿和评注本加以比较.此外还有希腊著作的阿拉伯文译本以及阿拉伯文评注,这些可能是根据业已失传的希腊手稿译出的.这些书当然也用来决定Euclid《原本》的确切内容,但阿拉伯文译本和修订本总的说来不如希腊手稿.由于有这么多的材料来源,所以重新整理出来的东西自然留有一些存疑之处.Euclid写《原本》的目的也成问题.有人说是写给数学家看的学术论著,有人说是写给学生用的课本.Proclus比较相信于后一种说法.

由于这一著作较长且有其无与伦比的历史意义,我们要在本章里用几节篇幅来回顾和评述它的内容.因今日还在学Euclid几何,所以我们看了《原本》的内容后可能会感到有点奇怪.今天广泛流传的中学课本里的写法是仿照Legendre对Euclid著作的改写本的.Legendre所用的一些代数在《原本》里没有,不过相应的几何材料是有的.

3.《原本》里的定义和公理

《原本》共含十三篇.有些版本里还附加两篇,但那肯定是后人写的.第一篇先给出书中第一部分所用概念的定义.我们只指出其最重要的;定义的编号按照Heath的版本①.

定义

1. 点是没有部分的那种东西.
2. 线是没有宽度的长度.

   线这个字指曲线.

① T. L. Heath:《Euclid原本十三篇》,Dover(重印本),1956,共三卷.

3. 一线的两端是点.

这定义明确指出一线或一曲线总是有限长度的.《原本》里没有伸展到无穷远的一根曲线.

4. 直线是同其中各点看齐的线.

与定义 3 的精神一致,Euclid 的直线是我们所说的线段. 这定义据信是从泥水匠的水准器或从一只眼睛沿着线往前看的结果得到启发而作出的.

5. 面是只有长度和宽度的那种东西.

6. 面的边缘是线.

所以面也是有界的图形.

7. 平面是与其上直线看齐的那种面.

15. 圆是包含在一(曲)线里的那种平面图形,使从其内某一点连到该线的所有直线都彼此相等.

16. 于是那个点便叫圆的中心(简称圆心).

17. 圆的一直径是通过圆心且两端终于圆周[没有明确定义]的任一直线,而且这样的直线也把圆平分.

23. 平行直线是这样的一些直线,它们在同一平面内,而且往两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交.

开头几个定义是用未经定义的概念来讲的,因而不起什么逻辑作用. Euclid 可能没有认识到开头一些概念必然是未经定义的,因而就不自觉地用物理概念来解释它们. 有些评注者说他认识到这些定义在逻辑上没有作用,但想解释一下他所用名词的直观意义,以使读者相信公理和公设是能应用到这些概念上去的.

接着 Euclid 就列出五个公设和五个公理. 他采纳 Aristotle 对公设和公理的区别,即公理是适用于一切科学的真理,而公设则只应用于几何. 前已指出,Aristotle 曾说公设无需一望便知其为真,但应从其所推出的结果是否符合实际而检验其是否为真. Proclus 甚至把全部数学都说成是假设性的;就是说,它只是推导根据假定

所必然得出的结论,而不管假定是否为真. Euclid 很可能接受了 Aristotle 关于公设正确性的观点. 然而在其后的数学史上(至少在出现非欧几何以前),公设和公理都被人当作不成问题的真理加以接受.

Euclid 举出如下的公设:

公设

1. 从任一点到任一点作直线[是可能的].
2. 把有限直线不断循直线延长[是可能的].
3. 以任一点为中心和任一距离[为半径]作一圆[是可能的].
4. 所有直角彼此相等.
5. 若一直线与两直线相交,且若同侧所交两内角之和小于两直角,则两直线无限延长后必相交于该侧的一点.

公理

1. 跟同一件东西相等的一些东西,它们彼此也是相等的.
2. 等量加等量,总量仍相等.
3. 等量减等量,余量仍相等.
4. 彼此重合的东西是相等的.
5. 整体大于部分.

Euclid 并没有幼稚地假定所定义的概念存在或彼此相容;正如 Aristotle 指出的,我们可以定义具有矛盾性质的某一东西. 头三个公设说的是可以构造线和圆,所以它们是对两件东西存在性的声明,在第一篇里的讲述过程中,Euclid 通过构造证明了其他一些东西的存在,但平面是例外.

Euclid 事先假定公设 1 中的线是唯一的;这假定在第一篇的命题 4 中是隐含的. 不过若能明确提出当然更好. 同样,Euclid 在公设 2 中也假定延长线是唯一的. 他在第十篇命题 1 中明目张胆地用了这个唯一性,而实际在第一篇的一开头就已经不自觉地把它用上了.

公设 5 是 Euclid 自己搞的;他能认识其需要,足以显出他的天才. 许多希腊人反对这一公设,因它不那么一望而知,从而不像别的公设那样容易被人一下子接受. 想用其他公理和公设来证明它的种种尝试(据 Proclus 说在 Euclid 时代就已开始),结果都归失败. 这些努力的全部历史我们将在讨论非欧几何时加以叙述.

至于公理,究竟哪些是 Euclid 原著中就有的呢? 意见各有分歧. 公理 4 是以重叠法作证明的依据,具有几何性质,本应列为公设. Euclid 在第一篇命题 4 和 8 里用了重叠法,但他显然对这方法不太满意;他很可以用这方法来证命题 26($a.s.a. = a.s.a.$ 及 $s.a.a. = s.a.a.$; 即角、边、角 = 角、边、角及边、角、角 = 边、角、角), 但却用了较长的证明. 也许他看前辈几何学家用了那个方法,又不知道怎样才能避开它. 其后 Pappus 和别的人发现 Euclid 的一组公理不够,又增加了几个公理.

4.《原本》的第一篇到第四篇

第一篇到第四篇讲直边形和圆的基本性质. 第一篇的内容是关于全等形的一些熟知的定理,平行线,Pythagoras 定理,初等作图法,等价形(有等面积的图形)和平行四边形. 所有图形都是直边的,就是说,都是由直线段组成的. 特别值得指出的是以下几个定理(措辞不是逐字逐句译的):

命题 1. 在给定直线上作一等边三角形.

证明是简单的. 以 A 为中心(图 4.1)以 AB 为半径作圆. 以 B 为中心以 BA 为半径作一圆. 设 C 是一个交点. ABC 便是所求的三角形.

命题 2. 过一已知点(作为一个端点)作一直线(段)使之等于一已给直线(段).

也许你以为这只要用公设 3 就可以立即作出. 但那样做就需

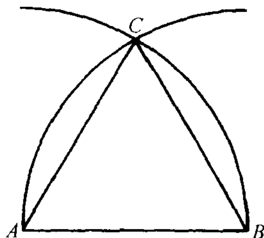


图 4.1

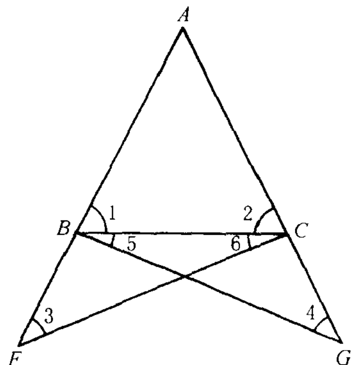


图 4.2

要圆规在取了给定一段长度后移到指定点处时,圆规两脚间的给定距离能保持不变. 但 Euclid 假定用的是个不能固定两脚的圆规,所以给出了一个比较复杂的作法. 当然,在以给定点为中心,以给定距离为半径画圆时(即只要圆规两脚尖都在纸面上时),Euclid 假定圆规两脚是能固定的.

命题 4. 若两个三角形的两边和夹角对应相等,它们就全等.

证法是把一个三角形放到另一三角形上,指明它们必然重合.

命题 5. 等腰三角形两底角相等.

书中证法比目前许多初级课本中的要好,因后者在这一阶段就假定了角 A 存在角平分线. 但这个存在性的证明要依靠命题 5. Euclid 把 AB 延长到 F(图 4.2),把 AC 延长到 G,使 $BF = CG$. 于是 $\triangle AFC \cong \triangle AGB$. 因而 $FC = GB$, $\angle ACF = \angle ABG$、及 $\angle 3 = \angle 4$. 现有 $\triangle CBF \cong \triangle BCG$, 故 $\angle 5 = \angle 6$, 所以 $\angle 1 = \angle 2$. Pappus 证这定理时是把所给三角形看做$\triangle ABC$ 和$\triangle ACB$. 然后应用命题 4,便知两底角相等.

命题 16. 三角形一角的外角大于其他两角中的任一角.

证明需要有一根能任意延长的直线(图 4.3),因这里需要把 AE 延长一倍到 F,而这必须假定头一步能做到才行.

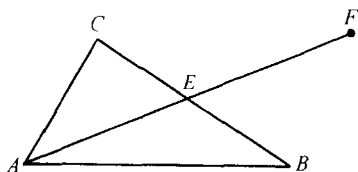


图 4.3

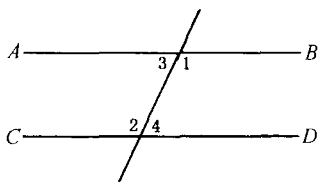


图 4.4

命题 20. 任何三角形的两边之和必大于第三边.

这定理就如同我们在 Euclid 几何里碰到的“两点间最短距离为直线”这一事实一样.

命题 27. 若一直线与两直线相交并使内错角相等,则该两直线平行.

证法是利用关于三角形外角的定理用归谬法. 这定理确证了过给定直线外一点至少可作一直线与之平行.

命题 29. 一直线与两平行线相交时内错角相等,同位角相等,且同旁内角之和等于两直角.

证明里先假定 $\angle 1 \neq \angle 2$ (图 4.4). 设$\angle 2$ 较大,两者都加上$\angle 4$. 则有 $\angle 2 + \angle 4 > \angle 1 + \angle 4$. 这表明 $\angle 1 + \angle 4$ 小于两直角. 根据平行线公设(在这里第一次用到),AB 与 CD 两给定直线就将相交,而题中则已假定它们平行.

命题 44. 在给定直线上作一平行四边形,使其一角等于已给角,而其面积等于已知三角形.

这命题(图 4.5)说给定一三角形 C,一角 D 及一线段 AB.

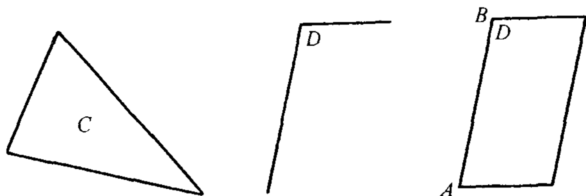


图 4.5

要以 AB 为一边作平行四边形含一角 D 并与 C 等面积. Euclid 是用以上一些命题来证的,这里就不讲了. 应该指出的主要一点是:这是包括在面积应用理论下的第一个问题,而 Eudemus 把那个理论(据 Proclus 书上所载)归功于 Pythagoras 派. 在这题中,我们把一块面积(准确地)应用于 AB. 其次是,这是把一块面积变换为另一块的一个例子. 其三是,在 D 为直角的特殊情形下,平行四边形必为矩形. 那样便可把所给三角形和 AB 看成是给定的量了. 于是矩形的另一边可看成是所给面积 C 和 AB 的商. 这样我们就做出了几何上的除法;这定理是几何代数法的一例.

命题 47. 直角三角形斜边上的正方形等于两直角边上的两个正方形之和.

这当然就是 Pythagoras 定理. 证明是用面积来做的,像许多中学课本里一样. 我们证出(图 4.6) $\triangle ABD \cong \triangle FBC$, 矩形 $BL = 2\triangle ABD$, 正方形 $GB = 2\triangle FBC$. 于是矩形 $BL =$ 正方形 GB. 同样有矩形 $CL =$ 正方形 AK.

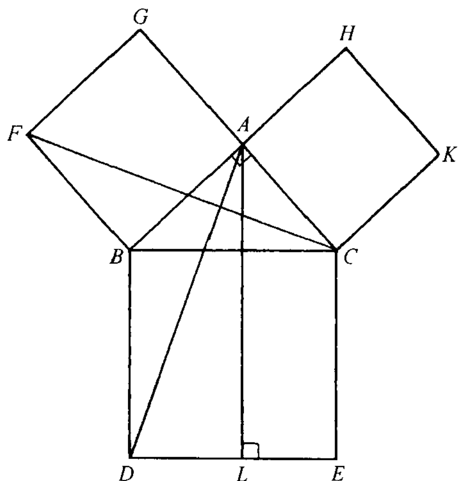


图 4.6

这定理又告诉我们怎样作出一正方形使其面积为所给两正方形之和,即求 x 使 $x^2 = a^2 + b^2$. 因此这是几何代数法的又一个例子.

命题 48. 若三角形一边上的正方形等于其他两边上的正方形之和,则其他两边的夹角是直角.

这命题是 Pythagoras 定理的逆命题. Euclid 书中的证明(图 4.7)是作 AD 垂直于 AC 且等于 AB. 由题设得

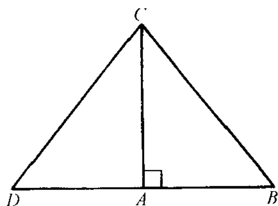


图 4.7

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

而由直角三角形 ADC 得

$$AD^2 + AC^2 = DC^2.$$

因 $AB = AD$, 于是 $BC^2 = DC^2$, 从而 $BC = DC$. 因此由 s. s. s. (三边相等)知两个三角形全等,所以角 CAB 必为直角.

第二篇中的突出内容是对于几何代数法的贡献. 前已指出希腊人不承认存在无理数,所以不能从数量上处理所有长度、面积、角度和体积. 这样他们就用线段来代替数. 两数的乘积变成两边长等于两数的矩形的面积. 三数的乘积是一体积. 两数相加被他们翻译成把一线段延长到使所增长的部分等于另一线段,减法被说成是从一线段割去另一线段之长. 两数相除则仅用两线之比一语来表明;这是同其后在第五第六篇里所引入的原则一致的.

[两数]乘积(一块面积)被第三数除是这样做的:以第三数(长)为边作一矩形,使其面积等于所给乘积. 矩形的另一边当然就是商. 作图时用面积应用理论,这是在第一篇的命题 44 里已经触及到了的. 两个乘积的加减是两个矩形的加减. 矩形的和与差则以面积应用法化成单独一个矩形. 在这种几何代数法里,乘积开平方就是作一正方形与给定矩形等面积;这在命题 14 中作出(见 76 页).

第二篇的头十个命题从几何上处理了下述等价代数问题. 其中有些用我们的记法是:

(1) $a(b+c+d+\cdots)=ab+ac+ad+\cdots$;

(2) $(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$;

(3) $(a+b)a=ab+a^2$;

(4) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

(5) $ab+\left\{\frac{1}{2}(a+b)-b\right\}^2=\left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2$;

(6) $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$.

(1)的几何说法包含在:

命题 1. 若有两直线(图 4.8),其中一线被割成任何多个段,则两直线所作矩形等于未割之线与各段所作出的各个矩形之和.

命题 2 和 3 实际上是命题 1 的特例,但仍为 Euclid 单独陈述并加以证明.(4)的几何形式是众所周知的. Euclid 的说法是:

命题 4. 若把一线在任意一点割开(图 4.9),则在整个线上的正方形等于两段上的正方形加上以两段为边的矩形.

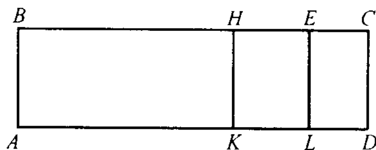


图 4.8

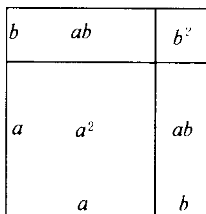


图 4.9

证明给出了图中所示的明显几何事实.

命题 11. 分割一已给直线,使整段与其中一分段所成矩形等于另一分段上的正方形.

这是要我们把 AB 分于某点 H(图 4.10)使 $AB\cdot BH=AH\cdot AH$. Euclid 的作法如下:设 AB 是所给线,作正方形 $ABDC$. 令 E

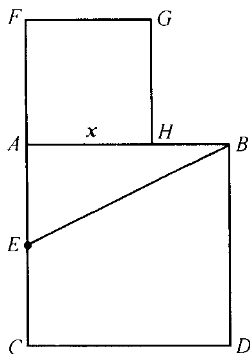


图 4.10

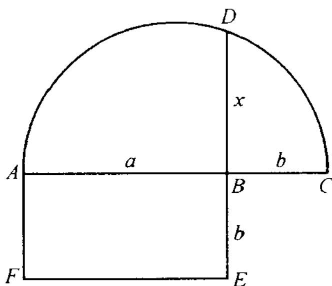


图 4.11

是 AC 中点. 作 BE. 令 CA 延长线上的 F 适合 $EF = EB$. 作正方形 $AFGH$. 于是 H 就是 AB 上所需作的分点,就是说

$$AB \cdot BH = AH \cdot AH.$$

证明是通过面积得出的,所用的是前述一些定理,包括 Pythagoras 定理,关键性的定理是命题 6.

定理的重要意义在于长为 a 的 AB 分成长为 x 及 $a-x$ 的两段,使

$$(a-x)a = x^2$$

或

$$x^2 + ax = a^2.$$

因此就有了解这二次方程的几何方法. 还有,这又把 AB 分成了两部分,一部分是比例的外项,另一部分是比例的中项,就是说,从 $AB \cdot BH = AH \cdot AH$ 可得 $AB : AH = AH : BH$. 第二篇中的其他命题相当于解二次方程 $ax - x^2 = b^2$ 及 $ax + x^2 = b^2$.

命题 14. 作一正方形等于已知的直边形.

所给直边形可以是任何多边形,但若所给的是矩形 $ABEF$(图 4.11),则 Euclid 的方法相当于:延长 AB 至 C 使 $BC = BE$. 以 AC 为直径作圆. 在 B 处作垂线 DB. 所求的正方形就是 DB 上的正方形. Euclid 用面积作出证明. 这定理解出了 $x^2 = ab$ 或者说

求出了 ab 的平方根. 我们将在第六篇里看到用几何方法解出更复杂的二次方程.

第三篇含 37 个命题. 它开头给出有关圆的一些几何定义,然后着手讨论弦、切线、割线、圆心角及圆周角等等. 这些定理大多是中学几何里所熟知的. 下面几个定理值得特别提一下.

命题 16. 通过圆直径一端垂直于直径的直线全在圆外,且在这直线和圆周之间的空间内不能再插入另一直线;半圆和直径夹角大于而半圆和垂线夹角小于直线间的任何锐角.

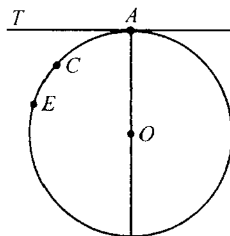


图 4.12

定理的新颖之处在于考察了切线 TA 与弧 ACE 之间的空间(图 4.12);它不仅说在这空间里不能作过 A 并全部在圆外的直线,并考察了切线 TA 与弧 ACE 的夹角. 这角希腊人叫牛头角,对它是否有确定的大小一事当时是有争议的. 命题 16 说这角比直线间的任何锐角小,但没有说这个角的值是零.

Proclus 把牛头角说成是真的角,在中世纪末和文艺复兴时代,Cardan, Peletier, Vieta, Galileo, Wallis 等人也辩论过牛头角的大小问题. 牛头角之所以使后代 Euclid 著作评注者特别感到头疼的地方是,可以作过 A 且与 TA 相切的一些直径愈来愈小的圆,并从直觉上似乎感到这牛头角显然会随之增大,而根据上述命题却并不如此. 从另一方面说,如果任何两个牛头角的值都是零从而都相等,它们就应能重合. 但它们却并不能重合. 因此有些评注家下结论说牛头角不是角①.

第四篇在它的 16 个命题里论述圆的内接和外切图形,如三角形、正方形、正五边形和正六边形. 最后的命题讲怎样在一给定圆内作正 15 边形,据说这是曾用于天文上的;因为在 Eratosthenes

① 根据一般对两曲线夹角的定义,牛头角的值是零.

以前一直认为黄道角(地球赤道面与绕日公转轨道面的交角)之值是24°,或即360°的1/15.

5. 第五篇:比例论

根据Eudoxus的工作而写的这第五篇,被人认为是Euclid几何的最大成就;同《原本》任何其他部分相比,它的内容被人讨论得最多,它的意义被人争论得最激烈. Pythagoras派据说也有关于比例(两个比相等的关系)的理论,即关于可公度量(其比可用整数比表示的那种量)的比例理论. 虽然我们不知道这一理论的细节,但据说就是以后将要讲的第七篇中的内容,并据说曾用之于有关相似三角形的命题. 在Eudoxus以前应用比例关系的数学家,一般在用不可公度量时没有可靠的理论根据. 第五篇把比例关系的理论推广到不可公度量而避免了无理数.

量这个概念原是被人作为包括可公度或不可公度的数量或实体的. 如长、面积、体积、角、重量和时间都是量. 长和面积是早就出现的,例如在第二篇中. 但迄今为止Euclid还没有机会讨论别种量或讨论量的比和比例. 所以在这以前他没有引入量的一般性概念. 现在这一篇里他特别要强调任何一种量的比.

尽管在这一篇里定义占重要地位,但没有真正提到关于量的定义. Euclid开头是这样写的:

定义1. 当一较小的量能够量尽较大的量时,它是较大量的部分.

这里所谓部分是指若干分之一,例如2是6的若干分之一,而4则不是6的若干分之一.

定义2. 当较大量能被较小者量尽时,它是较小者的倍量.

这里所谓倍量是指整数倍量.

定义3. 比是同类量在大小方面的一种关系.

这第三个定义的意义很难同下一定义分开来讲.

定义 4. 若能把两量中任一量倍增后超过另一量,便说此两量有一个比.

这定义的意思是说,量 a 和 b 有一个比,如果 a 的某个整数(包括 1)倍超过 b 且 b 的某个整数(包括 1)倍超过 a 的话. 这定义排除往后要出现的概念,即那并非 0 的无穷小量. 如若两量中有一量小到不能使其有限倍超过另一量,那么根据 Euclid 这个定义是不许它们之间有一个比的. 这定义也排除无穷大量,因那时取较小量的任何有限倍都不会超过那个较大量的. 下一个定义是关键性的定义.

定义 5. 四个量形成第一个量与第二个量之比以及第三个量与第四个量之比. 我们说这两个比是相同的,如果取第一、第三两个量的任何相同的倍数,取第二第四两个量的任何相同的[另一个]倍数后,从头两个量的倍数之间的小于、等于或大于的关系,便有后两个量的倍数之间的相应关系.

定义里说的是,我们有

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

如果 a 及 c 都乘以任一整数 m,b 及 d 都乘以任一整数 n 后,对于所有这样选取的 m 及 n,

$$\text{从}\quad ma<nb\quad\text{推知}\quad mc<nd,$$

$$\text{从}\quad ma=nb\quad\text{推知}\quad mc=nd,$$

以及

$$\text{从}\quad ma>nb\quad\text{推知}\quad mc>nd.$$

我们用现代的数来说明这定义的意思. 为检验

$$\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

这关系是否成立,我们应该(至少从理论上说)查明,对于任何整数 m 和另一任何整数 n,是否能

$$\text{从}\quad m\sqrt{2}<n\cdot 1\quad\text{推知}\quad m\sqrt{6}<n\sqrt{3},$$

$$从\quad m\sqrt{2}=n\cdot 1\quad 推知\quad m\sqrt{6}=n\sqrt{3},$$

$$以及\quad 从\quad m\sqrt{2}>n\cdot 1\quad 推知\quad m\sqrt{6}>n\sqrt{3}.$$

当然在眼前这个例子里相等的情况不会出现，因 m 和 n 是整数，而$\sqrt{2}$是无理数，这意味着 $m\sqrt{6}=n\sqrt{3}$ 不会出现. 定义只是说如果左边三种可能情况之一出现，那么右边的相应情况必然出现. 定义 5 的另一种说法是，使 $ma<nb$ 的整数 m 和 n，同那使 $m'c<n'd$ 的整数 m'和 n'是一样的.

读者可能马上想知道 Euclid 拿上面这个定义干什么用. 当我们要证"若 $a/b=c/d$，则 $(a+b)/b=(c+d)/d$"时，我们是把这里的比和比例都看做数的(即使比是不可公度的)，然后用代数来证明这个结果. 我们知道无理数也可按代数法则进行运算. 但 Euclid 不能这样做也没有这样做. 在那个时候希腊人还没有证明对不可公度量的比能够加以运算；因此 Euclid 就要用他所给出的那些定义特别是定义 5 来证明这个定理. 事实上，他这些定义是为了给量的代数打下基础.

定义 6. 有相同比的量称为成比例的量.

定义 7. 四个量的第一个量和第三个量取相同倍数，其第二个量和第四个量又取另一相同的倍数时，若第一个倍数量大于第二个倍数量而第三个倍数量却并不大于第四个倍数量，则说第一量与第二量之比大于第三量与第四量之比.

定义说的是，只要有那么一个 m 和那么一个 n，能使 $ma>nb$ 而 mc 却并不大于 nd，则 $a/b>c/d$. 因此，对于给定的一个不可公度比 a/b，我们是可以把它放在所有别的这类比(就是说那些小于它的和大于它的比)之间的.

定义 8. 一个比例至少要有三项.

在只有三项的情形下是 $a/b=b/c$.

定义 9. 当三个量成比例时，我们说第一量与第三量之比是第一量与第二量的二次比.

例如,若 $A/B = B/C$, 则 A 与 C 之比是 A 与 B 的二次比. 这意思是说 $A/C = A^2/B^2$, 因 $A = B^2/C$, 故有 $A/C = B^2/C^2 = A^2/B^2$.

定义 10. 当四个量成连比例时,我们说第一量与第四量之比是第一量与第二量的三次比,其余不管有几个量的连比都依次类推.

例如,若 $A/B = B/C = C/D$, 则 A 与 D 之比是 A 与 B 的三次比. 这就是说 $A/D = A^3/B^3$, 因为 $A = B^2/C$, 所以 $A/D = B^2/CD = (B^2/C^2)(C/D) = A^3/B^3$.

定义 11 到 18 规定相应的一些量:更比、逆比、合比、分比、换比等等. 这些指的是从 a/b 形成的 $(a+b)/b$, $(a-b)/b$ 以及其他的比.

第五篇接着就证明关于量和量之比的 25 个定理. 证明是用文字叙述的,并且只根据定义和公理(如等量减等量其差相等). 公设没有用到. Euclid 用线段来说明量,以帮助读者理解定理和证明的意义,但这些定理是适用于所有各种量的.

底下我们用近世代数语言来叙述其中一些命题,用 m, n 和 p 表整数,用 a, b 和 c 表量. 不过,为让大家看看 Euclid 所用的语言,我们在第一个命题里基本上照原文译出以作示范.

命题 1. 任意多个量,分别是同样多个量的相同倍数,那么不管那些个别量的倍数是多少,它们总起来也有那么多倍数.

用代数语言来表示,这就是

$$ma + mb + mc + \cdots = m(a + b + c + \cdots).$$

命题 4. 若 $a/b = c/d$, 则 $ma/nb = mc/nd$.

命题 11. 若 $a/b = c/d$, 而 $c/d = e/f$, 则 $a/b = e/f$.

注意,比的相等是依据比例定义而来的,所以 Euclid 要细心证明相等的关系是可传递的.

命题 12. 若 $a/b = c/d = e/f$, 则 $a/b = (a+c+e)/(b+d+f)$.

命题 17. 若 $a/b = c/d$, 则 $(a-b)/b = (c-d)/d$.

命题 18. 若 $a/b = c/d$, 则 $(a+b)/b = (c+d)/d$.

有些命题似乎同第二篇中的命题重复.但该篇中的那些命题只是对线段陈述并予以证明的,而第五篇则给出对所有各类量都适用的理论.

第五篇对其后数学发展的历史有重大关系.古典希腊人不引用无理数,部分地想靠几何方法来避免它们(如同在回顾第一篇到第四篇内容时所指出的).不过这种几何方法并没有照顾到所有各类不可公度的量,而第五篇则补足了这个欠缺,它是从量的一般理论重新开始的.这样就使处理量的全部希腊几何有了可靠的基础.但仍存在迫切需要解决的问题,即量的理论究竟能不能作为实数(当然包括无理数)理论的逻辑基础.

至于后代数学家怎样来理解 Euclid 关于量的理论,那是不成问题的.他们认为这只能用于几何,从而觉得只有几何才是严格的.所以当文艺复兴时代和其后几个世纪里重又用起无理数来的时候,许多数学家就反对,因为这些数没有逻辑根据.

用批判的眼光考察第五篇的内容后,似可肯定它们是正确的.不错,Euclid 在第五篇里给出的定义和证明没有利用几何.正如前已指出的,他在讲述命题和证明时之所以利用线段只不过是出于教学上的需要.但若说 Euclid 在他关于量的理论里确实提供了关于无理数的理论,那么这只能出之于两种可能的理解.其一是量本身可以看做就是无理数,其二是把两量之比看成是无理数.

我们假定量本身可以看成是无理数.那么,即使不管那些按现代标准对 Euclid 严格性方面的批评,仍有下面一些说不通的地方.Euclid 从未说明他所用的量或量的相等或等价指的是什么意思.此外,Euclid 所处理的并不是量本身而是量的比例关系.两量 a 和 b 只有在它们是长度时才有乘积,才能使 Euclid 把乘积看成面积.于是乘积 ab 就不能看做是个数,因为在 Euclid 书里乘积没有一般性的意义.其次,Euclid 在第五篇里证明的一些关于比例的定理,其本身实际上可(如我们在上面所做的那样)重新陈述为代

数定理.但他为了证第五篇的命题 18 需要对于三个已给量作出第四比例量,而他只能对直线段才作得出这样的量(第六篇命题 12).所以不仅他那个一般量的理论不完全(甚至就他自己在第十二篇里所作的证明而论),而且他以线段作出的证明是依靠几何的.更有甚者,Euclid 在定义 3 里坚持只有同类的量才能形成比.很明显,如果说量就是数,那么这种限制就毫无意义.他其后所用的量的概念都是遵照定义的,因而是同几何分不开的.另一个说不通的地方是他没有提出一个有理数系使他得以添上他的无理数理论.他的书里虽有整数之比,但只是作为比例中的比而出现,而且甚至并不把这些比看做是分数.最后一点是,他那里没有 a/b 和 c/d 的乘积,甚至当 a, b, c 和 d 都是整数时也没有这种乘积,更谈不上当它们是量的时候了.

现在我们来考察把 Euclid 的两量之比理解为数的情况如何.这样,我们把不可公度比看做无理数,把可公度比看做有理数.如果这些比是数,那就至少应该能够把它们相加相乘.但我们在 Euclid 的书中怎么也找不出说明 $(a/b)+(c/d)$ 的意义之处,其中 a, b, c 和 d 都是量.在 Euclid 书中,比只是作为比例的一部分而出现的,因而并无一般性的意义.最后,正如上段所指出的,Euclid 没有有理数概念可供他建立无理数的理论.

因此,1800 年以前数学史实际上所走的道路——完全依据几何来严格处理连续量,就成为不可避免的事.就 Euclid《原本》而论,那里并没有无理数的理论基础.

6. 第六篇:相似形

第六篇里利用第五篇的比例理论讨论相似形.它是从定义开始的,我们只举出几个:

定义 1. 相似直线图形是对应角相等且对应边成比例的那些

图形.

定义 3. 当一线段被分成两段,且整段与较大分段之比等于较大段与较小段之比时,就说此直线被分为外项与中项比.

定义 4. 任一图形之高是从其顶点到底边的垂线.

这定义肯定是含糊的,但 Euclid 没有用它.

在证明本篇中的定理时,Euclid 用他的比例理论而没有把可公度的和不可公度的情形分别讨论. 这种分开来进行讨论的做法是 Legendre 第一个采用的,他用比例的代数定义,但只限于可公度的量,然后再用别的推理如**归谬法**之类来处理不可公度的情形.

我们只打算从 33 个定理中举出几个来. 这里我们仍然可以看到他用几何来处理现代代数里的几个基本结果.

命题 1. 等高的三角形和等高的平行四边形[的面积]之比等于它们的底边之比.

这里 Euclid 所用比例的四个量中有两个量是面积.

命题 4. 在各角对应相等的两个三角形里,夹等角的边以及等角所对的相应边都成比例.

命题 5. 若两三角形的边成比例,则两三角形有同样的角且此两三角形对应边所对之角相等.

命题 12. 从二根已给直线求其比例第四项.

命题 13. 求两根已给直线的比例中项.

这方法是大家熟知的(图 4.13). 这从代数上讲就是,给定 a 和 b,可求得 $\sqrt{ab}$.

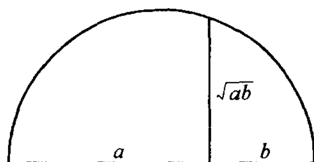


图 4.13

命题 19. 相似三角形[面积]之比等于其对应边的二次比.

这定理现在的说法是:两相似三角形面积之比等于其两对应边的平方之比.

命题 27. 同一直线[一分段]上所作的所有平行四边形,其[在整个

直线段上平行四边形所余部分形成的]亏形与半直线段上一平行四边形相似者,以该半直线段上所作且相似于亏形的那个平行四边形(的面积)为最大.

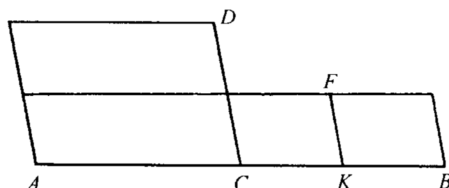


图 4.14

这命题的意思如下:先从所给线段 AB 的一半 AC 上的所给平行四边形 AD 开始(图 4.14).然后考察 AB 的另一段 AK 上的一个平行四边形 AF,它的亏形(即 FB)是相似于 AD 的一个平行四边形.适合 AF 这种条件的平行四边形当然可以作出许多来. Euclid 这个定理说,在所有这样的平行四边形中,作在 AB 之半 AC 上的那个面积最大.

这命题有一个重要的代数意义.设所给平行四边形 AD 是个矩形(图 4.15),并设其两边之比为 c 比 b($b = AC$).现考察矩形 AF,要使它的亏形(矩形 FB)满足相似于 AD 的条件.若记 FK 为 x,则 KB 为 bx/c.令 AB 之长为 a;则 $AK = a-(bx/c)$.因此 AF 的面积 S 是

(1) $$S = x\left(a - \frac{bx}{c}\right).$$

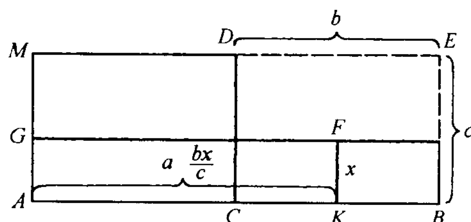


图 4.15

命题 27 说当 AF 为 AD 时面积最大. 但 $AC = a/2$, 于是 $CD = ac/2b$, 因此

$$S \leqslant \frac{a^2 c}{4b}.$$

另一方面,(1)作为 x 的二次方程,它有一个实根的条件是它的判别式大于或等于零. 即

$$a^2 - 4\frac{b}{c}S \geqslant 0$$

或

$$S \leqslant \frac{a^2 c}{4b}.$$

所以这命题不仅告诉我们 S 可能有的最大值是什么,并且告诉我们对一切可能的 S 值能有一个 x 满足(1),从几何上讲它给出了矩形 AF 的一边 KF. 这结果在下面的命题中要用到.

在讲下一命题之前,我们来指出命题 27 的一个有趣的特殊情形. 设所给平行四边形 AD(图 4.15)是个正方形,则 AB 上所有矩形其亏形为相似于 AD 之正方形者,当以 AC 上的正方形为最大. 但 AB(一部分)上矩形 AF 的面积是 $AK \cdot KF$, 而由于 $KF = KB$, 故此矩形的周长等于正方形 DB 或正方形 AD 的周长. 但 AD 的面积大于 AF. 故知有相同周长的矩形中以正方形面积最大.

命题 28. 在所给直线[一部分]上作一平行四边形与所给直边形[S]等面积,且使其[不足于整段直线上的平行四边形的]亏形相似于所给平行四边形[D]. 因此[根据命题 27]所给直边形[S 的面积]必不能大于半段直线上相似于亏形的那个平行四边形.

这定理是解一个二次方程 $ax - (b/c)x^2 = S$ 的几何上的等价说法,这里 S 是所给直边形面积,但须满足 S 不得大于 $a^2c/4b$ 这个条件才有实解. 为指明这一点,设(为方便起见)平行四边形是矩形(图 4.16),S 是所给直边形,D 是另一以 c 及 b 为边的矩形,a 是 AB,x 是所要求的那个矩形的一边. Euclid 所作出的是那么一

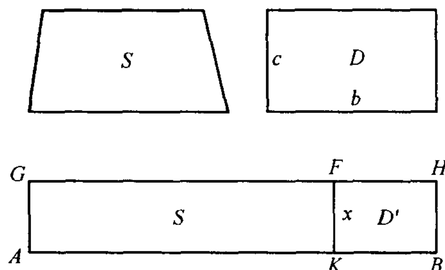


图 4.16

个矩形 $AKFG$,其面积为 S,其亏形 D'相似于 D. 但 $AKFG = ABHG - D'$. 因 D'相似于 D 而面积为 bx^2/c. 因此

$$S = ax - \frac{b}{c}x^2. \tag{2}$$

所以求作 $AKFG$ 一事就是求 AK 和满足方程(2)的 x.

命题 29. 在一所给直线上作一平行四边形,使其面积等于所给一直边形[S](的面积),并使其超出整段直线上的那部分平行四边形与一给定的平行四边形[D]相似.

用代数语言来说,这定理解出了

$$ax + \frac{b}{c}x^2 = S,$$

其中 a, b, c 和 S 是给定的. 这里 S 不受限制,因对于一切正的 S 方程都有实解. Euclid 用命题 28 及 29 所指出的,用现代语言来说,就是怎样求解任一(当其具有一个或两个正的根时)二次方程的问题. 他的作法以长度的形式给出了方程的根.

在命题 28 里,所作平行四边形未占满 AB 全线,而在命题 29 里,所作平行四边形超出所给的 AB 线. 这两类平行四边形在希腊文里分别叫 *elleipsis* 和 *hyperbolè*(亏的和超的). 在整个线段上所作具有规定面积的平行四边形(如第一篇命题 44 中所述者)叫 *parabolè*(齐的). 这些名词以后就移用到圆锥曲线上去,其理由在讨论 Apollonius 的工作时将看得很明显.

命题 31. 直角三角形斜边上的一直边形,其面积为两直角边上两个与之相似的直边形面积之和.

这是 Pythagoras 定理的一个推广.

7. 第七、八、九篇:数论

第七、八、九篇讲述数论,即讲述关于整数和整数之比的性质.这三篇是《原本》中纯粹讨论算术的唯一篇章.在这里 Euclid 把数看成线段,把两数乘积看成矩形,但其论证并不依赖于几何.定理的陈述和证明都用文字,与现今用记号形式表出者不同.

许多定义和定理,特别是关于比例的那些,重复了第五篇中的内容.因此数学史家考虑了这样的问题:为什么 Euclid 要把关于数的命题都重新证一遍,而不让读者参阅第五篇中所已证明了的那些命题.

答案因人而异. Aristotle 确曾把数列为量之一,但他又强调离散量与连续量之间的鸿沟,所以我们不知道 Euclid 在这个问题上有没有受 Aristotle 两种观点之一的影响.我们也无法根据第五篇中含糊其词的定义来判断他那个量的概念是否包括整数.如果根据他单独讨论数这一事实来判断,我们可下结论说他的量并不包括数.但他之所以单独讨论数还有另一种解释,即关于数和可公度比的理论是 Eudoxus 的工作出现以前就有的,而 Euclid 不过是按传统方式来介绍两种独立发展的数学理论:在 Eudoxus 以前的主要是 Pythagoras 派的理论和 Eudoxus 的理论.也许这又是因为他觉得,由于数论可以建立在更简单的理论基础上,所以最好是把它分开来单独处理.我们在现代的数学著述中也发现有这种做法,而且也是出于同样的原因——因为那样做简便些. Euclid 虽把数和量分开来讨论,但他确有几个把它们联系在一起的定理.例如第十篇命题 5 说可公度量之比为一数与一数之比.

也如在其他各篇中一样,Euclid 在这三篇中假定了他未曾明白说出的一些事实. 例如他未经声明就假定若 A 除尽 B 而 B 除尽 C,则 A 除尽 C. 又,若 A 除尽 B 且除尽 C,则 A 除尽 $B+C$ 及 $B-C$.

定义 3. 一较小数为一较大数的一部分,若它能量尽较大者. [一数除尽另一数时为另一数的若干分之一.]

定义 5. 较大数若能为较小数量尽,则它为较小数的倍数.

定义 11. 质数是只能为单位[1]所量尽者.

定义 12. 互质之数是只能为单位所公共量尽的数.

定义 13. 复合数是能为[异于 1 的]某数所量尽者.

定义 16. 两数相乘得出之数称为面,其两边即相乘之两数.

定义 17. 三数相乘得出之数称为体,其三边即相乘之三数.

定义 20. 若第一数之为第二数的某个倍数、某个部分或若干个部分,与第三数之为第四数的某个倍数、某个部分或若干个部分者相同,则此四数成比例.

定义 22. 完全数是等于其因数[之和]者.

命题 1 与 2 给出了求两数最大公度(公因子)的步骤. Euclid 描述这个步骤的说法是:若 A 与 B 是两数且 $B<A$, 从 A 减去足够多次的 B 一直到余数 C 小于 B. 然后再从 B 减去足够多次的 C 直到余数小于 C. 这样一直做下去. 若 A 与 B 互质,最后余数是 1. 那样 1 就是它们最大公因数. 若 A 与 B 不互质,就会在某一阶段有最后一数量尽前一个数的情况. 这最后的数便是 A 与 B 的最大公因数. 这种步骤现今称作 Euclid 算法.

接着是关于数的一些简单定理. 举例说,若 $a=b/n$, $c=d/n$, 则 $a\pm c=(b\pm d)/n$. 有些只不过是以前对于量业经证明了的关于比例的定理而现在又对于数重新证明一次. 如同,若 $a/b=c/d$, 则 $(a-c)/(b-d)=a/b$. 又,在定义 15 里定义 $a\cdot b$ 为 b 自身相加 a 次. 因此 Euclid 证明 $ab=ba$.

命题 30. 若两数相乘得一乘积,并有一质数量尽该乘积,则此质数也量尽两数之一.

这结果在今日数论里是基本的. 现今的说法是:若一质数 p 整除两整数的乘积,则它至少必能整除两因子之一.

命题 31. 任一复合数能为某质数量尽.

Euclid 的证明中说,若 A 为复合数,则依定义它必能为某数 B 所量尽. 若 B 非质数从而又是个复合数,B 将为 C 所量尽. 于是 C 能量尽 A. 若 C 非质数,则照此类推下去. 于是他说,"若继续这样推究,就会得出一个能量尽其前面一数的质数,而此质数也量尽 A. 如果不能得出这样一个质数,那就会有无穷多的一系列愈来愈小的数量尽 A:这对于[整]数来说是不可能的."这里他提出了整数的任何集合都有最小数这一假定.

第八篇继续讲数论;那里无需新的定义. 这一篇实质上是讨论几何数列的. Euclid 的几何数列是成连比例 $a/b = b/c = c/d = d/e = \cdots$ 的一组数. 这连比例满足我们对几何数列的定义,因若 $a, b, c, d, e, \cdots$成几何数列,则任一项与次一项之比为常数.

第九篇结束对数论的讲述. 其中有关于平方数和立方数,平面数和立体数的问题,还有另外一些关于连比例的定理. 值得指出的是以下的命题:

命题 14. 若一数是能为一些质数所量尽的最小的数,则除了原来能量尽它的这些质数以外不能再为别的质数所量尽.

这命题的意思是说:若 a 是质数 $p, q, \cdots$的乘积,则 a 分解为质数乘积的形式是唯一的.

命题 20. 质数的数目比任何指定数目都要多.

换言之,质数的个数是无穷的. Euclid 对这命题的证法是经典性的. 他假定只有有限个质数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$. 然后他作出 $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$, 并论证这新的数是个质数,从而引出矛盾,因为这质数大于所设 n 个质数中的任何一个,这就有了多于 n 个的质数. 另

一方面,如果这新数是个复合数,它必能被一质数整除. 但此质因数不能是 p_1, p_2, $\cdots$,或 p_n,因为新复合数被这些质数除会有余数 1. 于是就必然又有另一个质数;我们又引出了与所设只有 n 个质数相矛盾的结果.

第九篇的命题 35 给出了对几何数列之和的一个漂亮的证明. 命题 6 给出了关于完全数的一个著名定理,即:若几何级数(从 1 开始的)一些项之和

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$$

是质数,那么这个和同最末一项的乘积是完全数,就是说

$$(1 + 2 + \cdots + 2^{n-1})2^{n-1} \text{ 或} (2^n - 1)2^{n-1}$$

是完全数. 头 4 个完全数 6, 28, 496 和 8 128,也许还有第五个完全数是希腊人已经知道了的.

8. 第十篇:不可公度量的分类

《原本》第十篇着手对无理量(与给定量不可公度的量)进行分类. Augustus De Morgan 用下面的话来描述这一篇的总内容:"Euclid 考察了可能表为[今日代数里的]$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 的所有线段, a 与 b 则为两有理线段." 当然并不是所有无理量都能这样表示的,所以 Euclid 只涉及了在他的几何代数法里所出现的无理量.

第十篇的第一个命题对《原本》其后几篇的讲解是重要的.

命题 1. 对于两个不相等的量,若从较大量减去一个比它的一半还要大的量,再从所余量减去大于其半的量,并继续重复执行这一步骤,就能使所余的一个量小于原来那个较小的量.

Euclid 在证明的末了说,若定理中所减去的是一半的量,这也能证明. 他的证明里有一步用了一个没有被他自觉意识到的公理:在两个不等的量中,较小者可自己相加有限倍而使其和超过较大

者;Euclid 把有问题的这一步建立在两个量之比的定义上(第五篇定义 4). 但此定义并不足以说明这一步是对的. 这定义说当两个量之中的任一量自身相加足够多次后便能超过另一量,则此两量有一个比;因此 Euclid 应该证明这一点对他所说的量是可以做到的. 但他却假定他的量可以相比,并利用了较小量自身相加足够多次后可以超过较大量的事实. 据 Archimedes 所说,Eudoxus 是用过这个公理(严格地说是其等价说法)的,他是把它作为一个引理建立起来的. Archimedes 用了这一引理而未加证明,所以他实际上也是把它作为公理来用的. 现今把这称为 Archimedes-Eudoxus 公理.

第十篇共 115 个命题,但有些版本有 116 个或 117 个定理. 后者给出了第 3 章所述关于 $\sqrt{2}$ 为无理数的证明.

9. 第十一、十二、十三篇:立体几何及穷竭法

第十一篇开始讲立体几何,但仍有一些平面几何的重要定理. 这一篇开始是定义.

定义 1. 立体是有长、宽、高的(那种东西).

定义 2. 立体的边界之一是一个面.

定义 3. 若一直线垂直于一平面上所有与其相交的直线,则直线与平面相垂直.

定义 4. 两平面相交,若在其中一平面内向交线所作的垂线垂直于另一平面,则两平面垂直.

定义 6. 平面与平面的夹角是每一平面内过公共交线上一点的垂线所夹的锐角.

我们称这锐角为两面角的平面角.

此外还定义了平行平面、相似立体形、立体角、棱锥、棱柱、球、圆锥、圆柱、立方体、正八面体、正十二面体及其他立体形. 球定义

为半圆绕直径旋转而得出的立体形. 圆锥定义为直角三角形绕一直角边旋转而得出的图形. 然后就按作为轴的那直角边之小于、等于或大于另一直角边，而分别把圆锥分为钝角的、直角的和锐角的. 圆柱是由矩形绕其一边旋转产生的图形. 最后这三个定义的意义在于，除正多面体外，书中立体图形都是从平面图形绕一轴旋转而得出的.

定义都叙述得不严密不清楚并且常常假定一些定理，举例说，在定义 6 里假定了两平面交线上任一点处的那个锐角都相等. 又 Euclid 打算考察的仅限于凸的立体形，而在定义正多面体时没有特别提出.

这一篇只考虑平面元素所形成的立体形. 所含 39 个定理中的头 19 个讲直角和平面的性质，例如关于垂直于平面和平行于平面的直线这方面的定理. 本篇中头几个定理的证明是有缺点的，而关于多面体的许多一般性定理只对特殊情形加以证明.

命题 20. 若三个平面角夹成一立体角，则其中任何两个平面角之和都大于剩下的一个平面角.

就是说，在 CAB, CAD, 和 BAD 三平面角中，任意两角之和大于第三角(图 4.17).

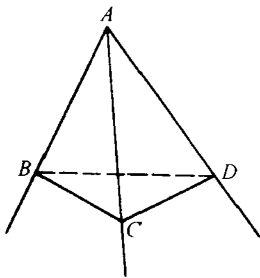


图 4.17

命题 21. 由平面角夹成的任何立体角，其平面角之和小于四直角.

命题 31. 底面相等且高相等的平行六面体彼此(的体积)相等[等价].

命题 32. 同高的平行六面体(的体积)之比等于其底面(积)之比.

第十二篇含 18 个关于面积和体积的定理，特别是关于曲线和曲面所围形体的面积和体积. 本篇的主要思想是穷竭法，这是得自 Eudoxus 的，表述在第十篇定理 1 中. 举例说，为证明两圆面积之比等于其直径平方之比，此法就以内接正多边形愈益密切地接近

两圆，而因定理对正多边形成立，故证明了它对圆也成立. 穷竭一词起因于相继作正内接多边形“穷竭”了圆的面积. 希腊人未用这个名称，这是 17 世纪人起的名称. 这个名称和这种描述，也许会使读者觉得这方法只是大致近似，仅仅是走向严格极限概念的某一步. 但我们将会看到这方法是严格的. 它不含明确的极限步骤；它依赖于间接证法，这样就避免了用极限. 实际上 Euclid 在面积和体积方面的工作比 Newton 和 Leibniz 在这方面的工作严密可靠，因后者试图建立代数方法和数系并且想用极限概念.

为更好地理解穷竭法，我们来比较详细地考察一个例子.（下章在谈到 Archimedes 的工作时还要考察几个例子.）第十二篇的开头是：

命题 1. 圆内接相似多边形之比等于圆直径平方之比.

我们不给出证明了，因它没有什么特色. 现在来讲那个关键的命题.

命题 2. 圆与圆之比等于其直径平方之比.

底下是 Euclid 证明的主要精神：他先证明圆可被多边形所“穷竭”. 在圆里面内接一个正方形(图 4.18). 正方形面积大于圆面积的 1/2，这是因为它大于外切正方形面积的 1/2，而外切正方形面积又大于圆. 今设 AB 是内接正方形的一边. 平分弧 AB 于点 C 处并连结 AC 与 CB. 作 C 处的切线，然后作 AD 及 BE 垂直于切线. $\angle 1 = \angle 2$，因两者都是弧 CB 的 1/2. 于是 DE 平行于 AB，故 $ABED$ 为一矩形，其面积大于弓形 $ABFCG$. 因此等于矩形面积一半的三角形 ABC 大于弓形 $ABFCG$ 的

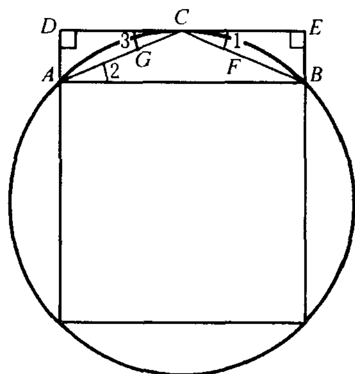


图 4.18

1/2. 对正方形的每边都这样做，便得一正八边形，它不仅包含正方形而且包含圆与正方形面积之差的一半以上. 在八边形的每边上也可以完全按照在 AB 上作三角形 ACB 那样地作一三角形. 这就得一正十六边形，它不仅包含八边形，而且还包含圆与八边形面积差的一半以上. 这种做法你想做多少次就可以做多少次. 然后 Euclid 用第十篇的命题 1 肯定圆和某一边数足够多的正多边形面积之差可以弄得比任何给定的量还要小.

现设 S 与 S' 是两圆面积(图 4.19)，并设 d 和 d' 是其直径. Euclid 要证

(3) $$S : S' = d^2 : d'^2.$$

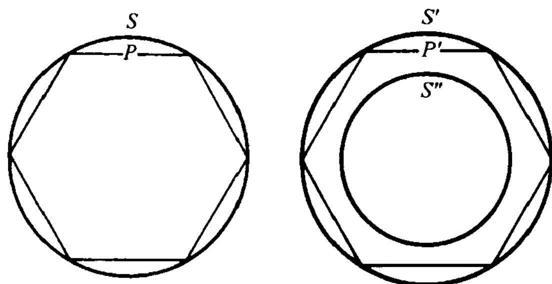


图 4.19

假设这等式不成立，而有

(4) $$S : S'' = d^2 : d'^2,$$

其中 S'' 是大于或小于 S' 的某一面积.(作为面积的那个比例第四项的存在，在此处及第十二篇其余部分都是默认的.)今设 $S'' < S'$. 我们在 S' 里作边数愈来愈多的正多边形，一直作到一个 P' (比方那么说)，使它和 S' 的面积之差小于 $S' - S''$. 这多边形是可以作出的，因上面已证明可使圆 S' 和内接正多边形[面积]之差小于任意给定的量，从而小于 $S' - S''$. 于是有

(5) $$S' > P' > S''.$$

在 S 中作相似于 P' 的内接多边形 P. 据命题 1，有

$$P : P' = d^2 : d'^2.$$

而据(4)我们也有

$$P : P' = S : S''$$

或

$$P : S = P' : S''.$$

但因 $P < S$，于是

$$P' < S'',$$

而这与(5)矛盾.

同样可证 S''不能大于 S'. 因此 $S'' = S'$，而由于(4)这就证明了比例(3).

这方法用之于证明下面那样重要而难证的定理如：

命题 5. 底为三角形而高相等的棱锥之比等于其底之比.

命题 10. 任一[正]圆锥是与其同底等高圆柱的三分之一.

命题 11. 同高的圆锥[与圆锥]以及同高的圆柱[与圆柱]之比等于其底之比.

命题 12. 相似的圆锥之间以及圆柱之间的比，等于其底直径的三次比[立方之比].

命题 18. 球之比等于其直径的三次比.

第十三篇讲正多边形本身的性质及其内接在圆内时的性质，并论述怎样把五种正多面体内接于一个球的问题. 它又证明(凸的)正多面体不能多于五种. 最后这一结果是该篇中最末一个命题(命题 18)的推论.

关于正多面体不能多于五种的证明要依赖于前面的一个定理(第十一篇命题 21)，即立体角各面角之和必小于 360°. 因此若把一些等边三角形拼起来，就可在正多面体的每个顶点用三个等边三角形拼合成一个正四面体；可以每次用四个等边三角形拼合成一个正八面体；可以每次用五个等边三角形拼合成一个正二十面体. 六个等边三角形在一个顶点处合成 360°所以就不能用. 我们可以在每一顶点用三个正方形构成一个立方体. 我们可以在每个

顶点用三个正五边形构成一个正十二面体. 此外不能再构成别的正多面体了,因为即令只用三个其他多边形拼在一顶点就要等于或超过 360°. 注意 Euclid 假定正多面体都是凸的. 但其他非凸的正多面体还是有的.

《原本》十三篇中共含 467 个命题. 有些老版本里还多两篇,其中有关于正多面体的更多的结果,但第十五篇写得不清楚不准确. 但那两篇都是 Euclid 以后的人写的. 第十四篇是 Hypsicles(约公元前 150 年)写的,而第十五篇的有些部分可能是在公元 6 世纪这样晚的时候写的.

10.《原本》的优缺点

因《原本》是最早一本内容丰富的数学书,而且为所有后代人所使用,所以它对数学发展的影响超过任何别的书. 读了这本书之后,可以对数学本身的看法,对证明的想法,对定理按逻辑次序的排法,都学到一些东西,而且它的内容也决定了其后的思想发展. 因此我们应该指出它有哪些特点能如此深刻地影响日后的数学.

虽然,正如前面已指出过的,个别命题的陈述方式并非 Euclid 所独创,但整部书的陈述方式——一开头就摆出所有的公理,明确提出所有的定义,和有条不紊的一系列定理——这是 Euclid 所独创的. 此外,定理的编排也是从简单的到愈来愈复杂的.

Euclid 把他认为是头等重要的定理选入这本书里. 例如他没有在书中列入三角形三个高交于一点的定理. 还有一些 Euclid 其他著作中的定理(这些我们不久就要讲到),他也认为是不值得包括在《原本》中的.

虽然在 Euclid 以前就有人提出要先证明图形存在才能把这图形作为逻辑对象来处理,但在他手里终于把这一步前提工作搞

得巧妙周密. 根据公设 1, 2 和 3,作图只许作出直线和圆. 这实际就是只许用直尺和圆规. 正由于 Euclid 不能作出角的三等分线,所以他没有证明关于三等分角的定理.

尽管证明里有些遗漏和错误(我们不久就要指出),Euclid 对公理的选择是搞得很出色的. 他能用一小批公理证出几百个定理,其中好多是深奥的. 其次,他的选择是费了心机的. 他对平行公理的处理特别显得聪明. 他无疑知道,任何这样的公理都不免或明或暗地要提到在无限远空间所必然出现的事,而关于在无限远空间所必然成立的事项的任何说法,它的具体意义总是含糊不清的,因为人的经验是有限的. 然而他也认识到这样的公理不能省掉. 于是就采取了这样一种说法,提出二直线能交于有限远处的条件. 更有甚者,他在求助于这一公理以前先证明了所有无需它来证的定理.

Euclid 虽用图形的重合来证全等(这是根据公理 4 的一个方法),但他显然对这方法是否完善无缺有点不放心. 这方法有两点值得怀疑:第一,它用了运动的概念,而这是没有逻辑依据的;第二,重合法默认图形从一处移动到另一处时所有性质保持不变. 你诚然证明了移过去的图形与第二个图形全等,但在原位置处的第一个图形可能不全等于第二个图形. 要假定移动图形而不致改变它的性质,那就要对物理空间假定很多的条件. 确实,Euclid 几何的整个目的正是为了比较不同位置的图形. Euclid 对这方法不甚放心的证据是:凡他能用其他方法来证的地方,他总不用这方法,即使是重合法能给出更简单的证明.

虽然直到 19 世纪大半段时间以前,数学家一般都把 Euclid 的著作看成是严格性方面的典范,但也有少数数学家看出了其中的严重缺点并设法纠正. 第一是用了重合法. 第二是有些定义含糊其词而另一些无关宏旨. 开头关于点、线、面的定义没有明确数学的含义,而且(正如我们今日认识到的)不可能给出任何明确的含

义,因为任何独立的数学讲解必然要用些未加定义的名词(参看第3节).至于许多定义之含糊其词,那只要回头去看看第五篇里的那些定义就足以为例了.对定义的另一不满之处是有些定义,例如第一篇中的定义17,应用了未加定义的概念①.

利用今天的认识(那是理所当然的)来对Euclid的著作进行批判研究的结果,可以发现他用了数十个他所从未提出而且无疑并未发觉的假定.有几个我们已在本书前面指出过.Euclid和后代上百个最优秀的数学家所犯的错误,是利用了从图形看来是显然的事实,或在直观上是那么显然因而无意中用上了的事实.在有些情形下,那些无意中用上了的假定可以去掉而可根据明确的假定另行证明,但一般说这是办不到的.

在那些不自觉作出的假定中,包括关于直线和圆的连续性的假定.在第一篇命题1的证明里假定了两圆有一公共点.每个圆是一个点集,很可能两圆彼此相交而在假定的点或所谓交点(一个或两个)处没有两圆的公共点.按照《原本》里的逻辑基础来说,两直线可能相交而没有一个公共点.

在一些实际给出的证明里也有缺点.有些是Euclid搞错的地方可以纠正,但少数地方需要给出新的证明.另一类缺点是《原本》中通篇都有,那就是只用特例或所给数据(图形)的特定位置证明一般性的定理.

虽然我们赞扬了Euclid《原本》内容在整体上的组织,但全书十三篇并未呵成一气,而在某种程度上是前人著作的堆砌.例如,我们已经指出过第七、八、九篇对整数重复证明了先前对量所给出的许多结果.第十三篇的第一部分重复了第二和第四篇中的结果.第十、十三篇可能在Euclid以前是单独的一本著作,而且是属于Theaetetus的.

这些缺点好多是由后代评注者指出的(第42章第1节),而且

---

① 原文为"事先假定了一个公理".——译者注

很可能也是直接继承 Euclid 衣钵的数学家已经发现的. 但尽管有这些缺点,《原本》一书是写得那么成功,使它取代了此前的所有几何课本. 早在公元前 3 世纪尚有其他几何著作流传之时,甚至 Apollonius 和 Archimedes 在提到前人成就时也都参照《原本》.

11. Euclid 的其他数学著作

Euclid 写了一些别的数学和物理著作,好些是对数学发展有重要意义的. 对他的主要物理著作《光学》(*Optics*)和《镜面反射》(*Catoptrica*)我们留待在后一章里讨论.

Euclid 的著作《数据》(*Data*)被 Pappus 收入他的《分析集锦》. Pappus 说它包含关于"代数问题"的补充几何材料. 当给定或求出某些量后,定理就确定别的一些量.《数据》中的材料本质上同《原本》中的材料无异,但有些特殊定理不同.《数据》可能是打算作为供复习《原本》用的一批练习题,它的全部内容保存至今.

Euclid 著作中仅次于《原本》的是《二次曲线》(*Conics*),它在数学史上有最重要的作用. 据 Pappus 说这共含四篇的失传著作其后成为 Apollonius《圆锥曲线》中头三篇的主体内容. Euclid 把二次曲线分为三类不同圆锥(直角的、锐角的和钝角的)的割线来处理. 椭圆可由任一圆锥或任一圆柱的割线得出. 但(以后可以看出)Apollonius 改变了对圆锥曲线的观点.

Euclid 的《辨伪术》(*Pseudaria*)一书含有正确和错误的几何证明,目的是为训练学生之用,但已失传.

Proclus 所提到的 Euclid 著作《论[图形的]剖分》(*On Divisions* [of figures])是论述把所给图形剖分为其他图形的,例如把一个三角形剖分为一些较小的三角形或把一三角形剖分为三角形和四边形. 这书有一本拉丁文译本,可能是 Gerard of Cremona

(1114—1187)根据一本既不正确又不完整的阿拉伯文译本转译的. 1851 年 Franz Woepcke 发现另一本似属正确的阿拉伯文译本并将其译出. 此书现有 R. C. Archibald 的英译本.

另一部失传的著作是《衍论》(*Porisms*). 此书的大部分内容甚至性质也无人知道. Pappus 在他的《数学汇编》中说《衍论》共三篇. 根据 Pappus 和 Proclus 所讲的话，一般认为《衍论》主要是关于实际绘制那些存在性已不成问题的几何对象的. 所以这些问题是介于纯理论与证明存在性的作图题之间的. 在某些给定条件下求出圆心的问题可能是《衍论》中的典型问题.

Pappus 在他的《汇编》中还提到《曲面-轨迹》(*Surface-Loci*)一书. 此书现已无存，可能是讲形成曲面的一些轨迹的.

Euclid 的《现象》(*Phaenomena*)虽是天文学教本，但其中有关于球面几何的 18 个命题以及关于匀速旋转球的其他命题. 他把地球看做旋转的球. 这书现有几种译本.

12. Apollonius 的数学著作

古典时期的另一伟大希腊数学家(就其总结和创造古典时代数学研究的门类这两重意义而论)是 Apollonius(约公元前 262—前 190). Apollonius 生于小亚细亚西北部的城市佩尔加(Perga)，该地区在他的一生中处于 Pergamum 的统治之下. 他青年时代去亚历山大城，从 Euclid 的门人那里学习数学. 据目前所知道的材料，他嗣后卜居亚历山大城和当地的大数学家合作研究. 他的主要著作是关于圆锥线的，但也写过其他方面的著作. 他的数学才能是如此卓越，使他在当代及后世以“大几何学家”闻名. 他作为天文学家的声誉也一样地大.

我们知道在 Apollonius 时代以前早就有人研究圆锥曲线了. 特别是老 Aristaeus 和 Euclid 都写过这方面的书. 还有 Archimedes 的

著作中(随后就要讨论)也包括这方面的一些结果. 但 Apollonius 做了去粗取精和使之系统化的工作. 他的《圆锥曲线》(*Conic Sections*)除了综合前人的成就之外,还含有非常独到的创见材料,而且写得巧妙、灵活,组织得很出色. 按成就来说,它是这样一个巍然屹立的丰碑,以至后代学者至少从几何上几乎不能再对这个问题有新的发言权. 这确实可以看成是古典希腊几何的登峰造极之作.

《圆锥曲线》一书分八篇共含 487 个命题. 这几篇著作中,前四篇是从 12、13 世纪的希腊手稿复制出来的,其后三篇是从 1290 年的阿拉伯译本转译的. 第八篇已失传,但 17 世纪 Halley 根据 Pappus 书中的启示搞出一个整理本.

Euclid 的前人、Euclid 本人和 Archimedes,都像 Plato 派学者 Menaechmus 最早所提出的那样,把圆锥曲线看成是从三种正圆锥割出的曲线. Euclid 和 Archimedes 都知道从其他两种圆锥也能割出椭圆,并且 Archimedes 还知道跟斜圆锥上所有母线相交的平面能在其上割出椭圆. 他也许认识到在斜圆锥上能割出其他圆锥曲线.

但 Apollonius 是第一个依据同一个(正的或斜的)圆锥的截面来搞圆锥曲线理论的人. 他也是第一个发现双曲线有两支的人. Apollonius 的前人 Menaechmus 和其他人之所以要用三类直圆锥的垂直于其一母线的截面,后人的一种猜测是,并不是因为他们不知道这每种圆锥上也可以有别的圆锥曲线,而是因为他们要处理关于这种曲线的逆问题. 对于给定的曲线,如果它们具有圆锥曲线的几何性质,在证明它们可以由圆锥上的截面得出时,对截面垂直于一根母线的情形是比较容易证明的.

我们先来考察第一篇中所述的关于圆锥曲线的定义和性质. 给定一圆 BC 及圆所在平面外一点 A(图 4.20),则过 A 且沿圆周移动的一根直线便生成一双锥面. 这圆叫圆锥的底. A 到圆心的直线叫圆锥的轴(未画出). 若轴垂直于底,这是正圆锥;否则便是斜

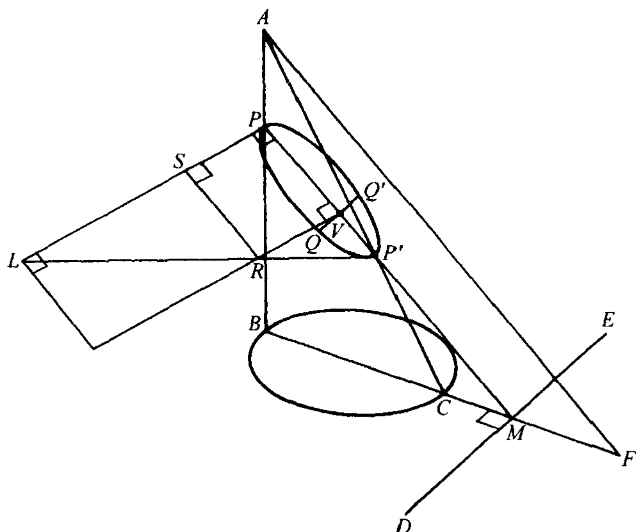


图 4.20

圆锥. 设锥的一个截面与底平面交于直线 DE. 取底圆的垂直于 DE 的一条直径 BC. 于是 ABC 就是含有圆锥轴的一个三角形,叫做轴三角形. 设这三角形与圆锥曲线交于 P 及 P'(原文为交于 PP',似系笔误——译者). (PP'不一定是圆锥曲线的轴.)$PP'M$ 是由截面和轴三角形相交而定的直线①. 设 QQ'是圆锥曲线的平行于 DE 的一弦. 因此 QQ'未必垂直于 PP'. Apollonius 随即证明 QQ'为 PP'所平分,从而 $VQ=\frac{1}{2}QQ'$.

现作 AF 平行于 PM 并交 BM 于 F. 再在截面上作 PL 垂直于 PM. 对椭圆和双曲线,取 L 使适合条件

$$\frac{PL}{PP'}=\frac{BF\cdot FC}{AF^2},$$

对抛物线,取 L 使适合

① Apollonius 指出,在斜圆锥的情形下,PM 未必垂直于 DE,只有在正圆锥或在 ABC 平面垂直于斜圆锥的底平面时,才有 PM 垂直于 DE 的关系.

$$\frac{PL}{PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}.$$

在椭圆和双曲线的情形下,我们作 $P'L$. 从 V 作 VR 平行于 PL 交 $P'L$ 于 R.(在双曲线的情形下,P' 在双曲线的另一支上,须延长 $P'L$ 才能定出 R.)

Apollonius 在作出一些辅助线之后(这里不细讲),证明对于椭圆和双曲线有

$$QV^2 = PV \cdot VR. \tag{6}$$

Apollonius 把 QV 称做圆锥曲线的一个纵坐标线,所得结果(6)便说明纵坐标线的平方等于作在 PL 上的一个矩形 $PV \cdot VR$. 他又证明在椭圆的情形下,这矩形未填足整个矩形 $PV \cdot PL$, 而亏缺一个相似于矩形 $PL \cdot PP'$ 的矩形 LR. 因此椭圆的原名就叫"亏曲线"(ellipse)(第6节).

在双曲线的情形下,(6)还是成立的,但作图的结果是 VR 大于 PL,所以矩形 $PV \cdot VR$ 超出作在 PL 上的矩形 $PL \cdot PV$, 而所超出的那个矩形 LR 相似于矩形 $PL \cdot PV$. 因此双曲线的原名就叫"超曲线"(hyperbola). 在抛物线的情形下,(6)不成立,而有

$$QV^2 = PV \cdot PL, \tag{7}$$

所以等于 QV^2 的那个矩形恰好是与 PL 相齐的矩形 $PV \cdot PL$. 因此抛物线的原名就叫"齐曲线"(parabola).

抛物线(齐曲线),椭圆(亏曲线)和双曲线(超曲线)之称是 Apollonius 引入的,它们取代了以前 Menaechmus 所用的直角圆锥曲线、锐角圆锥曲线和钝角圆锥曲线之称. Archimedes 书里出现抛物线和椭圆之称的地方(如在他的《抛物线的求积》(*Quadrature of the Parabola*)中,见第5章第3节),是后人抄录时改过来的.

方程(6)和(7)是圆锥曲线的基本平面性质. Apollonius 推出这两个性质之后就不再利用圆锥而直接从这两个方程推出曲线的其他性质,Apollonius 用 PV,纵坐标线或半弦 QV,以及几何等式

(6)和(7)推出性质的做法,实际上就相当于我们今天用横坐标、纵坐标和圆锥曲线方程推出曲线性质的做法. 当然在 Apollonius 的做法里没有用到代数.

我们很容易把 Apollonius 得出的基本性质翻译成近世坐标几何中的语言. 记 PL(Apollonius 称它为正焦弦或纵线参量)之长为 $2p$,记直径 PP'之长为 d,若 x 是从 P 点量起的距离 PV, y 是距离 QV(这相当于应用斜坐标),则从(7)立即可以看出抛物线的方程是

$$y^2 = 2px.$$

对于椭圆,我们先从定义它的方程(6)得出

$$y^2 = PV \cdot VR.$$

但 $PV \cdot VR = x(2p - LS)$. 又因矩形 LR 相似于矩形 $PL \cdot PP'$,所以

$$\frac{LS}{PL} = \frac{x}{d}.$$

故 $LS = 2px/d$. 于是

$$y^2 = x\left(2p - \frac{2px}{d}\right) = 2px - \frac{2px^2}{d}.$$

对于双曲线,我们有

$$y^2 = 2px + \frac{2px^2}{d}.$$

在 Apollonius 的做法里,抛物线的 d 是无穷大,由此可以看出怎样把抛物线作为椭圆或双曲线的一种极限情形来处理.

为往下叙述 Apollonius 怎样处理圆锥曲线,需要讲一些概念的定义,它们在近世的几何学里也仍然是重要的. 考察椭圆的一组平行的弦,例如图 4.21 中平行于 PQ 的一组弦. Apollonius 证明这批弦的中点都在一直线 AB 上,而称 AB 为圆锥曲线的直径. (图 4.20 这个基本图形里的线段 PP'便是一直径.)然后他证明,若过 AB 的中点 C 作直线 DE 平行于原来的那组弦, 这 DE 将平

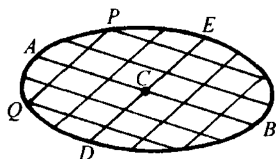


图 4.21

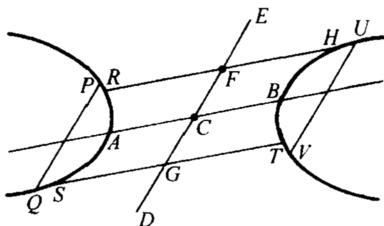


图 4.22

分所有平行于 AB 的弦. DE 叫做 AB 的共轭直径. 在双曲线的情形下(图 4.22),弦可能在每个分支之内,如 PQ,直径是两个分支间所截的那一段(如果它被两个分支所截的话),如图中的 AB. 于是平行于 AB 的弦,如 RH,就在两个分支之间. AB 的共轭直径,如 DE,则定义为 AB 与双曲线的正焦弦的比例中项,它并不与双曲线相交. 抛物线的任一直径(即通过一组平行弦中点的直线)总是平行于对称轴的,但对于给定直径并没有共轭直径,因为平行于给定直径的每根弦都是无限长. 椭圆或双曲线的轴是彼此互相垂直的两直径. 抛物线的轴(图 4.23)则是与相应弦相垂直的那个直径.

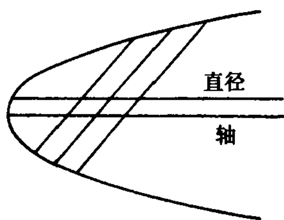


图 4.23

Apollonius 介绍了圆锥曲线的基本性质之后,就证明关于共轭直径的一些简单事实. 第一篇中也论述圆锥曲线的切线. Apollonius 把这切线看成是与圆锥曲线只有一个公共点且全部在圆锥曲线之外的直线. 然后他证明过直径一端点(基本图 4.20 中的点 P)所作平行于其相应弦(平行于该图中的 QQ')的直线将在圆锥曲线之外,且该直线与圆锥曲线之间不可能再有别的直线(见《原本》第三篇,命题 16). 因此所论直线与圆锥曲线接触于一点,就是说,它是圆锥曲线在 P 处的切线.

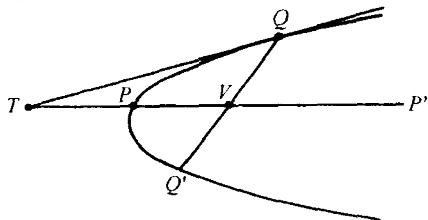


图 4.24

另一个关于切线的定理指出下列事实：设 PP' 是抛物线的一直径（图 4.24），而 QV 是它的一根相应弦. 于是若在直径延长到曲线外的那部分上取一点 T 使 $TP = PV$，而 V 则是该直径与其相应弦 QQ' 的交点（原文为“从 Q 到直径 PP' 上的纵坐标线（弦）的足”），则直线 TQ 与抛物线切于 Q 处. 对椭圆和双曲线也有类似的定理.

Apollonius 然后证明，若在基本图 4.20 中取圆锥曲线的其他直径而不取 PP'，定义圆锥曲线性质的方程(6)及(7)仍照旧；但那时方程里的 QV 当然是指所取直径的相应弦了. 他所做的，用我们的话来说，就相当于从一种斜坐标系变换到另一种斜坐标系. 关于这一点，他还证明，从所取的任一直径和纵坐标线，可以变换到直径（轴）和纵坐标线相垂直的情形. 这用我们的话来说就是变到直角坐标系. Apollonius 还指出怎样从给定的某些数据（例如给定一直径，正焦弦，纵坐标线与直径的交角）来作出圆锥曲线. 他是先作出有关的圆锥后获得所需圆锥曲线的.

第二篇一开头讲双曲线渐近线的作法和性质. 例如他不仅指出双曲线的渐近线存在，而且指出在曲线上的足够远处，曲线上一点与渐近线的距离小于任意给定的长度. 然后他引入所给双曲线的共轭双曲线，并证明它同所给双曲线具有相同的渐近线.

第二篇的其余定理说明如何求一圆锥曲线的直径，求有心圆锥曲线的中心，求抛物线和有心圆锥曲线的轴. 例如，若 T 是圆锥

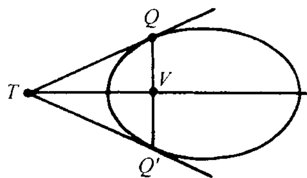


图 4.25

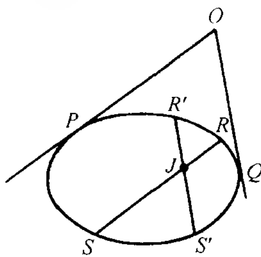


图 4.26

曲线外一点(图 4.25),TQ 与 TQ' 是圆锥曲线上在 Q 与 Q' 处的切线,V 是弦 QQ' 的中点,则 TV 是直径. 求圆锥曲线直径的另一方法是作两根平行弦;连接两弦中点的那根直线便是一直径. 有心圆锥曲线的任何两直径的交点便是它的中心. 这一篇最后讲怎样作圆锥曲线的切线,使其满足给定条件,例如,过给定的一点.

第三篇开头论述关于切线与直径所成图形的面积的定理. 那里的一个主要结果是(图 4.26):若 OP 与 OQ 是圆锥曲线的切线,且若 RS 是平行于 OP 的任一弦,$R'S'$ 是平行于 OQ 的任一弦,又若 RS 与 $R'S'$ 交于 J(在圆锥曲线内部或外部),则有

$$\frac{RJ \cdot JS}{R'J \cdot JS'} = \frac{OP^2}{OQ^2}.$$

这定理是初等几何里一个熟知定理的推广:圆内两弦相交,每根弦被交点所分两段的乘积相等,因在圆的情形下,上式右边的 $OP^2/OQ^2 = 1$.

第三篇后一部分论述极点和极线的所谓调和性质. 如在图 4.27中,若 TP 与 TQ 是圆锥曲线的切线,TRS 是过 T 并交圆锥曲线于 R 及 S,交 PQ 于 I 的任一直线,则

$$\frac{TR}{TS} = \frac{IR}{IS}.$$

就是说,T 外分 RS 的比等于 I 内分 RS 的比. PQ 线叫点 P 处的极线, T, R, I, S 可说是形成一组调和点. 又若通过 PQ 中点 V

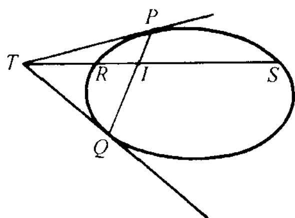


图 4.27

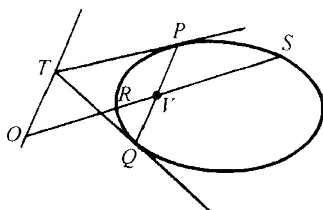


图 4.28

(图 4.28)的任一直线交圆锥曲线于 R 及 S,交过 T 且平行于 PQ 的直线于 O,则有

$$\frac{OR}{OS}=\frac{VR}{VS},$$

过 T 的那根直线是 V 的极线,而 O, R, V 及 S 是一组调和点.

书中接着讲有心圆锥曲线的焦点的性质;但那里没有提到抛物线的性质.椭圆和双曲线的焦点(Apollonius 没有焦点这个词)定义为(长)轴 AA' 上那样的两点 F 及 F',它们使 $AF \cdot FA' = AF' \cdot F'A' = 2p \cdot AA'/4$ (图 4.29). Apollonius 对椭圆和双曲线证明:圆锥线上一点 P 与焦点相连的两线 PF 及 PF' 与 P 处的切线交于等角,且焦距 PF 与 PF'之和(对椭圆的情形)等于 AA',焦距之差(对双曲线的情形)等于 AA'.

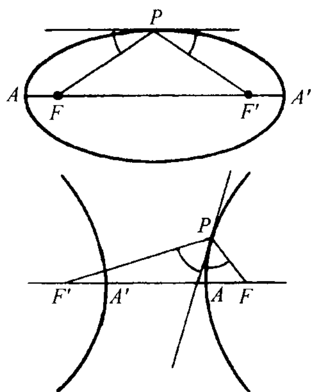


图 4.29

书中没有谈准线,但圆锥曲线为到定点(焦点)距离与到定直线(准线)的距离之比为常数的点的轨迹,Euclid 是知道的,并由 Pappus 述及且给出证明(第 5 章第 7 节).

Euclid 曾部分地解决了一个著名的问题:设动点与四根固定

直线的距离 p, q, r, s 满足条件 $pq = \alpha rs$, 其中 α 为已知,求该动点的轨迹. Apollonius 在其《圆锥曲线》的序言中说这问题可用第三篇中的命题解决. 这确实是能做到的;Pappus 也早知道这轨迹是一圆锥曲线.

第四篇讲极和极线的其他性质. 例如,有一个命题给出了从圆锥曲线外一点 T 向其作两切线的方法(图 4.30). 作 TQR 及 $TQ'R'$. 令 O 是 QR 上对于 T 的第四个调和点,即 $TQ : TR = OQ : OR$; 又令 O' 是 $Q'R'$ 上对于 T 的第四个调和点. 作 OO'. 于是 P 与 P' 是切点.

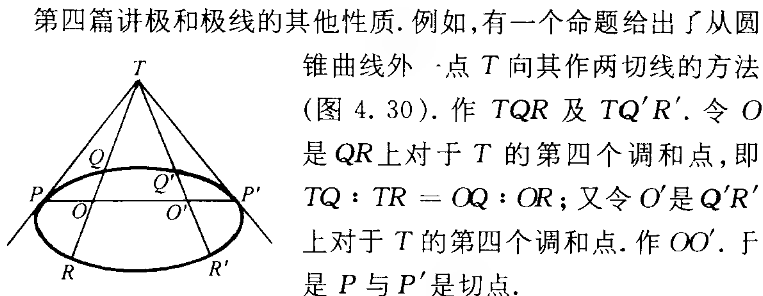


图 4.30

该篇其余部分讲各种位置的圆锥曲线可能有的交点数目. Apollonius 证明两圆锥曲线至多相交于四点.

第五篇在其新颖和独到之处最为出色. 它论述从一特定点到圆锥曲线所能作的最长和最短的线. Apollonius 先从有心圆锥线长轴上或抛物线轴上的特殊点讲起,求出从这些点到曲线的最大距离与最小距离. 然后他取椭圆短轴上的点来照样做. 他又证明,若 O 是任一圆锥曲线内的任一点,且若 OP 是从 O 到圆锥曲线的一极小或极大距离,则 P 处垂直于 OP 的直线是 P 处的切线;又若 O' 是 OP 延长线上在圆锥曲线外面的任一点,则 $O'P$ 是从 O' 到圆锥曲线的极小线. 切线在切点处的垂线如今叫法线,所以极大和极小线都是法线. Apollonius 其次考察任一圆锥曲线的法线的性质. 例如,在抛物线或椭圆任一点处的法线还与曲线交于另一点. 然后他指出怎样从圆锥曲线内部或外部的给定点作该曲线的法线.

在考察从一点作向任一圆锥曲线的(相对)极大和极小线时, Apollonius 定出了那些能作出两、三和四根这种线的点的位置. 他

对每种圆锥曲线定出了那样一些点的轨迹:从轨迹这一边的点能作一定数目的法线,而从轨迹另一边的点能作另一数目的法线.这轨迹现今叫圆锥曲线的渐屈线(但对它本身 Apollonius 未加讨论),或者说是圆锥曲线上"邻近"法线交点的轨迹,或者说是圆锥曲线上法线族的包络.例如,从椭圆渐屈线内部任一点可向椭圆作四根法线(图 4.31),而从其外部任一点可作两根法线.(有例外的点.)在抛物线的情形,渐屈线叫半立方抛物线[最早为 William Neile (1637—1670)所研究](图 4.32).从半立方抛物线上方平面的任一点能作抛物线的三根法线,从其下方平面的任一点只能作一根法线.从半立方抛物线上的点可以作两根.

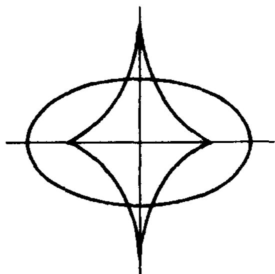


图 4.31

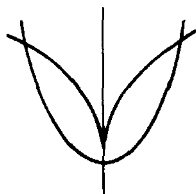


图 4.32

第六篇讲述全等圆锥曲线、相似圆锥曲线及圆锥曲线弓形.这弓形也像圆的弓形那样就是由圆锥曲线的弦所割出的一部分面积.Apollonius 又指出怎样在一给定的直角圆锥上作出与一已给圆锥曲线相等的圆锥曲线.

第七篇里没有什么突出的命题.它讲述有心圆锥曲线两共轭直径的性质.Apollonius 把这些性质和轴的相应性质加以比较.例如,若一椭圆或一双曲线的轴是 a 及 b,而 a' 及 b' 是其两共轭直径,则 $a+b<a'+b'$.又,椭圆任意两共轭直径上的正方形之和等于其两轴上的正方形之和.对双曲线也有相应的命题,不过上面命题中的"和"要换成"差".又,对于任一椭圆或双曲线,其任何两共

轭直径与其夹角所定的平行四边形的面积，等于其两轴所定矩形的面积.

第八篇已失传. 它所含命题，也许是关于怎样定出(有心)圆锥线的共轭直径，使其长度的某些函数具有给定的值.

Pappus 提到了 Apollonius 的其他六部数学著作. 其中一部叫《论切触》(*On Contacts*)，它的内容由 Vieta 重新整理出来. 该书中含有著名的 Apollonius 问题：任给三点、三线或三圆，或三者的任意组合，求作一圆过给定的点并切于所给直线或圆. 许多数学家，包括 Vieta 和 Newton 都给出了这问题的解.

Euclid 和 Apollonius 的严格演绎式的数学论著，使人感到似乎数学家是用演绎推理搞出发明创造来的. 但我们回顾 Euclid 之前 300 年间的数学活动，就应该看到证明之前必先有猜想，综合之前必先有分析. 事实上，希腊人对于从简单演绎法得出的命题是不很看得起的. 希腊人把那些能从定理直接推出的结果称作系或衍论. Proclus 把这种无需费多大力气得出的结果称做横财或红利.

我们还没有讲完希腊天才学者对数学的贡献. 我们迄今所讲的是属于古典希腊时代的内容；我们还要讲公元前 300 年左右到公元 600 年那一段辉煌的时期. 但在翻过这一页之前让我们提醒读者，古典时期的贡献有比数学内容更重要之处；它创造了我们今日所理解的那种数学. 它坚持用演绎法来作证明，重视抽象而不重视具体，这些都决定了数学的性质. 至于它选择一组最富于成果而又非常易于为人接受的公理这种做法，它对几百个定理的猜测和证明，则又大大推动了这门科学的向前发展.

参考书目

Ball, W. W. Rouse: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, Chaps. 2～3.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chaps. 7 and 9.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, Book 1, Chaps. 2~3.

Heath, Thomas L.: *A Manual of Greek Mathematics*, Dover (reprint), 1963, Chaps 3~9 and 12.

Heath, Thomas L.: *A History of Greek Mathematics*, Oxford University Press, 1921, Vol. 1, Chaps. 3~11; Vol. 2, Chap. 14.

Heath, Thomas L.: *The Thirteen Books of Euclid's* Elements, 3 vols., Dover (reprint), 1956.

Heath, Thomas L.: *Apollonius of Perga*, Barnes and Noble (reprint), 1961.

Neugebauer, Otto: *The Exact Sciences in Antiquity*, Princeton University Press, 1952, Chap. 6.

Proclus: *A Commentary on the First Book of Euclid's* Elements, Princeton University Press, 1970.

Sarton, George: *A History of Science*, Harvard University Press, 1952 and 1959, Vol. 1, Chaps. 8,10,11,17,20; Vol. 2, Chap. 3.

Scott, J. F.: *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, 1958, Chap. 2.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, Chap. 3; Vol. 2, Chap. 5.

Struik, Dirk J.: *A Concise History of Mathematics*, 3rd ed., Dover, 1967, Chap. 3.

van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, P. Noordhoff, 1954, Chaps. 4~6.

第 5 章

希腊亚历山大时期：几何与三角

> 如果不知道远溯古希腊各代前辈所建立和发展的概念、方法和结果，我们就不可能理解近 50 年来数学的目标，也不可能理解它的成就.
>
> Hermann Weyl

1. 亚历山大城的建立

数学的进程在很大程度上取决于历史的进程. 居于希腊本土北部的一族希腊人马其顿人的征略战果，使古典希腊文明归于沦亡，而为另一种基本上属于希腊式但性质很不相同的文明开辟了道路. 征战是在公元前 352 年由马其顿的 Philip 二世开始的. 公元前 338 年雅典被击败. 公元前 336 年 Philip 的儿子 Alexander the Great 挂帅后征服了希腊、埃及和近东，往东远及印度，往南远达尼罗河的上游. 他足迹所至遍筑新城，既作为征略堡垒，又作为商业中心. 位于 Alexander 帝国中央并原拟作为其首都的主要新城亚历山大(Alexandria)，是在公元前 332 年建立于埃及的. Alexander 亲自选定地址并制定该城的房屋修建与移民计划，但这项工作在其后多年迄未完成.

Alexander 打算让他的新帝国具有世界性的文化. 由于当时[他所知道的]另外一个唯一的主要文明是波斯文明，Alexander 就蓄意要把这两种文明融合起来. 公元前 325 年他自己同波斯统治者 Darius 的女儿 Statira 结婚，并强迫他的几百名部将和一万

名战士娶波斯人为妻.他把两万名波斯兵编入他的军队,和马其顿人混在同一战阵里.他又把各族移民送到他所建立的城市中去.在他死后发现有他的手诏要把大批欧洲人迁到亚洲,把大批亚洲人迁到欧洲.

公元前 323 年 Alexander 在征战之际死去,未能建完他的首都.他死后部下将领彼此争权.经过几十年的政局动荡,帝国终于分裂为三个独立的部分.欧洲部分变成安提哥那帝国(由希腊将领 Antigonus 得名);亚洲部分变成塞琉西帝国(由希腊将领 Seleucus 得名);埃及归希腊 Ptolemy 王朝统治,成为第三个帝国.安提哥那统治下的希腊和马其顿渐次为罗马兼并,在数学发展上变得无足轻重.塞琉西帝国里的数学主要是巴比伦数学的延续,但也受本章内所讲一些发展的影响.继古典希腊时代之后的重要数学创造是在 Ptolemy 帝国里——主要是在亚历山大城作出的.

Ptolemy 帝国之所以成为古典希腊数学的后继者并非偶然的事.该帝国的君王都是贤明的希腊人,他们继续执行了 Alexander 在亚历山大建立文化中心的计划.执政于公元前 323 到 285 年间的 Ptolemy Soter,公元前 285 到前 247 年间的 Ptolemy 二世(Soter 的直接后任,被人誉为 Philadelphus——意即"仁君"),公元前 247 到前 222 年间的 Ptolemy Euergetes,他们都懂得希腊 Pythagoras, Plato 和 Aristotle 这些大学派所遗文化的重要意义.所以这几位统治者把当时所有文化中心的学者都请到亚历山大,用国家经费供养.约在公元前 290 年之际,Ptolemy Soter 修建一个供学者从事研究和教学的学术中心.这所建筑是奉献给艺术之神(muses)的,此后以艺术宫(Museum,艺神之宫,其后转义为"博物馆"、"陈列馆")之称闻名于世.这里面住着当时的诗人、哲学家、语言学家、天文学家、地理学家、医生、历史学家、艺术家,以及当代大多数著名的希腊数学家.

在艺术宫邻近,Ptolemy 修建了一个图书馆,不仅保存重要文件,而且供公众使用.据说这图书馆里的藏书一度达 750 000 卷,其中包括 Aristotle 和他的继承人 Theophrastus 的私人藏书.此外,因为埃及草片纸供应方便,使亚历山大时期比在古典希腊时代更容易得到图书.事实上,亚历山大城成为古代抄书业的中心.

Ptolemy 诸王继续执行 Alexander 鼓励民族融合的政策,因此希腊人、波斯人、犹太人、埃塞俄比亚人、阿拉伯人、罗马人、印度人和黑种人可以毫无阻碍地进入亚历山大自由混居.贵族、平民和奴隶摩肩接踵,古代希腊社会的阶级差别崩溃了.又因经商者所带来的以及学者为更多地了解外部世界而专门组织的远征考察队所带来的知识,使埃及文明受了更多外界的影响.于是人们的思想眼界开阔了.亚历山大人的远程海道航行,需要他们有更好的地理知识,更好的报时方法和航海技术,同时商业竞争使人注重物质材料、生产效能和改进技术.古典时期为人所鄙弃的工艺又以新的热情为人所重视,训练工艺的学校也办起来了.纯粹科学仍有人钻研,但也注重了应用.

亚历山大人所创造的机械设备即使是按现代标准来说也是惊人的.从井槽里抽水的水泵、滑车、尖劈、渔具、联动齿轮,同现代汽车中所用者差不多的里程计,在当时普遍采用.每年的宗教游行节日都有用蒸汽推动的车通过该城街道.庙宇祭坛里用秘藏在器皿里的火加热水和空气使神像活动.虔诚的善男信女惊讶地看到神像举手向他们祝福,看到神像淌泪,并给他们倒出圣水.水力被人用来弹奏乐器,并使泉头的人像自行移动,而且又用压缩空气来放枪.人们发明新的机械仪器——包括改进了的日规——来作更精密的天文测量.

亚历山大人对声和光这类现象有高深的知识.他们知道光的反射定律,对折射定律也有经验体会(第 7 章第 7 节),他们利用这

些知识来设计镜子和透镜. 在这一时期里首次出现一本关于冶金的著作,其所含化学比早期埃及和希腊学者所懂得的少量经验事实丰富得多. 毒药是一种专门的学问. 医学也兴旺发达,部分是因为古典希腊时代所禁止的人体解剖这时可以搞了,医疗术在 Galen(约 129—约 201)的工作中到达登峰造极的地步,不过 Galen 主要住在帕加蒙(Pergamum)和罗马(Rome). 流体静力学,即关于浸在水内物体的平衡性质的科学,受到深刻的研究,而且确实奠定了有系统的基础. 他们最大的科学贡献是第一次建立了真正定量的天文理论(第 7 章第 4 节).

2. 亚历山大希腊数学的特性

艺术宫里学者们的工作分成四大部门——文学、数学、天文和医学. 由于其中两门主要是数学,而医学通过占星术也包含一些数学,可见数学在亚历山大学术界里占有主导地位. 数学的性质受新文明和新文化的影响非常之大. 不管数学家自己认为他们这个学科多么清高,说他们怎么与世无争和鄙视俗世,这新的希腊文明确实产生了与古典时期性质全然不同的数学.

Euclid 和 Apollonius 当然是亚历山大人;但如前所说,Euclid 整理了古典时期的工作,Apollonius 在他整理和发扬古典希腊数学这方面也是个特殊人物,虽然在他的天文和关于无理数的著作(两者在以后几章里都要讲到)方面颇受亚历山大文化的影响. 亚历山大的其他几位大数学家如 Archimedes, Eratosthenes, Hipparchus, Nicomedes, Heron, Menelaus, Ptolemy, Diophantus 和 Pappus 肯定仍在理论和抽象的数学上显露希腊人的天才,但性质与前大不相同. 亚历山大的几何主要专攻那些对于计算长度、面积和体积有用的结果. 这类定理诚然也出现在 Euclid 的《原本》里,如第十二卷的命题 10 说任何圆锥是与其同底等高圆柱的三分之

一,因而若知圆柱体积便可算出圆锥体积等等.然而相对地说来,这类定理在 Euclid 书中是少见的,但它们对于亚历山大的几何学家却是主要的研究对象.因此 Euclid 在证明了两圆面积之比等于其直径平方之比以后就心满意足(它使我们知道圆面积 $A = kd^2$,但不知 k 值),而 Archimedes 却要得出 π 的准确近似值,以便算出圆面积来.

其次,由于古典希腊数学家不愿把无理数当作数来接待,所以他们搞出了纯粹定性的几何学.亚历山大数学家则沿袭巴比伦人的做法,毫不犹豫地使用无理数,而且实际上就把数自由应用于长度、面积和体积.这项工作的高峰是三角术的发展.

更重要的一件事是亚历山大数学家唤起了算术和代数的新生,把它们发扬光大并使之成为独立的学科.如果要从几何结果或从代数的直接应用获得定量的知识,发展关于数的科学当然成为必要之事.

亚历山大数学家也积极参与力学方面的工作.他们算出了各种形体的重心;他们研究力、斜面、滑车和联动齿轮;他们往往也是发明家.他们又是当代在光学、数学、地理和天文学研究方面的主要工作者.

古典时期的数学包括算术(只是研究整数的)、几何、音乐和天文.在亚历山大时期,数学的范围扩大得无法限制.Proclus 根据罗得斯(Rhodes)的 Geminus(公元前1世纪)的材料,引述后者对数学的分类(可能就是 Geminus 时代的分法):算术(今日的数论)、几何、力学、天文学、光学、测地学和声学以及实用算术.据 Proclus 的引述,Geminus 说:"整个数学分为两大部分,其不同之点在于:一部分是研究心智性概念的,而另一部分是研究物质性概念的."算术和几何是心智方面的,其余部分是物质方面的.但这种分法(虽然在公元前1世纪末尚受重视)以后就慢慢没人注意了.我们大致上可以这样说,亚历山大的数学家同哲学断了交,同工程结

了盟.

我们先讲他们在几何与三角方面的工作，下章要讨论算术和代数.

3. Archimedes 关于面积和体积的工作

若要拿一个人的工作成就来代表亚历山大时期的数学特性，谁也不能比 Archimedes（公元前 287—前 212）更合适的了. 这位古代最伟大的数学家是一位天文学家的儿子，生于叙拉古（Syracuse），当时西西里岛的一个希腊殖民城市. 他青年时代去亚历山大受教育. 虽然他以后回到叙拉古并在那里度过其余年，但他始终与亚历山大保持联系. 他在希腊学术界很有名，很受同时代人的钦佩与尊崇.

Archimedes 才智高超，兴趣广泛（无论是实用方面和理论方面的），并具有非凡的机械技巧. 他的数学工作包括用穷竭法求面积和体积，计算 π（在这过程中他算出了平方根的不足近似值和过剩近似值），并提出用语言表示过剩近似值的一种新方案. 在力学方面，他算出许多平面形和立体形的重心并给出杠杆定理. 论述水中浮体平衡问题的流体静力学的基础是他奠定的. 他也以一个优秀的天文学者闻名于世.

他的发明创造超出当时技术水平如此之远，以至后代流传了无数关于他的传说和故事. 在一般人的心目中，他的发明比他的数学还重要，虽然他和 Newton, Gauss 并列为三个最大的数学家. 他在年轻时造了一个天象仪（planetarium），那是一个用水力推动的模仿太阳、月球和行星运动的机构. 他发明一种从河上提水的水泵（Archimedes 螺旋提水器）；他说明怎样用杠杆挪动重物；他给叙拉古的国王 Hieron 造了一组复杂的滑车把船吊到河里. 他在叙拉古遭罗马人攻击时发明军器和投石炮来防守. 他利用抛物镜面

的聚焦性质,把集中的阳光照到攻城的罗马船上把它们焚毁.

关于 Archimedes 的最有名的故事也许要算他发明测出金王冠掺假的方法.叙拉古王定做了一顶王冠,交货后他怀疑其中掺杂贱金属,就让 Archimedes 测定王冠所含材料,而不得把金冠弄毁.一天他在洗澡时看到他的部分身体被水浮起,就突然发现了解决这一问题的原理.他为此非常兴奋,竟然光着身子跑到街上高喊"有啦!"(Eureka!)他发现浸在水里的物体所受的浮力等于其所排出的那部分水的重量,而用这原理便可测定金冠的成分(见第7章第6节).

虽然 Archimedes 的发明搞得异常巧妙和成功,但传记家Plutarch 却说这些发明只不过是"研究几何之余供消遣的玩意."据 Plutarch 所说,Archimedes"志气如此之高,心灵如此之幽深,科学知识如此之丰富,以至虽然他的这些发明使人们把他看得神乎其神,他却不屑把这些东西写成书流传后世,把所有直接为了使用和谋利的机械和技巧都看作是鄙贱之事,而一心追求那美妙的、不夹杂俗世需求的学问."但是 Plutarch 在编写故事方面的声誉远远超过作为历史学家的声誉. Archimedes 的的确确写过一些力学机械方面的书,我们知道他有一本书的书名叫《论浮体》(*On Floating Bodies*),另一本叫《论平板的平衡》(*On the Equilibrium of Planes*);其他两本《论杠杆》(*On Levers*)和《论重心》(*On Centers of Gravity*)已失传.他还写过光学方面的失传了的著作,他并非不屑于写书记载他的发明的;还有一本书虽也失传但我们知道他是确实写了的,那就是《论制作球》(*On Sphere-making*),这是讲他怎样发明一个仪器模仿日、月和五个行星绕(固定的)地球运动的.

Archimedes 的死预告了整个希腊世界将要遭受的命运.在迦太基(Carthage)和罗马的第二次布匿战争(Punic war)期间,叙拉古于公元前 216 年和迦太基结盟.公元前 212 年罗马人攻入叙拉古.当 Archimedes 在沙地上画数学图形时,一个刚攻进城的罗马

士兵向他喝问. 据传说, Archimedes 是那样出神地在搞他的数学以至没有听到那罗马兵的喝问, 于是那个兵就杀死了他, 尽管罗马主将 Marcellus 曾有令不许杀害 Archimedes. 当时 Archimedes 75 岁, 仍是精力充沛之时. 为示"补偿", 罗马人给他造了一个费工很多的陵墓, 墓碑上铭刻了 Archimedes 的一个著名定理.

Archimedes 的著作都以小册子的形式出现而不是大部头巨著. 我们对这些著作的知识都来自希腊文手稿和自 13 世纪起从希腊文翻译的拉丁文手稿. 有些著作现只存拉丁文译本. 1543 年 Tartaglia 确曾把 Archimedes 的一些著作译成拉丁文.

Archimedes 的几何著作是希腊数学的顶峰. 他在他的数学推导里应用 Euclid 和 Aristaeus 的一些定理以及其他一些他说是显然可知的结论——即是说可以很快从已知结果推出的事实. 因此他的证明是有切实根据的但不易被我们看懂, 因我们不熟悉希腊几何学家的许多方法和结论.

Archimedes 在他的《论球和圆柱》(*On the Sphere and Cylinder*) 一书中先讲述定义和假定. 第一个假定(或公理)说相同两端点间的所有(曲)线之中以直线段为最短. 其他公理谈到凹曲线的长度和曲面. 例如, 图 5.1 中的 ADB 是假定为小于 ACB 的. Archimedes 用这些公理就可把圆周长和内接、外切正多边形的周长进行比较.

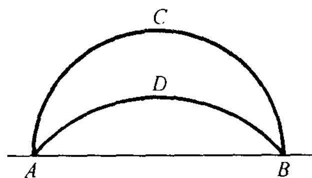


图 5.1

他在第一篇中论述几个预备性的命题后, 证明了

命题 13. 任一正圆柱(不计其上下底)的表面积等于一圆的面积, 该圆半径是圆柱高与底直径的比例中项.

接着讲许多关于圆锥体积的定理. 很值得指出的是

命题 33. 任一球面积等于其大圆面积的四倍.

命题 34 的推论. 以球的大圆为底、以球直径为高的圆柱, 其体

积是球体积的 3/2,其包括上下底在内的表面积是球面积的 3/2.

这里他把球的面积和体积同外切球的圆柱的面积和体积进行比较.这就是那个根据他的遗愿铭刻在他墓碑上的著名定理.

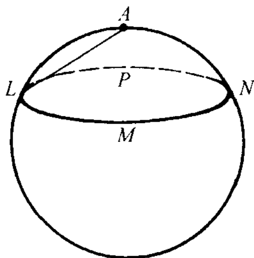


图 5.2

然后他在命题 42 和 43 里证明球缺 $ALMNP$ 的表面积等于以 AL 为半径的圆的面积(图 5.2).球缺小于或大于半球都行.

关于曲面形面积和体积的定理是用穷竭法证明的. Archimedes 用内接和外切的直边形来"穷竭"那个面积或体积,然后也同 Euclid 一样用间接证法来完成论述.

《论球和圆柱》的第二篇内容主要是关于球缺的,其中有些定理值得指出,因它们含有新的几何代数内容.例如他给出:

命题 4. 用平面割球为两段,使其体积之比等于所给之比.

这个问题从代数上讲相当于解三次方程

$$(a-x):c=b^2:x^2,$$

Archimedes 通过求一抛物线与一等轴双曲线的交点,用几何方法解出这一方程.

《论劈锥曲面体与球体》(*On Conoids and Spheroids*)一书论述圆锥线旋转形体的性质. Archimedes 所说的直角劈锥曲面体是指一旋转抛物面.(在 Archimedes 之时仍把抛物线看作是直角圆锥的截面.)钝角劈锥曲面体是指旋转双曲面的一支. Archimedes 的所谓球体是我们今天所说的椭球(扁球体或橄榄球体),也就是椭圆旋转体.这书的主要目的是求这三种形体为平面所割一部分的体积.书中还含有 Archimedes 在圆锥曲线方面的研究(在讨论 Apollonius 著作时已提及).正如在他所写的别的书中一样,他假定了一些他认为易于证明或可用他过去所讲方法证明的定理.许

多证明是用穷竭法的. 其内容可举下列几个命题为例:

命题 5. 若 AA'和 BB'分别是一椭圆的长、短轴, d 是任一圆的半径,则椭圆与圆的面积之比等于 $AA' \cdot BB'$ 与 d^2 之比.

这定理说:若 $2a$ 是长轴, $2b$ 是短轴,而 S 和 S'是椭圆和圆的面积,则 $S/S' = 4ab/d^2$. 由于 $S' = (\pi/4)d^2$, 故 $S = \pi ab$.

命题 7. 给定中心为 C 的一椭圆,以及垂直于椭圆所在平面的一根直线 CO,可作一以 O 为顶点的圆锥,使所给椭圆为其一截面.

Archimedes 显然知道从同一圆锥至少可得出几种圆锥曲线中的某些种. 这是 Apollonius 用过的事实.

命题 11. 若一旋转抛物体为一通过轴或平行于轴的平面所截,则截面为原来生成那旋转体的抛物线所围平面……若以垂直于轴的平面截,则截面是中心在轴上的圆.

对旋转双曲体和(椭)球体也有类似的结果.

这书的主要结果还有:

命题 21. 旋转抛物体任一截段的体积是同底同轴圆锥或锥台体积的两倍(原文是"一半"——译者).

底是决定截段的那个平面从旋转抛物体所截得的平面图形(椭圆或圆)的面积(图 5.3). 抛物线 BAC 及底面上的 BC 是由过旋转轴且垂直于原截面的那个平面截出的. EF 是抛物线上平行于 BC 的一根切线, A 是切点. 过 A 作平行于旋转轴的直线 AD,这是截段的轴. 可以证明 D 是 CB 的中点. 又,若底是椭圆,则 CB 是长轴;若底是圆,则 CB 是其直径. 圆锥与截段有相同的底,其顶点为 A,其轴为 AD.

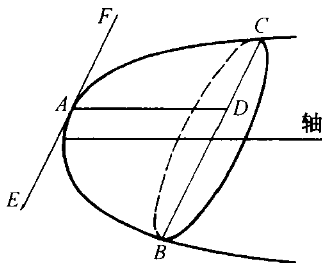


图 5.3

命题 24. 若以任意两平面从旋转抛物体截出两段,这两截段(体

积)之比等于其轴的平方之比.

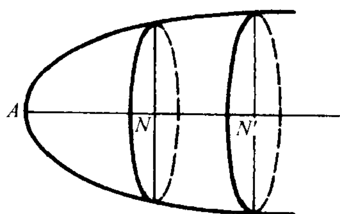


图 5.4

为举例说明这定理,设两平面是垂直于旋转抛物体之轴的(图5.4),则此两体积之比等于AN^2比AN'^2. 对旋转双曲体和椭球体也有类似定理.

Archimedes 有一些思想新颖的著作,其中之一是题为《方法》(*The Method*)的短篇论文,在那里他指出怎样用力学的思想得出正确的数学定理. 这作品是直到1906年这样晚近的年代才在君士坦丁堡的一个图书馆里发现的. 手稿是10世纪抄写的羊皮纸本,包括早从其他来源业已知悉的 Archimedes 的其他作品. Archimedes 以求抛物线弓形 CBA 的面积为例,来说明他发现数学定理的方法(图5.5). 在这个基本上属于物理性质的推理过程中,他利用了在别处得到的关于重心的一些定理.

ABC 是直线 AC 和弧 ABC 所围的任一弓形. 设 CE 是抛物线在 C 处的切线;D 是 CA 的中点;又设 DBE 是通过 D 的一直径(平行于抛物线轴的直线). 于是 Archimedes 提出 Euclid《二次曲线》中的结果

(1) $$EB = BD,$$

但 Euclid 对这一事实的证明于今未知. 现作 AF 平行于 ED,并设 CB 交 AF 于 K.

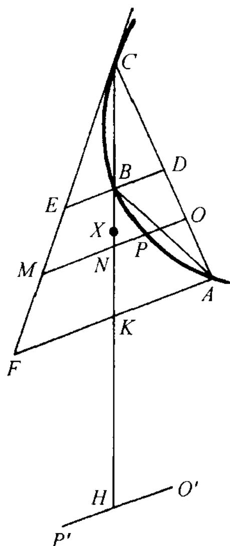


图 5.5

于是根据(1)和相似三角形的关系,可证 $FK = KA$. 把 CK 延长到 H,使 $CK = KH$. 其次,令 $MNPO$ 是抛物线的任一直径. 于是根据(1)及相似三角形之理得 $MN = NO$.

现在 Archimedes 把弓形和三角形 CFA 的面积一起进行比较. 他把弓形面积看作是由 PO 这种线段积成的,把三角形面积看作是由 MO 这种线段积成的. 然后他证明

$$HK \cdot OP = KN \cdot MO.$$

上式从物理上讲的意思是:若把 KH 和 KN 看作杠杆的两臂,其中 K 是支点,则若把 OP 看作是放在 H 处的重物,它就会与放在 N 处的重物 MO 相平衡. 因此,把所有像 PO 这样的线段放在 H 处,将与所有像 MO 这样的线段各自(把质量)集中于其中点(该线段的重心)后放在 H 处的重量相平衡. 但把所有线段 MO(的质量)集中于其重心处"相当"于把三角形 CAF(的质量)集中于其重心处. Archimedes 在其《论平板的平衡》一书中证明这重心是 CK 上的点 X,这里有 $KX = (1/3)CK$. 根据杠杆定律: $KX \cdot$ 三角形 CFA 的面积 $= HK \cdot$ 抛物线弓形的面积, 或即

$$\frac{\triangle CFA}{\text{弓形}\, CBA} = \frac{HK}{KX} = \frac{3}{1}. \tag{2}$$

Archimedes 还想找出弓形和三角形 ABC 的面积关系. 他指出这三角形(的面积)是三角形 CKA 的一半,这是因为两者有公共的底边 CA,而前者的高很易于证明是后者高的一半. 而三角形 CKA(的面积)又是三角形 CFA(的面积)的一半(因为 KA 是 FA 的一半). 因此三角形 ABC 是三角形 CFA 的一半,于是根据(2)他就得出弓形 ABC 与三角形 ABC 的面积之比是 4 比 3.

在这种力学方法里,Archimedes 把抛物线弓形和三角形 CFA 的面积看成是无穷多线段之和. 他说这种方法是用于发现定理的方法而不是严格的几何证明. 他在这篇论著中用这方法发现关于球段(或球缺)、圆柱段、椭球段和旋转抛物段的一些定理,以说明这种方法是多么用之有效.

Archimedes 在他的《抛物线的求积》一书中给出求抛物线弓形面积的两种方法. 第一种方法同刚才讲过的力学方法类似,即仍

用杠杆原理论述面积之间的平衡,但面积的选取法不同.他的结论当然同上面的(2)一样.这是在命题 16 中给出的. Archimedes 得知这一结果后就想证明它,并着手依靠一系列定理(命题 18～24)作出严格的数学证明.

第一步是证明抛物线弓形可为一系列三角形所"穷竭".设 QPq(图 5.6(a))是抛物线弓形,并设 PV 是直径,它平分弓形中所有平行于底边 Qq 的弦,因而 V 是 Qq 的中点.从直观上显然可以看出并在命题 18 中证明:P 处的切线平行于 Qq.其次作 QR 及 qS 平行于 PV.于是三角形 QPq 是平行四边形 $QRSq$ 的一半,所以三角形 QPq 大于抛物线弓形的一半.

作为这定理的一个推论,Archimedes 证明抛物线弓形可用一个多边形任意接近,因若在 PQ 所割出的弓形里(其中 P_1V_1 是该弓形的直径)作一三角形后,可用简单的几何(命题 21)证明:三角形 PP_1Q 的面积 = (1/8) 三角形 PQq 的面积(图 5.6(b)).因此三角形 PP_1Q 和作在 Pq 上的三角形 $PP_1'q$(它也有三角形 PP_1Q 那样的性质)合在一起是三角形 PQq 的 1/4;而且根据上一段的结果,这两个较小的三角形填满所在的抛物线弓形的一半以上.在新弦 QP_1, P_1P, PP_1' 和 $P_1'q$ 上作三角形的过程可以继续做下去.这

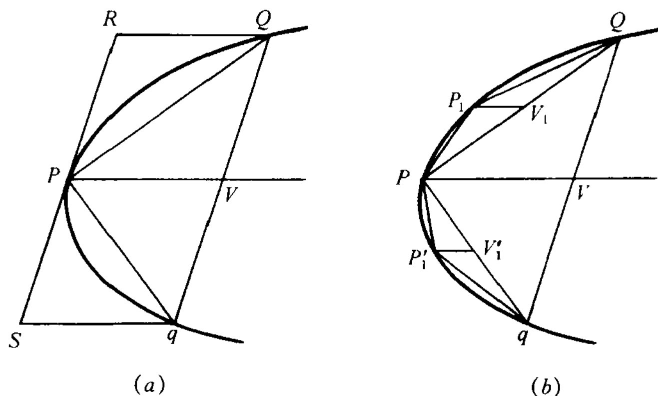


图 5.6

部分证明同相应的 Euclid 关于两圆面积定理部分的证明完全类似.

因此我们就有了足够的条件,可以应用 Euclid《原本》第十篇的命题 1. 就是说,现在可以说抛物线弓形可用这样的多边形面积来逼近,它是在原来的三角形 PQq 上加添一系列三角形而得出的,即可用面积

(3) $$\triangle PQq+(1/4)\triangle PQq+(1/16)\triangle PQq+\cdots$$

中取有限项来逼近;换言之,弓形面积与(3)中取有限项之和的差可以弄得比任何预先指定的量小.

然后 Archimedes 用间接证法来完成穷竭法所作的证明. 他先证明,对于公比为 1/4 的几何数列的头 n 项有

(4) $$A_1+A_2+\cdots+A_n+(1/3)A_n=(4/3)A_1.$$

这可用多种方式立即证明;我们可以用几何级数头 n 项之和的公式来做. 在应用(4)时,A_1 就是三角形 PQq.

然后 Archimedes 证明抛物线弓形的面积 A 不能大于或等于 $(4/3)A_1$. 他的证明无非就是:若面积 A 大于 $(4/3)A_1$,那他可以取一组(有限个)三角形,使其和与弓形面积之差小于任一给定的量,因此可使和 S 大于 $(4/3)A_1$,即

$$A>S>(4/3)A_1.$$

但据(4),若 S 有 m 项(比方说),则

$$S+(1/3)A_m=(4/3)A_1,$$

或

$$S<(4/3)A_1.$$

于是就得出一个矛盾.

同样,若设抛物线弓形面积 A 小于 $(4/3)A_1$,则 $(4/3)A_1-A$ 是一确定的数. 由于 Archimedes 所作的三角形是愈来愈小的,所以他可得出这样一系列内接三角形,使

(5) $$(4/3)A_1-A>A_m,$$

这里 A_m 是序列中的第 m 项,它在几何上代表 2^{m-1} 个三角形之

和. 但因据(4)有

$$(6)\qquad A_1 + A_2 + \cdots + A_m + \frac{1}{3}A_m = \frac{4}{3}A_1,$$

于是

$$\frac{4}{3}A_1 - (A_1 + A_2 + \cdots + A_m) = \frac{1}{3}A_m,$$

或

$$(7)\qquad \frac{4}{3}A_1 - (A_1 + A_2 + \cdots + A_m) < A_m.$$

于是从(5)及(7)得

$$(8)\qquad A_1 + A_2 + \cdots + A_m > A.$$

但内接三角形之和总小于弓形面积. 因此(8)是不可能的.

当然,Archimedes 实际上求出了无穷几何级数的和,因当(4)中的 n 变为无穷时 A_n 趋于 0,于是无穷级数之和为 $4A_1/3$.

Archimedes 用力学方法和数学方法求抛物线弓形面积的著作说明他对物理论证和数学论证分得何等清楚. 他的严格性比 Newton 和 Leibniz 著作中的高明得多.

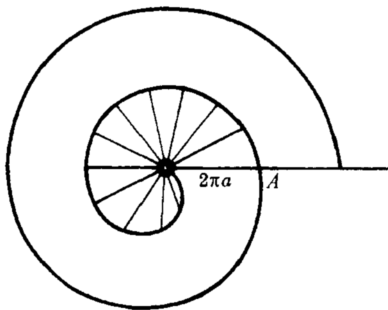


图 5.7

Archimedes 在他的著作《论螺线》(*On Spirals*)中是按下述方式来定义螺线的. 设有一直线(射线)保持在一平面内绕其一端匀速转动,而同时从固定端起有一点沿该直线匀速移动;这时动点就会描出一螺线. 用我们的极坐标,这螺线的方程是 $\rho = a\theta$. 图 5.7 所画的那个曲线,θ 是以顺时针方向作为正方向的. 著作中最深刻的结果是

命题 24. 螺线第一圈与初始线所围的面积[图中有阴影线部分的

面积]等于第一个圆的三分之一.

第一个圆是半径为 OA 的圆,这半径等于 $2\pi a$,因此阴影线部分的面积是 $\pi(2\pi a)^2/3$.

证明是用穷竭法做出的.在为这做准备的前几个定理中,他把螺线的一段弧 $BPQRC$(图 5.8)和两根径矢 OB 及 OC 所围的面积夹在两组扇形中.如 Bp', Pq', Qr', …是以 O 为心的圆弧,同样 Pb, Qp, Rq, …也是圆弧.内接的一组扇形是 OBp', OPq', OQr', …而外接的一组扇形是 OPb, OQp, ORq, …于是这里就用扇形代替穷竭法中作为近似形的内接和外切多边形.(我们在微积分里确定极坐标图形的面积时也用这种近似图形.)这种穷竭法的新颖之处是 Archimedes 选取了愈来愈小的扇形,使螺线弧下面的面积与有限个"内接"扇形之和(还有有限个"外接"扇形之和)的差比任意给定的量还要小.这样来穷竭所求面积的方法,同靠增添愈来愈多的直边形来"穷竭"的方法是不一样的.不过在最后的一部分证明里,Archimedes 也像他在证抛物线面积时一样,和 Euclid 在用穷竭法的证明里一样,采用间接证法.这里没有明确的极限步骤.

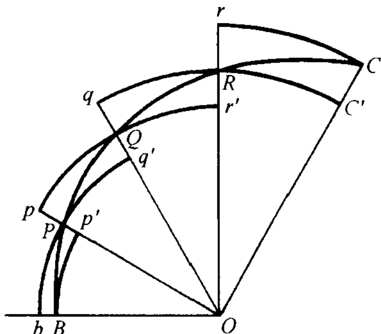


图 5.8

Archimedes 也给出径矢绕 O 转完两圈后螺线弧所围的面积;此外还有面积方面的有关结果.附带指出,后代数学家曾用螺线来三等分(而实际上也是任意等分)一个角.

阅读 Archimedes 的几何著作后,立即可以看出他所关心的是要得出关于面积和体积的有用的结果.他在这方面的工作以及一般数学工作,从所得结论说没有什么了不起,其方法和对象也没有

什么特别新颖之处,不过他处理了很难的而且是前人所没有搞过的问题.他常说他是读了前人著作后得到启发想起搞这些问题的.例如,Eudoxus 关于棱锥、圆锥和圆柱的著作(Euclid《原本》中所载)启发 Archimedes 搞球和圆柱,化圆为方的问题启发他搞抛物线弓形的求积问题.但 Archimedes 在流体静力学方面的工作完全是独创的;他在力学方面工作的新颖之处是他给出了数学证明(第7章第6节).他的文字是优美、有条理、周密和有针对性的.

4. Heron 关于面积和体积的工作

Heron 生活在公元前 100 年到公元 100 年之间的某段时期,此人不仅从数学史的角度看非常值得注意,而且也可显出亚历山大时期的数学特色.Proclus 称 Heron 为 *mechanicus*,这 mechanicus 的意思可能相当于今天的机械工程师,并把他和他的老师发明家 Ctesibius 放在一起讨论.Heron 又是个优秀的测绘人员.

Heron 工作的突出之点是他把严密的数学同埃及人的近似方法和公式融合在一起.一方面他写过 Euclid 著作的一本评注,采用 Archimedes(他确乎常常提到他)的准确结果,并在他自己的创作中证明 Euclid 几何的一些新定理.另一方面他关心应用几何与力学,毫无顾虑地给出各种各样近似结果.他大胆使用埃及人的公式而且他的许多几何在性质上也有埃及人的风格.

在他的《量度》(*Metrica*)与《几何》(*Geometrica*)(后者我们只是通过别人根据他著作而写的一本书获知的)中,Heron 给出了求许多图形的平面面积、曲面面积和体积的定理.这些书里的定理并不是新的.关于曲边形,他利用 Archimedes 的结果.此外他还写了《测地术》(*Geodesy*)和《体积求法》(*Stereometry*),也是论述前两书中那些内容的.在所有这些著作中,他主要关心数值结果.

在他的讲测地术的《经纬仪》(*Dioptra*)一书中,Heron 指出怎

样求一点到一不可到达点的距离以及可望而不可及的两点间的距离. 他又指出怎样从一给定点向一不可达直线作垂线,以及怎样无需进入一块土地而求出其面积. 这种做法的例子是三角形的面积公式

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

这里 a, b, c 是三边,s 是周边的一半. 这公式人们归功于他,但实际是属于 Archimedes 的. 公式出现在他的《测地术》中并在《经纬仪》和《量度》两书中有一个证明. 在《经纬仪》一书中他指出怎样同时从山的两头开挖直的隧道.

虽然 Heron 的许多公式是证明了的,但也有许多是未加证明的,而且也有许多近似公式. 例如他在给出上述准确的三角形面积公式的同时又给出一个不准确的公式. Heron 之所以用许多埃及人的公式,原因之一是准确公式里有平方根和立方根,而测绘人员不能做这些运算. 事实上,纯几何同测地术或测量术是有区别的. 面积和体积的算法属于测地术,而测地术并不是普通高等教育的一部分. 它是教给测绘人员、泥瓦匠、木匠和其他工匠的. Heron 继承和丰富了埃及人的测地科学这一点是毋庸置疑的;他关于测地术的著作几百年间一直被人们使用.

Heron 把他的许多定理与法则用于设计戏院、宴会厅和浴堂. 他在应用方面的著述有《机械学》(*Mechanics*),《投石炮》(*The Construction of Catapults*),《度量》(*Measurements*),《枪炮设计》(*The Design of Guns*),《压缩空气的理论和应用》(*Pneumatica*)以及《制造自动机的技术》(*On the Art of Construction of Automata*). 他作出了水钟、测量仪器、自动机、起重机和作战武器的设计.

5. 一些特殊曲线

古典希腊数学家虽也引进并研究过一些不常见的曲线如割圆

曲线,但几何上只许研究用尺规所能作的图形这一禁令把那些曲线打入冷宫.亚历山大时代的人则比较能够冲破这种限制,所以 Archimedes 可以毫无顾虑地引入螺线.在这一时期里还引入了一些别的曲线.

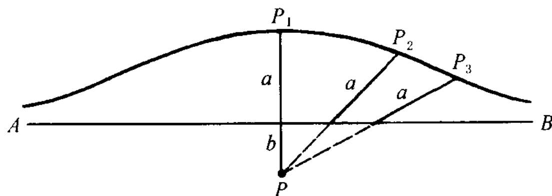


图 5.9

Nicomedes(公元前约 200)以他所定义的蚌线出名.他先取一点 P 及一直线 AB(图 5.9).然后选定一长度 a,并在从 P 出发穿过 AB 的所有射线上,从交点起往前截取长度 a.这样定出的端点便是蚌线上的点.例如图中的 P_1、P_2 及 P_3,便是蚌线上的点.

若 b 是从 P 到 AB 的垂直距离,且若射线上从其与 AB 交点处量取的长度 a 是朝向 P 侧的,则依 $a>b$, $a=b$,及 $a<b$ 三种情形而得其他三种曲线.因此蚌线共有四种,都是 Nicomedes 所定义的.这曲线的极坐标方程是 $r=a+b\sec\theta$. Nicomedes 利用这曲线来三等分角和作出倍立方体①.

据说 Nicomedes 发明了绘蚌线的仪器.仪器本身的性质远不如当时的数学家之热衷于制作仪器一事重要. Nicomedes 蚌线和直线及圆是最早能用仪器绘出的曲线,也是最早比较为人们所熟知的.

Diocles(公元前 2 世纪末)在其《论点火玻璃》(*On Burning-glasses*)一书中引用所谓蔓叶线解决了倍立方问题.这曲线的定义

---

① 三等分角法在 T. L. Heath 的《Euclid 原本十三篇》一书中给出. 1956 年 Dover(重印)版,卷 1,266 页.

如下:设 AB 及 CD 是圆的互相垂直的直径(图 5.10),EB 及 BZ 是相等的弧段. 作 ZH 垂直于 CD,再作 ED. ZH 与 ED 的交点便给出蔓叶线上一点 P. Diocles 把 BC 弧上所有的 E 及 BD 弧上所有的 Z (弧 BE = 弧 BZ)所定出的一切点 P 的轨迹叫做蔓叶线. 我们可以证明

$$CH:HZ=HZ:HD=HD:HP.$$

所以 HZ 和 HD 是 CH 和 HP 之间的两个比例中项. 这就解决了倍立方问题. 若取 O 为原点,a 为半径,OD 及 OA 为坐标轴,则蔓叶线的直角坐标方程是 $y^2(a+x)=(a-x)^3$. 这方程所表示的曲线包括图中曲线的弯折部分,而这一部分是 Diocles 所未曾考虑的.

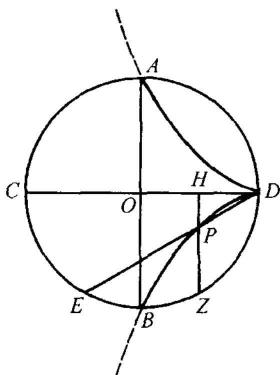


图 5.10

6. 三角术的创立

亚历山大时期希腊定量几何学中一门完全新的学科是三角术,这是 Hipparchus, Menelaus 和 Ptolemy 所创立的. 这学科是由于人们想建立定量的天文学,以便用来预报天体的运行路线和位置以帮助报时、计算日历、航海和研究地理而产生的.

亚历山大时期希腊人的三角术是球面三角,但也包括了平面三角的基本内容. 球面三角需要先懂球面几何,例如大圆和球面三角形的许多知识是他们早就知道的;这是在 Pythagoras 派晚期用数学来研究天文学后就有人研究了的. Euclid 的《现象》一书(它本身是根据前人著作写的)就含有一些球面几何. 它的许多定理是用来探究恒星的表观运动的. Theodosius(公元前约 20 年)在他的《球面学》(*Sphaericae*)中搜集了当时的球面几何知识,但这著作

不讲定量知识,所以不能用来处理希腊天文学的基本问题——夜间根据恒星位置来测定时间.

三角术的奠基人是 Hipparchus,他生活于罗得斯和亚历山大,死于公元前 125 年左右. 我们对他所知颇少,而且大部分材料来自 Ptolemy,他把三角术和天文学中的一些概念归功于 Hipparchus. 他留给我们天文上的许多观测资料和发现,古代最有影响的天文学说(第 7 章第 4 节)以及地理学方面的著作. 现存的 Hipparchus 的著作只有他的《对 Eudoxus 和 Aratus 所著〈现象〉(Phaenomena)一书的评注》(*Commentary on the Phaenomena of Eudoxus and Aratus*). 我们确能看到的是罗得斯的 Geminus 写的一本天文入门书,其中有一些地方叙述 Hipparchus 研究太阳的工作.

按照 Ptolemy 的说法和用法,Hipparchus 是这样论述三角术的:他照着亚历山大的 Hypsicles(公元前约 150 年)在其《论恒星的升起》(*On the Risings of the Stars*)一书中和公元前最后几个世纪的巴比伦人所做的那样,把圆周分为 360°,把它的一直径分为 120 等份. 圆周和直径的每一分度再分成 60 份,每一小份再继续照巴比伦人的 60 进制往下分成 60 等份. 于是对于有一定度数的给定的弧 AB,Hipparchus(在其一本论述圆的弦的书中,现已失传)给出了相应弦的长度数. 关于他究竟是怎样算出这些来的,我们要在讨论 Ptolemy 的著作时讲到(那里讲述了他们两人的思想和成果).

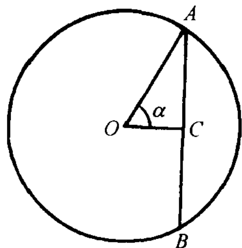


图 5.11

给定度数的弧所对应的弦的长度数目相当于今日的正弦函数. 若弧 AB 的圆心角是 2α(图 5.11),则按我们的说法有 $\sin\alpha = AC/OA$, Hipparchus 给出的则不是 $\sin\alpha$ 而是当 OA 分成 60 份时 $2 \cdot AC$ 所含的长度数. 例如,若 2α 的弦含 40 份,

则照我们的说法有 $\sin\alpha = 20/60$，或更为一般的形式

$$(9)\qquad \sin\alpha = \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{2}(2\alpha\text{ 所对弦}) = \frac{1}{120}(2\alpha\text{ 所对弦}).$$

希腊三角术在 Menelaus(约 98 年)时到达顶点. 他的主要著作是《球面学》(*Sphaerica*)，但显然也写了含六篇的《圆上的弦》(*Chords in a Circle*)和关于黄道带弧的下沉(或升起)的著作. 阿拉伯人还把别的一些著作归之于他.

现尚存阿拉伯译本的《球面学》，此书分为三篇. 第一篇是研究球面三角的，其中有球面三角形的概念，即是球面上由小于半圆的三个大圆弧所构成的图形. 书的目的是对球面三角形证明那些相当于 Euclid 对平面三角形所证的定理. 如，球面三角形两边之和大于第三边，球面三角形内角之和大于两直角，球面三角形的等边对等角. Menelaus 然后证明平面三角形里所不能类比的一个定理：若两球面三角形的三个角彼此对应相等，则此两球面三角形全等. 他还列出别的全等形定理和等腰三角形定理.

Menelaus 的《球面学》的第二篇主要讲天文学，只是间接地涉及球面几何. 第三篇含有一些球面三角的内容，并把它建立在该篇第一个定理的基础上. 在那个定理里他假定有一个球面三角形 ABC(图 5.12)，以及与三角形的边相交的任一大圆弧(必要时得延长). 为陈述这定理，我们用现代的正弦记号，但在 Menelaus 的书里，AB 这样一个弧的正弦(或球心处相应圆心角的正弦)却用

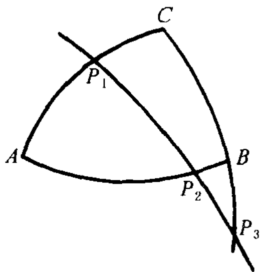


图 5.12

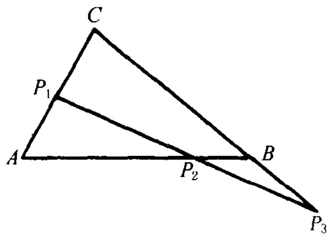


图 5.13

AB 弧的双倍弦来替代. 因此 Menelaus 的定理用我们的正弦来写就是

$$\sin P_1A \cdot \sin P_2B \cdot \sin P_3C = \sin P_1C \cdot \sin P_2A \cdot \sin P_3B.$$

这定理的证明要依据平面三角形的相应定理(现仍叫 Menelaus 定理). 对于平面三角形,定理是(图 5.13):

$$P_1A \cdot P_2B \cdot P_3C = P_1C \cdot P_2A \cdot P_3B.$$

Menelaus 没有证明关于平面三角形的这个定理. 我们可以认为这证明他早已知道,或已在他先前的著作中证明过.

第三篇的第二个定理(若记三角形 ABC 的角 A 所对弧为 a)可表述为:若 ABC 及 $A'B'C'$ 为两球面三角形,且若 $A = A'$, $C = C'$ (或 C 与 C' 互补),则

$$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin c'}{\sin a'}.$$

第三篇的定理 5 里利用了弧的一个性质,它被认为是 Menelaus 时代已经知道的. 这性质是:若有四个大圆弧从一点 O(图 5.14)发出,而 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 是与四者相交的大圆弧,则有

$$\frac{\sin AD}{\sin DC} \cdot \frac{\sin BC}{\sin AB} = \frac{\sin A'D'}{\sin D'C'} \cdot \frac{\sin B'C'}{\sin A'B'}.$$

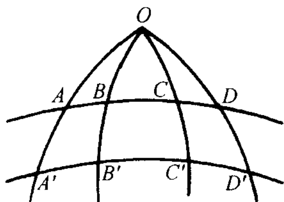


图 5.14

以后我们可以看到,在 Pappus 著作中的非调和比(或交比)概念里以及在后人射影几何的著作里重新出现了相应于上式左边或右边的表达式. 球面三角里还有其他许多定理是属于 Menelaus 的.

希腊三角术的发展及其在天文上的应用在埃及人 Claudius Ptolemy(死于 168 年)的著作里达到了顶点. C. Ptolemy 至少是属于这一姓的数学家族中的人,虽然他并非属于这一姓的王族. Ptolemy 生活在亚历山大,并在艺术宫里工作.

Ptolemy 在他的《数学汇编》[*Syntaxis Mathematica*，这著作阿拉伯人称之为《大汇编》(*Megale Syntaxis*, *Megiste*)，最后称为 *Almagest*]中继承了 Hipparchus 和 Menelaus 在三角和天文方面的工作.《大汇编》的十三篇中天文和三角是混在一起的，虽然第一篇主要讲球面三角而其他各篇主要讲天文. 关于这点我们将在第 7 章中加以讨论.

Ptolemy 的《大汇编》里全部是数学性质的内容，只是在驳斥 Aristarchus 所提出的太阳中心说时他应用了 Aristotle 的物理学. 他说，只有以虚心求知的态度获得的数学知识才能给人以可靠的知识，因此他要尽其力之所能来培育这门理论学科. Ptolemy 又说他想把他的天文学建立在"不容置辩的算术和几何方法"的基础之上.

Ptolemy 在第一篇第 9 章里一开头就计算圆弧的一些弦的长，从而充实了 Hipparchus 和 Menelaus 的工作. 如前所说，圆周是被分为 360 份或 360 个单位的(他没有用"度"这个字)，直径是被分为 120 份的. 然后他提出：给定一弧为 360 份中的若干份，求相应弦之长(用直径所含 120 份中的份数表示).

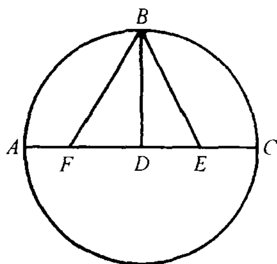


图 5.15

他先计算 36°弧和 72°弧的对应弦. 在图 5.15 中，ADC 是以 D 为中心的圆的直径，BD 垂直于 ADC. E 是 DC 的中点，并取 F 使 $EF = BE$. Ptolemy 用几何方法证明 FD 等于圆内接正十边形的一边，BF 等于圆内接正五边形的一边. 但 ED 含 30 份，BD 含 60 份. 由于 $EB^2 = ED^2 + BD^2$，$EB^2 = 4\,500$，于是 $EB = 67\,4'55''$ (这表示 $67 + 4/60 + 55/60^2$ 份). 现因 $EF = EB$，于是他就得到 EF. 于是 FD $= EF - DE = 67\,4'55'' - 30 = 37\,4'55''$. 由于 FD 等于正十边形

的一边,它是36°弧的对应弦.因此他得出这个弧的弦长.但从 FD 及直角三角形 FDB 可算出 BF,得70 32′3″.但 BF 是正五边形的一边.所以它是72°弧的弦.

由于正六边形的边长等于半径,所以他立即得出60°弧的弦长是60份.又因内接正方形的边可用半径算出,他就得到90°弧的弦长,它等于84 51′10″.其次,因内接正三角形的边也可从半径算出,故得120°弧的弦为103 55′23″.

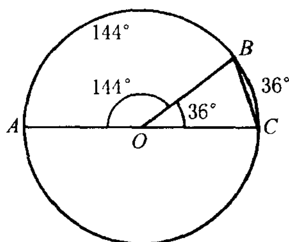


图 5.16

利用直径 AC 上的直角三角形 ABC(图5.16),则若知 BC 弧的弦,便能立即得出其相补弧 AB 的弦.例如,因 Ptolemy 已知36°弧的弦,他便得144°弧的弦为114 7′37″.

当 A 为任一锐角时,上面得出的关系就相当于 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$. 这可从以下所讲的方式看出来. Ptolemy 证明若 S 是小于180°的任一弧,则

$$(S\text{ 的弦})^2+(180-S\text{ 的弦})^2=(120)^2.$$

但根据(9)有

$$(S\text{ 的弦})^2=(120)^2\sin^2\frac{S}{2}.$$

因此

$$(120)^2\sin^2\frac{S}{2}+(120)^2\sin^2\left(\frac{180-S}{2}\right)=120^2,$$

或即

$$\sin^2\frac{S}{2}+\sin^2\left(90-\frac{S}{2}\right)=1;$$

也就是

$$\sin^2\frac{S}{2}+\cos^2\frac{S}{2}=1.$$

接着 Ptolemy 证明一引理(现叫 Ptolemy 定理).给定圆的任一内接四边形(图5.17),他证明 $AC\cdot BD=AB\cdot DC+AD\cdot BC$.

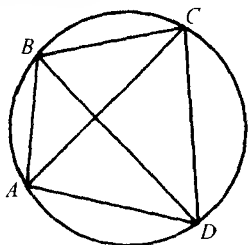


图 5.17

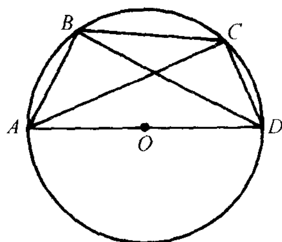


图 5.18

证明是直截了当的. 他取 AD 为一直径时的那种特殊四边形 $ABCD$(图 5.18). 设已知 AB 及 AC, Ptolemy 然后指出怎样求 BC. BD 是 AB 弧补弧的弦, CD 是 AC 弧补弧的弦. 现在应用引理, 则可看出六个长度中的五个为已知, 故这里的第六个长度 BC 可以算出. 但 BC 弧 $= AC$ 弧 $- AB$ 弧. 故若两弧的弦为已知, 便可算出两弧之差的弦. 用现代术语来表达, 这就是说, 若已知 $\sin A$ 及 $\sin B$, 就可算出 $\sin(A-B)$. Ptolemy 指出, 由于他已知 72°弧的弦和 60°弧的弦, 所以他能算出 12°弧的弦.

其次, 他指出怎样从圆的任一给定弦, 求出相应半弧的所对弦. 用现代术语, 这就是从 $\sin A$ 求 $\sin \frac{A}{2}$. Ptolemy 指出这结果是很有用的, 因我们可从弦为已知的任一弧出发, 不断取其半而求出其相应弦. 他又指出若已知 AB 弧的弦和 BC 弧的弦, 则可得 AC 弧的弦. 用现代术语讲, 这结果就是 $\sin(A+B)$ 的公式. 作为特例, 他指出相当于现代术语所表达的从 $\sin A$ 求 $\sin 2A$ 的结果.

由于 Ptolemy 能从 12°的弦平分数次得出(3/4)°弦, 故他能给任一已知弦所对的弧加上或减去(3/4)°弧; 并且能用上述定理来算这样的两段弧之和或差所对应的弦. 这样他就能算每两个相差(3/4)°的所有的弧. 但他还想得出每步相差为(1/2)°的弧所对应的弦. 这里他聪明地想起用不等式来作推理. 他得出(1/2)°的弦的近似结果是 0 31′25″.

于是他能把 0°到 180°间所有相差为(1/2)°的弧所对应的弦都算出并列成表. 这是第一个三角函数表.

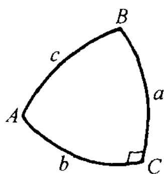


图 5.19

然后 Ptolemy 着手(在第一篇第 11 章里)解决需要求出球面大圆上一些弧的天文问题. 这些弧是球面三角形的边,其中有些边是通过观测或先前的计算已经得出的. 为定出这些弧,Ptolemy 证明了球面三角定理中的一些关系式,其中有些是 Menelaus 在其《球面学》的第三篇里已经证明了的. 于是他证明(用我们的记号)在 C 为直角的球面三角形里(图 5.19),记 a 为角 A 的对边,有

$$\sin a = \sin c \sin A,$$

$$\tan a = \sin b \tan A,$$

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

$$\tan b = \tan c \cos A.$$

当然,我们这里的各种三角函数在 Ptolemy 的书里都是弧的相应弦. 计算斜球面三角形时,他把它分成有直角的球面三角形. 书里没有系统讲解球面三角;他只是证明了为解特定天文问题所需用的那些定理.

《大汇编》里把三角术定了型,并于此后一千多年保持不变. 我们常说他的三角术是球面三角,实际在评价 Ptolemy 的材料时球面三角和平面三角之分是没有多大意义的. Ptolemy 搞的肯定是球面三角形,但他算出弧的弦时实际就奠定了平面三角的理论基础. 因若已经知道从 0°到 90°的 A 所对应的 $\sin A$(实际上还有 $\cos A$),那就能够解平面三角形了.

应该指出,三角术是为天文学上的应用而产生的;又因球面三角对此更有用,所以球面三角是先搞出来的. 平面三角之用于间接测量和测绘工作,对于希腊数学是无缘的. 这看来可能有些奇怪,但从历史上来看是不难理解的,因为天文是希腊数学所主要关心

的事. 测绘工作到了亚历山大时期诚然变得重要起来;像 Heron 这样有志于搞测绘工作的数学家本来是能够发展平面三角的,但他觉得用 Euclid 几何已经满可以了. 至于那些未受教育的测绘人员则对于产生所需的三角术这项工作是无能为力的.

7. 亚历山大后期的几何工作

大约从公元 1 世纪初起，亚历山大的数学工作特别是几何工作开始衰落. 我们将在第 8 章里探讨这衰落的原因. 我们所知道的关于公元 1 世纪初的几何工作是由一些较大的评注家: Pappus，亚历山大的 Theon(公元 4 世纪末)和 Proclus 传下来的.

总的说来,这时期内很少发现新的定理. 当时的几何学者似乎忙于研究和阐释前代大数学家的著作. 他们增补前人著作里的一些证明,这些证明或是因为原作者认为太容易可由读者自证,或是因为在其他失传的论文里证过而付阙如. 附带说明,按照当时的老说法,这些证明都称作引理.

Theon 和 Pappus 两人都提到 Zenodorus 的工作. 此人生活在公元前 200 年到公元 100 年之间. 据说他写过一本关于等周形(具有相等周边的一些图形)的书,其中证明了以下的定理:

1. 周长相等的 n 边形中,正 n 边形的面积最大.
2. 周长相等的正多边形中,边数愈多的正多边形面积愈大.
3. 圆的面积比同样周长的正多边形的面积大.
4. 表面积相等的所有立体中,以球的体积为最大.

这些定理的主题就是今天所谓的极大极小问题,它在希腊数学里是新颖的.

在亚历山大晚期出现的 Pappus 对几何学的工作是高潮后的一种低潮. 他那含八篇的《数学汇编》(*Mathematical Collection*)中

有些新的材料. Pappus 的新著作水平不是最高,但有些内容值得指出.

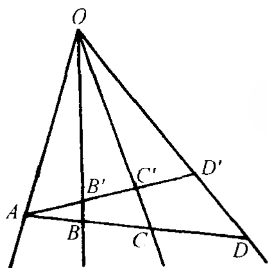


图 5.20

书的第五篇里给出 Zenodorus 关于等周曲边形问题的证明、结果和推广. Pappus 增添了一个定理:周长相等的所有弓形中以半圆的面积为最大. 他又证明球的体积比表面积与其相等的任何圆锥、圆柱或正多面体都大.

第七篇的命题 129 是下述定理的特例:设有四线交于一点 O(图 5.20),则对任何与此四线相交的横跨线来说,交比

$$\frac{AB}{AD}\Big/\frac{BC}{CD}$$

都相等. Pappus 则要求所有的横跨线都通过 A.

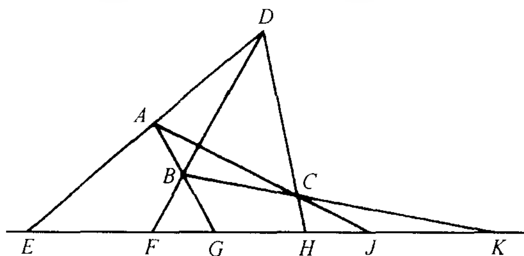


图 5.21

命题 130 所叙述的结论用我们的话来说就是:若一完全四边形的六边(四边及两对角线)与一直线相交的点有五点固定,则第六点也固定. 例如,若 $ABCD$(图 5.21)是这四边形,它的六边与任一直线 EK 相交的六点是 E、F、G、H、J 和 K. 如果其中五点固定,则第六点也固定. Pappus 指出这六点满足条件

$$\frac{EK}{EH}\Big/\frac{JK}{JH}=\frac{EK}{EF}\Big/\frac{GK}{GF}.$$

这条件说由 E, K, J, H 所定的交比等于由 E, K, G, F 所定的交比. 这条件等价于以后将要讲的 Desargues 所引入的条件,他把这样的六个点叫做"对合点".

第七篇的命题 131 相当于这样一个定理,即在每个四边形中,一根对角线被另一对角线以及被其两组对边交点的连线分割成调和比. 例如,若 $ABCD$ 是一四边形(图 5.22);CA 是一对角线;CA 被另一对角线 BD 并被 FH(AD 与 BC 交点及 AB 与 CD 交点的连线)所割. 则图中的 C, E, A, G 形成一组调和点;就是说,E 内分 AC 之比等于 G 外分 AC 之比.

第七篇的命题 139 给出今日仍以 Pappus 命名的定理. 若 A, B, C(图 5.23)是一直线上三点,而 A', B', C' 是另一直线上三点,则 AB' 与 $A'B$,BC' 与 $B'C$ 以及 AC' 与 $A'C$ 相交的三点共线.

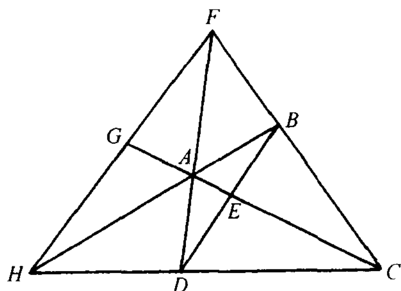


图 5.22

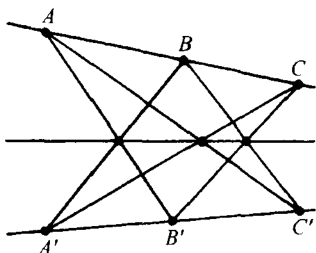


图 5.23

最后一批引理中的命题 238 证明了所有圆锥曲线的一个基本性质:与定点(焦点)及定直线(准线)的距离成一定比例的一切点的轨迹是一圆锥曲线. 圆锥曲线的这一基本性质并未载入 Apollonius 的《圆锥曲线》一书,但上章已指出,Euclid 可能是知道这一性质的.

Pappus 在第七篇的前言里重复了 Apollonius 的断言,即用他的方法可以求出这样一个动点的轨迹:它与两定直线距离的乘积

等于它与其他两定直线距离的乘积乘以一个常数. Pappus 知道但未证明这个轨迹是一圆锥曲线. 他还指出这一问题可推广到包含五根、六根或更多根的直线. 我们在讨论 Descartes 的工作时还要更多地谈到这一问题.

第八篇之所以特别有意义是因为它主要研讨力学,而按亚历山大数学家的看法,力学是数学的一部分. 事实上,Pappus 在此书序言中就竭力维护这一主张. 他推崇 Archimedes, Heron 和一些不甚知名的人为数学力学方面的领袖人物. 他把物体的重心定义为物体内(并不一定属于物体)的一点,若在那一点把它吊起来,就能使它静止,而不管吊放的位置如何. 然后他说明用什么样的数学方法来确定这个点. 他又讨论物体沿斜面移动的问题,并设法比较沿水平面推动物体与沿斜面将其朝上推动所需要的力.

第七篇也包含一个有名的定理,它有时叫 Pappus 定理,有时叫 Guldin 定理,因 Paul Guldin(1577—1643)重新独立发现了这一定理. 这定理说,若一平面闭曲线图形绕曲线之外但在同一平面内的一轴转动一周,则转出来的形体的体积等于曲面面积乘以其重心所转过的圆周. 这是个很有普遍意义的结果,Pappus 也知道这一点. 他没有给出定理的证明,很可能他以前就有人知道这个定理及其证明.

就几何来说,亚历山大时期是以一批评注的作品宣告结束的. 亚历山大的 Theon 写了关于 Ptolemy 的《大汇编》、Euclid 的《原本》及《光学》的新版本的一本评注. 他的女儿 Hypatia(死于 415 年)是个有学问的数学家,她写了关于 Diophantus 和 Apollonius 的评注本.

我们曾多次提及的 Proclus Diadochus 对 Euclid《原本》的第一篇曾写过评注(第 3 章第 2 节). 这本评注之所以重要,是因为 Proclus 提到今已失传的一些著作,其中包括 Eudemus 的《几何学史》和 Geminus 所著可能题为《数学原理》(*Doctrine* 或 *Theory of*

Mathematics)的一本书.

Proclus 求学于亚历山大,然后去雅典主持 Plato 的学院. 他是新 Plato 派的头面人物,写了许多关于 Plato 的著作和一般哲学方面的书;他不仅喜爱数学而且也爱写诗. 他也像 Plato 那样认为数学是哲学的婢女. 它是一门预备课程,因它能澄清心灵,涤荡妨碍认识宇宙整体的感觉思虑.

Proclus 思想中有非数学的另一方面. 他承认许多迷信和宗教神秘学说,虔诚信奉希腊和东方的神明. 他拒绝 Ptolemy 的天文学说,因有一位加尔底亚神巫不这样认为,而"怀疑那理论是不合法的."有人说 Proclus 还算运气,因为那位加尔底亚神巫并不反对或拒绝 Euclid.

这许多评注家之中我们只略提几人. Aristotle 著作的一个评注家 Simplicius 曾在亚历山大和 Plato 的学院里求过学,公元 529 年罗马王 Justinian 封闭学院后他去波斯. 他重述了 Eudemus 的《几何学史》上的一些材料,包括关于 Antiphon 试图解决化圆为方的长篇叙述和 Hippocrates 对月牙形的求积工作. 米利都的 Isidorus(6 世纪)似曾在君士坦丁堡(当时成为东罗马帝国首都并成为一部分数学活动的中心)成立一个学派,写过一些评注,并可能撰写了 Euclid《原本》第十五篇的一部分. Eutocius(6 世纪)可能是 Isidorus 的学生,他写过 Archimedes 著作的评注.

参 考 书 目

Aaboe, Asger: *Episodes from the Early History of Mathematics*, Random House, 1964, Chaps. 3～4.

Ball, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, Chaps. 4～6.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, Macmillan, 1919, pp. 29～52.

Dijksterhuis, E. J.: *Archimedes* (English trans.), Ejnar Munksgaard, 1956.

Heath, Thomas L.: *A History of Greek Mathematics*, Oxford University Press, 1921, Vol. 2, Chaps. 13,15,17～19,21.

Heath, Thomas L.: *The Works of Archimedes*, Dover (reprint), 1953.

Pappus d'Alexandrie: *La Collection mathématique*, ed. Paul Ver Eecke, 2 vols., Albert Blanchard, 1933.

Parsons, Edward Alexander: *The Alexandrian Library*, The Elsevier Press, 1952.

Sarton, George: *A History of Science*, Harvard University Press, 1959, Vol. 2, Chaps. 1～3,5,18.

Scott, J. F.: *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, 1958, Chaps. 3～4.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, Chap. 4; Vol. 2, Chaps. 8 and 10.

van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, P. Noordhoff, 1954, Chaps. 7～8.

第 6 章

亚历山大时期：算术和代数的复兴

哪里有数，哪里就有美.

Proclus

1. 希腊算术的记号和运算

我们暂时回头再从古典时期的算术谈起. 古典希腊人把计算技术叫 logistica，而他们的算术(arithmetica)则指数论. 古典数学家蔑视计算技术，因它只谈商业贸易的实际计算. 但我们却要把**计算技术**和**算术**一起加以考虑，看看亚历山大的希腊人在这方面所掌握的知识究竟有多少.

古典希腊人记数和运用数的技术并不继承和发展巴比伦人的遗产. 在**计算技术**方面他们似乎是自己从头另搞的. 在克里特岛上曾发现比古典时期约早 500 年的希腊数字. 这数字系统没有什么有价值的特点，只不过用一些特别的数字符号来代表 1, 2, 3, 4, 10, 200, 1 000 等等. 在古典时期之初，他们引用了别的一些特殊记号表示数，并用一种算盘之类的东西进行计算. 其后在大约公元前 500 年他们用了希腊数字系统，最早出现这种数字的是公元前 450 年的一块碑文. 在这个数字系统里，从 1 到 4 的数用直杠来记；希腊文五(*penta*)的第一个字母 Π(以后用 Γ)代表 5；希腊文十(*deka*)的第一个字母 Δ 表 10；百(*hekaton*)的头一个字母 H 代表 100；千(*chilioi*)的头一个字母 X 表示 1 000；万(*myrioi*)的头一个

字母 M 表示 10 000. 这些特殊符号组合起来便形成中间的数字. 如 Γ | = 6; ΓΔ = 50; ΓH = 500; ΔΓ ||| = 18.

但我们不知道早期古典数学家如 Pythagoras 学派是怎样写数的. 他们也许是用石子来作计算的,因“calculus”(计算)这个字的原意是“石子”. “abacus”(算盘)的希腊文原意是“沙”,这说明在引用算盘以前(可能以后亦然),他们是在沙地上画点来记数的. 从 Thales 到 Euclid 的 300 年间,数学家并不重视计算,这门技术也就没有进展. 书本里没有提到算术的应用这一事实是足以说明问题的.

古典希腊人以后又不知为什么把他们的记数制改成爱奥尼亚(或亚历山大)制,那是完全用字母记数的. 字母记数制是亚历山大希腊数学里最通用的,我们可以在 Ptolemy 的《大汇编》一书中看到这种用法. 古代叙利亚人和以色列人也是用它的.

希腊记数制的内容如下:

α	β	γ	δ	ϵ	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ͳ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

中间的数用上述符号组合而成. 如 $\iota\alpha = 11$, $\iota\beta = 12$, $\kappa\alpha = 21$, $\rho\nu\gamma = 153$. 希腊数系中表 6, 90 和 900 的符号以及符号 M 是当时通行的希腊字母里所没有的;头三个符号现今读作 stigma(或 digamma), koppa 和 sampi,是希腊人早先借用腓尼基人较老字母表中的字母(不过腓尼基人并未用字母表示数). 从记数制中使用这些老字母一事可知这套写法早在公元前 800 年就有,而且可能是从小亚细亚的米利都传去的.

对大于1 000的数,字母重复写,但在其前方记一直杠以免混淆.又在数上画一横线以区别于文字.如

$$|\overline{\alpha\tau\epsilon} = 1\,305.$$

好些希腊作家采用和上述及下面要提到的数制稍有不同的写法.

亚历山大前期(公元前头三个世纪)的希腊草片纸手稿里有零的记号如$\overline{0 \cdot 0}$, $\bar{0}$, $\overset{\frown}{0}$和$\overline{0}$.希腊亚历山大时期的零也像巴比伦塞琉西时期的零那样用于指明缺数的地方.根据我们手头仅有的Ptolemy著作的拜占庭手稿可知,他在一数的中间和末尾都用0表示零.

Archimedes的《数沙法》(*Sand-Reckoner*)给出了写大数的一套方案.他想说明他能写出像宇宙间沙子数目那样大的数.他取当时希腊数字里最大的数万万,即10^8,然后拿它作为出发点得出一系列新的大数,一直到$10^8 \times 10^8 = 10^{16}$.然后又用$10^{16}$作为新出发点得出从$10^{16}$到$10^{24}$的一系列数,这样不断增大.然后他估计世间的沙粒数,说明这数目小于他所能写出的最大数.Archimedes这一著作的重要之点并不在于实际给出写任何大数的一套方案,而是发表了可以把数写得大到不受限制的思想.Apollonius也有类似的一套记法.

对于用上述方式写出的整数的算术运算,同我们今天的一样.例如做加法时,希腊人把一数写在另一数之下,按个位、十位等等分列,各列数字相加并把数字从一列进位到前一列.这同埃及人的方法比较前进了一大步.但埃及人的方法也是亚历山大希腊人教的.

至于分数,他们有特殊记号L''表$\frac{1}{2}$.如(有时加重音号)$\alpha L'' = 1\frac{1}{2}$, $\beta L'' = 2\frac{1}{2}$, $\gamma L'' = 3\frac{1}{2}$.写小的分数时在分子上加一重音符号,然后把分母写一次或两次,每次加两个重音符号.例如,$\iota\gamma'\kappa\theta''\kappa\theta'' = 13/29$.Diophantus则常把分母写在分子上面.

当分子大于1时,埃及人是把这种分数写成单位分数之和的.这套写法在希腊人那里也可以看得到.例如,Heron把$\frac{163}{224}$写成$\frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{14}\frac{1}{112}\frac{1}{224}$,但也用$\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}\frac{1}{32}\frac{1}{112}$及其他式子表示同一分数.他也用以上所讲的希腊字母的表示方式.Ptolemy也用埃及人的方式写有些分数,例如把$\frac{23}{25}$写成$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{15}\frac{1}{50}$.加号是不写出来由读者自己体会的,而一般整数则当然是用希腊字母来表示的.

用希腊人或埃及人那套办法写出来的普通分数很不便于作天文计算.因此亚历山大的希腊天文学家采用巴比伦人的60进制分数.我们不知道这种写法究竟何时开始,但在Ptolemy的《大汇编》里就已采用了.因此Ptolemy书中所写的31 25应理解为$\frac{31}{60}+\frac{25}{60^2}$.他说他用60进制分数是为了避免用普通分数所引起的麻烦.他用以10为底的方法写整数,但并不用进位制记法.由于他的天文计算中很少出现大的整数,因此可以说他采用了60进制的记数法.用60进制记法来写分数而用非进位制的字母数字来记整数,这看来有些古怪而且不合理.但我们还是用130°15′17″.5这种写法.

从上面所讲,可知亚历山大人已把分数本身当作数来看待,而古典时代的数学家则只提到整数之比,不提整数的部分,而且只在比例里用到比.但即使在古典时期,商业上就已采用真正的分数,即本身就当作数来看待的分数.在亚历山大时期,Archimedes,Heron,Diophantus和其他人都随意应用分数并拿来进行运算.不过从文字记载看来,他们并没有讲过分数概念,可能是认为这些分数在直观上很明显,可以接受并加以应用.

开平方的运算虽在古典希腊时代被人考虑过,但当时实际上对此是回避的.从Plato的著作里可以发现,Pythagoras派在用近

似数表达 $\sqrt{2}$ 时是先用 49/25 代替 2，然后得出 7/5 的. 同样，Theodorus对于 $\sqrt{3}$ 可能是用 49/16 代替 3 而得其近似数为 7/4 的. 至于无理数本身在古典希腊时代的数学里则根本没有地位.

关于希腊人怎样处理根的情况，我们从 Archimedes 的著作里得到第二方面的材料. 他在《圆的量度》(*Measurement of a Circle*)一书中主要是想求出 π(圆周长与直径之比)的较好的近似值；在这过程中，他对大的整数和分数进行运算. 他还得出$\sqrt{3}$的很好的近似值

$$\frac{1\,351}{780}>\sqrt{3}>\frac{265}{153},$$

但没有说明他是怎样得出这个结果来的. 历史文献中对于如何推出这结果的许多猜测之中，下面的说法似乎颇有道理. 给定一数 A，若把它写为 $a^2\pm b$，其中 a^2 是最接近于 A 的一个有理数的平方(大于或小于 A)，b 是 a^2 与 A 相差之数，则

$$a\pm\frac{b}{2a}>\sqrt{a^2\pm b}>a\pm\frac{b}{2a\pm 1}.$$

照这样做几步之后，确实得出 Archimedes 的结果. 至于为求 π 的近似值，Archimedes 先在命题 1 里证明圆面积等于一直角三角形的面积，该直角三角形的底等于圆周长，而高等于半径. 现在他要求出圆周长. 这个他用边数愈来愈多的内接和外切正多边形来逼近，并计算这些正多边形的周边. 他所得 π 的结果是

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

Apollonius 也写了一本关于求圆面积的书，名叫《快速算出法》(*Okytokion*)，他在那里自认为用较好的算术方法改进了 Archimedes 定出的 π 近似值. 这是 Apollonius 脱离古典希腊数学风格的唯一著作.

Heron 在求平方根的近似值时常用

$$\sqrt{A}=\sqrt{a^2\pm b}\sim a\pm\frac{b}{2a},$$

其中 a 及 b 的意义同前述一样.他得出这近似式的过程是,先取近似值为 $\alpha=(c+A/c)/2$,其中 c 是作为$\sqrt{A}$的任一猜测数;若把 A 写为 a^2+b 而取 $c=a$,则 $\alpha=a+b/2a$. Heron 又从 α 求出 $\alpha_1=(\alpha+A/\alpha)/2$ 来改进 α. 显然,α 愈接近于$\sqrt{A}$,α_1 这近似值就愈好. Heron 对 α 的基本表示式也曾由巴比伦人使用过.

在亚历山大时期的后期,平方根的求法也像今天那样应用 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的原理.逐次近似值是凑试出来的,不过总使近似值的平方小于要求根的那个数. Theon 在解释 Ptolemy 所用的这一方法时,指出他用一个几何图形来帮助思考.这图形 Euclid 用在《原本》第二篇的命题 4 里,表达 $(a+b)^2$ 的几何图形. Ptolemy 给出的$\sqrt{3}$是

$$\frac{103}{60}(+)\ \frac{55}{60^2}(+)\ \frac{23}{60^3},$$

这相当于 1.732 050 9,准确到小数点后六位数字.

2. 算术和代数作为一门独立学科的发展

以上回顾了希腊人在两个时期里做算术的方法,特别是在几何与三角成为定量学科时的亚历山大时期.但本章所要讲的主要发展是算术和代数脱离几何而成为独立的学科. Archimedes, Apollonius 和 Ptolemy 的算术工作是走往这方向的一步,但他们是用算术来计算几何量的.我们可能由此认为他们之所以注重数只是因为数能代表几何的量,而数的运算的逻辑基础是由几何代数法来保证的.但 Heron, Nichomachus(公元约 100)[他可能是来自犹太格拉撒(Gerasa in Judea)的阿拉伯人]和亚历山大的希腊人 Diophantus(约公元 250 年)则确实把算术和代数问题本身作

为问题来处理,既不依靠几何引出,也不用它来作逻辑依据.

比 Heron 在算术方面求平方根或立方根的工作更重要的是他用纯粹算术方法提出和解决了代数问题.他没有采用特别的符号;他是用文字来陈述的.例如他处理这样一个问题:给定一正方形,知其面积与周长之和为 896 尺(原文如此——译者),求其一边.这问题用我们的记法是,求满足 $x^2+4x=896$ 的 x. Heron 在方程两边加上 4 配成完全平方然后开方.他并不进行证明而只说出做哪些运算.在他的著作里有许多这类问题.当然,这正好是古代埃及人和巴比伦人提出问题和解决问题的方式,而且 Heron 无疑从古代埃及和巴比伦书里抄取不少材料.在那些书里,我们可能记得,代数是独立于几何的,而对于 Heron 来说,代数则是算术的推广.

Heron 在他的《几何》一书中提到加一块面积、一个周长和一个直径.他用这些话所表示的意思当然是指要加上它们的数值.同样,当他说他用一个正方形乘一个正方形,意思是要求两个数值的乘积. Heron 又把不少希腊的几何代数法翻译成算术和代数步骤.

Heron 在这方面的工作(以及他之利用埃及人算面积和体积的近似公式)有时被人估计为希腊几何学衰落的开始.但更妥当的看法是把它作为巴比伦和埃及数学在希腊人手里的一个改进.当 Heron 把面积与线段相加时,他并不是在胡乱应用古典希腊几何,而只是沿袭巴比伦人的习惯,因他们所说的面积和长度只不过是代表算术上某些未知量的用语.

从算术之以一门独立学科重新出现这一角度来讲, Nichomachus 的著作是更为重要的.他撰写了包含两篇的《算术入门》(*Introductio Arithmetica*)一书.这是第一本篇幅颇为可观的完全脱离几何讲法的算术(意即数论)书.从历史意义上讲,它对于算术的重要性可以和 Euclid 的《原本》对于几何的重要性相比.这书不仅

为后世几十名作者所自学、参考和抄袭,并且是同时代别的作家所著许多书的典范,因而反映了当时人的兴趣所在.那里的数代表对象的数量而不再像 Euclid 书中那样用线段来把它形象化. Nichomachus 提到数的时候通篇都用文字,而 Euclid 则用一个字母如 A 或两个字母如 BC(在这第二种情形下指线段)来代表数.因此 Nichomachus 的讲法是噜嗦些.他只论述整数和整数的比.

Nichomachus 是个 Pythagoras 派人;虽然 Pythagoras 的传统并未死亡,但他使这一传统重新活跃起来.在 Plato 所强调指出的四门学科——算术、几何、音乐和天文——中,Nichomachus 说算术是其他各科之母.他认为,这

> 不仅是因为我们说它在造物主的心中先于其他一切而存在,被创世主作为一种普天下适用的至高方案来使用,以使他所创造的物质世界秩序井然并使之达到应有的目标;而且也因为它本来就是出生较早的……

他接着说算术对其他各门科学至为重要,因为没有它别的科学就不能存在.而若其他科学被取消,算术却仍能存在.

《算术入门》的主要内容是早期 Pythagoras 派在算术方面的工作. Nichomachus 讲述了偶数、奇数、正方数、矩形数和多角形数.他也论述了质数和复合数以及六面体数[形式为 $n^2(n+1)$ 的数],此外又定义了别的许多种数.他给出了 1 到 9 的乘法表,和今日学习的九九表一模一样.

Nichomachus 重复给出了 Pythagoras 派的一些定理,如相继两个三角形数之和是正方形数而反之亦然等.他比 Pythagoras 派更进一步能看出(虽然并未证明)一般性的关系.例如他说第 $(n-1)$ 个三角形数加上第 n 个 k 角形数会得出第 n 个 $k+1$ 角形数.又如,第 $(n-1)$ 个三角形数加上第 n 个正方形数得出第 n 个

五角形数. 用我们的记号就是

$$\frac{n(n-1)}{2}+n^2=\frac{n}{2}(3n-1).$$

再如,第 n 个三角形数,第 n 个正方形数,第 n 个五角形数等等,形成一个递进算术数列,其公差为第 $(n-1)$ 个三角形数.

他发现以下的命题:若把奇数写出

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ \cdots$$

则第一数是 1 的立方,其后两数之和是 2 的立方,再往下的三个数之和是 3 的立方等等. 关于递进数列他还有别的一些命题.

Nichomachus 给出四个完全数 6, 28, 496 和 8 128,并重复给出 Euclid 关于完全数的公式. 他把各种各样的比加以分类,并给它们起名,其中包括 $(m+1):m$, $(2m+n):(m+n)$ 以及 $(mn+1):n$. 这些比在音乐上是重要的.

他也研究比例,并说这对"自然科学、音乐、球面三角和平面几何,尤其是对于研究古代数学家"非常必要. 他给出好多类比例,其中有音乐比例

$$a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b.$$

在《算术入门》中他又给出 Eratosthenes 筛(这在第 7 章里还要细谈);这是较快得出质数的方法. 我们先把 3 以后的奇数尽量写下来,然后划掉 3 的倍数,即划掉 3 以后的每第三个数. 其次我们去掉所有 5 的倍数(或者 5 以后的每第五个数,但数的时候以前可能划掉了的仍要算上). 然后去掉 7 以后的每第 7 个数等等. 已被划掉的数没有一个能作为这一筛划步骤的出发点. 把 2 同那些没有划掉的数放在一起. 这些数就是质数.

Nichomachus 常用一些特殊的数来讨论数的各种分类和比例. 他举的例子能说明和解释他所提出的定理,但除举例外就没有做别的事来证明任何一般结论. 他并不用演绎证明.

《入门》一书之有价值,是因为他对整数及整数之比的算术,作

了有系统、有条理、清楚而内容丰富的叙述,而且完全不依赖于几何. 从思想内容上讲它并无独到之处,但它是一本很有用的汇编. 它里面还收集了关于数的思辨方面的、美学上的、神秘性的道德性的臆说,但没有谈实际应用.《入门》在此后 1 000 年间成为一本标准课本. 自 Nichomachus 以后,算术而不是几何成为风行于亚历山大时期的学问.

这时代数也开始占重要地位. 用代数技巧解问题的书也问世了. 有些问题则正是公元前 2000 年巴比伦书本里或 Rhind 草片纸上所载的. 希腊代数著作是纯粹用文字形式写出的;没有采用一套符号. 此外,对所作运算步骤也未给予证明. 自 Nichomachus 以后,人们拿那些导出方程的代数题作为一般消遣的难题. 这种题目约有 50 个到 60 个还保留在 10 世纪的一本书里(*Palatinė Codex of Greek Epigrams*). 这里面至少有 30 题被认为是 Metrodorus (约公元 500 年)所提出的,但肯定以前就有. 其中之一是 Archimedes 牛群问题,要求根据给定的一些条件求出不同颜色的公牛和母牛的头数. 另一个是 Euclid 提出的关于骡子和驴驮运粮食的问题. 再一个是求桶里注满水所需时间的问题. 此外还有我们代数课本中的那种年龄问题.

亚历山大时期的希腊代数到 Diophantus 时臻于最高点. 关于此人的出身和生平我们几乎一无所知;但他可能是希腊人. 在一本希腊问题集里有一个问题给出了他生平的下列事实:他的童年时代占一生的 1/6;过(一生的)1/12 后他开始长胡子;再过(一生的) 1/7 后他结婚;婚后 5 年生了个孩子. 孩子活到他爹一半的年纪,而孩子死后 4 年他爹也死了. 这问题是要求出 Diophantus 究竟活了多大年纪. 答案 84 岁是容易求出的. 他的著作远远超出他的同时代人;但可惜出来得太晚而不能对他那个时代起太大影响,因为一股吞噬文明的毁灭性浪潮正在掀起.

Diophantus 写过几本现已全部失传的书. 他的《论多角数》有

部分内容为今人所知，其中他按《原本》第七、八、九篇的演绎方式给出定理并予以证明；但那些定理中没有什么了不起的东西. 他的一部巨著是《算术》(*Arithmetica*)，据他自己说共十三篇. 现尚存六篇，得自13世纪希腊手抄稿和其后的一些译本.

《算术》也像Rhind的草片纸本一样是个别问题的汇集. 作者在题词中说这是为帮助学生学习这门课而写的一些练习题. Diophantus作出的一步重大的进展是在代数中采用一套符号. 由于我们没有他的亲笔手稿而只看到很久以后的本子，所以不能确切知道他引入了哪些符号. 据说他用来表示未知量的记号是 s，就像我们的 x 一样. 这 s 可能同用在希腊字末尾的那个希腊字母 σ 是一样的[例如在 ἀριθμός(算术)之末]，而Diophantus之所以用它来表示未知量，可能就是因为用字母表示数的希腊记数制中只有这个字母没有被用来表示数. Diophantus把未知量称做“题中的数”. 我们的 x^2 Diophantus记为 Δ^Y，而 Δ 是希腊字 δύναμις(dynamis，幂)的第一个字母. x^3 是 K^Y；这 K 是从 κύβος(cubos，立方)而来的. x^4 是 $\Delta^Y\Delta$；x^5 是 ΔK^Y；x^6 是 K^YK. 在这套符号里，K^Y 没有清楚地表明是 s 的立方，而我们的 x^3 则明白表出它是 x 的立方. Diophantus的 $s^X = 1/x$. 他又用一些名词称呼这些乘幂，例如称 x 为‘数’，称 x^2 为‘平方’，称 x^3 为‘立方’，称 x^4 为‘平方平方’(dynamodynamis)，称 x^5 为平方-立方，称 x^6 为立方立方①.

出现这一套符号当然是了不起的，但他使用三次以上的高次乘幂更是件了不起的事. 古典希腊数学家不能也不愿考虑含三个以上因子的乘积，因为这种乘积没有几何意义. 但在纯算术中，这种乘积却确有其意义；而这正是Diophantus所采取的观点.

Diophantus写加法时把相加的各项并列在一起. 例如

$$\Delta^Y\bar{\gamma}\overset{\circ}{M}\iota\beta \text{ 表示 } x^2\cdot 3+12.$$

① 有些近代作家用 δ, K, $\bar{\nu}$ 代替 Δ, K, Y.

这 $\mathring{M}$ 是个单位元素符号,它表示其后是个不含未知量的纯数. 又如

$$\Delta^Y \bar{\alpha}\varsigma \bar{\beta}\mathring{M}\bar{\gamma} \text{ 表示 } x^2 + x \cdot 2 + 3.$$

他的减号是⋔. 例如他把 $x^6 - 5x^4 + x^2 - 3x - 2$ 写成

$$K^Y\kappa\bar{\alpha}\Delta^Y\bar{\alpha} \pitchfork \Delta^Y\Delta \bar{\varepsilon}\varsigma\bar{\gamma}\mathring{M}\bar{\beta},$$

把所有负项都写在正项之后. 加法、乘法和除法的运算记号是没有的. 符号 ι^{σ}(至少在《算术》一书的现存译本里)用来表示相等. 代数式的系数都是特定的数; 他不用表示一般系数的符号. 因他确实用了一套记号, 所以后人把 Diophantus 的代数称做缩写代数, 而把埃及、巴比伦、Heron 和 Nichomachus 的代数称作文字叙述代数.

Diophantus 的解题步骤是像我们写散文那样一个字接着一个字写的. 他做的运算是纯算术性的,不求助于几何直观来作具体说明. 例如, $(x-1)(x-2)$ 就像我们今天做的那样用代数方法算出. 他也在以 p 代 $x+2$ 和以 q 代 $x+3$ 之类的式子里应用

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = pq$$

之类的恒等式. 就是说,他采取了应用恒等式的步骤,但并未明确提到恒等式本身.

《算术》第一篇的内容主要是那些引出确定的一元或多元一次方程的问题. 其余五篇的内容主要是论述二次不确定方程. 不过内容的划分并不拘泥于这一标准. 在含多于一个未知量的确定方程(得出唯一解的方程)的场合下,他利用题中所给定的情况,把除一个未知量以外的所有未知量消掉,而在最不利的场合下最后得出形如 $ax^2 = b$ 的二次方程. 例如,第一篇的题 27 说:求两数使其和为 20 而乘积为 96. Diophantus 是这样解的:给定和 20,给定乘积 96,$2x$ 为所求两数之差. 于是两数是 $10+x$ 与 $10-x$. 因此有 $100 - x^2 = 96$. 于是 $x = 2$, 而所求的数是 12 与 8.

Diophantus 代数的最突出之点是他对不定方程的解法. 这种方程以前也有人考察过,例如在 Pythagoras 派解 $x^2+y^2=z^2$ 的著作中. 在 Archimedes 的牛群问题里(它引出含八个未知量的七个方程,外加两个补充条件),以及在其他一些零星的著作里都见过. 但 Diophantus 则对此作了广泛的研究,并且是这门代数的创立人,而这门代数如今确实就称做 Diophantus 分析.

他解出了含两个未知量的一次方程,如

$$x+y-5=0.$$

对这种方程,他给一个未知量指定一值,然后解出另一未知量的正有理值. 他认识到指定给第一个未知量的值仅仅是代表性的. (在现代 Diophantus 分析里只求整数解.)解这类方程不费什么劲,所做的工作也不值得一提,因为正有理数解很容易求出.

然后他解含有两个未知量的二次方程,其最一般的形式是(用我们的记号):

$$(1)\qquad y^2=Ax^2+Bx+C.$$

Diophantus 并未写出 y^2,但他说这二次式必须等于一平方数(有理数的平方),他对于特定的 A, B 和 C 值考察(1)并分成不同的情形来处理. 例如当方程中无 C 时,他设 $y=mx/n$ (其中 m 及 n 是特定整数)而得出

$$Ax^2+Bx=\frac{m^2}{n^2}x^2,$$

然后消去 x 而解出方程. 当 A 与 C 不等于零而 $A=a^2$ 时,他设 $y=ax-m$. 若 $C=c^2$, 他设 $y=(mx-c)$. 在所有这些情形下,m 是特定的数.

他也论述联立二次方程的情形,如

$$(2)\qquad y^2=Ax^2+Bx+C.$$

$$(3)\qquad z^2=Dx^2+Ex+F.$$

这里他也只讨论特殊情形,即当 A, B, $\cdots$, F 是些特定的数或满

足特定条件时的情形,他所用的方法是假定 y 和 z 是用 x 表示的一些式子,然后解出 x.

实际上他是在解一个未知量的确定方程.但他知道在(2)和(3)中给 y 和 z 以及在(1)中给 y 选定了表达式,他只不过是给出了代表性的解,而且指定给 y 和 z 的值是颇为任意的.

他又提出 x 的三次或高次式必须等于一数的平方的那种问题,即

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + d^2 = y^2.$$

这里他设 $y = mx + d$, 并选定 m,使 x 的系数等于零.由于两边的 d^2 项消掉了,故可用 x^2 遍除两边,而得 x 的一次方程.此外他还考虑 x 的二次式等于 y^3 的特殊情形.

他所用的所有 x 的二次式归结为如下几类:

$$ax^2=bx,\ ax^2=b,\ ax^2+bx=c,\ ax^2+c=bx,\ ax^2=bx+c,$$

并解出每一类的这种方程.对 x 的三次式,他只解出过一个并不重要的情形.

上述方程说明 Diophantus 所解问题的类型.至于问题的实际措词,可举下面几个例子来说明:

第一篇,问题 8.把一给定平方数分成两个平方数.

这里他取 16 作为给定的平方数,得出 256/25 和 144/25.这个问题经 Fermat 加以推广,使他提出 $x^m + y^m = z^m$ 当 $m > 2$ 时就不能解.

第二篇,问题 9.已给一数为两个平方数之和,把它分为另外两个平方数之和.

他取 $13 = 4 + 9$ 作为所给的数,得出结果是 324/25 及 1/25.

第三篇,问题 6.求三个数,使它们的和以及它们之中任两数的和都是平方数.

Diophantus 给出 80,320 和 41 作为这样的三个数.

第四篇,问题 1.把一给定的数分为两个立方数,并使其每边之和

为给定的数.

他以 370 为给定的数,以 10 为给定的两边之和,他得出 343 及 27.所谓边是指立方数的立方根.

第四篇,问题 29. 把一给定的数表为四个平方数与其各边之和.

以 12 为给定的数,他得出四平方数为 121/100, 49/100, 361/100, 169/100,它们的边是每个平方数的平方根.

Diophantus 在第六篇中解出了一些关于直角三角形边长(有理数)的问题.虽然出现面积的字样,但几何用语只是偶然的.例如他的第一个问题是求一(有理边)直角三角形,使斜边减去每直角边后得出一立方数.这里他凑巧得出整数解 40, 96, 104.但他一般得出的是有理数解答.

Diophantus 在把各类方程化成他能解的形式方面很有才能.我们不知道他是怎么得出他的方法来的.由于他并不依靠几何,很可能他是把 Euclid 解二次方程的(几何)方法翻译成代数的.此外,Euclid 那里没有不定方程,而对 Diophantus 来说这也是一类新的方程.由于我们对于亚历山大后期数学思想的连贯性缺乏资料,所以不能从 Diophantus 前人的著作中找出他的工作的线索.据我们所知,他在纯代数学方面的工作和过去是显然不同的.

他只接受正有理根而忽略所有其他根.甚至当二次方程有两正根时,他也只给出较大的一个.当一个方程在求解过程中明显看出要有两个负根或虚根时,他就放弃这个方程,说它是不可解的.在出现无理根的情况下,他就倒算回去,指出怎样改变一下方程,就能使新方程具有有理根.这方面 Diophantus 和 Archimedes 以及 Heron 不同. Heron 是个测绘人员,他所要求的几何量可以是无理数.因此他接受无理数,但为得出有用的数值便取近似值. Archimedes 也是想求准确解的,但当解是无理数时他就用不等式

来限定它的范围. Diophantus 是个纯代数学家;由于他那个时代的代数不承认无理数、负数和复数,他就放弃具有这种解的方程.但值得指出的是,Diophantus 承认分数是数,而不仅仅把它看成是整数之比.

他没有**一般性的方法**.《算术》里的 189 个问题每个都用不同的方法解.他的问题共有 50 多种类型,但他没有试图进行分类.他的方法接近于巴比伦人的程度甚于接近他的希腊前辈,并且有些地方可以看出他受巴比伦人的影响.事实上,他确曾完全照巴比伦人那样解过一些问题.但迄今并无证据能说明 Diophantus 的工作和巴比伦人的代数有直接联系.他在代数上超过巴比伦人的地方是引用了一套符号并且解了不定方程.对于确定的方程,他不比巴比伦人先进,但他的《算术》里吸收了计算技巧,而这种技巧和其他一些东西是被 Plato 排斥于数学之外的.

Diophantus 解个别问题所用方法之多使人目不暇给,但未能击节叹赏.他是个巧妙而聪明的解题能手,但显然不够深刻,未能看出他所用方法的实质而加以概括.(现今的 Diophantus 分析仍然是由个别孤立问题组成的一团乱麻.)他不像一个探求普遍概念的深邃思想家,而只为了寻求正确的解答.他只有很少数的结果可说是具有一般性的意义——如形式为 $4n+3$ 的质数不能表为两平方之和等等. Euler 确曾认为 Diophantus 是用特例来说明一般方法的,因为那时候未能用字母来代表系数.还有别的人相信 Diophantus 认识到他的材料是属于抽象的基本科学的.但这种观点并未为一切人所接受.不过整个说来他的工作在代数上是永垂不朽的.

今日数学里非常重要的一件事却在希腊代数里遗漏了,这就是用字母来代表一类数,例如方程中的系数. Aristotle 确曾在讨论运动时用希腊字母表示任一时间或任一距离,比如他说过"B 的一半"这类话. Euclid 也在《原本》第七到九篇中用字母表示

一类数，而且 Pappus 也沿用这种做法. 但他们都没有认识到字母表示法在增进代数方法的功效与其普遍性方面作用是何等巨大.

亚历山大时期代数的另一特色是缺乏任何明晰的演绎结构，整数、分数和无理数这各种类型的数肯定是未经定义的. 他们也没有什么一套公理来建立演绎结构. Heron, Nichomachus 和 Diophantus 的著作以及 Archimedes 在算术方面的著作，读起来就像埃及人和巴比伦人的那种药方单子式的著作，只告诉你该怎么做. Euclid 和 Apollonius 著作里以及 Archimedes 几何里那种演绎的、条理井然的证明全然不见了. 所解的问题都是归纳性质的，就是说它们所指明的解具体问题的方法虽然能应用于一般性的一类问题，但并未规定应用的范围能有多广. 由于古典希腊学者所做的工作，使人觉得数学结果好像都是依据一组明文规定的公理用演绎法推出来似的，因此出现独立的一门算术和代数而竟无其自身的逻辑结构这种情况，就成为数学史上的一大问题. 对算术和代数的这种搞法最清楚不过地指明了埃及和巴比伦在亚历山大学术界里的影响. 虽然亚历山大的希腊代数学家似乎一点不在乎这一缺陷，但以后可以看到这确使欧洲数学家深感不安.

参考书目

Ball, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, Chaps. 5 and 7.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, Macmillan, 1919, pp. 52～62.

Heath, Thomas L.: *Diophantus of Alexandria*, Dover (reprint), 1964.

Heath, Thomas L.: *The Works of Archimedes*, Dover (reprint), 1953, Chaps. 4 and 6 of the Introduction, pp. 91～98, 319～326.

Heath, Thomas L.: *A History of Greek Mathematics*, Oxford University Press, 1921, Vol. 1, Chaps. 1～3; Vol. 2, Chap. 20.

Heath, Thomas L. : *A Manual of Greek Mathematics*, Dover (reprint), 1963, Chaps. 2～3, and 17.

D'Ooge, Martin Luther: *Nichomachus of Gerasa*, University of Michigan Press, 1938.

van der Waerden, B. L. : *Science Awakening*, P. Noordhoff, 1954, pp. 278～286.

第 7 章

希腊人对自然形成理性观点的过程

数学是科学的大门和钥匙.

Roger Bacon

1. 希腊数学受到的启发

除了偶尔一些提示外,希腊经典著作如 Euclid 的《原本》,Apollonius 的《圆锥曲线》和 Archimedes 的几何著作都没有说到这些作家为什么要讲究这些材料.他们只给出了形式的、尽可能完善的演绎数学.就这一点而论,希腊的数学书与现代数学课本和论著没有什么差别.这些书只想把已取得的数学成就整理讲解,而闭口不谈搞数学的目的何在,定理是怎样启发和怎样摸索出来的,数学知识又是怎样应用的.

要了解为什么希腊人能创造出那么多重要的数学,就必须研究他们的目的何在.希腊人对了解自然界有那么一股迫切而不可遏制的愿望,推动他们创造和看重数学.数学是对自然界进行研究的本身工作之一,是了解宇宙的钥匙,因为数学规律是宇宙布局的精髓.

有什么证据可以说明数学在他们那里有这样的地位呢?很难具体指出某个定理或某一批定理是为某一特定目的而产生的,因为我们对希腊数学家所知的材料不多.只有 Ptolemy 直接声明他是为研究天文而创立三角术的.但当我们知道 Eudoxus 主要是个天文学家,而 Euclid 不仅只写《原本》而且还有《现象》(用于研究恒星天球运动的球面几何著作)、《光学》、《镜面反射》、《音乐原理》

(*Elements of Music*)和其他力学方面的短篇著作(这些都是数学性著作),那就不能不得出结论说数学并非一门孤立的学科.知道了人的心智活动是怎样进行的,而且详细知道了 Euler 和 Gauss 是怎样进行工作的,就可以相当肯定地说,那些天文、光学和音乐方面的研究必定启发他们提出数学问题,因此搞数学的目的很可能是为了用之于这些领域.球面几何(希腊时代称之为 sphaeric)很可能正是在天文学数学化(这甚至在 Eudoxus 以前就出现的事)之际进行研究的. Pythagoras 派所说的"sphaeric"是指"天文学".

我们从数学家著作中推出的这些猜测虽有足够理由,但幸而也能从希腊哲学家的著作中获得无可否认的证据来加以肯定,而那些哲学家本人也是杰出的数学家或科学家.数学的范围并不限于数学本身.在古典时代数学包括算术、几何、天文和音乐;而在亚历山大时期(如同第5章中所指出的),数学这门科学分成算术(数论)、几何、力学、天文学、光学、测地学、声学与应用算术.

2. 关于自然界的理性观点的开始

在早于希腊时代或与之同期并存的古代文明中,自然界被认为是混乱、神秘、变化无常和可怖的.自然界的现象是天神所操纵的.祈祷和巫术可以让天神发慈悲免降灾祸甚至创造奇迹赐福于人,但人的生命和命运是完全听凭于他们的.

从我们对希腊文明和文化开始有相当确凿而具体知识的时代(约公元前600年)起,我们发现他们的知识分子对自然界采取一种完全新的态度:合理的、批判的和世俗性的.神话被抛弃了,也没人相信天神的喜怒哀乐能操纵人和世界了.新的信念认为自然界是有秩序的并始终照一定的方案运行.更有甚者,他们深信人的智慧是强有力的甚至是至高无上的,人不仅可以探索自然界的道理甚至还能预知它将会出现的事态.

持这种理性观点的诚然只有知识分子,只有古典时期和亚历山大时期的一小群人.尽管这些人反对鬼神操纵自然之说,但一般的人则深信宗教并相信天神掌管世间一切事务.他们也像埃及人和巴比伦人那样愚诚地相信神秘教条和崇奉迷信.事实上希腊神话是流传广泛、信徒众多的.

爱奥尼亚学派是最早断定自然界实质的人.我不打算细讲 Thales, Anaxagoras 和他们同僚的种种学说,他们都肯定在一切表面现象的千变万化之中有一种始终不变的东西.这一原始物质的内蕴本质是守恒的,而所有的物质形态都可用它来解释.爱奥尼亚学派的这种自然哲学来自一系列大胆的思索、巧妙的猜测和聪敏的直观,而并非广泛的、细致的科学研究的结果.也许他们有点太急于想认识全貌,所以就幼稚地断然作出广泛的结论.但他们确实从物质的和客观的方面来解释宇宙的结构和设计布局,而抛弃老的神话故事.他们用合理化的解释来代替诗人的想象和不加分析的传说,并且他们用理性来辩护他们的主张.这些人至少敢于凭他们的理智来面对宇宙,而不肯依赖于神、灵、鬼、怪、天使以及其他神秘的力量.

3. 数学设计信念的发展

把对自然作用力的神秘、玄想和随意性去掉,并把似属混乱的现象归结为一种井然有序的可以理解的格局,走向这方面的有决定意义的一步是数学的应用.第一批提出这种合理化的和数理哲学性自然观的人是 Pythagoras 学派.他们诚然也从希腊宗教的神秘方面吸取一些灵感;但他们的宗教信条主要是净化灵魂,使之从肉体的污浊与桎梏中解脱出来.这一派人生活朴素,潜心研究哲学、科学和数学.新加入的人要宣誓至少在宗教信仰方面保守秘密并终身参加这一派.社会上的男人和女人都可参加.

Pythagoras 派的宗教思想肯定是带神秘色彩的，但他们的自然哲学却无疑是理性化的．有些现象在性质上完全不同，但表现出相同的数学性质，这给他们以深刻印象．于是他们认为数学性质必定是这些现象的本质所在．更具体地说，Pythagoras 派从数和数的关系上找到了这一本质．数是他们解释自然的第一原则．所有物体都由点或"存在单元"按照相应的各种几何形象组合而成．由于他们把数看做既是点又是物质的元粒，所以他们认为数是宇宙的实质和形式，是一切现象的根源．因此 Pythagoras 派的信条是："万物皆数也"．第5世纪的一个著名 Pythagoras 派 Philolaus 说："如果没有数和数的性质，世界上任何事物本身或其与别的事物的关系都不能为人所清楚了解……你不仅可以在鬼神的事务上，而且在人间的一切行动和思想上乃至在一切行业和音乐上看到数的力量．"

例如，Pythagoras 派之所以能把音乐归结为数与数之间的简单关系，乃是因为他们发现了下列两个事实：第一，弹弦所发出的声音取决于弦的长度；第二，绷得一样紧的弦若其长度成整数比，就会发出谐音．例如，两根绷得一样紧的弦，若一根是另一根长的两倍，就会产生谐音．换言之两个音相差八度．如两弦长为3比2，则发出另一谐音；这时短弦发出的音比长弦发出的音高五度．确实，产生每一种谐音的各根弦的长度都成整数比．Pythagoras 派也搞出了一个著名的希腊音阶(musical scale)．我们虽然不打算讲许多希腊时代的音乐，但要指出许多希腊数学家，包括 Euclid 和 Ptolemy，都写过这方面的著作，特别是关于谐音的配合，而且还制定过音阶．

Pythagoras 派把行星运动归结为数的关系．他们相信物体在空间运动时发出声音；也许是从绳端吊一东西挥动时发出声音这一点而引起的猜测．他们又相信动得快的物体比动得慢的物体发出更高的音．根据他们的天文学，离地球越远的行星动得越快．

因此行星发出的声音(我们因为从出世之日起就听惯了,所以觉察不出来)因其去地球的距离而异而且都配成谐音. 但因这"球体的音乐"也像所有谐音一样都可归结为数的关系,所以行星运动也是这样.

Pythagoras 派,也许 Pythagoras 本人,不仅要观察和描述天体运动而且要找出它们的规律. 就月球和太阳来说,认为它们作匀速圆周运动的想法是很自然的,因而就猜想所有行星运动都能用匀速圆周运动来解释. 晚期的 Pythagoras 派干了一件更显然与传统决裂的事;他们最早相信地球是个球. 又因为他们认为 10 是理想的数,所以他们肯定移动的天体必定有 10 个. 第一个是中心火球,所有天体包括地球都绕它转动. 除地球外他们知道有 5 个行星. 这 6 个天体,加上日、月以及恒星所附着的天球,总共只有 9 个运动的天体. 因此他们提出存在第 10 个天体,叫反地球(counter-earth),也是绕中心火球转的. 这个反地球我们看不见,因为它在中心火球的另一侧以恰好相同于地球的速度运动,又因为住人的那部分地球是背朝中心火球的. 这里我们看到了第一个地动学说. 但 Pythagoras 派并不提出地球有自转;他们只是认为恒星天球是绕宇宙中心转动的.

还有一种信念,认为天体是永恒的、神圣的、完美并且不变的,而尘世物体,即地球和彗星(按希腊人的说法),则要变化、分解、腐朽和死灭,这据说也是从 Pythagoras 派来的. 匀速圆周运动的信念以及天体和尘世物体之分已深入希腊人的思想之中.

自然的其他形形色色特性也可"归结"为数. 1、2、3、4 这四个数,叫四象(tetractys),是特别受重视的,因它们相加成 10. 据说 Pythagoras 派的誓言是:"谨以赋予我们灵魂的四象之名宣誓. 长流不息的自然的根源包含于其中. "Pythagoras 派认为自然是由四元性组成的;例如,点、线、面和立体;以及土、气、火、水四种元素. 四种元素也在 Plato 的自然哲学中占中心地位. 因为 10 是理想

的,故10代表宇宙.10的理想性就需要使整个宇宙能用10种对立的范畴来描述:奇与偶,有界与无界,善与恶,右与左,一与多,雄与雌,直与曲,正方与长方,亮与暗,静与动.

Pythagoras哲学显然把严谨的思想同那些被我们今日看做是虚构、无用和不科学的信条混在一起.他们迷信数的重要意义,使他们的自然哲学肯定和自然很少相符之处.但他们确实强调要了解自然,并且不是像爱奥尼亚学派那样通过单独一种物质而是通过数的关系这种形式结构来了解的.此外,他们和爱奥尼亚学派都认识到在单纯感觉材料下面必然潜藏着自然的和谐关系.

现在我们可以认识到何以不可公度长的发现对Pythagoras派哲学是那么可悲的打击:不可公度长之比竟然不能用整数之比来表示.此外,他们相信一直线是由有限个点(他们把它和物理质点视为等同)组成的;但对$\sqrt{2}$那样的长就不可能是如此.如果他们把无理数当作数来接受,他们那个视整数为至上的哲学就要垮台.

由于Pythagoras派把天文和音乐"归结"为数,这两门学科就同算术和几何发生了联系;这四门学科都被人看成是数学学科.甚至一直到中世纪,这仍包括在学校课程中,当时号称"四大科".如前所说,Pythagoras派之注重算术(数论)并不在于该学科的纯美学价值,而是为了要用数来探究自然现象的意义;这就使他们重视一些特殊的比例,重视三角形数、正方形数、五角形数和其他能排成更复杂形体的数.其次,正是Pythagoras派的这种以数为中心的自然哲学,才使Nichomachus那样的人重视数.事实上,现代科学也遵循Pythagoras派重视数的传统——不过(以后可以看到)形式远为深奥,而纯为追求美的现代数论则直接从Pythagoras派的算术脱胎而来.

生长在Pythagoras与Plato之间那些年代里的哲学家同样关心现实的本质,但没有直接把数学搞进去.像Parmenides(公元前

5世纪), Zeno(公元前5世纪), Empedocles(公元前约484—前424), Leucippus(约公元前440年)和Dēmocritus(公元前约460—约370)这些人的论点和观点,也像他们的爱奥尼亚前辈一样,是不涉及数量问题的.他们对现实世界的笼统的结论说得最好也不过是从单纯观察而来的提示.但他们都肯定自然界是可以理解的,现实世界是可以用思想来掌握的.他们每个人都是那引向以数学研究自然这根链条上的一个环节. Leucippus和Dēmocritus特别值得注意,因为他们最明确地提出了原子论.他们的共同哲学观点是:世界是由无穷多个简单的、永恒的原子组成的.这些原子的形状、大小、次序和位置各有差异,但每个物体都是由这些原子以某种方式组合而成的.虽然几何上的量是无限可分的,但原子则是终极的、不可分的质点(原子的希腊文atom的意思是不可分).硬度、形状和大小是原子的现实物理性质.其他性质如味、色、热则非原子所固有而来自观察者;所以感性知识不可靠,因它随观察者而异.原子论者也和Pythagoras派一样,声言隐藏在自然界不断变化着的万象之下的真实性是可用数学来表示的,而且认为这个世界上所发生的一切是由数学规律严格确定了的.

Plato(公元前427—前347)是仅次于Pythagoras本人的最杰出的Pythagoras派,他是传播这种主张的最有影响的一个人,即认为只有通过数学才能领悟物理世界的实质和精髓.对他来说,世界之按照数学来设计一事是毫无疑问的,因为"神永远按几何规律办事".感官所认识的世界是混乱和迷离的,在任何情况下都是不完美不持久的.物理方面的知识不重要,因为物质对象要变要腐朽;所以直接研究自然以及纯粹物理上的考察都是没有价值的.物理世界只不过是数学家和哲学家所研究的那个理想世界的不完美的抄件(拷贝).那永恒不变的数学定律才是现实世界的真髓(第3章第8节).

Plato比Pythagoras派走得更远,他不仅想通过数学来了解自然,而且要用数学来取代自然界本身.他相信只要对物理世界作

些洞察一切的鸟瞰而从中抽出基本真理,然后就可以单凭理性继续对此进行考察.从那以后就不存在自然界而只有数学,它可以取代物理研究,就像在几何学里所做的那样.

Plato 对天文学的态度足以说明他对所追求的知识抱什么看法.他认为这门科学所要关心的不是可见天体的运动.天上星星的罗列和它们表观上的运动诚然奇异美妙,但仅仅对运动作些观察和解释远远不是真正的天文学.要知道真正的天文学,必须先"把天放在一边",因为真正的天文学是研究数学天空里真星的运动规律的,而可见的天不过是那数学天空的不完美的表现形式.Plato 鼓励人们去搞一种理论天文学,那里的问题能使人赏心但并不为了能使人悦目,那里的对象能为心智所领悟,但不能为肉眼所察觉.天空呈现在我们眼前的形形色色的图象只不过是帮助我们认识较高真理的一些图表材料.Plato 是不管天文学在航海、历法和测时这些方面的应用的.

Plato 对数学在天文学上的作用所持的观点,是他哲学的一个重要组成部分.他的哲学认为存在着一个由形式和观念组成的、客观而普遍可靠的实在世界.这实在世界中的事物是独立于人之外而存在的,它们是不变的、永恒的、无古无今的.我们是通过前世回忆而体会到这些概念的;它们虽存在于心灵之中,但须加以刺激才能将其唤起或将其从深潜之处提出.这些观念是唯一的实在.数学观念也包括在其中,但地位较低,它们介乎感性世界和较高观念如善、真、公正、美之间.在这一无所不包的哲学中,数学观念起两重作用;它们不仅是实在世界本身的一部分,而且(正如我们在第3章中所指出的)帮助训练心灵去认识永恒的观念.如 Plato 在《理想国》第七篇中所说的,学了几何就能更易于认识善这个观念:"几何会把灵魂引向真理,产生哲学精神……"

Aristotle(公元前 384—前 322)虽也从他老师 Plato 那里取得不少思想,但对现实世界的研究以及对数学和现实的关系问题,想

法很不一样. 他批评 Plato 追求彼岸世界的态度,批评 Plato 把科学归结为数学的想法. Aristotle 是个物理学家,他相信物质的东西是实在的主体和泉源. 物理乃至一般的科学必须研究具体的世界以获得真理;真正的知识是从感性的经验通过直观和抽象而获得的. 然后才能在这样获得的知识上应用理性给予加工.

只凭物质是无意义的. 物质本身是不确定的,它只具有成为形式的潜在可能;当物质被组织成各种各样的形式时它才变得有了意义. 形式以及引起新形式的物质内部的变化乃是实在世界的有意义之处,也是科学所应真正关心的.

Aristotle 认为物质并非(如早期一些希腊人所相信的)由一种原质组成. 我们看到和接触到的物质是由四种基本元素:土、水、火和气组成的. 每种元素又有其自身的特征性质. 土是冷而干的;水是冷而湿的;气是热而湿的;火是热而干的. 因此任一物件的性质取决于所含元素的比例;由此就决定了它的固体性、硬度、粗糙性以及其他品质.

四种元素还有其他一些品质. 土和水有重性,气和火有浮性. 重性使一元素趋向地心求得静止;浮性使它趋向天空. 因此只要知道一给定物所含元素的比例,就可以决定它的运动情况.

Aristotle 把固体、液体、气体看成三类不同的物体,以其具有不同物性上的品质而互相区别. 例如物体从固体变为液体说明它失去一种品质而代之以另一种品质. 因此若要把水银变为硬的黄金就意味着需要从水银里去掉具有流动性的物质而代之以其他物质.

科学还必须考察变化的原因. Aristotle 认为原因有四类. 第一类是物质的或内在的原因;对一个黄铜塑像来说,黄铜是内在原因. 第二类是形式原因;对塑像来说,这就是它的设计和形状. 谐音的形式原因是八音度里的 2 比 1 的格局. 第三类原因是作用原因,是起作用的东西或人;艺术家和他的凿子是塑像的作用原因. 第四

个是终因,或现象所服务的目的;塑像是用来悦人心意,提供美感的. 终因是四类原因中最重要的,因为它给出事件或现象的终极理由. 每件东西都有一终因.

在事物的这种分类方案里把数学摆在什么地位呢? 物理科学是研究自然的基本科学,数学则从描述形式上的性质(例如形状和数量)这方面来帮助研究. 它也给物质现象上所观察到的事实提供解释. 例如几何用以说明光学和天文所提供的事实,算术上的比例关系能说明产生谐音的理由. 但数学肯定是从现实世界抽象而来的,因为数学对象不能独立于或先于经验而存在. 它们是作为能够被感觉到的对象本身与对象的本质之间的一类观念而存在于人的心目中的. 因它们是从物理世界抽象而来的,所以它们能应用于物理世界;但若脱离可见的或可感触的事物,它们便没有实在性. 单靠数学是决不能充分确定物质的. 质的差异,例如颜色间的差异,是不能归结为几何差异的. 因此在研究原因时,数学至多只能提供形式原因方面的一些知识,就是说只能提供一种描述. 它能描述物理世界中所发生的事,能把同时发生的变异联系起来,但对运动或变化的作用原因和终因却不能置一辞. 所以 Aristotle 是把数学和物理严格区别开的,并给予数学以次要的地位. 他对预测未来是不感兴趣的.

综上所述可以看出那些塑造希腊学术界的所有哲学家对于自然界的研究强调要理解和领悟其内在实质. 从 Pythagoras 时代起,几乎所有学者都说自然界是依数学方式设计安排的. 自然界依数学方式设计安排这种信念是在古典时期形成的,并在那时开始探索数学规律的. 虽然不能说此后所产生的全部数学都是从贯彻这一信念而引起的,但一旦建立了这种信念,它就被极大多数的大数学家所接受并自觉地贯彻执行. 这种信念直到 19 世纪末一直占优势,在那个时期探索自然界的数学设计方案被人认为就是探索真理. 虽有少数希腊学者(如 Ptolemy)认识到数学理论只不过是

为有系统地了解自然而作出的人为尝试,但对于数学规律之为自然真理这种信念却吸引了一些最深刻最崇高的思想家去研究数学.

为了使读者更易于理解17世纪所出现的事情,我们还应该指出希腊人对心智力量的重视.因为希腊哲学家相信心智是掌握自然的最有力的因素,所以他们把心智所欣赏的原理作为第一原理.例如圆周运动之为运动的基本类型这种信念就是从其形式的优美为心智所欣赏而来的,Aristotle辩护此说的理由也是说圆是完整的而直线形因其是由许多线段所围成的,所以是不完整的从而是次要的.至于天体之只应作匀速的或等速的运动这种想法,它之所以能迎合心智也许因为这种运动比非匀速运动简单.匀速的圆周运动似乎是适合于天体的运动.至于世俗物体之所以异于行星、太阳和恒星也是有理可说的,因为天体外貌保持不变而地上事物变化明显.Aristotle虽只强调那种有助于理解现实世界(人所能观测的世界)的抽象,但甚至他也说我们应该从心智所明了的原理出发,然后去分析自然界里发现的事物.他说我们应该从普遍到特殊,从个别的人到人们(原文如此,因与头一句矛盾,疑原书有误——译者),正如小孩起头把一切男人都叫爹而到后来才能区别那样.所以即使是从具体对象作出的抽象,事先也需要有源于心智的一些总原理.心智能产生第一性原理的这种信念到17世纪终于被推翻了.

4. 希腊的数理天文学

现在来考察希腊人在用数学描述自然的工作方面做出了什么成绩.希腊人所建立的几门科学只是从Plato时代起才搞出相当内容和定出方向的.这里虽然只打算回顾天文学但附带也涉及Euclid几何的一个方面.我们已说过球面几何是为天文学而发展

的.几何实际是宇宙学中的一部分.希腊人认为几何原理是体现在宇宙的整个结构中的,而空间是宇宙的主要组成部分.因此研究空间本身以及空间中的图形对于了解宇宙这个较大的目标甚为重要.换言之,几何本身就是一门科学,关于物理空间的科学.

Plato 虽也充分认识到巴比伦人和埃及人的天文观察材料为数是很可观的,但正是他强调指出对于行星的不规则运动缺乏内在的或统一的理论或解释.Eudoxus 曾一度是 Plato 学院里的学生,他着手解决 Plato 所提出的“整理外观”的问题.他所作的答案是第一个比较完整的天文学说.他写过四本天文书:《镜》(*Mirror*),《现象》(*Phenomena*),《八年周期》(*Eight-Year Period*)和《论速率》(*On Speeds*),但现今只知道其内容的片断.我们是从这些片断和其他作家所提及的材料知悉 Eudoxus 学说的主要精神的.

从地上看到的日月的运动可以粗略地描述成匀速圆周运动.但它们偏离圆轨道的程度大到足以被人观测出来因而需要加以解释.至于从地上所看到的行星运动就更复杂,因在它们运动的任意一圈的过程中,会在短期内倒过来走一段回头路之后再往前走,而且它们在这些路上的速率也是变化着的.

为用几何上简单的圆周运动来说明这些实际的、颇为复杂而且似乎不遵守任何规律的运动,Eudoxus 提出了如下的方案:任一天体都有三四个以地球为中心的同心球,而各个球都绕一轴转动.最里面的一个球是带着那个天体的,而天体则沿着球的所谓赤道运动;就是说转轴垂直于运动天体的圆形路径.不过这最里面的球在绕轴运转之时被下一个同心球这样带动:设想第一球的两轴延长而两端固定在第二个球上,则第二球在绕其轴转动时就带动第一球的轴一起转动,同时第一个球仍绕它自己的轴转动.第二球的轴又随第三球之绕其轴旋转而一起转动.Eudoxus 发现用三个球就足以复制出从地上看到的日、月的运动.对于每个行星就要用第四个球,而这第四个球是带着第三个球的轴一起旋转的.每个组合

的最外面的球,每24小时内绕一根通过天极的轴旋转一次. Eudoxus总共用了27个球. 他精心选取这些球的旋转轴、旋转速度、球半径,使得他的理论尽量符合当时所有的观测数据.

Eudoxus的方案在数学上很优美并在许多方面很了不起. 用球的组合这个想法本身就很巧妙;而选取球轴、半径和转速,使天体的合成运动符合实际观测数据的工作,则需要在处理曲面和空间曲线(即行星运行路径)方面有极大的数学技巧.

特别值得指出的是,Eudoxus的理论是纯数学的. 他所说的一些球,除了恒星所在的那个天"球"之外,都不是实际观察到的球而只是数学的构想. 他说有一些力使这些球转动,但他也并没有设法讲明那是些什么力,他的理论是彻底符合现代精神的,因为如今科学的目标是作出数学描述而不是寻求物理的解释.

Eudoxus系统有严重的缺点. 它不能说明太阳速度的变化,并对其实际路线的描述也稍有错误. 他的理论同火星的实际运动根本不相符,同金星运动的符合程度也不能令人满意. Eudoxus之所以容忍这样的缺点,可能是由于他手头没有足够的观测数据. 他也许在埃及只学了一些关于驻点、逆行以及外行星(火星、木星和土星)的运行周期等主要事实. 或许又由于这一原因,使他所算得的天体大小和距离的值很粗略. Aristarchus说Eudoxus相信太阳直径是月球直径的九倍.

Aristotle并不欣赏纯数学的方案,因此他并不满足于Eudoxus的解决办法. 他为设计出让一球推动另一球旋转的实际机构,又在Eudoxus的球之间增加了29个球,使一球的转动能通过实际接触推动另一球,而使所有球的动力来自最外面的那个球. 在Aristotle的有些著作中把本身运动着的恒星天球作为推动其他各球的第一个动力. 在另一些著作中则认为在天球背后有一个不动的推动者. 他的56个球把这系统搞得如此复杂,使科学家不能置信,虽然它在中世纪有教养的世俗人士中间还是很风行的.

Aristotle也相信大地是球形的，因为从对称和平衡方面的理由来说需要如此，更因为月蚀时看到的地球在月球上的影子是圆的缘故.

从 Aristotle 以后几乎不断有人写天文著作. 在 Autolycus 的著作（第 3 章第 10 节）和 Euclid 的《现象》（第 4 章第 11 节）之后，下一批天文学巨著是亚历山大学者写的. 巴比伦人在塞琉西时代所作的观测（叫加尔底亚观测）和亚历山大学者自己测出的数据使原有数据大为丰富和准确.

亚历山大的第一个大天文学者是 Aristarchus（公元前约 310—前 230），他在几何、天文、音乐和其他科学分支上学问广博. 他所著《论日月的体积和距离》（*On the Sizes and Distances of the Sun and Moon*）（现尚存希腊文和阿拉伯文手抄本）是第一个测量日月到地球距离和这些天体相对大小的重大尝试. 这些计算同时又是说明亚历山大学派注重数量的另一个例子. Aristarchus 没有三角知识也没有准确的 π 值（Archimedes 的工作出现在他之后），但他把 Euclid 的几何用得很得法.

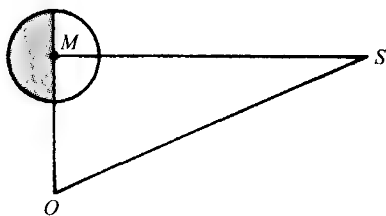


图 7.1

他知道月光是反射光. 当恰好半个月球被照亮时，M 处（图 7.1）的角是直角. 在 O 处的观察者可测出该处的角，于是至少可估算出 OM 与 OS 的相对距离. Aristarchus 测出的角是 87°；它的准确到分的值是 89°52′. 因此他估出太阳离开地球与月球离开地球的距离之比在 18 到 20 之间. 正确的比是 346.

求得了相对距离之后，Aristarchus 就通过从地上看到的日轮和月轮的大小测定它们的相对大小. 他得出的结论是太阳比月球大 7 000 倍. 这里同实际差得很远；正确的数字是 64 000 000 倍.

他又求得太阳直径和地球直径之比在 19/3 与 43/6 之间;但正确的比约为 109.

Aristarchus 在第一个提出日心说(即地球和行星都围绕固定的太阳作圆周运动)这方面也同样出名. 恒星也是固定的,它们看上去好像在转动,实际上那是地球绕轴自转的结果. 月球是绕地球转动的. 我们今天虽然知道 Aristarchus 的思想是正确的,但它不能为当时的人所接受是有许多原因的. 其一是按照 Aristotle 所精心阐述的希腊力学(见下)不能说明在一个运动着的地球上能放得住东西. 照 Aristotle 的说法,重物趋向宇宙中心. 只要你承认地球是宇宙的中心,这一原理就可用来说明物体落向地面的运动;但若地球也在运动,那么落体就会掉在后面. Ptolemy 曾用这个论点来反对 Aristarchus,并且事实上后人也拿它来反对 Copernicus,因当时的力学仍是 Aristotle 的那一套东西. Ptolemy 还说运动的地球会把天上的云抛在后头. 其次,Aristotle 的力学需要有一种力来使地球上的东西保持运动而又看不出有什么力. 但我们不知道 Aristarchus 是怎样回答这些论点的.

另一个反对 Aristarchus 的论点是:如果地球在动,那它同恒星的距离就会变,而看起来却并没有变. 对此 Aristarchus 给予了正确的反驳;他说恒星天球的半径是如此之大以至地球轨道相形之下小得微不足道. Aristarchus 的日心说之所以被许多人所摒弃是因为他把地上的朽物与天体的不朽之物视为等同. 行星绕日作圆周运动之说当然是不能令人满意的,因为运动情况实际上要比这复杂得多. 但日心说的思想是可以改进的,而 Copernicus 以后确实作了这种改进. 但这对希腊人的思想来说未免太激进了.

定量的数理天文学的奠基人是 Apollonius. 人们称他为厄泼色隆(希腊字母 ε 的读音),因 ε 这个记号常被人用来表示月球,而 Apollonius 的大部分天文学是研究月球运动的. 但在考察他的工作以及与之有密切关系的 Hipparchus 和 Ptolemy 的工作以前,我

们先要考察一下希腊人在 Eudoxus 和 Apollonius 所处时代之间搞出来的一套基本天文方案,即本轮(epicycle)和均轮(deferent)的方案.按照这套方案,一行星 P 在中心为 S 的一个圆周上作匀速运动(图 7.2),而 S 本身则在以地球 E 为中心的一个圆周上作匀速运动. S 所沿着运动的圆叫均轮;P 所沿着运动的圆叫本轮.对某些行星来说,点 S 就是太阳,但在其他情形下则只不过是数学上假设的一个点. P 与 S 的运动方向可能相符,也可能相反.太阳和月球的情况就属于后一种.

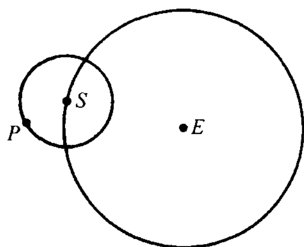


图 7.2

据认为 Apollonius 对本轮运动的这套方案以及用来表示行星和日、月运动的细节是彻底知悉的. Ptolemy 把行星在轨道上停下来并开始逆行的点的确定特别归功于 Apollonius.

希腊天文学的顶点是 Hipparchus 和 Ptolemy 的工作. Hipparchus(死于约公元前 125 年)沿袭了均轮和本轮的这一套方案,并将其应用于当时所知的五大行星以及日月和恒星的运动.我们是通过 Ptolemy 的《大汇编》获悉 Hipparchus 的著作的,但很难区别哪些是属于 Hipparchus 的而哪些是属于 Ptolemy 的. Hipparchus 在罗得斯观象台工作 35 年之后并应用巴比伦人的观测数据搞出了本轮运动理论的细节.他通过适当选取本轮和均轮的半径以及天体在本轮上的和本轮圆心在均轮上的运动速度,使他能把运动的描述加以改进.对太阳和月球的运动的描述他搞得很成功,但对行星的运动只能获得部分成功.自 Hipparchus 时代之后,月蚀的时间能准确预报到一二个小时之内,但对日蚀的预报却不那么准.这一理论也可用以说明四季的来历.

Hipparchus 的独特贡献是他发现了岁差(precession of the equinoxes). 为说明这一现象,设地球的旋转轴远及恒星天球. 它与恒星天球相交的点每隔 26 000 年转动一圈. 换言之,地轴相对于恒星的方向是不断变化的,而且这一变化是周期性的. 它在任一时候所指向的那个星叫北极星. 上述那个圆圈的直径在地球上的张角是 45°.

Hipparchus 还在天文学上作出了其他许多贡献,如观测仪器的制作,黄道角的测定,月球运动不规则性的测量,太阳年日数的改进(他测到 365 天 5 小时 55 分 12 秒——比近代数字约长 6½ 分)以及大约一千个恒星星表的编制等等. 他求得月地距离与地球半径之比为 67.74,而现代的数值是 60.3;他算出月球半径是地球半径的 1/3,而现代的数字是 27/100.

Ptolemy 推广 Hipparchus 的工作,进一步对所有天体的数学描述加以改进. 他在《大汇编》里所论述的那个推广了的理论,把周转圆和均轮这一套地心说理论作了完整阐释,故后人称之为 Ptolemy 理论.

为使这套几何说法符合观测数据,Ptolemy 还对周转圆上的运动加上一种变动叫做均匀平化运动(uniform equant motion). 根据这一方案(图 7.3),行星沿中心为 Q 的一周转圆运动,而 Q 沿以 C 为圆心的圆周运动,不过这里的 C 不是地球而是稍偏离一点. 为确定 Q 的速度,他引入一点 R 使 $EC = CR$, 并使 $\angle QRT$ 匀速增大. 这样 Q 就以匀角速度运动,但不是以匀线速度运动.

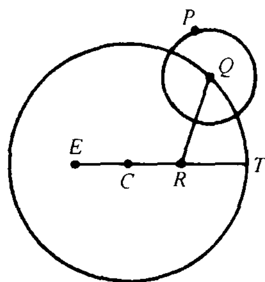


图 7.3

希腊天文学家所采取的方法和所获得的理解是有彻底现代精神的. 亚历山大的希腊天文学家如 Hipparchus 和 Ptolemy 都亲自作观测;事实上 Hipparchus 并不

信赖古代埃及人和(巴比伦)加尔底亚人的观测数据而重新进行观测. 古典时代和亚历山大时代的天文学家不仅提出理论,并且也充分认识到这些理论并非真正的设计方案而只不过是能符合观测数据的一种描述. Ptolemy 在《大汇编》中说①,天文学里应力求使数学模型最为简单. 这些人也像其他希腊学者一样,并不寻求关于运动的物理解释. 关于这一点 Ptolemy 说②:"总之,一般说来第一性原理的终因若不是无关紧要便是很难说明其本质的."不过他自己的数学模型以后却被基督教人士视为只字不可改的真理.

Ptolemy 的理论提供了第一个相当完整的证据,说明自然是一致的而且具有不变的规律,而且也是希腊人对 Plato 提出的合理解释表观天体运动这一问题的最后解答. 在整个希腊时期没有任何一部著作能像《大汇编》那样对宇宙的看法有如此深远的影响,并且除了 Euclid 的《原本》以外,没有任何别的著作能获得这样毋庸置疑的威信.

对希腊天文学的这一简短叙述,并未充分显示出即令只是在这里所提到的几位希腊学者工作的深度和广度,并且还略去了其他许多贡献. 几乎每一位希腊数学家,包括 Archimedes 在内,都研究过天文学. 希腊天文学是高明而又广博的,并且应用了大量的数学.

5. 地 理 学

另一门奠基于希腊时代的科学是地理. 虽然有少数几个古典时代的希腊人如 Anaximander 和米利都的 Hecataeus(死于约公元前 475 年)曾绘制了当时所知地面的地图,但到了亚历山大时代

---

① 第八篇第 2 章末段.

② 《大汇编》(*Almagest*)第九篇.

地理学才有了大的进展.他们测量或计算了地面上的距离、山的高度、谷的深度、海的广度.由于希腊世界的范围扩大了,更促使希腊人去研究地理.

亚历山大时代的第一个大地理学家是昔勒尼的 Eratosthenes (公元前约 284—前 192).此人是亚历山大图书馆馆长,数学家,哲学家,诗人,历史学家,语言学家,年表学家,并以古代最有学问的人闻名于后世.他曾在雅典 Plato 的学校里求过学,后被 Ptolemy Euergetes 延请到亚历山大. Eratosthenes 在亚历山大一直工作到晚年失明时为止,他由于失明自己绝食而死.

Eratosthenes 搜集了当时所知道的地理知识,计算了地面上许多重要地点(如城市)之间的距离.他最出名的工作是计算了地球(大圆)的周长.在赛伊尼(Syene)即如今叫阿斯旺的那个地方,夏至那天中午的太阳几乎正在天顶(图 7.4),(这是从日光直射进该处一井内而得到证明的).同时在亚历山大,该处在赛伊尼之北而几乎(1°之内)与它在同一子午线上,其天顶方向(图中的 OB)与太阳方向(图中的 AD)的夹角测得为 360°的 1/50.因太阳距地很远,故可把 SE 和 AD 看成是平行的.因此 $\angle SOA = \frac{1}{50} \times 360°$. 这说明 SA 弧是地球周长的 $\frac{1}{50}$.赛伊尼到亚历山大的距离 Eratosthenes 是这样估算的.骆驼队一天走 100 个视距段(stadia),从亚历山大到赛伊尼须走 50 天.因此这段距离是 5 000 个视距段,从而地球周长是 250 000 个视距段.一般认为一个视距段等于 157 米,故 Eratosthenes 所得结果是 24 662 英里.这个结果比以前一切估算的结果精确得多.

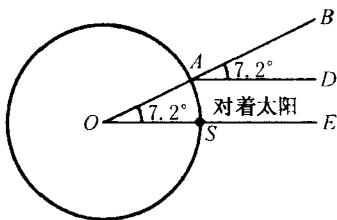


图 7.4

Eratosthenes 写过《地理学》(*Geography*)一书,其中载入了他所作测量和计算的方法和结果.他还在书中说明了地表变化的性质和原因.他还绘制过世界地图.

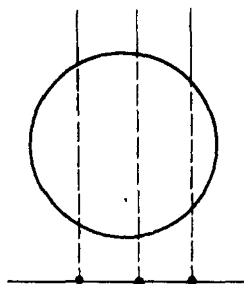


图 7.5

科学方法绘制地图成为当时地理工作的一部分.一般认为纬度和经度是 Hipparchus 引入的,但这套办法在他之前就已经有人知道.用了经纬度当然就可以准确描述地球上的位置.Hipparchus 确曾发明了正交投射法,用无穷远处射来的“光线”把地球投射到一个平面上(图 7.5).例如,我们看到的月球实际上就是它的正交投射图.他用这个方法就可把一部分地面画在一个平面上.

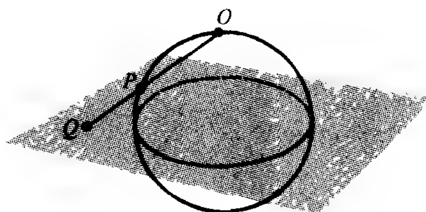


图 7.6

Ptolemy 在他的《平球法》(*Planisphaerium*)中用了球极平面投影法(在他之前 Hipparchus 可能已经用过).从 O 作一直线通过地球上一点 P 延长到赤道平面或另一极处的切平面(图 7.6).据说 Hipparchus 是利用切平面的,而 Ptolemy 是利用赤道平面的.这样就把球面上的点映射到一个平面上.在这种投影图里,从图中央到图上所有点的方向是真实方向.局部性的角也是不变的(保角映射),但 Ptolemy 并未提及这一点.因此子午线和纬线是成直角的.球面上的圆在图面上还是圆,但面积变了.Ptolemy 自己

又发明了一种锥面投影法，这就是把地面上一块区域从地心投射到一个相切的锥面上(图 7.7).

Ptolemy 在他那部包含八篇的《地理学》(*Geographia*)中讲述了绘制地图的方法. 第一篇第 24 章从章名和内容上看可知是专门论述把球面绘成平面的最古老的著作. 全部《地理学》可说是第一本地图集和地名辞典. 它给出了地球上 8 000 处地方的经纬度，在好几百年间是一本标准的参考书.

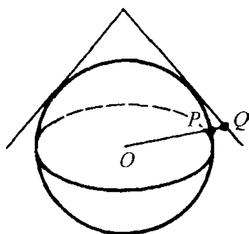


图 7.7

6. 力　　学

希腊人开创了力学这门科学. Aristotle 在他的《物理学》(*Physics*)中编辑了一套运动的理论，成为希腊力学的最高成就. 同他的全部物理学一样，他的力学是从一些理性的似乎是不言自明的原理出发讲述的，但这些原理仅仅得自观察或略经实验核证.

按 Aristotle 的说法，运动有两类，一类是天然的，另一类是激发的或人为的. 天体只有天然运动——圆周运动. 至于地上的东西，他说它们之能有天然运动(相对于把一物从一处投掷或拉曳到另一处的那种激发运动而言)乃是因为每件物体在宇宙中有其平衡于其他物体或获得静止的自然位置. 重物以宇宙中心即地心为其自然位置. 轻物(如气体)的自然位置在天上. 当物体趋向它的自然位置时就引起天然运动. 地上物体的天然运动是循直线上升或下落的. 若地上一物不在它的天然位置上，它就要尽可能快地达到它的天然位置. 激发运动(即人为运动)则是由圆周运动和直线运动组成的. 例如把一块石子朝上直投，它就循直线往上并循直线下落.

运动中的任一物体都受到力和阻力. 在天然运动的情况下，力

就是物的重量,阻力则来自物运动所经过的媒质.在激发运动的情况下,力来自人的手或某种机构,阻力则来自物的重量.没有力就没有运动;没有阻力运动就会一下子完成.所以任何运动的速度取决于力和阻力.这些原理可以用现代写法总结成公式 $V \propto F/R$;即速度正比于力而反比于阻力.

因激发运动中的阻力来自物体的重量,故对较轻的物体而言,阻力 R 就较小.根据以上公式,运动速度 V 就会大一些;就是说,在同一力的作用下,较轻的物体运动得快一些.由于天然运动中的阻力来自媒质,所以在真空中的速度将为无穷大.因此真空是不可能有的.

Aristotle 对解释某些现象感到困难.为说明落体速度何以会增大,他说物体之所以随着其接近天然位置而增大其速度,乃是因为物体运动得更加欢乐;但这同速度取决于固定重量的说法不一致.对于弯弓射出一箭的情形,Aristotle 说箭之所以在离弓后能继续运动,乃是因为手或弓弦把动力传给附近的空气,而这附近的空气又把动力传给下一层空气等等之故.另一方面,箭前的空气受压缩而奔绕到箭后以免发生空隙,因而使箭能推向前进.他没有解释为什么推动力会消衰.

希腊时代最大的数学物理学家是 Archimedes.任何别的希腊学者都没有像他那样把几何与力学结合得如此紧密,并像他那样巧妙地善于用几何论点来作证明.他在力学方面写过《论平板的平衡》(或《平板的重心》),这是一部共含两篇的著作.他所说的一个物体或一组固连物体的重心,也同我们今天所说一样,是指能使该物体或该组物体在只有重力作用时支于该处而获得平衡的点.他开头提出关于杠杆和重心的一些公设.例如(次序编号仍按 Archimedes):

1. (离开杠杆支点)等距离处的相等重量处于平衡,不等距离处的相等重量不平衡而朝着距离较远处的那个重量倾斜.

2. 若在(离开杠杆支点)某两个距离处的两个重量处于平衡,而在其中一重量上加一物,它们就不再平衡,朝着加物的那个重量倾斜.

5. 面积不同而相似的图形,其重心也在相似的位置…….

7. 凡周边凹向同侧的任一图形,其重心必在图形内部.

他在这些公设之后列举了一些命题,其中有些证明要依据其失传著作《论杠杆》中的结果:

命题 4. 若两个相等重量的重心不在同一个地方,则它们合在一起时的重心乃是其重心连线的中点.

命题 6 与 7. 两个量,不管其可公度与否,其到平衡处的距离与该两量成反比.

命题 10. 任一平行四边形的重心是其对角线的交点.

命题 14. 任一三角形的重心,是其任两顶点与其对边中点所作两根连线的交点.

第二篇论述一抛物线弓形的重心. 其主要的定理中有:

命题 4. 为一直线所割出的任一抛物线弓形的重心位于该弓形的直径上.

直径是 AO(图 7.8),这里 O 是 BD 的中点,而 AO 平行于抛物线的轴. 证明要利用他在《抛物线的求积》一书中的结果.

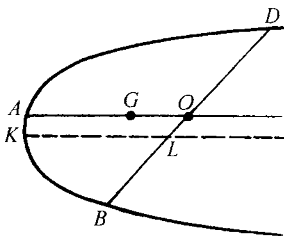


图 7.8

命题 8. 若 AO 是抛物线弓形的直径,G 是它的重心,则 $AG = (3/2)GO$.

求重心的工作在亚历山大希腊时期的许多书里都有. 例如 Heron 的《力学》和 Pappus 的《数学汇编》的第八篇(第 5 章第 7 节).

流体静力学(研究静止液体的液压)是 Archimedes 奠立的. 在他的《论浮体》一书中,他论述了水施于浸入其中物体的压力,他提

出两个公设. 第一个是说液体任一部分施于液体的压力是朝下的. 第二个公设说液体对置于其中一物的压力是沿着通过该物体重心的一根垂线朝上的. 他在第一篇中证明的一些定理是:

命题 2. 任一静止液体的表面是中心在地心处的一个球的球面.

命题 3. 凡与等体积液体等重的固体,若置于液体内,必将浸没到使其表面不致露出液面,但不会浸得更深.

命题 5. 若将轻于液体的任一固体置于液体内,它将下沉到这样的程度,使该固体[在空气中]的重量等于其排开的液体的重量.

命题 7. 若将一重于液体之物置于液内,它将下沉到液底,且若在液体内衡其重量,则其轻于原重之数等于其所排液体的重量.

最后这个命题一般认为是 Archimedes 据以确定那个王冠成分的(第 5 章第 3 节). 他必定是照着下面这样来论证的:设 W 是王冠的重量. 拿一块重量为 W 的纯金放在水里称,它就要减轻 F_1——所排去水的重量. 同样,一块重量为 W 的纯银所排去水的重量 F_2 可由纯银在水中称出重量后求得. 于是若原来那个王冠含重 w_1 的金和重 w_2 的银,则原王冠所排去的水重应等于

$$\frac{w_1}{W}F_1 + \frac{w_2}{W}F_2.$$

今设 F 是王冠所排水的实际重量. 则

$$\frac{w_1}{W}F_1 + \frac{w_2}{W}F_2 = F,$$

或即
$$w_1F_1 + w_2F_2 = (w_1 + w_2)F,$$

或
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{F_2 - F}{F - F_1}.$$

于是 Archimedes 可以定出王冠里的金银含量之比而无需弄毁王冠. 在 Vitruvius 讲的这个故事里,Archimedes 是用所排水的体积而没有用重量. 这时 F, F_1, F_2 分别是王冠,重量为 W 的纯金,重量为 W 的纯银所排去水的体积. 代数演算的结果仍一样,但没有用到命题 7. Archimedes 确实找出金冠里掺了银.

为使读者对 Archimedes 著作中所处理的问题在数学上和物理上的复杂程度有些印象,我们摘录第二篇中一个简单的命题.

命题 2. 有一旋转抛物体的正截段,其轴不超过 $3p/4$[p 是其生成抛物线的正焦弦或主参量],其比重小于液体. 若将它浸入液中使它的轴与垂直方向成任一角但不让截段的底接触水面(图 7.9),则该抛物体截段不会停留在那个位置而要回复到使它的轴处于垂直方向的位置.

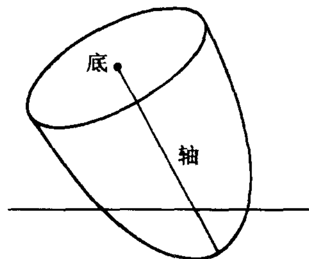


图 7.9

Archimedes 所处理的是物体在水里的稳定性问题. 他说明物体放到水里后在什么条件下能转向或保持平衡位置. 这些问题显然是对船舶在水里受倾侧后所出现情况的理想化描述.

7. 光　学

除天文学外,数学里搞得最经久最成功的要算是光学了. 光学是希腊人创立的. 从 Pythagoras 以后的几乎所有希腊哲学家都探讨过光的性质、视象和光色. 但我们关心的是数学方面的成就. 第一项成就是西西里岛阿格里根(Agrigentum)的 Empedocles 先验地提出的光以有限速度行进的说法.

光学方面的第一批系统性的著作是 Euclid 的《光学》和《镜面反射》.《光学》研究视象问题以及怎样从视象确定物体的大小. Euclid 先摆出定义(其实是公设),他的第一个定义(正如 Plato 那样)说人之所以能看到东西(产生视象),乃是因为从眼睛里发出的光循直线行进照射到所见的物体上的缘故. 第二个定义说视线成一锥体,其顶点在眼睛处,其底面在所见物体的最远端. 定义 4 说

两物中若一物所定视线锥的顶角较大，该物看起来就显得较大些，然后在命题8中Euclid证明两个相等而平行的物体（图7.10中的AB和CD）的视观大小并不和它们到眼睛的距离成比例. 命题23到27证明眼睛看球实际所见的不到球的一半，而所见部分的外廓是个圆. 命题32到37指出看一个圆，只有当眼睛在圆平面圆心处的垂线上时，所见的才是一个圆. Euclid又指出怎样从平面镜里所见的镜像来算出实物的大小. 书里共有58个命题.

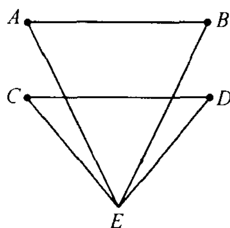


图7.10

《镜面反射》描述从平面镜、凹面镜和凸面镜反射出来的光的习性以及它对我们视觉的影响. 这书也像《光学》一样是从实际上就是公设的一些定义出发的. 定理1讲反射律，这是现今所谓几何光学的一个基本定律. 这定理说入射线与镜面所成角A（图7.11）等于反射线与镜面所成角B. 现今更普遍的说法是$\angle C = \angle D$，而把$\angle C$称为入射角，把$\angle D$称为反射角. Euclid还证明了光线照射在凸或凹镜面上的规律，他是以光线照射镜面处的切平面代替镜面来证明的.

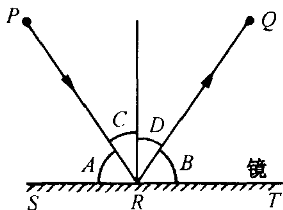


图7.11

Heron从反射律推出了一个重要的结论. 若P及Q是在直线ST同侧的任意两点（图7.11），则从点P到直线再到点Q的一切路径中，以通过直线上点R使线段PR及QR与ST的夹角相等的那个路径为最短，而这恰好就是光线所要经过的路径. 所以光线从P出发照过镜面再到Q是采取最短路程的. 很明显，自然界是很了解几何，而且是运用自如的. 这命题出现在Heron的《镜面反射》一书中，那也是讲述凹镜、凸镜和复合反射镜的.

有不少著作是论述光线在各种形状镜面上的反射的.其中有Archimedes所著而现已失传的《镜面反射》以及Diocles和Apollonius所写书名同为《论点火镜》(*On Burning-Mirrors*)的两部著作.点火镜肯定是呈球面形、旋转抛物面形和旋转椭球面的凹面镜,而旋转椭球面是指椭圆绕其长轴旋转而生成的形体.Apollonius肯定知道抛物镜面能把焦点处发出的光反射成平行于镜面轴的光束.反之,若照射的光线平行于轴,则反射后就聚集在焦点处.这样就可把太阳光聚集在焦点处产生高温,从而有点火镜之名.据说Archimedes就利用抛物镜面的这一性质把日光集中到罗马船上使它们起火的.Apollonius也知道其他圆锥曲线的反射性质,例如,从椭球面镜一焦点发出的光经反射后会集中到另一焦点上.他在所著《圆锥曲线》第三篇里讲述了椭圆和双曲线的有关几何性质(第4章第12节).他以后的希腊人,特别是Pappus,肯定是知道抛物面的聚焦性质的.

光的折射现象,即光在一个性质处处不同的媒质内通过时弯曲的现象,或光线从一个媒质进入另一媒质(例如从空气进入水)而突然改变方向的现象,曾为亚历山大时期的希腊人所研究.Ptolemy注意到来自太阳和星星的光线受大气折射的影响,并打算(没有取得成功)找出光线从空气进入水或从空气进入玻璃时发生折射的规律.他所著关于镜面和折射的书《光学》(*Optics*)流传到今天.

8. 占　星　术

虽然今天已不把占星术当作科学,但在早期文明社会中确曾被人当作科学看待.公元前2世纪左右亚历山大希腊人搞的那套占星术和亚述时期巴比伦人的占星术不同.后者只是从观察行星的位置来推出关于君王和国家大事的结论.他们不搞计算,人出生时刻的星象是不起作用的.但希腊或亚历山大的占星术是牵涉到

个人的,它根据所算出的黄道带里的日、月和五大行星在出生时刻的位置,可知其人的未来和命运.希腊人为计算这些数据就搞出了一大套的道理.

亚历山大希腊人对这门科学肯定是搞得很认真的. Ptolemy 在这方面写了一本出名的书,叫《四书》(*Quadripartite* 或 *Tetrabiblos*)或《论星辰影响的四书》(*Four Books Concerning the Influence of the Stars*),其中指出了如何根据星象来预卜未来的规则.这书被人使用了一千年.

占星术在科学史上的意义在于其促进了天文学的研究,这不仅在希腊,而且在印度、阿拉伯和中世纪的欧洲都是如此.占星术培育了天文正如炼金术之培育化学一样.奇怪的是,人们把占星术预言的错误归咎于天文计算的错误,而并不归咎于占星术说法之不可靠.

在亚历山大希腊人那里数学开始被应用于医学,特别是通过占星术的媒介而应用于医学.他们有的医生就叫医道数学家,是根据占星术的征象来决定医疗办法的.希腊时代的大医生 Galen是坚信占星术的,这也许情有可原,因最闻名的天文学家 Ptolemy 也信占星术.数学和医药的这一联系在中世纪变得更加密切了.

由于我们所关心的是数学,所以对希腊科学的叙述是有关数学方面的.希腊人也在其他(至少在当时)与数学无关的领域里进行过研究.他们也作了实验和观测,特别是天文观测.但他们的主要成就是在科学工作中确立了数学的重要作用. Plato 写的对话《爱好者》(*Philebus*)发表了这样的思想,说每门科学只有当它含有数学时才成其为科学;这一原则从希腊人所取得的重大成就得到最有力的支持.此外,希腊人的研究提供了充分证据说明自然是有其数学设计的.他们对自然的见解以及他们之开创用数学方法研究自然,在希腊时代及其后各个世纪里激起了数学的创造发明.

参考书目

Apostle, H. G. : *Aristotle's Philosophy of Mathematics*, University of Chicago Press, 1952.

Berry, Arthur: *A Short History of Astronomy*, Dover (reprint), 1961, Chaps, 1～2.

Clagett, Marshall: *Greek Science in Antiquity*, Abelard-Schuman, 1955.

Dreyer, J. L. E. : *A History of Astronomy from Thales to Kepler*, Dover (reprint) 1953, Chaps. 1～9.

Farrington, Benjamin: *Greek Science*, 2 vols. , Penguin Books, 1944 and 1949.

Gomperz, Theodor: *Greek Thinkers*, 4 vols. , John Murray, 1920.

Heath, Thomas L. : *Greek Astronomy*, J. M. Dent and Sons, 1932.

Heath, Thomas L. : *Aristarchus of Samos*, Oxford University Press, 1913.

Heath, Thomas L. : *The Works of Archimedes*, Dover (reprint), 1953, pp. 189～220 and 253～300.

Jaeger, Werner: *Paideia*, 3 vols. , Oxford University Press, 1939—1944.

Pannekoek, A. : *A History of Astronomy*, John Wiley and Sons, 1961.

Sambursky, S. : *The Physical World of the Greeks*, Routledge and Kegan Paul, 1956.

Santillana, G. de: *The Origins of Scientific Thought from Anaximander to Proclus, 600 B. C. to 300 A. D.* , University of Chicago Press, 1961.

Sarton, George: *A History of Science*, Harvard University Press, 1952 and 1959, Vols. 1 and 2.

Ver Eecke, Paul: *Euclide, L'Optique et la catoptrique*, Albert Blanchard, 1959.

Wedberg, Anders: *Plato's Philosophy of Mathematics*, Almqvist and Wiksell, 1955.

第 8 章

希腊世界的衰替

> 了解 Archimedes 与 Apollonius 的人,对后代杰出人物的成就不会再那么钦佩了.
>
> G. W. Leibniz

1. 对希腊人成就的回顾

亚历山大希腊文明虽持续到公元 640 年最终被回教徒摧毁时为止,但由于其创造的成就越来越少,所以这个文明在公元头几个世纪里显然已开始衰落了.在考察这衰落的原因以前,我们要总结一下希腊数学的成就和缺点,并指出它留传给后代的问题.希腊人作出了那么多的成绩,并且其后(经印度和阿拉伯人插入小量贡献后)欧洲人继而研究数学的道路全然由希腊留下的遗产所决定,所以有必要搞清楚当时数学所达到的高度.

人们把数学之成为抽象化科学归功于希腊人.这一重大贡献有其不可估量的意义和价值,因为同一个抽象的三角形或代数方程能应用于几百种不同的自然现象一事,正是数学的力量和奥秘之所在.

希腊人坚持要演绎证明.这也确是了不起的一步.在世界上的几百种文明里,有的的确也搞出了一种粗陋的算术和几何.但只有希腊人才想到要完全用演绎推理来证明结论.需要用演绎推理的这种决心是同人类在其他一切领域里的习惯做法完全违背的;它实际上几乎像件不合理的事,因为人类凭经验、归纳、类比和实验已经获得了那么多高度可靠的知识.但希腊人需要真理,并觉得只

有用毋庸置疑的演绎推理法才能获得真理.他们又认识到要获得真理就必须从真理出发,并且要保证不把靠不住的事实当作已知.因此他们把所有公理明确说出,并且在他们的著作中采取一开头就陈述公理的做法,使之能马上进行批判考察.

除了想出用这种非凡的方案来证实可靠的知识以外,希腊人还表现出一种为创新者所少见的细致精神.他们认识到概念必须彼此没有矛盾,以及不能用不存在的图形(如正十面体)来搞出前后一致的逻辑结构,这一切显出他们几乎有超人的并且肯定是空前的思想深度.现在我们知道他们在研究一个概念以前证明其存在的做法,是靠演示它能够用直尺圆规构作出来.

希腊人在发现定理与作出证明方面的能力之强,从 Euclid《原本》之含 467 个命题以及 Apollonius《圆锥曲线》之含 487 个命题,而且所有这一切都是从《原本》里的 10 个公理推出这一事实,可以得到证明.至于其逻辑结构之浑然成为一体,则就其重要性并且也许从作者的意图来说肯定还是次要的事.如果同样这些结果是从许多组不同的(虽然是同样可靠的)公理中获得的,那么它们就远远不如现在这批知识那样易于处理和易于为人所接受.

希腊人在数学内容上的贡献——平面与立体几何,平面与球面三角,数论萌芽,巴比伦和埃及的算术与代数的推广——是巨大的,特别是鉴于当时从事这项工作的人数不多而且广泛活动的时间也不过几个世纪.在这些贡献之外还必须加上几何代数法,他们的这项工作只要能承认无理数并把内容翻译成符号式子,就可以变成相当一部分初等代数的基础.他们用穷竭法来处理曲边图形的工作虽仅属几何的一部分,但也值得特别提及,因为这是微积分的萌芽.

希腊人对自然界的看法也是对后世人同样重要的一种贡献与启发.希腊人把数学等同于物理世界的实质,并在数学里看到关于宇宙结构和设计的最终真理.他们建立了数学和研究自然真理之

间的联盟，这在以后便成为现代科学的基础本身. 其次，他们把对自然的合理化认识推进到足够深远的程度，使他们能牢固树立一种信念，感到宇宙确实是按数学规律设计的，是有条理、有规律并且能被人所认识的.

他们也并不忽视数学在美学上的意义. 这学科在希腊时代被人珍视为一门艺术，他们在其中认识到美、和谐、简单、明确以及秩序. 算术、几何与天文被人看做是心智的艺术与灵魂的音乐. Plato 喜爱几何；Aristotle 不愿把数学和美学分开，因他认为秩序和对称是美的重要因素，而这两者他能在数学里找到. 事实上，在希腊人的思想里，对合理的、美的乃至对道德上的关心都是分不开的. 他们反复说过球是一切形体中最美的，因而是神圣的，是善的. 圆也和球一样从美学观点上为人所喜爱，因此那些代表天上万劫不变的永恒秩序的天体，自然要以圆为它们的运动路径，而在不完善的地上，则以直线运动居多. 无疑是由于这门学科在美学上的吸引力，才使得希腊数学家把有些项目探索到超出为理解自然所必需的程度.

2. 希腊数学的局限性

尽管有了不起的成就，希腊数学是有缺点的. 从它的局限性可以看出尚待开辟的前进道路.

第一个局限性是他们不能掌握无理数概念. 这不仅限制了算术和代数，而且使他们转向而且强调几何，因为几何思想可以免于明确碰到无理数之是否为数这个问题. 如果希腊人能正视无理数，他们也许能使算术和代数推进一步；并且即使他们自己没有这样做，他们也不致阻碍后代在算术和代数方面取得进展，因后代人受了他们的影响，总觉得在处理那些可能取无理值的量时，只有几何才有可靠的基础. Archimedes, Heron 和 Ptolemy 曾开始把无理

数当作数来处理,但未能改变希腊数学的进程或希腊思想对后代的影响.希腊人之专注于几何迷糊了后世好几代人的视界,看不出几何与算术在概念上与运算上的相应之处.由于他们未能把无理数定义、接受并且在思想上搞通它是数,他们就硬把数和量区别开来,结果就把代数和几何看成是不相干的学科.

如果希腊人不那么关心逻辑和严密性,他们也许会像巴比伦人或后继文明中的人那样无意中承认并运用无理数.但这种认识在直观上没有明确基础,而搞一个逻辑结构又非他们力所能及.希腊人坚持要有准确的概念和证明这个美德,从数学的创造发明来说却是个缺点.

把结构严密的数学(除数论之外)限于几何一事又产生另一不利之处.随着数学范围的扩大,用几何方法就使证明越来越复杂,特别是在立体几何方面.而且即使在比较简单的证明里也缺乏一般性的方法,而这在我们有了解析几何与微积分后是很清楚的事.我们只要看看 Archimedes 求抛物线弓形面积或求他的螺线弧所含面积时搞得多么艰难,并把它同现代用微积分的做法比较一下,就可以体会到微积分的功效.

希腊人不仅把数学主要限制于几何;他们甚至把几何只限于那些能用直线和圆作出的图形.于是曲面只许是那些从直线和圆绕一轴产生的,例如由一矩形、三角形和圆绕一直线旋转而生成的圆柱、圆锥和球.也有少数例外:平面类似于直线;棱柱是一种特殊圆柱;棱锥是剖开棱柱而得出的.圆锥曲线是用平面截锥面而得出的.此外像 Hippias 的割圆曲线,Nicomedes 的蚌线和 Diocles 的蔓叶线则在几何的边缘;它们叫机械曲线而不算几何曲线.

Pappus 对曲线的分类说明希腊人要把曲线限制在一定范围内.据 Pappus 说希腊人是这样区分曲线的:平面曲线是从直线和圆作出的那些曲线;圆锥曲线被他们称为立体曲线,因它们是从圆

锥产生的;割圆线、蚌线、蔓叶线和螺线这些曲线形成第三类.同样,他们把问题分为平面的、立体的和曲线的三类.平面问题是能用直线和圆解决的问题;立体问题是能用一个或多个圆锥曲线解决的问题.不能用直线、圆或圆锥曲线解决的问题叫曲线问题,因为它们要用到更复杂而不那么自然的曲线.Pappus 强调用平面或立体轨迹解问题的重要性,因在那种情形下就可给出存在实解的准则.

为什么希腊人要把他们的几何限于直线和圆以及那些易于从两者得出的曲线呢?一个理由是这样可以解决证明一个几何图形的存在问题.我们知道,希腊人特别是 Aristotle 曾指出必须保证所引用的概念不自相矛盾,就是说必须证明它们存在.为解决这问题,希腊人至少从原则上只承认那些可以作图的概念是存在的.直线和圆是在公设里承认它们是可作的,但其他图形则必须从圆和直线来作出.

不过用作图来证明存在的做法并未推行到三维图形上.这里希腊人只是承认了直观上看来清楚的事实,例如球、圆柱和圆锥等旋转形体的存在.用平面截割这些图形产生圆锥曲线这种曲线,因此甚至尚未证明其存在的平面图形也获得承认——不过颇为勉强.这一点 Descartes 在其《几何》(*La Géométrie*)第二篇的开头处曾指出:"诚然,圆锥曲线在古代几何里从没有正式获得承认……"

之所以限于直线、圆以及那些能从两者得出的图形,其第二个原因来自 Plato,他认为观念要清楚才能加以接受.希腊人虽未明确定义整数但觉得整数观念本身可以当作一个清楚的概念来接受,而几何图形则应该搞得明确些.直线、圆以及由它们得出的图形是清楚的,而用机械工具(除直尺和圆规以外)作出的图形则不然,所以是不容许的.把图形只限于那种清楚的,这就产生出简单、次序井然、和谐与美妙的几何学.

由于坚持要把他们的几何学搞得统一、完整和简单,由于把抽象思维同实用分开,所以古典希腊几何成为一门成就有限的学科.它狭隘了人们的视界,使他们的头脑接受不到新思想和新方法.它的内部存在着使它自己死亡的种子.如果没有亚历山大文化开阔了希腊数学家的眼界,那么它那狭隘的活动领域,局促的观点,在美学上的限制,很可能使它的发展受到遏制.

希腊人的哲学思想又从另一方面限制了希腊数学的发展.在整个古典时期,他们相信数学事实不是人创造的,而是先于人而存在的.人只要肯定这些事实并记录下来就行了.Plato 在其《*Theaetetus*》一书中把探索知识比作在一个鸟族馆里捕鸟.那些鸟是已经被人网起来的,人只要进去抓就是了.但对数学性质的这种信念并没有为人们所赞同.

希腊人未能领悟无穷大、无穷小和无穷步骤.他们"对无穷的空间望而生畏".Pythagoras 派把善与恶同有限与无限联系起来.Aristotle 说无穷是不完美的、未完成的,因而是不可思议的;它是不成形的、混乱的.只有那些限定而分明的东西才有其本性可言.

为避免提出直线可无穷延伸,Euclid 说一线段(他书中的"直线"就是指线段)可按需要加以延伸.从 Euclid 对平行公理的叙述也可看出他不愿涉及无穷大.他并不谈伸向无穷远的两根直线也不直接给出两平行直线存在的条件,而只是在他的平行公理中提出两直线相交于某有限点处的条件.

在点与直线的关系以及离散与连续的关系里要涉及无穷小概念,而 Zeno 的悖论很可能使希腊人不敢触及这一概念.点和线的概念曾使希腊人伤脑筋并使 Aristotle 硬把它们分开来.他虽承认点是在线上的,但说线不是由点生成的,并说连续不能由离散生成(第 3 章第 10 节).这一区别又使他们感到有必要把数同几何分开,因为希腊人认为数是离散的,而几何则处理连续的量.

由于他们怕无穷步骤,所以他们也与极限步骤失之交臂.他们

用一正多边形来接近圆时满足于使其相差小于任一给定的量,但总留下一些量.因此这一步骤在直观上仍很清楚,而极限步骤则要用无穷小.

3. 希腊人留给后代的问题

希腊数学思想的局限性几乎不言而喻地说明他们遗留给后代的是哪些问题.由于他们未能把无理量接受为数,于是不可公度比是否可指定其为一数而用算术方法来处理就成为问题.如果有无理数,代数范围也能扩大.在解那些可能有无理根的二次方程或其他方程时,就不必用几何方法而可以通过数来处理这些问题,代数就可以从埃及和巴比伦人或 Diophantus(他不愿考虑无理数)所达到的阶段进一步向前发展.

希腊人甚至对整数和整数之比都没有奠立逻辑基础.他们只提供颇为含糊的定义,如在 Euclid《原本》第七到第九篇中所陈述的那样.由于亚历山大人随意使用数,其中包括无理数,所以对于数系的逻辑基础就更加显得迫切需要;而亚历山大人的这种做法只不过继承了埃及和巴比伦人的实用传统.这样希腊人就留下了两门截然不同的、发展得不平衡的数学.一门是严格的、演绎式的、有系统的几何学,一门是凭直观的、经验的算术及其到代数的推广.

由于他们未能建成演绎式的代数,这就表明严格的数学只限于几何.事实上,直到 17 和 18 世纪情形依然如此,而那时代数和微积分已经广为流行了.然而即使在那时,所谓严格数学仍然是指几何.

Euclid 几何之限于考虑能用尺规作出的概念,使数学有待完成两项任务.第一项任务是特殊的,即是要证明能用尺规化圆为方,三等分任意角,和作出倍立方体.这三个问题引起很大兴趣,甚

至今日还使一些人着迷,虽然(我们以后可以看到)这在19世纪就已经处理完毕了.

第二项任务是把存在性问题的准则放宽.以作图作为证明存在性的一种方法,对于那些应该(并且在以后确实)为数学所考虑的概念来说是限制太严了.更有甚者,由于某些长度是作不出来的,所以Euclid直线是不完整的;就是说,严格地讲它不包含那些不可作出的长度.为使其内部臻于完整而对研究具体世界更为有用,数学必须在证明存在性的问题上不受狭隘的几何方法的束缚.

上面已经说过,为避免直接肯定有无穷长的平行直线,Euclid就把平行公理讲得比较复杂.他认识到这种讲法使那个公理不像其他九个公理那样不言自明,并且我们有充分理由相信Euclid在非万不得已时是尽量避免用这个公理的.许多希腊人想用其他公理来代替平行公理,或根据其余九个公理来证明它.Ptolemy曾对此写了一篇论文;Proclus在评注Euclid著作时提到了Ptolemy证明平行公设的尝试,并且他自己也想做出证明.Simplicius提到另外一些搞过这一问题的人,并进一步指出"古代"人们反对使用平行公设.

同平行公设问题密切相关的是物理空间是否为无限的问题.Euclid在公设2中假定一直线段可按需要随意延长,他用了这一事实,但只为得出一个较大的长度——如第一篇中的命题11,16和20那样.Heron对这些定理给出新的证明,避免了延长直线的做法,以堵反对者否认有足够空间可供延长的口实.Aristotle考虑过空间是否为无限的问题,并列举六点非数学上的理由来论证其为有限;他预料到这个问题是难搞的.

留给后代的另一个问题是计算曲边形所围面积和曲面所包容的体积.希腊人,特别是Eudoxus和Archimedes,不仅处理过这类问题,而且用穷竭法做出了相当大的进展.但这方法至少在两方面是有缺点的.第一是对每个问题都需要想出一种巧妙的方案来逼

近所论的面积或体积;但对于以后所要计算的那些面积和体积来说,光用这种方法使人感到有智穷虑竭之时.其次是,希腊人所取得的结果通常仅仅是指出所要求的面积或体积等于某一较简图形的面积和体积,而后者的数值仍是未知的.但在应用上所需要的恰恰是数量上的知识.

4. 希腊文明的衰替

大约从公元的年代开始,希腊数学的活动能力逐渐衰退了.在这新时代里,Ptolemy 和 Diophantus 的工作是唯一重要的贡献. Pappus 和 Proclus 这两大评注家是值得注意的,但他们只不过是写了这个时代最后的一页.这个文明曾在5个到6个世纪之间作出了远远超过其他文明的那么多那么精彩的贡献,它的衰落需要人们来找出其原因.

不幸的是数学家也像最普通的农民一样要受历史条件的影响.只要稍稍懂得一点公元后亚历山大希腊人的政治历史,就能认识到不仅是数学而且所有文化活动都注定要遭灾殃.当亚历山大的希腊文明处于 Ptolemy 王朝的统治下时,它是繁荣昌盛的.第一次灾殃是罗马人的来临,它们在数学史上的全部作用是一种破坏因素.

在论述罗马人对亚历山大希腊文明的冲击以前,先指出几件事实来说明罗马人的数学和罗马文明的性质.罗马的数学不值一提.罗马人活跃于历史舞台上的时期大约是从公元前750年到公元476年,差不多和希腊文明昌盛时期一样.而且(如以后就要讲到的)至少从公元前200年起罗马人就同希腊人有密切接触.但在这整个1100年之间没有出现过一个罗马数学家,所以除了少数细节外,这一事实本身就足以说明罗马数学史的整个情况了.

罗马人确有点粗浅的算术和一些近似的几何公式,其后又从亚历山大希腊人那里补充了一些知识. 他们记整数的记号是大家熟悉的. 为用整数进行计算,他们应用各种形式的算盘. 此外他们也用手指和借助于特别编制的数表来计算.

罗马人分数的底是 12. 他们用特别的符号和文字来代表 1/12, 2/12, …, 11/12, 1/24, 1/36, 1/48, 1/96, …之所以用 12 为底数,可能是从一年中的月数而来的. 附带说起,他们的重量单位叫 as;这 as 的十二分之一叫 uncia,英文里的盎司(ounce,英两)和英寸(inch)都是从 uncia 一字演变而来的.

罗马人的算术和几何主要用在测量上,用于划定城市边界,以及住宅和庙宇的范围. 测量人员只要用简单仪器和全等三角形的知识就可以算出他们所需要的大部分数量.

罗马人的确给我们改进了日历. 到 Julius Caesar(公元前 100—前 44)时代为止,罗马的基本年有 12 个月共 355 天. 每隔一年加上 22 天或 23 天的一个闰月,这样平均每年有 $366\frac{1}{4}$天. 为改进这个日历,Caesar 聘请了亚历山大的 Sosigenes,他建议定每年为 365 天并每四年有一闰年. Caesar 所定的这个儒略历(从 Caesar 的名字 Julius 而来)是在公元前 45 年正式采用的.

从公元前 50 年左右起罗马人编写他们自己的技术书籍,但其基本内容都取自希腊. 这些技术书中最出名的是 Vitruvius 关于建筑方面的十本书,大约撰写于公元前 14 年. 这里的材料也是来自希腊的. 颇为奇怪的是,Vitruvius 竟说数学上的三大发现是边长为 3, 4, 5 的直角三角形,单位长正方形对角线之为无理量,以及 Archimedes 所解决的金冠问题. 他确也提到另外一些数学方面的事实,如理想人体的各部分的比例,一些和谐的算术关系,以及关于算弩炮功效的算术方法.

"数学"一词在罗马人那里的名声是不好的,因为他们称占星术士为数学家,而占星术是罗马君王所严禁的. 罗马王 Diocletian

(245—316)把几何区别于数学.前者是要学习并应用于公众事务的;但“数学方术”(意即占星术)则被视为不法而完全禁止.禁止占星术的罗马法律“数学和恶行禁典”在中世纪的欧洲仍被援用.但罗马皇帝和其后信奉基督教的罗马皇帝还是在宫廷里供养占星术士,以期万一他们的预言能够灵验.“数学家”与“几何学家”的区分一直到文艺复兴之后好久还保持着.甚至在17世纪和18世纪,人们用“几何学家”来称呼我们今日心目中的数学家.

罗马人是务实的,他们也夸耀他们的讲究实际.他们兴建起并完成了大量的工程项目——高架引水渠道,甚至一直存留到今天的宽广大路、桥梁、公共建筑以及大地测量——但若超出他们当前所急需的特定的具体应用,则任何别的思想是他们所摒弃的.罗马人对数学的态度可用Cicero的话来表明:“希腊人对几何学家尊崇备至,所以他们的哪一项工作都没有像数学那样获得出色的进展.但我们把这项方术限定在对度量和计算有用的范围内.”

罗马君王并不像埃及的Ptolemy朝诸王那样支持数学,而罗马人也并不懂得纯粹科学.他们竟然不想发展数学一事是令人惊讶的,因为他们统治了一个世界范围的帝国并且确乎需要解决一些实际问题.我们从罗马人的历史里所获得的教训是,凡鄙视数学家及科学家高度理论性工作并斥其为无用的人民,他们对重要实际成果之如何产生是盲目无知的.

现在我们来考察罗马人在希腊政治和军事史上所起的作用.他们在稳占意大利中部和北部之后,接着就征服了南部意大利和西西里的希腊城市(前已提到,Archimedes在罗马人攻叙拉古时曾对该城的防守作出贡献,并为一罗马士兵所杀害).公元前146年罗马人征服了希腊本土,他们又在公元前64年征服美索不达米亚.Caesar在Ptolemy王朝的最后统治者Cleopatra女皇和她的兄弟间的内讧中进行干涉,设法在埃及获得插足之地.公元前47年Caesar纵火焚毁停泊在亚历山大港的埃及舰队,大火延及该

城,烧掉了图书馆.两个半世纪以来收集的藏书和50万份手稿这一古代文明的代表作竟被一扫而光.所幸的是藏书过挤的图书馆里有许多书容纳不下存放在 Serapis 神庙里,所以那些书免于被焚.此外,死于公元前133年的帕加蒙(Pergamum)的 Attalus 三世曾把他的大量藏书留在罗马. Mark Anthony 把这批藏书赠送给 Cleopatra 女皇,使神庙里又增添了这些图书.总的藏书量仍是很巨大的.

罗马人在公元前31年 Cleopatra 女皇去世时回到埃及并从此以后控制该处.他们热衷于扩张他们的政治势力,但并不热心传播他们的文化.被征服的地区成为殖民地,通过没收和征税榨取大量财富.由于大多数罗马君王是私欲之徒,他们把所控制的每个国家都搞得民穷财尽.一旦有人举起义旗,例如在亚历山大发生起义,罗马人就毫不犹豫地封锁饿死该地居民,并在镇压成功后屠戮成千人.

罗马帝国的后期历史也需要提一下. Theodosius 王(379—395在位)把广大帝国划分给他的两个儿子,一个叫 Honorius 的统治意大利和西欧,另一个叫 Arcadius 的统治希腊、埃及和近东.西部帝国在公元5世纪被哥特人所征服,这之后就是中世纪欧洲的历史.东部包括埃及(一度),希腊以及今日土耳其的地方,它的独立一直保持到1453年被土耳其人征服时为止.由于东罗马帝国(又称拜占庭帝国)包括希腊本土,所以希腊文化和著作在某种程度上得以保存.

从数学史的观点说,基督教兴起所产生的后果是不幸的.虽然基督教领袖们采纳了希腊人和东方的许多无稽之谈和迷信习惯,以使基督教易于为新改宗的人所接受,但他们却反对异教徒的学问,嘲笑数学、天文和物理科学;基督徒是不许沾染希腊学术这个脏东西的.基督教虽然受到罗马人的残酷迫害,但它仍广为传播并且势力大到这种程度,使 Constantine 王(272—337)不得不奉它

为罗马帝国的国教. 从此以后基督徒就更有力量来摧毁希腊文化了. Theodosius 王禁止人民信奉异教,并在 392 年下令拆毁希腊神庙. 许多希腊神庙被改成教堂,但其中仍多保留希腊的雕塑饰像. 在整个帝国内异教徒受人袭击和屠杀. 亚历山大时期著名女数学家 Hypatia(数学家 Theon 的女儿)的命运标志着这一时代的终结. 因为她不肯放弃希腊宗教,狂热的基督徒在亚历山大的街道上抓住了她,把她撕得粉碎.

希腊书籍成千本地被焚毁. 在 Theodosius 宣布取缔异教的那一年,基督徒焚毁了当时唯一尚存大量希腊图书的 Serapis 神庙. 据估计有 30 万种手稿被焚. 其他许多写在羊皮纸上的著作被基督徒洗刷掉用来写他们自己的著作. 529 年东罗马王 Justinian 封闭所有希腊哲学学校,包括 Plato 的学院在内. 许多希腊学者离开东罗马,其中有些人——如 Simplicius——迁居波斯.

新崛起的回教徒在 640 年征服埃及,给予亚历山大以最后的打击. 残留的书籍被阿拉伯征服者 Omar 下令焚毁,其理由是: "这些书的内容或者是可兰经里已有的,那样的话我们不需要读它们;或者它们的内容是违反可兰经的,那样的话我们不该去读它们. "因此在亚历山大的浴堂里接连有六个月用羊皮纸来烧水.

在回教徒攻占亚历山大之后,大部分学者迁居到当时的东罗马首都君士坦丁堡. 虽然在拜占庭不友好的基督教气氛中不能按希腊思想的轨道充分活动,但学者及其著作之汇集到一个比较安全的地方,却增加了 800 年后流传给欧洲的那个知识宝库.

揣测情况可能如何演变也许是件无聊的事情. 但我们不得不指出,亚历山大时期的希腊文明是在其行将跨进现代文明之际中止了它活跃的科学生命的. 它具有难得的理论与实践志趣上的结合,而这在其后 1 000 年证明是多么富于成果. 一直到它存在期间的最后几个世纪,它始终享有思想自由,这是文化之能繁荣昌盛所

不可或缺的条件. 它在其后文艺复兴时代成为非常重要的几个领域里展开研究并作出了大的进展:定量的平面和立体几何,三角,代数,微积分和天文学.

常言道谋事在人而成事在天. 对希腊人而言更准确的说法是天谋其事而人自弃之. 希腊数学家被消灭了,但他们工作的成果终于传给了欧洲,至于怎样传法,且看下文所讲.

参 考 书 目

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, Macmillan, 1919, pp. 63～68.

Gibbon, Edward: *The Decline and Fall of the Roman Empire* (many editions), Chaps. 20, 21, 28, 29, 32, 34.

Parsons, Edward Alexander: *The Alexandrian Library*, The Elsevier Press, 1952.

第 9 章

印度和阿拉伯的数学

> 正如太阳之以其光芒使众星失色，学者也以其能提出代数问题而使满座高朋逊色，若其能给予解答则将使侪辈更为相形见绌.
>
> Brahmagupta

1. 早期印度数学

在数学史上，希腊人的后继者是印度人. 虽然印度的数学只是在受到希腊数学成就的影响后才颇为可观，但他们也有早期具有本地风光的数学值得一提.

印度文明可远溯到公元前 2000 年，但据今日所知，他们在公元前 800 年以前是没有数学的. 在公元前 800 年到公元 200 年的(绳法经)Sulvasūtra 时期，印度人确也创造出一些原始数学. 他们没有专门记载数学的文件，但我们可以从其他著述中，从钱币和铭文中，掇拾出少量有关数学的事实.

大约在公元前 3 世纪以后，出现了数的记号，但每个世纪都有相当大的变动. 典型的是 Brahmi 式记号

1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　20　30　40　50　60

这一组记号的出色之处是它给 1 到 9 的每个数都有单独的记号. 这里还没有零和进位记法. 对当时这个数学上尚未开化的人民来说，他们肯定还没有看出单独的数字记号的好处；这种写法也许是由于以该数名称的第一个字母来代替它而产生的.

有一类宗教经文叫绳法经,内含修筑祭坛的法则. 在公元前 4 世纪或 5 世纪的一部绳法经里给出了$\sqrt{2}$的近似值,但看不出他们知悉这仅仅是个近似值. 其他关于这时期的算术我们几乎就一无所知. 对这段古印度时期的几何我们知道得比较多一些. 绳法经中所含的法则规定了祭坛形状和尺寸所应满足的条件. 最常用的三种形状是方、圆和半圆,但不管用哪种形状,祭坛面积必须相等. 因此印度人要作出与正方形等面积的圆,或两倍于正方形面积的圆以便采用半圆形的祭坛. 另外一种形状是等腰梯形,并且这里可用相似形. 因此在作相似形的时候会引起新的几何问题.

在设计这种规定形状的祭坛时,印度人必须懂得一些基本的几何事实,例如 Pythagoras 定理,他们是这样说的:"矩形对角线生成的面积[正方形]等于矩形两边各自生成的两块面积之和."一般说来,这段时期的几何只不过是一些不相连贯的用文字表达的求面积和体积的近似法则. 公元前 4 世纪或 5 世纪的 Āpastamba 给出一个作圆等于正方形面积的方法,他实际上是取 π 等于 3.09, 但他认为这作图法是准确的. 在这早期的全部几何里没有证明,法则都是经验性的.

2. 公元 200—1200 年时期印度的算术和代数

印度数学的第二段时期(高潮时期)大致可以说是从公元 200 到 1200 年. 这时期的第一阶段,亚历山大的文明肯定对印度人有影响. 公元 500 年左右的一位印度天文学家 Varahamihira 说:"希腊人虽不纯正[凡信仰不同的人都是不纯正的]但必须受到崇敬,因他们对科学训练有素并在这方面超过他人. 那么对于一个既纯正而又有科学高见的婆罗门又该怎么说呢?"印度人的几何肯定是从希腊来的,但他们在算术上确有特殊的才能. 至于代数他们也许是从亚历山大袭取的,并且可能直接得自巴比伦;

但在这方面他们也按自己的道路走得相当远. 印度从中国方面也颇有借鉴之处.

第二阶段中最重要的数学家是 Āryabhata(生于 476 年), Brahmagupta(生于 598 年), Mahāvira(9 世纪)和 Bhāskara(生于 1114 年). 他们以及其他印度数学家的大部分工作一般是为了研究天文和占星术而产生的. 事实上他们没有写专门的数学书,数学材料是夹在天文著作的篇章里讲述的.

迄公元 600 年为止,印度人写数的方法很多,有的甚至用字和音节来表示数. 到 600 年他们又回到较老的 Brahmi 式记号,但这些记号的确切形式在整个时期内是不定的. 以 10 为底的进位记法已经在有限范围内使用了约一百年,到这时就通用了. 早先亚历山大希腊人只用 0 来表示哪一位上没有数,如今在印度人那里 0 被看成是一个完全的数了. Mahāvīra 说一数乘以 0 得 0,并说减去 0 并不使一数变小. 但他又说一数除以 0 后不变. Bhaskara 在谈到分母为 0 的分数时,说不管加减多少,这个分数是不变的,正如万世不易的神不会因世界的创生和毁灭而有所改变. 他又说一数除以 0 称为无穷量.

至于天文上的分数,印度人是用 60 进制记法的. 其他方面的分数他们用整数之比来表示,但没有用横线,例如:$\begin{matrix}3\\4\end{matrix}$.

印度人的算术运算同我们的很像. 例如, Mahāvīra 给出我们今日的除以分数的法则:把分数颠倒相乘.

印度人引用负数来表示欠债,在这种情况下,正数表示财产数. 据今日所知,最早用负数的是 628 年左右的 Brahmagupta,他又提出了负数的四种运算. Bhāskara 指出正数的平方根有两个,一正一负. 他也提到负数的平方根的问题,但说负数没有平方根,因为负数不能是平方数. 他们没有给出定义、公理或定理.

印度人并没有毫无保留地接受负数. 甚至当 Bhāskara 给出一个问题的两个解 50 与 −5 时,他说:“这里不要第二个数值,因为

它不行;人们不赞成负数的解.”然而负数终于逐渐为人所接受.

印度人在算术上采取的另一重大步骤是正视了无理数问题;就是说他们开始按正确手续来运算这些数,这种做法虽未经一般的证明,但可使人由此获得有用的结论.例如,Bhāskara 说:“两个无理数之和叫做较大的无理数;而其乘积的两倍叫做较小的.它们的和与差是照整数那样来算的.”然后他指出怎样把无理数相加如下:设有无理数$\sqrt{3}$和$\sqrt{12}$,则

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\cdot 12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

其一般原理是(用我们的记号):

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}. \tag{1}$$

我们应注意上述引文中“照整数那样来算”的话.无理数是当作具有整数那种性质的数来对待.例如,若有整数 c 及 d,则肯定可以写

$$c+d=\sqrt{(c+d)^2}=\sqrt{c^2+d^2+2cd}. \tag{2}$$

今若 $c=\sqrt{a}$ 而 $d=\sqrt{b}$,则(2)正好就是(1).

Bhāskara 又给出两个无理数相加的法则:“较大的无理数除以较小的,所得之商开方,再加 1,和数取平方,然后乘以较小的无理数,其根即为两无理数之和.”举例来说,这就是

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{12}{3}}+1\right)^2\cdot 3},$$

结果得 $3\sqrt{3}$.他又给出无理式的乘、除以及开平方的法则.

印度人不像希腊人那样细致,因为他们看不出无理数概念所牵涉到的逻辑难点.他们对计算的兴趣使他们忽视了哲学上的区别或希腊人认为属于基本的那些原理上的区别.他们随着兴致所至把适用于有理数的运算步骤用到无理数上去,这样做却帮助数学取得进展.此外,他们的整个算术是完全独立于几何的.

印度人也在代数上获得一些进展.他们用缩写文字和一些记号来描述运算.像在 Diophantus 的著作中一样,他们不用加法记

号；被减数上面加个点表示减法；其他运算用主要文字或缩写表示；例如 *ka* 是从 karana 这个字来的，表示对其后的数开平方. 当有一个以上的未知量时，他们用颜色的名称来代表. 例如第一个叫未知量，其他的就叫黑的、蓝的、黄的等等. 每个字的头一个字母也被他们拿来作为记号. 这套记号虽然不多，但足够使印度代数几乎称得上是符号性的代数，并且符号肯定比 Diophantus 的缩写代数用得多. 他们的问题和解答都是用这种半符号方式写出的，但只写出运算步骤，没有随即说明理由或证明.

印度人认识到二次方程有两个根，而且包括负根和无理根. Diophantus 分别处理的三类二次方程 $ax^2+bx=c$, $ax^2=bx+c$, $ax^2+c=bx$(a, b, c 为正数)，在印度人那里作为 $px^2+qx+r=0$ 一种情形来处理，因为他们允许某些系数是负数. 他们利用配方法，这当然不是他们首创的. 由于并不承认负数有平方根，所以他们不能解所有的二次方程. Mahāvira 还解出过 $x/4+2\sqrt{x}+15=x$，这是从一个文字题得出的方程.

在不定方程方面印度人超过了 Diophantus. 这种方程出现在天文问题里，它们的解就是某些星座出现于天空的时间. 印度人要求出所有的整数解，而 Diophantus 则只得出一个有理的解. 求 $ax\pm by=c$(a, b, c 是正整数) 的整数解的方法是 Āryabhata 最先提出并由他的后继者加以改进的. 它和现代方法一样. 我们考察 $ax+by=c$. 若 a 及 b 有公因子 m，而这 m 又不能除尽 c，那就不可能有整数解，因左边能为 m 整除而右边却不能. 若 a, b 及 c 有一公因子，那就把它约去，由此，我们就只要考虑 a 与 b 互质的情形就行了. 但在求 a 与 b 两整数的最大公因子时 $(a>b)$, Euclid 算法要求先用 b 除 a 而有 $a=a_1b+r$，此处 a_1 为商而 r 为余数. 因此 $a/b=a_1+r/b$. 这又可写为

$$a/b=a_1+1/(b/r). \tag{3}$$

Euclid 算法第二步是以 r 除 b. 于是 $b=a_2r+r_1$，或 $b/r=a_2+$

r_1/r. 若把这 b/r 值代入(3),便可写成

(4) $$\frac{a}{b}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{r/r_1}}.$$

继续做 Euclid 算法的结果,得所谓连分数

$$\frac{a}{b}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}},$$

这也可写成

$$\frac{a}{b}=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots.$$

这个步骤在 $a<b$ 时也可用. 这时 a_1 是零,而以后各步仍照以前那样往下做. 若 a 及 b 是整数,连分数是有尽头的.

取到第一、第二、第三乃至一般第 n 个商为止的分数,分别叫第一、第二、第三和第 n 个收敛子. 由于在 a 及 b 为整数的情形下连分数是有尽的,故有一收敛子正好在 a/b 的准确表达式的前面. 若 p/q 是这收敛子的值,则可证

$$aq-bp=\pm 1.$$

我们来考察上式中取正值的情形. 我们可以回到原来那个不定方程. 由于 $aq-bp=1$, 故可写

$$ax+by=c(aq-bp).$$

整理各项后,得

$$\frac{cq-x}{b}=\frac{y+cp}{a}.$$

若以 t 代表上述分数,得

(5) $$x=cq-bt,\quad y=at-cp.$$

现在就可给 t 指定整数值,于是由于其他所有的量都是整数,这样就可以得出 x 和 y 的整数值. $aq-bp=-1$ 的情形以及原方程是 $ax-by=c$ 的情形,只要对上法稍作改变,就可处理. Brahmagupta 给出了(5)的解,但当然不是用一般字母 a, b, p 和 q 来表示的.

印度人也研究不定二次方程. 他们解出了

$$y^2 = ax^2 + 1, (\text{其中 } a \text{ 不是平方数})$$

这种类型的方程,并可看出这种类型对处理

$$cy^2 = ax^2 + b$$

很重要.所用的方法太特殊,不值得在这里介绍.

值得指出的是他们对许多数学问题兴趣很浓,常用故事或诗歌的形式提出来,或夹杂在历史读物中,来吸引人们.他们之所以要这样写,原来的目的可能是为帮助记忆,因为婆罗门的老习惯是把事情记在心上而尽可能避免写在纸上.

代数被应用在普通商业问题上:算利息、折扣、合股分红、财产划分,但主要的用途是在天文上.

3. 公元200—1200年时期印度的几何与三角

这段时期的几何没有什么出色的进展,它不过是些求面积和体积的公式(有的正确,有的不正确).好些公式,如Heron的三角形面积公式和Ptolemy定理是从亚历山大希腊人那里学来的.印度人有时认识到公式只是近似的,有时却没有认识到.他们的π值一般是不正确的;$\sqrt{10}$常常用来代替π,但有时也出现较好的值3.141 6.他们给出任一四边形面积的公式为

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

这里s是周长的一半,a, b, c, d是四边长,但是这个公式只对圆内接四边形成立.他们没有给出几何证明,总的说来他们对几何是不大注意的.

印度人在三角术方面作出了一些推进.Ptolemy曾用弧的弦,以直径的120等分为单位来作计算.Varāhamihira采用半径的120等分作为单位.因此Ptolemy的弦长表变成他的半弦长表,但所对应的仍是全弧.Āryabhata作了两项改革.第一,他把半弦与全弦所对弧的一半相对应;印度人对正弦的这种观点为以后所有

印度数学家所采用.第二,他把半径的 3 438 等分作为单位.这个数来自:他把圆周的 360·60 等分定为单位(整个圆周所含的分),然后用 $C = 2\pi r$,而取 π 的近似值为 3.14.这样,在Āryabhata 的三角方案里,30°弧的正弦(即相应于 30°弧的半根弦之长)是 1 719.印度人虽也用相当于我们今日的余弦,但较常用的是取其余弧的正弦.他们还采用正矢即 1—余弦.

由于他们的半径含 3 438 单位,Ptolemy 算得的弦值对他们不再适用,印度人就算出他们的半弦弦长表,计算的出发点是:90°弧的相应半弦为 3 438,30°弧的相应半弦为 1 719.然后他们应用像 Ptolemy 推得的恒等式之类的公式,算出相差 3°45′的每个弧的半弦.这就要把每四分之一圆弧 90°分成 24 等分.值得注意的是他们用代数形式的恒等式而不像 Ptolemy 那样用几何论证,并且是利用代数关系来作算术计算的.他们的做法在原则上同我们一样.

三角术的兴起是由于天文学,印度的所有三角术几乎全是天文学的副产品,他们的标准天文著作有 4 世纪时的《太阳系》(*Sûrya Siddhânta*)和 6 世纪Āryabhata 著的*Āryabhatiya*[①].主要的著作是 1150 年 Bhaskara 写的《天文系统极致》(*Siddhānta Siromani*).这书有两章叫"论美"(*Lilavatī*)和"论求根"(*Vījaganita*),是讨论算术和代数的.

虽然公元 200 年后印度人的主要兴趣是在天文学方面,但他们没有取得什么了不起的进展.他们继续搞古希腊人在算术天文上的小部分工作(源于巴比伦),这就是通过观测数据的外推来预报行星和月球的位置.印度人甚至在圆心、分$\left(1\text{ 度的}\frac{1}{60}\right)$和其他用语上都是从希腊字直译过来的.印度人不太关心均轮和周转圆那一套理论,但他们确实提出了大地呈球形的学说.

---

① 以人名作书名,可能相当于我国庄周著的《庄子》之类.——译者注

到 1200 年左右印度科学活动衰落了，数学上的进展停止了. 在 18 世纪英国人征服印度后，少数印度学者去英国留学并确曾在回国后进行一些研究工作. 不过这种现代研究是欧洲数学的一部分.

综上所述可以看出，印度人注重数学的算术和计算方面，并在这方面作出了贡献，但不甚重视演绎结构. 他们称数学为 ganita，意思就是"(计)算(科)学". 他们有许多好方法和计算技巧，但未曾发现他们考虑过任何证明. 他们有计算法则，但不管其在逻辑上是否合理. 而且在数学的任何领域里他们没有得出过一般方法或提出过新的观点.

相当肯定的一件事是，印度人并不把他们自己的贡献放在眼里. 他们的一些好想法，如给 1 到 9 的数单独设立记号，改用 10 为底的进位制，负数，都是偶然采用的，并不认为是什么有价值的创举. 他们对数学上的价值是不敏感的. 和他们自己提出的观念一起，他们还接纳了埃及人和巴比伦人的极粗浅的观念. 波斯历史学家 al-Bîrûnî(973—1048)说过："我只能把他们的数学和天文著作……比作宝贝和烂枣、或珍珠和粪土、或宝石和卵石的混合物. 在他们眼里这些东西都是一样的，因为他们没有把自己提高到科学演绎法的高度."

4. 阿 拉 伯 人

迄今为止，阿拉伯人在数学上的作用是给予亚历山大的文明以最后一击. 他们在开始征战各地以前是住在现今阿拉伯半岛的游牧民族. 他们是在 Mohammed 的鼓舞下行动和统一起来的，并在他死(632 年)后不到半个世纪内征服了从印度到西班牙的大片土地，包括北部非洲和南意大利. 到 755 年，阿拉伯帝国分裂为两个独立王国，东部王国以巴格达为首都，西部王国以西班牙的科尔

多瓦(Cordova)为首都.

征战完成之后这批早先的游牧者就定居下来创造他们的文明和文化了.他们相当快地关心起艺术和科学来.东西方的两个首府都吸引科学家并支持他们的工作,而巴格达是较大的文化中心;他们在那里设立了一个学院,一个图书馆和一个天文观察台.

阿拉伯人所能掌握的文化来源是相当丰富的.他们延请印度科学家住到巴格达.当罗马王 Justinian 于 529 年封闭 Plato 的学院时,许多希腊学者跑到波斯,在那里滋荣的希腊学术于 1 世纪后也成为阿拉伯世界的一部分文化,阿拉伯人也同独立的拜占庭(东罗马)帝国的希腊人建立了联系;事实上阿拉伯回教君王也从拜占庭收买过希腊手稿.亚历山大时期的希腊学术中心埃及被阿拉伯人征服后,留存在那里的学术成为阿拉伯帝国学术的一部分.叙利亚学派所在地安蒂奥克(Antioch)、依米撒(Emesa)、大马士革,以及基督教景教派所在地以得撒(自 640 年亚历山大城被毁后近东收藏希腊著作的主要地方),甚至于藏有这些著作的近东修道院都归阿拉伯人统治.于是阿拉伯人就能控制或取得拜占庭帝国、埃及、叙利亚、波斯以及往东远及印度诸国的人才和文化.

我们说到阿拉伯数学,主要因为这些著作的文字是阿拉伯文.但大多数学者却是希腊人、波斯人、犹太人和基督徒.不过阿拉伯人值得赞扬之处是在其充满宗教狂热的征服期之后,他们对别的种族和教派是宽大的,并容许异教徒自由活动.

从根本上说,阿拉伯人的学术是直接来自希腊手稿或叙利亚与希伯来文译本的.他们可以接触所有重要著作.他们在 800 年左右从拜占庭获得一部 Euclid《原本》抄件并把它译成阿拉伯文. Ptolemy 的《数学汇编》(*Mathematical Syntaxis*)是在 827 年译成阿拉伯文的,以后成了他们一本重要的几乎是神圣的书;这书以后称为《大汇编》(*Almagest*),意即最大的著作.他们又译出了 Ptole-

my 的《四书》,使这本占星术的著作在他们那里流行一时. 在不多的时间内,Aristotle, Apollonius, Archimedes, Heron, Diophantus 和印度人的著作都有了阿拉伯译本. 阿拉伯人其后又改进译文并加以评注. 后来传给欧洲的就是这些译本(有的至今仍存),而希腊原著则已失传. 阿拉伯文明直到 1300 年还充满活力,它的学术传播四方.

5. 阿拉伯算术和代数

当阿拉伯人还是游牧民族时,他们有称呼数的文字但无记号. 他们采用并改进了印度的数字记号和进位记法. 他们把这些数字记号表示整数和普通分数(在印度方案上加一横线),用于数学课本上,把按照希腊格式的阿拉伯字母数字用于天文书上. 在天文上他们仍仿效 Ptolemy 用 60 进位制的分数.

阿拉伯人也像印度人那样随便使用无理数. 事实上,Omar Khayyam (1048? —1122) 和 Nasîr Eddin (1201—1274) 明确地说,不管是可公度的或不可公度的量之比都可称之为数,这种说法 Newton 1707 年在他的《普遍的算术》(*Universal Arithmetic*)一书中仍感到有必要加以重申. 阿拉伯人采纳了印度人对无理数的运算,像$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ 以及 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ 这样的变换式子成为常见的东西.

在算术上阿拉伯人倒退了一步. 他们虽然通过印度人的著作熟悉负数以及负数的运算,但他们摒弃了负数.

在代数方面阿拉伯人的第一个贡献是提供了这门学科的名称. 西文"algebra"(代数)这个字来源于 830 年天文学者 Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî(约 825 年)所著的一本书 *Al-jabr w'al muqâbala*. al-jabr 的原意是"复原",根据那里上下文的意思是说在方程的一边去掉一项就必须在另一边加上这一项使之恢复

平衡;例如若从 $x^2-7=3$ 把 -7 去掉,就必须写 $x^2=7+3$ 才能恢复平衡. Al'muqâbala 意即"化简",例如把 $3x$ 与 $4x$ 并成 $7x$,或从方程两边消掉相同的项. Al-jabr 这个字以后又有"接骨者"的意思,也就是指恢复骨折或脱臼的人. 当摩尔人把这字传到西班牙去时,它就变成 algebrista,意思仍是"接骨者". 在西班牙曾一度常可在理发铺门口见到这样的招牌"Algebrista y Sangrador"(接骨兼放血医师),因在当时乃至在几个世纪以后理发师是兼做这些比较简单的医疗工作的. 在 16 世纪的意大利,algebra 还是指接骨术. 当 al-Khowârizmî 的书在 12 世纪译成拉丁文时,书名译为 *Ludus algebrae et almucgrabalaeque*,但也用过其他名称. 这门学科以后简称为 algebra(汉译名为"代数").

Al-Khowârizmî 的代数是根据 Brahmagupta 的著作写的,但也受了巴比伦人和希腊人的影响. Al-Khowârizmî 做的有些运算和 Diophantus 做的完全一样. 例如,碰到含有几个未知量的若干个方程时,就把它化到只含一个未知量然后求解. 在方程中出现未知量 s 同时出现 s^2 时 Diophantus 把他的 s 称作边;al-Khowârizmî 也是这样做的. Al-Khowârizmî 把未知量的平方称为"乘幂"(power),这也是 Diophantus 的用语. 他也像 Diophantus 那样给未知量的乘幂起特别的名称. 他称未知量为"东西"或(植物的)"根",从而把解未知量叫求根. 在 11 世纪初写过一本高超的阿拉伯代数书的巴格达的 al-Karkhî(死于 1029 年)肯定是模仿希腊人特别是模仿 Diophantus 的. 然而阿拉伯人没有采用成套的符号. 他们的代数完全是用文字叙述的,从这方面讲比起印度人甚至比起 Diophantus 来他们是后退了一步.

al-Khowârizmî 在他的代数书里给出了 $(x\pm a)$ 与 $(y\pm b)$ 的乘积. 他指出怎样从 ax^2+bx+c 这种形式的式子里减去或加上一些项. 他解出了一次和二次方程,但保留六种不同的形式如 $ax^2=bx$, $ax^2=c$, $ax^2+c=bx$, $ax^2+bx=c$ 以及 $ax^2=bx+c$,而

让 a, b, c 总是正数.这就避免了单独出现负数以及减数可能大于被减数的情形.在把二次方程分成不同形式这一点上,al-Khowârizmî 也是照着 Diophantus 那样做的.Al-Khowârizmî 认识到二次方程有两个根,但他只给出正的实根,并且可以是无理根.有些作者则既给出正根又给出负根.

Al-Khowârizmî 所论述的二次方程可举一例如下:"根的平方和十个根等于 39 个 dirhem(阿拉伯重量单位或钱币——译者),就是说,你把十个根和一个根的平方相加,其和等于 39."他给出的解法是这样的:"取根数目的一半,在这里就是 5,然后让它自乘得结果为 25.把这同 39 相加得 64;开平方得 8,再减掉根数的一半,就是说减掉 5,余 3.这就是根."解法正好就是配方所该做的步骤.

阿拉伯人虽然给出二次方程的代数解法,但他们是从几何上来解释或确认他们的算法步骤的.他们无疑是受了希腊人依赖于几何代数法的影响;他们虽把解题步骤算术化了,但一定仍相信证明必得用几何方法.因此,在解 $x^2+10x=39$ 这个方程时,al-Khowârizmî 给出了如下的几何方法.设 AB(图 9.1)表示未知量 x 的值.作正方形 $ABCD$.延长 DA 到 H,延长 DC 到 F,使 $AH=CF=5$,这是 x 系数的一半.分别作以 DH 及 DF 为边的正方形.于是 I,II 及 III 三块面积各为 x^2, $5x$ 及 $5x$.这三者之和就是方程的左边.现在把两边加上面积 IV 即 25.因此整个正方形是 39+25 或 64,它的边必是 8.于是 AB 或 AD 等于 8-5 或 3.这就是 x 的值.这几何论证是依据《原本》第二篇命题 4 而来的.

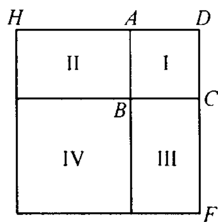


图 9.1

阿拉伯人也用代数方法解出一些三次方程,然后照上面对二次方程那样作出几何解释.例如,巴格达的异教徒 Tâbit ibn Qorra

(836—901)就是这样做的(此人又是医生、哲学家和天文学家),还有埃及人 al-Hasan ibn al-Haitham——通常以 Alhazen(约 965—1039)知名于世——也是这样做的. 至于一般三次方程,则 Omar Khayyam 认为只有从几何上用圆锥曲线才能解. 我们来考察他所解的一个比较简单的情形 $x^3+Bx=C$(B 与 C 都是正数)以说明他在他的《代数》(*Algebra*)(约 1079)中所用的方法.

Khayyam 把这方程写成 $x^3+b^2x=b^2c$, 这里 $b^2=B$, $b^2c=C$. 然后他作一个正焦弦为 b 的抛物线(图 9.2). 这个值确能定出一个抛物线,并且虽然曲线本身不能用尺规作出,但曲线上的点需要多少就可以作出多少个来. 然后他在长度为 c 的直径 QR 上作半圆. 于是抛物线与半圆的交点 P 就定出垂线 PS,而 QS 便是三次方程的解.

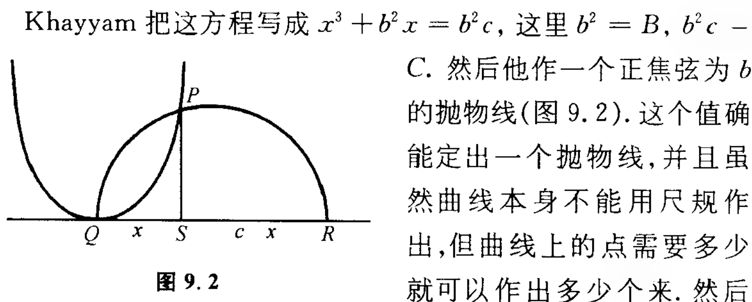


图 9.2

Khayyam 的证明是纯综合性的. 根据 Apollonius 所给出的抛物线的几何性质(或者从方程 $x^2=by$ 可以看出)

(6) $$x^2=b\cdot PS,$$

或

(7) $$\frac{b}{x}=\frac{x}{PS}.$$

现在来看直角三角形 QPR. 高 PS 是 QS 与 SR 的比例中项. 因此

(8) $$\frac{x}{PS}=\frac{PS}{c-x}.$$

从(7)和(8)得

(9) $$\frac{b}{x}=\frac{PS}{c-x}.$$

但由(7),

$$PS=\frac{x^2}{b}.$$

若把这 PS 值代入(9),则知 x 满足方程 $x^3+b^2x=b^2c$.

Khayyam 又解出 $x^3+ax^2=c^3$ 这种类型的方程,它的根是用一双曲线和一抛物线的交点定出的;还解出了 $x^3\pm ax^2+b^2x=b^2c$ 这一类型的方程,它的根是用一椭圆和一双曲线的交点定出的.他还解出一个四次方程 $(100-x^2)(10-x)^2=8\,100$,它的根是用一双曲线和一圆的交点定出的.他只给出了正根.

用圆锥曲线相交来解三次方程是阿拉伯人在代数上推进的一大步.其数学原理恰同希腊人的代数几何法一样,不过这里用的是圆锥曲线.所要的本应是个算术答案,但阿拉伯人只能通过度量最后代表 x 的那个长度才能得出解.在这项工作中,希腊几何的影响是很明显的.

阿拉伯人也解出了二次和三次的不定方程.有几个作家陈述了并打算证明 $x^3+y^3=z^3$ 没有整数解.他们也给出了头 n 个自然数的一次、二次、三次和四次幂之和.

6. 阿拉伯人的几何与三角

阿拉伯几何主要受 Euclid,Archimedes 和 Heron 的影响.阿拉伯人确曾对 Euclid 的《原本》作过评注,这是很使人惊异的事,因为这说明他们还是欣赏数学的严格性的,尽管他们在代数上通常是不管这个的.这些评注中包括关于平行公理的著述,那是我们以后还要讲到的(第 36 章).它们的价值不在于给出了什么新的结果或新的证明,而多半在于提供了关于阿拉伯人所知道而如今已失传的希腊手稿的情况.波斯人 Abû'l-Wefâ(或 Albuzjani)(940—998)探讨了一个新的问题:用直尺和固定圆(两脚固定的圆规)作图的问题(这在文艺复兴时期的欧洲又曾风行一时).

阿拉伯人在三角术上没有作出什么进展.他们的三角术也像印度人那样是算术性质的,而不像 Hipparchus 和 Ptolemy 的那样

是几何性质的. 例如从正弦值算余弦值时他们是用 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 之类的恒等式和代数步骤来做的. 他们也同印度人一样用弧的正弦而不用双倍弧的弦,虽然(像印度人的著作中那样)正弦(或半弦)的单位数取决于半径上的单位数. 正弦的这种用法是 Tâbit ibn Qorra 和天文学家 al-Battânî(约 858—929)介绍到阿拉伯人中间去的.

阿拉伯天文学家引入了我们今天所说的正切和余切这两个比,不过他们把这看作是有一定单位数的线段,正如一弧的正弦之被看作是有一定单位数的线段一样. 这两个比可以在 al-Battânî 的著作中找到. Abû'l-Wefâ 在一本天文著作中引入了正割和余割. 他又算出了相差 10 分的每个角的正弦和正切数字表. Al-Bîrûnî 给出了平面三角形的正弦定律并作出一个证明.

平面三角和球面三角的系统化是由 Nasîr-Eddin 在他的一本独立于天文的著作《论四边形》(*Treatise on the Quadrilateral*)中作出的. 这书含有解球面直角三角形的六个基本公式,并指出如何用现今所谓的极三角形来解更一般的三角形. 可惜欧洲人直到 1450 年左右才知道 Nasîr 的著作;直到那时为止,三角的讲述和应用仍和开始出现时一样保持为天文学的附属学科.

阿拉伯人的科学工作虽然没有首创精神但是所涉及范围很广;不过我们这里只能指出他们沿希腊人所开辟的道路而继续前进的那些工作. 他们和印度人不同,确是继承了 Ptolemy 的天文学. 他们注重天文学,使他们能够知道祈祷的准确时间,使广大帝国内的阿拉伯人在祈祷时能面朝麦加(Mecca). 他们充实了天文数字表;改进了仪器;修造并启用观察台. 和印度一样,几乎所有的数学家主要都是天文学家. 占星术在刺激天文学从而刺激数学工作方面也起了很大作用.

阿拉伯人所研究的另一门科学是光学. 物理学家兼数学家 Alhazen 写的一本巨著《光学集锦》(*Kitab al-manazer*)曾产生巨

大的影响. 他在这本书中陈述了完整的反射定律,包括入射线、反射线以及反射面的法线三者都在同一平面内的这个事实. 但尽管他花了不少力气并做了不少试验,他也像 Ptolemy 一样未能得出关于折射角的定律. 他论述了球面和抛物面反射镜、透镜、暗箱和视象. 光学是阿拉伯人所喜爱的一门学问,因它可提供玄奥和神秘的思想. 不过阿拉伯人在这方面没有作出重要的独创贡献.

阿拉伯人对数学的用法也属于我们先前所讲过的那一类. 这是因为天文学、占星术、光学和医学(通过占星术)需要它,虽然有些代数——正如一个阿拉伯数学家所说是在"分配、继承产业、合伙分红、土地测量上最为需要的……". 阿拉伯人钻研数学主要是为推进他们所从事的几门科学,而不是为了数学本身. 他们也不搞为科学而研究科学的事. 他们对希腊人为了弄懂自然界的数学设计或对中世纪欧洲人为了领悟上帝之道这种目标是不感兴趣的. 阿拉伯人的目标在科学史上是与前不同的,他们是为要支配自然界而从事科学研究的. 他们认为他们可以通过炼金术、魔术和占星术(这些都是他们科学工作的正式组成部分)获得这种支配权力的. 这种目标其后也为那些能够分辨真假科学并在做法上更深刻更审慎的思想家所采纳.

阿拉伯人在数学上没有作出什么重要的推进. 他们所做的是吸收了希腊和印度的数学,把它们保存下来,并终于(通过以后要叙述的事态发展)传给欧洲. 阿拉伯人的工作在 1000 年之际达到顶点. 在 1100 到 1300 年间,基督徒十字军的打击削弱了东部阿拉伯人. 其后他们所居土地被蒙古人所蹂躏侵占;到 1258 年之后巴格达的回教国君已不复存在. 在 Tamerlane 率领下的鞑靼人的进一步破坏又把这阿拉伯文明摧毁殆尽,尽管鞑靼入侵后那里还做了一星半点数学工作. 在西班牙的阿拉伯人经常遭到进攻并终于在 1492 年被基督徒所征服,这就使该地区的数学和科学活动告一终结.

7. 1300 年左右的数学

虽然印度人和阿拉伯人的数学工作并不出色，但他们对其后有关的数学的内容和性质确实作了一些变革. 以 10 为底的进位制记数法(对 1 到 9 的量采用特别的数字记号，并把零作为一个数)，负数的引入，以及无理数作为数的自由运用不仅大大推广了算术的范围而且为更有意义的代数(其中字母和运算能适用于范围广泛得多的一类数)开辟了道路.

这两个民族都从算术方面而不是从几何方面处理确定的或不确定的方程. 代数虽在埃及人和巴比伦人开创时是立足于算术的，但希腊人却颠覆了这个基础而要求立足于几何. 因此印度人和阿拉伯人的工作不仅使代数重新立足于它所应有的基础上，甚至还在好些方面推进了代数技巧. 印度人使用了数目较多的一套符号并推进了不定方程的工作，而阿拉伯人则在三次方程上前进了一步，尽管 Khayyam 的工作仍依赖于几何.

Euclid 几何未获进展，但三角则有进展. 引用正弦或半弦一举确在使用上有其优点. 在处理恒等式和三角计算上使用算术技巧或代数技巧也是加快数学发展的一个步骤；三角术之脱离天文学而独立则出现了一门用途更广的科学.

有两件事对以后承认代数与几何之范围同样起了广泛作用. 承认无理数之后，就有可能给所有线段以及二、三维的图形指定数值，就是说有可能用数来表示长度、面积和体积. 其次是阿拉伯人用代数方法解方程然后用几何图形说明所作步骤之合理，他们的这种做法展示了代数与几何之并行不悖. 这种并行性的进一步充分发扬便导致解析几何的产生.

最有意思的事也许就是印度人和阿拉伯人对于数学有自相矛盾的想法. 他们在算术和代数里都随便作运算而根本没有想到要

作证明.埃及人和巴比伦人之依据经验而满足于他们的那一点点算术和几何法则是不足为奇的;因为人类几乎所有的知识都是以经验为天然依据的.但印度人和阿拉伯人懂得希腊人所揭示的对于数学证明的那种全然新颖的想法.印度人的做法是颇有道理可讲的;他们虽也确实知道一些希腊古典著作,但他们对此并不看重,而主要遵循亚历山大希腊人对算术和代数的做法.不过他们何以只重视一门数学而忽视另一门数学,这也引起人们的疑问.而阿拉伯人则是充分了解希腊几何的,他们甚至对 Euclid 和其他作家的著述作过批判性研究,而且在长达数世纪的期间内曾存在有利于纯科学研究的条件,数学家无需被迫搞出眼前实践上有用的结果而牺牲证明.这两个民族怎么会以这样迥异于希腊人的态度来对待这两门数学呢?

有许多可能的答案.这两种文明总的说来都是缺乏批判精神的,尽管阿拉伯人对 Euclid 著作曾写过评注.因此可能他们满足于所传给他们的数学的现状;就是说,几何是讲究演绎的,而算术和代数则可以依据经验或直观启示.第二种可能的答案是:这两个民族——更可能的是阿拉伯人——认识到几何相对于算术和代数而言具有极不相同的标准,但想不出用什么办法来给算术提供逻辑基础.有一件事实似可说明这种解释之合理,即阿拉伯人确实在解释他们对二次方程的解法时至少想给出几何根据.

还可以有其他种种解释.印度人和阿拉伯人都喜欢搞算术、代数以及三角关系的代数式和运算.这种偏爱可能说明不同的心智状态,或者可能反映了不同文明的不同需求.这两种文明都是偏重实际的,而且正如我们在谈到亚历山大希腊文明时所指出的那样,实际需要确乎要求提供数量结果,而这就得用算术和代数来求出.而有利于心智状态不同之说的一点事实是:欧洲人也继承了同印度人和阿拉伯人一样的数学遗产,但他们的反应却很不一样.我们以后就会看到,欧洲人对算术和几何之有不同的基础是伤过很多

脑筋的.

由于对此缺乏详尽而肯定的研究,我们只得承认印度人和阿拉伯人体会到算术与代数的基础是不可靠的,不过他们胆子大(更由于实际需要),敢于进一步发展这两门学科.虽然他们肯定没有认识到他们所干工作的意义,但他们还是采纳了搞数学创新工作时所能采纳的唯一道路.新思想只有在自由和勇敢的直观启发下才能产生.逻辑说理和补救办法(如果需要补救的话)只有在具备了可供逻辑说理的东西之后才能起作用.印度人和阿拉伯人的闯劲把算术和代数又一次提高到几乎和几何并驾齐驱的地位.

于此就确立了数学的两种独立的传统或概念:一种是希腊人所树立的那套逻辑演绎知识,其更大的目的是了解自然;另一种是源于经验为求实用的数学,它由埃及人和巴比伦人打下基础,为一些亚历山大的希腊数学家所重新拣起而为印度人和阿拉伯人所进一步推广.前者重视几何,后者重视算术与代数.这两种传统和两种目标此后继续起作用.

参 考 书 目

Ball, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, Chap. 9.

Berry, Arthur: *A Short History of Astronomy*, Dover (reprint), 1961, pp. 76～83.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chaps. 12～13.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, Macmillan, 1919, pp. 83～112.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1894, Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 1, Chaps. 28～30, 32～37.

Coolidge, Julian L.: *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover (reprint), 1963, Chap. 2.

Datta, B., and A. N. Singh: *History of Hindu Mathematics*, 2 vols., Asia Publishing House (reprint), 1962.

Dreyer, J. L. E. : *A History of Astronomy from Thales to Kepler*, Dover (reprint), 1953, Chap. 11.

Karpinski, L. C. : *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, Macmillan, 1915. English version also.

Kasir, D. S. : "The Algebra of Omar Khayyam", Columbia University Teachers College thesis, 1931.

O'Leary, De Lacy: *How Greek Science Passed to the Arabs*, Routledge and Kegan Paul, 1949.

Pannekoek, A. : *A History of Astronomy*, John Wiley and Sons, 1961, Chap. 15.

Scott, J. F. : *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, 1958, Chap. 5.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, pp. 138～147,152～192,283～290.

Struik, D. J. : "Omar Khayyam Mathematician", *The Mathematics Teacher* 51,1958, 280～285.

第 10 章

欧洲中世纪时期

在大多数科学里,一代人要推倒另一代人所修筑的东西,一个人所树立的另一个人要加以摧毁.只有数学,每一代人都能在旧建筑上增添一层楼.

Hermann Hankel

1. 欧洲文明的开始

当阿拉伯文明开始衰落之时,西欧和中欧进入数学发展的时期.但为了熟悉一下中世纪欧洲的状态,认识欧洲文明是怎样开始的,并了解它所取的方向,就必须(至少短暂地)回顾它的开端.

在巴比伦、埃及、希腊和罗马人各自盛极一时的年代里,今日的欧洲(除意大利和希腊外)只有原始的文明.住在那里的日耳曼民族既不会书写又没有什么知识.罗马历史学者 Tacitus(1 世纪)把当时这些部落描写为诚挚、好客、善饮、憎恶和平、因其妻子之忠贞而自豪的人.他们的主要工作是饲养牲口、打猎和种植谷物.从第 4 世纪起,匈奴人把居住在中欧的哥特和日耳曼部落往西赶.第 5 世纪时哥特人占领了西罗马帝国本土.

英法的部分领土虽早在罗马帝国统辖时就获得一些文化,但直到公元 500 年新的文化影响才开始在欧洲起作用.甚至在罗马帝国崩溃以前,天主教会已经是有组织有势力的集团了.教会逐步使日耳曼和哥特蛮族改信基督教并开始建立学校,这些是附设在当时稍具希腊和罗马知识的修道院里的,目的是为教授人们念诵教会经文和圣书.其后不久为了训练教会圣职人员,又逐步办起较

高级的学校来.

在8世纪下半叶,有些世俗统治者又增设了一些学校.在Charlemagne的帝国里,一个英国约克郡的Alcuin(730—804)应Charlemagne之邀到欧洲大陆去组织了一些学校.这些学校也是附设在教堂或修道院里的,注重学习基督教的神学和音乐.最后从教会的学校产生出欧洲的大学,并由教会中各教派如Franciscan和Dominican教派的人士担任教员,最早的波洛尼亚(Bologna)大学是在1088年成立的.巴黎大学、萨莱诺(Salerno)大学、牛津大学和剑桥大学是大约在1200年成立的.当然,这些大学在一开头根本不是现代意义下的大学.而且虽然在形式上是独立的,但实际上都是服务于教会利益的.

2. 可供学习的材料

随着教会势力遍及各地,它就把它所宠爱的文化强加于世.拉丁文是教会的官方语言,因而它就成为欧洲的国际语言以及数学和科学的文字.直到18世纪相当晚的时候,拉丁文还是欧洲学校里授课用的语言.因此欧洲人不免要从拉丁文(即罗马)书籍来获取他们所需要的知识.由于罗马人的数学微不足道,所以欧洲人所学到的只不过是非常原始的一套记数法和少量算术法则.他们也通过少数翻译家汲取一点希腊数学知识.

主要的翻译家是一个罗马名门的后裔Anicius Manlius Severinus Boethius(约480—524),他的译作直到12世纪还广泛流传.他根据希腊材料用拉丁文选编了算术、几何与天文的初等读物.他从Euclid的《原本》里译了多则5篇(或少则3篇)的材料组成他的《几何》(*Geometry*).在他的书里他给出定义和定理,但无证明.他又在这书里编入一些度量方法的几何材料.有些结果是不正确的,有些只是近似的.奇怪的是,《几何》里也含有关于算盘和分数

的材料,后者是学习天文(这书我们没有看到)的预备知识. Boethius 还写了《算术入门》(*Institutis arithmetica*),这是 Nichomachus 所著《算术入门》的译本,但略去了 Nichomachus 的一些结果. 这书成为各学校所教算术知识的源泉几乎有 1 000 年之久. 最后 Boethius 译出了 Aristotle 的一些著作,根据 Ptolemy 的著作写了一本天文书,根据 Euclid,Ptolemy 和 Nichomachus 的著作写了一本音乐书. 很可能 Boethius 并未全部理解他所翻译的书籍. 他创造了"四大科"("quadrivium")这个词来代表算术、几何、音乐和天文. 他最出名的著作《哲学的安慰》(*Consolations of Philosophy*)至今还有人在读,那是在他被控叛国(最后他因这个罪名被斩)而监禁在牢里时写的.

另一个翻译家是罗马人 Aurelius Cassiodorus(约 475—570),他用蹩脚译文翻出了一小部分希腊数学和天文著作;还有塞维利亚(Seville)的 Isidore(约 560—636),他撰写了《学源》(*Etymologies*),共 20 篇,内容从数学到医学都有;以及英国人"可敬的"Bede(the Venerable Bede)(674—735). 这些人是希腊数学和中世纪早期学术界的主要联系者.

中世纪早期数学家书中的所有问题都只牵涉到整数的四则运算. 由于实际计算是用各种算盘来做的,所以书中的运算法则也特别适应于算盘. 分数很少用,即使用到分数也是照罗马人那样用分数的名称而不用特定记号;例如他们用 uncia 表示 1/12,quincunx 表示 5/12,dodrans 表示 9/12. 无理数是根本不出现的. 中世纪把善算的人叫做"蛊术"师或巫师.

10 世纪时奥弗涅(Auvergne)人 Gerbert(后来成为教皇 Sylvester 二世,死于 1003 年)把数学的学习稍微推进了一步. 但他的著作只限于初等算术和初等几何.

3. 中世纪早期数学在欧洲的地位

虽然所教的数学内容很少,但即使在中世纪学校的课程里数学还是相当重要的. 课程分为四大科和三文(trivium). 四大科包括:算术(纯数的科学)、音乐(数的一个应用)、几何(关于长度、面积、体积和其他诸量的学问)和天文(关于运动中的量的学问). 三文包括修辞、辩证和文法.

即使是上述这点有限的数学,学了之后也有好几种用处. 在Gerbert时代以后,数学用来计算高和距离,那时野外测量仪器是古代的观象仪和反射镜. 当时教会指望教士能用说理来捍卫神学和驳斥论争,而数学则被认为是训练神学说理的最好学科,正如Plato认为数学是训练哲学的好学科一样. 教会提倡教授数学,因它对修日历和预报节日有用. 每个修道院里至少有一人能作必要的计算,并在这一工作中算术和制定历法都获得不同程度的改善.

促使人学习一点数学的另一动机是占星术. 这门伪科学在巴比伦人、古典希腊人和阿拉伯人那里曾颇为风行,而在中世纪的欧洲则几乎普遍被人接受. 占星术的基本信条当然是说天体能影响和控制人体以及人的命运. 为了解天体的影响并预报特殊的天象事件如行星的会合和日月蚀所展示的吉凶祸福,那就需要有些天文知识,因此少不了要懂得点数学.

占星术到中世纪后期变得特别重要. 每个朝廷都有占星术士,大学里也有占星术的教授和课程. 占星术士帮王公大人谋划政治决策、军事征战和个人事务. 奇怪的是甚至那些懂得并爱好希腊思想的君王也依靠占星术士. 在中世纪末期和文艺复兴时,占星术不但成为一项重要的工作而且被看作是数学的一个分支.

数学通过占星术又同医学发生关系(第7章第8节). 教会虽把人的肉体视为微不足道,但医生是不能相信此说的. 由于一

般人迷信天体能影响人的健康,医生就想找出天体现象和特殊星座同各个人的健康之间的关系.他们把成千人出生、结婚、生病和死亡时出现的星座记录下来,用以预测医疗之是否有效.为此需要懂得广泛的数学知识,因而使医生也变成深谙数学的人.事实上他们在占星术和数学方面的造诣远远超过其对人体知识的造诣.

数学通过占星术而应用于医学的做法在中世纪后期流行更广.12世纪的波洛尼亚大学有个医学和数学学院.当天文学家Tycho Brahe在1566年上罗斯托克(Rostock)大学时,那里没有天文学家,但有占星术士、炼金术士、数学家和医学家.在许多大学里占星学教授比真正的医学和天文学教授还要常见.Galileo确曾对医科学生讲过天文,但目的是为了使他们能搞占星术.

4. 数学的停滞

中世纪初期约从400年起到1100年左右为止:这700年的时期本来是很可能使欧洲文明发展一些数学的.如果它能从当时所拥有的少量线索追究其包藏的丰富知识,它很可能从希腊著作获得很大帮助.但这段时期内数学并无进展,也没有人认真搞数学工作.凡是想了解数学在什么条件下能繁荣的人,自然很想知道这究竟是什么原因.

数学水平之所以低,主要原因是对物理世界缺乏兴趣.当时在欧洲占统治地位的基督教规定了它自身的目标、价值和生活方式.主要关心的是精神生活,因而认为出于好奇心或实用目的而探索自然的工作是浮薄不足道的.基督教乃至后期希腊哲学家如斯多葛派(Stoics,禁欲派——译者)、伊壁鸠鲁派(Epicureans,享乐派——译者)和新柏拉图派(neo-Platonist)都强调要把心灵提高到超越肉体和物质之上,并为灵魂作好准备,以便死后去过天国的生

活.终极的实在是灵魂的永恒生命,而追求道德与精神的真理则可增强灵魂的健康.关于原罪的信条、对地狱的恐惧、上帝的拯救以及对天国的企求重于一切.由于对自然的研究无助于使人达到这些目的或准备好过来世生活,因此它就被认为是无益甚至邪妄之事.

那么欧洲人从哪里去获得关于自然的知识以及关于宇宙和人的天然设计方案呢?回答是所有知识都来源于研读圣经,教会神甫的教导和教条是圣经的补充发挥和解释,被认为具有至高无上的权威.St. Augustine(354—430)是个很有学问并在传播新柏拉图主义方面最有影响的人,他曾说:"从圣经以外获得的任何知识,如果它是有害的,理应加以排斥;如果它是有益的,那它是会包含在圣经里的."这段话虽不足以代表 Augustine,却足以代表中世纪早期的人对研究自然的态度.

关于中世纪早期文明的这一简略概述,由于我们主要关心它同数学的关系,难免颇为片面,但它无论如何可使我们大致认清教会领导下的欧洲本土能有什么样的文化,它又能从罗马人留下的微薄遗产上建立起什么样的文化.直到1100年,中世纪时期没有在知识领域里产生出任何大的文化.它的知识状态是思想一律、教条主义、神秘主义、信赖权威,不断向权威著作求教、进行分析并加以评述.倾向于神秘主义的结果使人把含糊其辞的思想奉为现实甚至接受为宗教真理.仅存的那一小点理论科学是呆板无生气的.神学统辖了所有的学问,教会神甫能编造万有知识体系.但除了包含在基督教义中的以外,他们不去寻思或追求任何别的原理.

罗马文明是产生不出数学来的,因它太注重实际和马上可以应用的结果,欧洲中世纪文明之不能产生数学成果则出于正相反的原因.它根本不关心物理世界.俗世的事务和问题是不重要的.基督教重视死后的生活并重视为此而进行的准备.

数学显然不能在一个只重世务或只信天国的文明中繁荣滋长.我们可以看到,数学在一个自由的学术气氛中最能获得成功,那里既能对物理世界所提出的问题发生兴趣,又有人愿意从抽象方面去思考由这些问题所引起的概念,而不计其是否能谋取眼前的或实际的利益.自然界是产生概念的温床,然后必须对概念本身进行研究.反过来,能对自然获得新的观点,对它有更丰富、更广泛、更强有力的理解,而这又产生出更深刻的数学工作.

5. 希腊著述的第一次复活

在 1100 年之际,欧洲文明处于一种停滞的状态.虽然社会制度大部分仍属封建性的,但已经有不少独立的商人,有初步的工业,有自由民所从事的艺术和手工业、大规模的农业、制造业、矿业、银行业和牲畜饲养业.同国外的贸易,主要是同阿拉伯人和近东的贸易,已建立起来.最后,王公大人、教会官员和商人都获得了必需的财富来供养从事学术和艺术的人员.

虽然那是一个安定的社会,但一点也看不出有什么征象,能够说明欧洲人如果任其自行其是,会自动抛弃前述那种世界观和着重点,而回头来认真钻研数学.西欧是基督教罗马世界的后继者,而罗马和基督教都不是喜爱数学的.但到了 1100 年左右,新的思潮开始影响当时的学术界气氛.欧洲人通过贸易和旅游,同地中海地区和近东的阿拉伯人以及东罗马帝国的拜占庭人发生接触.十字军东征(约 1100—1300),为掠取土地的军事征战,使欧洲人进入阿拉伯土地.十字军战士是搞打仗而不是搞学术的人,所以通过十字军战争而产生的接触也许被人估计得过分重要.但无论如何欧洲人开始从阿拉伯人和拜占庭的希腊人那里学到了希腊的著作.

希腊学术的发现激起欧洲人很大的兴趣,他们大力搜求希腊

著作的抄本,阿拉伯文译本以及阿拉伯人写的课本. 王公和教会领袖支持学者去猎取这些学术宝藏. 学者们纷纷到非洲、西班牙、法国南部、西西里和近东的阿拉伯文化中心去钻研阿拉伯人的著述并把他们所能买到的书籍带回欧洲. 巴思(Bath)地方的 Adelard (约 1090—1150)乔装回教学生前往阿拉伯人控制下的叙利亚和科尔多瓦(Cordova)以及意大利南部. 比萨(Pisa)的 Leonardo 到北非去学算术. 北意共和国和罗马教庭派出使团和大使到拜占庭帝国和西西里(那里原是著名的希腊文化中心,到 878 年为止仍在拜占庭统治下). 1085 年基督徒攻占了托莱多(Toledo),于是阿拉伯著作的一大中心向欧洲学者开放了. 1091 年基督徒又从阿拉伯人手里夺取了西西里,他们又可自由阅读那里的著作了. 从帝国开始之日起就收藏了希腊著作的罗马,经过一次搜索后发现了更多的手稿.

欧洲人获得这些著述后就愈来愈多地把它们译成拉丁文. 12 世纪从希腊文译出的书总的说来质量不高,因当时对希腊文懂得不多. 它们是逐字逐句译出的(de verbo ad verbum),但它们比那些通过阿拉伯译本重译的希腊著作好一些,因为阿拉伯文与希腊文是很不一样的. 因此直到 17 世纪后很长的时间,欧洲不断出现新的更好的译本.

这样欧洲人就知道了 Euclid 和 Ptolemy 的著作, al-Khowârizmî 的《算术》(*Arithmetic*)和《代数》, Theodosius 的《球面学》(*Sphaerica*), Aristotle 和 Heron 的许多著作, Archimedes 的几部著作,特别是他的《圆的量度》(他的其余著作在 1544 年由巴塞尔(Basle)的 Hervagius 译成拉丁文). 但在 12 和 13 世纪间, Apollonius 和 Diophantus 的著作都未曾译出. 此外哲学、医学、科学、神学和占星术方面的书也都翻译出来. 由于阿拉伯人确实占有几乎全部的希腊著作,欧洲人就此获得了大量的文献. 他们对这些著作是这样钦佩并这样倾倒于其中的新鲜思想,以

至他们都成了希腊思想的门徒.他们珍视这些著作远远超过他们自己的创作.

6. 理性主义和对自然的兴趣的复活

第一批希腊和阿拉伯著作的译本传到欧洲后不久,对自然现象的理性探讨,并以自然原因而不以道德或神意的原因来作解释的风气几乎立刻就呈现出生命力.在法国夏尔特尔(Chartres)有一群人如Gilbert de la Porée(约1076—1154).夏尔特尔的Thierry(约死于1155年)和Bernard Sylvester (约1150年)甚至开始对圣经文字谋求作出合理化的解释,并且至少表示出需要用数学来研究自然的意愿.他们的主张是附和Plato的*Timaeus*的,但比那个对话中的更合理.不过,他们对自然现象的说法(虽从中世纪思想角度来看是颇为可观的)没有足够的意义和影响,不值得多加注意.

随着希腊著作的传入,要求作合理化解释的趋势,对物理世界的研究,通过食品、物质生活来享受现世生活的兴趣以及对自然的乐趣,变得明显起来.有些人甚至开始用他们自己的道理来对抗教会的权威.例如巴思地方的Adelard说他不愿听从那些"被人牵着鼻子走的人……因此如果你要听我讲些什么东西,就得同我讲道理并且让我也来讲道理."

说来奇怪,有些希腊著作的传入却使欧洲的觉醒推迟了两个世纪之久.到1200年之际,Aristotle的许多著作已相当普及.他书中的大量事实,精细的分辨能力,令人信服的论据,和对知识的逻辑编排,使欧洲学者读了心悦诚服.Aristotle学说的缺点是他接受了那些在思想上认为是有理的说法而不管其是否符合实际经验.他提出一些想法、理论和解释,例如基本物质之说,地上物体与天体的区分(第7章第3节),以及对终极原因的强调,是很少现实

根据或没有结果的. 但因这些说法都被人毫无批判地加以接受,所以新的思想就不受欢迎或无人理睬,使进步推迟. Aristotle 给数学以较低的地位——肯定地次于定性的物理解释的地位,这可能也是阻碍科学进步的(第 7 章第 3 节).

大约从 1100 年到 1450 年这段期间内,从事科学工作的是经院派学者,他们信奉以基督教使徒和 Aristotle 的权威为基础的学说,因此科学工作自然受到不利影响. 有些经院派学者反抗当时流行的教条主义并否认 Aristotle 学说的绝对正确. 当时有一个人感到需要从实验得出一般原则,需要有利用数学的演绎推理,然后根据事实来检验这种推理,这人便是林肯郡的主教,自然哲学家 Robert Grosseteste(约 1168—1253).

反抗权威的最出色的发言人并且真能提供有价值思想的是 Roger Bacon(1214? —1294),他号称为"万能博士"(Doctor Mirabilis). 他宣称,"如果我有权处理 Aristotle 的著作,我就会下令把它全烧掉,因为学习它不过是浪费时间而且把人引入歧途,而且它又是难以形容的层出不穷的无知之见."R. Bacon 学识渊博,遍晓当时的许多科学和语言文字,包括阿拉伯文在内. 他比别人早知道当时刚出现的发明和科学进展:如火药、透镜的作用,机制时钟,日历的编制,彩虹的形成等等. 他甚至谈到对潜水艇、飞机和汽车的设想. 他在数学、力学、光学、视象成因、天文学、地理学、年表学、化学、透视学、音乐、医学、文法、逻辑、形而上学、伦理学和神学方面的著作都是含有正确思想的.

R. Bacon 的特别令人钦佩之处是他懂得可靠的知识是怎么得来的. 他探讨了使科学获得进展或受到阻挠的原因,并提出改革研究方法的意见. 他虽也劝人阅读圣经,但强调数学和实验,并预见科学造福于人类的伟大前景.

他确信数学思想是与生俱来的并且是同自然事物本身相一致的,因为自然界是用几何语言编写而成的. 所以数学能提供真理.

它先于其他科学,因为数学处理直觉所感知的量.他在所著《大作》(*Opus Majus*)的一章中"证明"所有科学都需要数学,他的论点表明他正确认识到数学在科学中的作用.他虽然强调数学,但也充分认识到实验在发现事实和验证从理论或其他方面所得结果的作用及其重要性."论证可以总结一个问题,但它不能使我们感到放心或承认其为真理,除非通过经验而表明其确为真理."

R. Bacon 的《大作》中谈了不少关于数学对地理、年表学、音乐、彩虹的解释、编日历和确定信念的用处.他还论述了数学在国家管理、气象学、水文学、占星术、透视学、光学和视象成因等方面的作用.

但甚至 R. Bacon 也只是他那个时代的产物.他相信巫术、占星术,并坚称一切学问的目标是神学.他也是他那个时代的牺牲品:他死于监狱,正如其他许多倡导人类理智独立性以及实验观察重要性的学术界领袖一样.他对他那个时代的影响是不大的.

William of Ockham(约 1300—1349)继续对 Aristotle 进行有力的攻击,他批评 Aristotle 对终极原因的观点.他说终极原因纯粹是虚拟的说法.所有原因都是直接的,足以产生一事件的所有前提构成它的总因.这种关于联系的认识是放之四海而皆准的,因为自然界是统一的.科学的首要功能是确定观察的次第.Ockham 说,至于物质我们只知道它们的种种性质,而并没有一种基本的物质形式.

他又攻击当时的物理和形而上学(玄学),他说得自经验的知识是真知,而合理化的构思则不然,它们不过是人创造出来用以解释所观察的事实而已.他提出一个著名原则号称"Ockham 的剃刀"[Grosseteste 和 Duns Scotus(1266—1308)在以前早提出过]:若能用较少的概念解决问题,那更多的概念是不必要的.他把神学同自然哲学(科学)分开,理由是神学的知识得自神的启示,而自然哲学的知识则应来自经验.

这些持异见的分子并没有提出新的科学思想.但他们确实要求自由研究、自由思想和自由探索,并主张以经验作为科学知识的来源.

7. 数学本身的进展

大约在1100年到1450年这段时期内,尽管思想严受束缚,但还是进行了一些数学活动,其主要中心是牛津大学、巴黎大学、维也纳大学(成立于1365年)和埃尔富特(Erfurt)大学(成立于1392年).起初的工作是对希腊和阿拉伯文献的直接反应.

第一个值得一提的欧洲学者是比萨的Leonardo(约1170—1250),又名Fibonacci.他受教育于非洲,在欧洲和小亚细亚游历甚广,并以其精湛掌握当代及以前各代的全部数学知识而闻名.他住在比萨,为西西里的Frederick二世及宫廷哲学家所深知,而他的大多数现存著作也是奉献给他们的.

1202年Leonardo写了划时代的并流传很久的《算经》(*Liber Abaci*)一书,这是从阿拉伯文和希腊文材料编译成拉丁文的书.当时在欧洲已多少知道一点阿拉伯记数法和印度算法,但只限于在修道院里.一般人还是用罗马数字而且避免用零,因他们不懂零的意思.Leonardo的书产生很大影响并改变了数学的面貌,其中传授了印度人用整数、分数、平方根、立方根进行计算的方法.这些方法其后又由佛罗伦萨(Florence)的商人加以改进.

Leonardo在《算经》及较晚一部著作《四艺经》(*Liber Quadratorum*, 1225)中都论述了代数.他也照着阿拉伯人的样子用文字而不用记号讲述,并以算术方法作为代数的基础.他讲述了一次和二次确定或不确定方程以及某些三次方程.他也像Khayyam一样认为一般三次方程是不能用代数方法解出的.

在几何方面,Leonardo在他的《几何实习》(*Practica Geome-*

triae, 1220)里重复讲述了 Euclid《原本》及希腊三角术的大部分内容. 他传授用三角方法而不用罗马人的几何方法来搞测量,这是稍稍前进了一步.

Leonardo 著述的最突出之点是他指出 Euclid 在《原本》第十篇中对无理量的分类并不包括一切无理量. Leonardo 证明 $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ 的根不能用尺规作出. 这第一次表明数系所含的数超过希腊人以是否尺规可作为准则所定的范围. Leonardo 又引入了至今仍称为 Fibonacci 数列的概念,在这数列中的每项等于其前两项之和.

除了有 Leonardo 发表关于无理量的意见外, Nicole Oresme (约 1323—1382)的著作里也有一些创见. 此人是利雪(Lisieux)地方的主教兼纳瓦拉(Navarre)巴黎学院的教师. 在他的未发表的著作《比例算法》(*Algorismus Proportionum*, 约 1360 年)中,他引入了分数指数的记法和一些算法. 他的想法是(用我们今天的记号): 既然 $4^3 = 64$ 而 $(4^3)^{1/2} = 8$, 所以 $4^{3/2} = 8$. 分数指数的记法以后在 16 世纪的几个作家的著作中重又出现过,但直到 17 世纪才广泛采用.

Oresme 的另一项贡献在于对变化的研究. 我们记得 Aristotle 对质和量是严格区别的. 他认为热的强度是一种物质. 改变热的强度就得增加或减少一种东西——一种热. Oresme 认为并没有什么不同种类的热,而只有同一类热的多寡之分. 14 世纪一些牛津和巴黎的经院哲学家开始从量的方面来思考变化和变化率的问题. 他们研究匀速(等速)运动,非匀速(变速)运动以及均匀性的非均匀运动(等加速运动).

当时这一类思想的顶点是 Oresme 所提出的图线原理. 关于这个问题他写了《论均匀与非均匀的强度》(*De Uniformitate et Difformitate Intensionum*, 约 1350 年)与《论图线》(*Tractatus de Latitudinibus Formarum*, 无日期). 为研究变化与变化率, Oresme

按照希腊人的传统指出凡可度量的量(除了数以外)都能用点、线、面来代表. 于是,为表示随时间而变的速度,他用一水平线上的点代表时间,称之为经度;而不同时刻的速度则用纵线表示,称之为纬度. 为表示一个从 O 处为 OA 减到 B 处为零的速度,他画出了一个三角形(图 10.1). 他又指出由 AB 中点 E 所定的矩形 $OBDC$ 与三角形 OAB 等面积并表示在同一段时间内的匀速运动. Oresme 把物理变化同整个几何图形联系起来. 整个面积代表所论的变化,其中不牵涉到数值.

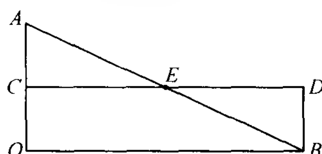


图 10.1

常有人说 Oresme 对提出函数概念,用函数表示物理规律以及函数的分类,作出了贡献. 人们也把创立坐标几何及函数的图象表示归功于他. 事实上他的图线是个含糊的观念,至多是一种图表. 虽然 Oresme 在图线(*latitudines formarum*)名义下表示强度的方法是经院哲学家试图用于研究物理变化的一个主要技巧,也曾在当时的大学里教给学生,并用之于修正 Aristotle 的运动理论,但它对其后思想界的影响是不大的. Galileo 确也用过这种图形,但思想远为清楚,用意远为明确. 又由于 Descartes 尽量避免提及前人,我们也不知道他是否受了 Oresme 思想的影响.

8. 物理科学中的进展

由于数学的进展主要依赖于人们对科学重新发生兴趣,所以这里要简略指出中世纪人士在科学方面的工作.

在力学方面他们采纳了关于杠杆、重心以及 Archimedes 流体静力学这些非常可取的希腊著作. 他们除了理解杠杆原理之外没有做更多的工作,不过 Jordanus Nemorarius(死于 1237 年)稍有一点补充. 他们最注重的是运动理论.

由于 Aristotle 的科学早已盛行一时，所以他的理论成为研究运动的出发点. 如我们在第 7 章中所指出的，Aristotle 的理论有好几处明显说不通. 早期中世纪科学家就想在 Aristotle 学说体系的基本范围内解决这些疑点. 例如，为说明落体何以会增速，13 世纪的有些人士，把 Aristotle 关于重力的含糊概念，解释成物体的重量会随着其接近于地心而增加的意思. 因此，由于力增大了，所以速度也增大. 有人怀疑 Aristotle 关于速度等于力除以阻力这个基本定律是否正确.

14 世纪中继夏尔特尔学派之后的是巴黎学派，其领袖是 Oresme 和 Jean Buridan(约 1300—1360). 在那里的大学里 Aristotle 的观点占上风. 为解释物体受力后之所以继续运动，Buridan 提出一个新理论——冲力理论. Buridan 按照 6 世纪基督教学者 Philoponus 的说法，认为加到箭或抛射体上的动力是加到物体本身上的而不是加在空气上的. 这个冲力(而不是空气的推进力)，若无外力作用是能使物体永远保持匀速运动的. 在落体的情形下，由于自然重力使原有冲力逐步获得增量，所以冲力是渐次增大的. 在上投物体的情形下(如抛射体)，传给物体的冲力因空气阻力和自然重力而逐渐减小. 天球有上帝给予冲力后就无需天上其他因素作用而保持其运转. Buridan 把冲力定义为物体的质量与速度的乘积，用现代术语来讲这就是动量.

有好几方面的原因使这个新理论值得重视. Buridan 把它应用于天体运动和地面上物体的运动之后便将两者合成一个理论. 其次是这理论同 Aristotle 的定律相反，它暗含着力改变运动而不单是维持运动的想法. 第三，冲力概念本身是一大进步，它把作用力从媒质转移到运动物体上，从而又使人能考虑没有媒质的真空. Buridan 是现代动力学的奠基人之一. 他的理论在他那个世纪以及其后两个世纪中被人广泛接受.

抛射体运动之所以这样受人注意，也许是由于 13 世纪武器的

改进,弩炮、横弓和长弓能把投射体抛过长的弯曲的路线,一个世纪以后又有了炮弹. Aristotle 说过一个物体在一个时间内只能在一种力的作用下运动;若有两种力则一种力会破坏另一种力的作用.因此若将一物往上抛出,它将沿一直线运动,直到那"激发"运动消耗掉之后物体就在天然运动下直落到地上.在对这理论进行修正的各种学说之中,Jordanus Nemorarius 提出的观点是最有帮助的,他说依直线方向抛射出去的物体,其运动的每一刻所受之力可分解为两个分力,一个是向下作用的自然重力,一个是水平抛射的"激发"力.这一思想以后为 da Vinci, Stevin, Galileo 和 Descartes 所接受.

Buridan 和 Oresme 领导下的巴黎学派不仅考察匀速运动而且接下去考察均匀性的非均匀运动(匀加速运动),并按他们自己认为满意的方式证明这种运动中的有效速度是初速和终速的平均值. 13、14 世纪力学上最有意义的工作也许在于他们力求引入定量的考察,并以定量的论证来代替定性的论证.

中世纪科学家的主要兴趣在于光学方面.原因之一是希腊人在(今日所谓的)几何光学方面比在其他物理领域上树立了更坚实的基础,到中世纪末期,他们在光学方面的许多著作都在欧洲传开了.另外一个原因是,阿拉伯人又在希腊人的基础之上作出了一些进展.到 1200 年,光学上的一些基本定律都为人熟知,如光在均匀媒质中的直线行进;反射定律;以及 Ptolemy 的不正确的折射定律(他相信折射角正比于入射角).还有关于球面镜和抛物面镜的知识,球面像差,针孔照相机,透镜的用途,眼睛的功能,大气折射现象,放大视象,这些都从希腊人和阿拉伯人那里传到了欧洲.

Grosseteste, R. Bacon, Vitello(13 世纪),John Peckham(死于 1292)和弗赖贝格(Freiberg)的 Theodoric(死于 1311),这些科学家都把光学推向前进.他们根据光被透镜折射的知识,定出了一些透镜的焦距,研究了透镜的组合,提出用透镜组合来放大视象的

意见,改进了解释彩虹的理论. 13 世纪中玻璃镜的制造完善了,从 1299 年起有了眼镜. Vitello 观察到光在折射下的色散现象,就是说他让白光通过六角形晶体产生出有色光. 他又引导光通过一碗水来研究彩虹,因他以前观察到光通过一碗水而射出后出现彩虹中的颜色. 光学继续成为一门重要科学,我们以后将看到 Kepler, Galileo, Descartes, Fermat, Huygens 和 Newton 都在这方面进行工作.

9. 总　　结

在科学上也如在其他领域里一样,中世纪只是专攻那些经过时间考验的权威著作. 各学院从古代手稿里作了辛勤的摘录、总结和评注的工作. 时代精神迫使人们遵循一向所信赖的、一成不变的、死硬的方法. 中世纪后期学术工作的特点是寻求一种包括人间、自然界和上帝的普遍哲学. 但这些工作充满了这样的缺点:思想不分明,神秘主义,教条主义,以及咬文嚼字地引述权威著作.

然而随着世界情势的逐步改变,人们日益强烈地发觉信仰和明显事实之间的脱节和矛盾,并对学术和信仰之需要修正看得愈来愈清楚. 在 Galileo 演示经验的价值以前,在 Descartes 教导人们进行内省以前,在 Pascal 陈述关于进步的概念以前,就有那些离经叛道的思想家,主要是持异见的经院派学者,他们打算沿着新的路线前进,向旧有的观念提出挑战,要求比希腊人更多地依赖于对自然界的观察.

做实验(其部分目的是为寻求产生奇迹的秘方)和用归纳法来获得一般原理和科学规律,开始成为知识的重要来源,虽然中世纪的主要科学方法仍是根据一些先验的原则,用一种形式的或几何性的论证来作合理化的解释.

数学对研究自然的作用也获得某种承认.虽然中世纪科学家总的说来仿照 Aristotle 的做法寻求物质上的或物理上的解释,但这种解释很难获得而且用处不大.他们愈来愈体会到,从数学上来对观测数据和实验事实进行整理比较,然后核验数学定律,做起来较为容易.所以,同天文理论本身、航海、修历法等工作有关的科学家,他们所用的天文理论不是 Aristotle 从物理上对 Eudoxus 理论的修补,而是 Ptolemy 的理论.结果使数学开始起一种大于 Aristotle 所指定给它的作用.

尽管有这些新的趋势和活动,但如果让中世纪的欧洲循着一条不变的道路继续走下去,那它会不会产生真正的科学和数学,这是很值得怀疑的事.自由探讨是不许可的.从 1400 年起就已存在的少数几所大学是受教会控制的,那里的教授不能自由讲授他们认为正确的东西.如果说教会在中世纪并未禁止过什么科学学说,那只是因为当时并没有发表过新的重要学说.但若不论在哪方面发现有真正与基督教思想相抵触的论调,那就会立即受到镇压,其残酷与恶毒的程度在历史上是空前的,而这种镇压大部分是由 13 世纪教皇 Innocent III 所创立的宗教裁判所来执行的.

其他一些相对地比较次要的因素也推迟了欧洲的变革.复活的希腊知识只能为少数既有时间又有机会来学习的学者所接触.手稿很昂贵,许多人想要而得不到.此外,从 1100 年到 1500 年这段期间,欧洲分裂为许多独立的公国、侯国、多少带点民主色彩或寡头政治性的城邦以及教皇控制下的国家.这些政治单位间不断发生战争,耗尽了人民的精力.从 1100 年开始的十字军战争糟蹋了数目难以想象的生命.14 世纪下半叶的黑死病夺去了约占欧洲三分之一的人口,使整个文明倒退回去.但幸而革命力量已开始在欧洲的学术、政治和社会舞台上发挥它的影响.

参 考 书 目

Ball, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, Chaps. 8,10,11.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chap. 14.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, Macmillan, 1919, pp. 113～129.

Clagett, Marshall: *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, University of Wisconsin Press, 1959.

Clagett, Marshall: *Nicole Oresme and the Geometry of Qualities and Motions*, University of Wisconsin Press, 1968.

Crombie, A. C.: *Augustine to Galileo*, Falcon Press, 1952, Chaps. 1～5.

Crombie, A. C.: *Robert Grosseteste and the Origins of Experimental Science*, Oxford University Press, 1953.

Easton, Stewart: *Roger Bacon and His Search for a Universal Science*, Columbia University Press, 1952.

Hofmann, J. E.: *The History of Mathematics*, Philosophical Library, 1957, Chaps. 3～4.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, pp. 177～265.

第 11 章

文 艺 复 兴

在我看来,一个人如果要在数学上有所进步,他必须向大师们学习,而不应向徒弟们学习.

N. H. Abel

1. 革命在欧洲产生的影响

大约从 1400 年到 1600 年左右的这段时期,我们称之为文艺复兴时期(虽然这个名词被不同的作者用来形容不同的时期).在这段时期内,欧洲被几件事情深深地震撼了一下,最后使得知识界的面貌大大改变,并使得数学活动以空前的规模和深度蓬勃兴起.

革命的影响是十分广泛并且连续不断的,几乎遍及欧洲每个国家每个城市的战争乃是政治变革的起因.文艺复兴的发源地意大利,就是一个最好的例子.虽然意大利各邦在 15、16 世纪的历史被不断的阴谋、大屠杀以及战争的破坏弄得支离破碎,但政治上不断的变迁以及某些民主政府的建立,则是有利于个性成长的.反抗教皇统治——当时政治上、军事上的主要力量——的战争,不仅从教会的统治下解放了人民,而且还鼓励知识分子造反.

中世纪后期,意大利得到了大量的财富.这主要是由于意大利的地理位置.意大利各港口地位极为优越,有利于把从亚洲、非洲进口的货物转运到欧洲其他地区去.大银行的建立使意大利成为经济中心.这种财富对于学术活动是不可少的.就在这个被搞得最一塌糊涂、混乱不堪的意大利,最早酝酿并且表现出了形成西方文化的思想.

在15世纪,希腊的著作大量进入了欧洲.在这个世纪早期,罗马和拜占庭帝国——它们占有大量的希腊文稿,但一直是孤立的——之间的联系变得很紧密.拜占庭帝国在和土耳其人打仗时,曾想得到意大利各邦的帮助.在关系改善的情况下,希腊的教师们被带到了意大利,而意大利的人则到拜占庭去学希腊文.当土耳其在1453年征服君士坦丁堡时,希腊的学者带着许多文稿逃到意大利.这样,不仅使欧洲有了更多的希腊著作,而且新得到的手稿远比早先在12、13世纪时得到的要好得多.这以后,直接从希腊文译成拉丁文的译本比从阿拉伯文转译的要可靠得多.

大约在1450年,Johann Gutenberg发明活版印刷,加速了知识的传播.从12世纪以来,欧洲通过阿拉伯人,从中国学来了制造麻纸和棉纸,以代替羊皮纸和草片纸.从1474年起,数学、天文学和占星术的著作开始印刷出版了.例如由Johannes Campanus(13世纪)译成拉丁文的Euclid《原本》的第一次印刷版本,1482年在威尼斯(Venice)出现了.到了下一个世纪,Apollonius的《圆锥曲线》的前四册,Pappus的著作,Diophantus的《算术》以及其他一些著作,也以印刷版本出现了.

罗盘和火药的引进是有重大意义的.罗盘使得远洋航行成为可能.火药在13世纪引进,它改变了战争的方法和防御工事的设计,使得研究抛射体的运动变得很重要.

由于制造业、矿业、大规模的农业以及各种贸易的大量发展,一个新的经济时代开始了.所有这些企业中遇到的技术问题都以比过去旺盛得多的活力着手来解决.和埃及、希腊与罗马的奴隶社会以及中世纪的封建农奴制社会相比较,新社会拥有一个不断增大的自由手工业者和自由劳动者阶级.独立的机械工人和那些支付工资的雇主都有迫切愿望去寻找节省劳动力的方法.为了改进生产方法和材料的质量,资本主义经济竞争也促使人们直接去研究一些物理现象和因果关系.因为教会曾对这些物理现象作出过

许多的解释,矛盾就产生了.可以肯定,每当物理的解释被证明比神学的解释更为有用的时候,神学的解释就被人们抛弃了.

通过15、16世纪进行的地理勘查,商人阶级对欧洲新秩序的建立作出了贡献.进行这些勘查是为了寻找更好的贸易途径和商品资源,它给欧洲带来了有关异地的植物、动物、气候、生活方式、信仰和习惯的知识.这些知识对中世纪的教条提出了挑战并激发了人们的想象力.

根据直接的观察以及一些探险家和商人带回欧洲来的见闻,引起了对教会的科学和宇宙学说的可靠性的怀疑,对教会压制实验和压制人们思考新秩序所产生的问题的反抗,一些教会领导人道德上的堕落,教会出卖赎罪券之类的腐败行为,以及最后严重的教义分歧,这一切最终导致了宗教改革.这些改革者由一批渴望打破教会势力的商人和王公贵族支持着.

宗教改革并没有解放人们的思想和精神.新教领导人的目的只在于挂出他们自己牌号的教条主义.但是,在提出关于圣礼的本性,教会统治的权威以及在圣经上一些文字段落的含义等问题时,Luther, Calvin, Zwingli这些人无意中激励了很多人去想一些以前所不敢想的问题.思想被激发了,辩论引起了.更进一步,为了争取信徒,新教宣称信仰的基础乃是个人的判断而不是教皇的权威.于是各种不同的信仰被认为是合法的了.许多人在要求他们选择天主教还是新教时宣称:"你们双方都见鬼去吧."于是他们背弃这两种信仰而面向自然、观察和实验,以此作为知识的来源.

2. 知识界的新面貌

教会是建立在权威上的,它崇拜Aristotle,并把怀疑定为有罪.教会也蔑弃物质的享受而强调身后灵魂的得救.这些教条与欧

洲人从希腊学来的准则形成鲜明的对照，这些准则是（虽然 Aristotle 没有宣布过）：对大自然的探讨；物质世界的享受；力求身心的完美；研究问题和发表见解的自由；对人类理性的信赖. 教会的权威，对世俗生活的限制，信赖圣经是一切知识的来源并应主宰一切的主张，这些都引起了知识分子们的反感，使他们如饥似渴地接受了新的价值准则. 人们不再对圣经文字上的含义作无休止的考据与争辩来确定是非曲直，而开始面向自然本身.

数学兴趣的复活几乎是随着希腊知识和生活准则的复活一起而来的结果. 到 15 世纪，Plato 的著作被大家所了解后，欧洲人知道了自然界是按照数学方式设计的，并且这个设计是非常和谐优美的内部真理. 自然界是合理的、简单的而且有秩序的，它是按照万古不易的规律行动的. Plato 和 Pythagoras 的著作也强调数是现实的精华，这个学说在 13、14 世纪开始被一些离经叛道的经院派学者们所注意. Plato 主义的复活使这些人所不断深思苦虑的思想和方法得到澄清和结晶. Pythagoras-Plato 强调数量关系作为现实精髓的思想逐渐占据了统治地位. Copernicus, Kepler, Galileo, Descartes, Huygens 和 Newton 实质上在这方面都是 Pythagoras 主义者，并且在他们的著作中确立了这样的原则：科学工作的最终目标是确立定量的数学上的规律.

对于文艺复兴时期的知识分子，数学之所以受到重视尚有另一个理由. 在文艺复兴这样一个时期里，随着新的影响、知识和革命运动席卷欧洲，使人们对中世纪的文化和文明产生怀疑和不信任. 知识分子们要为其知识的建立寻找新的、坚固的基础，而数学则提供了这样一个基础. 在各种哲学系统纷纷瓦解，神学上的信念受人怀疑以及伦理道德变化无常的情况下，数学是唯一被大家公认的真理体系. 数学知识是确定无疑的，它给人们在沼泽地上提供了一个稳妥的立足点，人们又把寻求真理的努力引向数学.

数学家和科学家也从中世纪神学的偏见中得到某种启示，它

反复灌输这样一个观点,所有自然界的现象不仅相互关联而且还按照一个统盘的计划运转:自然界的一切动作都遵循着一个由始因所规定下来的方案.那么,神学中上帝创造宇宙之说又怎么能够同寻找大自然的数学规律并行不悖呢?回答是提出一种新的教条,即:上帝是按数学方式设计了大自然的.换句话说,把上帝推崇为一个至高无上的数学家,这就使寻找大自然的数学规律一事成为一件合法的宗教活动.

这个理论鼓舞了16、17世纪甚至18世纪一些数学家的工作.寻找大自然的数学规律是一项虔诚的工作,它是为了研究上帝的本性和做法以及上帝安排宇宙的方案.文艺复兴时期的自然科学家是神学家,用自然代替圣经作为他们的研究对象.Copernicus, Brahe, Kepler, Galileo, Pascal, Descartes, Newton 和 Leibniz 再三谈到上帝通过他的数学方案给宇宙以和谐.数学知识,因为它本身是宇宙的真理,就像圣经里的每行文字那样神圣不可侵犯,甚至高于圣经中的文字,因为它是明确的、无可非议的知识.Galileo说过:"上帝在自然界的规律中令人赞美地体现出来的并不亚于他在圣经字句中所表现的."对于这点 Leibniz 补充说:"*Cum Deus calculat, fit mundus*(世界是按上帝的计算创造的)."这些人寻找数学规律以宣扬上帝创造工作的崇高和光荣.人不能希望像上帝自己一样清楚地了解那些神圣的计划,但通过谦虚和谨慎,人至少能够近似地了解上帝的心意.

科学家们因为确信上帝在构造宇宙时已经把数学规律放在其中,所以他们坚持寻找自然现象背后的数学规律.每一条自然规律的发现都被认为证明了上帝的智慧而并非研究者的智慧.Kepler在每次获得发现时都对上帝写了颂歌.数学家和科学家们的信仰与态度是文艺复兴时代席卷整个欧洲的更大量文化现象的范例.希腊的著作冲击了非常虔诚的基督教世界,知识界的领导人则生在一个世界而被另一个世界所吸引,他们就把两个世界的教义融

为一体了.

3. 学识的传播

由于某些理由,新的准则的扩散是缓慢的.首先,希腊的著作只有在教会内外王公贵族的朝廷里才能找到,而不是一般的人所能接近的.印刷业大大地帮助了书籍的广泛流传,但效果也是逐渐显示的,因为即使印刷的版本也是很昂贵的.传播知识的问题还由于另外两个因素而变得复杂了.第一,愿意把数学和科学运用于工业、手工业、航海、建筑和其他一些工作项目中去的人大都没有受过教育,上学的人并不是很普遍的.第二个因素则是语言问题.有学问的人——学者、教授和神学家——熟悉拉丁文,也略谙希腊文.但是,艺术家、手艺人和工程师只懂得本地方言——法语、德语和几种意大利语——因此不能从希腊著作的拉丁文译本获得教益.

从16世纪开始,许多希腊的经典著作被人用通俗的语言译出.数学家们自己也插手这些活动.例如,Tartaglia在1543年把Euclid的《原本》由拉丁文译成意大利文.翻译活动一直进行到17世纪,但进展得很慢,因为不少学者对普通人持敌对态度.前者是轻视后者的,他们喜欢用拉丁文,因为他们认为拉丁文的传统地位会使他们的说话有权威.为了抵制这样的人并接近公众从而得到公众的支持,Galileo特意用意大利文写作.Descartes也因为同样的理由而用法文写作,他希望那些只凭天然理性的人能比那些死抱古籍的人更善于鉴定他的著作.

在意大利的一些城市里用来启发公众的另一方法就是建立图书馆.在佛罗伦萨(Florence),由Medici家族资助开设了一些图书馆,几个教皇也在罗马这样做了.部分是为了推广教育,部分是为了给学者们提供一个开会的地方,一些自由派的领导人建立了学

院.在这之中,最有名的是佛罗伦萨的设计学院,它是由 Cosimo Ⅰ de' Medici(1519—1574)在1563年建造的,那儿变成了数学研究的中心.此外还有罗马的山猫学会(Accademia dei Lincei),在1603年建立.这些学院的成员把拉丁文著作译成普通语言,向公众作报告,并通过他们之间的相互交往,扩大和加深了自己的知识.这些学院是以后英、法、意大利和德国建立的一些最有名的、对知识的传播大有作用的科学院的前身.

遗憾的是15、16世纪的大学在这一发展中没有起什么作用,神学统治了大学,学习的目的只是研究神学.在这里知识被看做完全的、终极的东西.所以实验是不需要的,学校外面的新发明是被忽略置之不理的.保守的大学教授们尽其所能地死抱着由13世纪以来经院派学究们所创立的中世纪的学问.大学里诚然也教了算术、几何、天文和音乐,但是天文学是以 Ptolemy 的著作为基础的,而且不进行任何观察.所谓自然哲学则只是研读 Aristotle 的《物理学》.

4. 数学中的人文主义活动

当经院派学者们死抱着中世纪末期的教条时,一批新的人文主义者专心从事着收集、组织并批判地学习希腊和罗马的学说.这些人勤勉地学习,用他们那种整个说来不无问题的巧妙手段来清除书籍中的错误并恢复失散了的材料.他们奴隶般地接受、重复并且无休止地阐释那些他们在古代和中世纪的原稿中发现的东西,甚至从事语言学的研究以确定确切的含义.他们也写很多书,那不过是把古老的著作按经院派的意见重新予以解释.虽然这种活动可能唤起了人们对学习的兴趣,但它也给人们一个错觉,似乎学问仅仅是为了加深和巩固已有的知识.

16世纪人文主义的代表人物是代数学家 Jerome Cardan

(Gerolamo Cardano),他 1501 年生于帕维亚(Pavia).他作为一个无赖和学者的生涯是文艺复兴时期那些怪人的离奇生涯中最不寻常的一个.在他的《我的生平》(*De Vita Propria*)一书中,他讲了他的身世,这本书写于他晚年,在书中,他赞扬同时又贬低了他自己.他说他的父母遗留给他的只是痛苦和受人轻视;他度过了一个悲惨的童年并且他生活的前 40 年是这样的贫困以至他并不认为自己是可怜的,因为如他所说,他穷到已没有什么可以丢失的东西.他是个脾气暴躁的人,热心追求色欲,报复心重,好争吵、自负,缺少幽默感,不知后悔的而且故意用恶语伤人.虽然他并不热衷于赌博,但他在 25 年间每天都要掷骰子并且下了 40 年的棋,作为摆脱贫困、慢性病、被人诬告和所受不公正待遇的手段.在他死后,1663 年出版的《赌博之书》(*Liber de Zudo Aleae*)中,他说一个人应该用赌博赢钱来补偿失去的时间,还教人如何通过欺骗来保证获得这种补偿.

在他把青春贡献给数学、物理、赌博之后,他从帕维亚大学医科毕业了.他开了业,后来又在米兰和波洛尼亚(Bologna)教书,成为闻名全欧的医生.他还作为数学教授在几个意大利大学中任教.在 1570 年他因给耶稣基督算命的异端罪行被拘入狱.奇怪的是,教皇后来却雇用他当占星术士.在他 75 岁时,1576 年死前不久,他因有了名誉、一个外孙、财产、学问、有权势的朋友、笃信上帝和有十四只好的牙齿而自诩.

他的作品包括数学、天文学、占星术、医学和其他许多学科,其中还有道德格言(用来弥补他在纸牌方面的欺骗行为).尽管Cardan在科学上训练有素,但他毕竟是他那时代的一个人物,他坚信占星术、梦、符咒、手相术、吉凶之兆和迷信,并且写了很多这方面的著作.对于这些玄妙的玩艺儿他会找出理由来辩护,这些东西,他认为像航海和医学一样可靠.他也写了关于宇宙间各种居民的巨著,即关于天使、恶魔和各种各样的智慧人物,在书中还包含

了那些无疑是从他父亲的卓越朋友 Leonardo da Vinci 那里偷来的材料. 现存他的著述材料约有 7 000 页.

自然哲学家企图把一切现实统一在巨著中的混合主义趋势,也表现在 Cardan 的数学著作上. 他不加批判地把古代、中世纪和当代理论方面和经验性的已有数学知识不辞其劳地拼成百科全书式的堆集. 他既醉心于那不可思议的和神秘的数论,又爱好代数思维,在这方面他比同时代的人先进. 除了是个著名的医生之外,Cardan 以他对数学的浓厚兴趣高出 16 世纪其他一些博学的自然哲学家. 但数学对他来说不是方法,而是一种特殊的不可思议的才能,并且又是一种满载激情的思维.

一个名气较小的人文主义者 Ignazio Danti (1537—1586),是波洛尼亚的一个数学教授,他写了一本通俗数学,把所有纯数学和应用数学搞成一串简要的表格.《缩减为表的数学科学》(*Le scienze matematiche ridotte in tavole*,波洛尼亚,1577)代表了那时代的分类精神;它为 16 世纪后期学校的数学教学指引了道路. Danti 是那些提倡把应用数学当作一个学术分支的少数数学家和天文学家之一(正如后来的 Galileo 那样). 书中所涉及的题材是值得注意的,因为它们表明当时的数学包括了算术、几何、音乐、占星术、仪器测算(特别是体积的测量)、气象学、折射光学、地理学、水文学、力学、建筑学、军事建筑学、绘画和雕塑. 前四个科目代表纯粹数学,其余则是应用数学.

有代表性的人文主义者的努力,明显地表现于诸如 Guidobaldo del Monte (1545—1607), Bernadino Baldi (1553—1617)和 Giovanni Battista Benedetti (1530—1590)等有学识的数学家对力学的研究上. 这些人没有掌握 Archimedes 的定理,Pappus 的工作对他们来说更有意义和吸引力,因为 Pappus 详述了早期希腊古典作品中的证明. 他们在处理典型问题时和经院派学究相差甚微,他们把自己限制于改正个别的结论和定理. 他们接受了很多错误

的东西,此外,他们没有能力将活的重要的想法和已经僵死的东西区分开来. 他们的人文主义的训练使他们倾向于把所有新和旧的知识都纳入 Euclid 的推理中,不管这与实验是否一致. 因此他们的批判能力减弱了,而他们自己的经验失去了价值. 他们的试验不含神奇的成分,他们的博学实际上主要是人文主义的,但是从原则和实质上来说,他们是最末一批中世纪学者而不是新的思想方法和研究方法的创造者. 意大利的数学家和物理学家 Francesco Maurolycus (1494—1575), Benedetti, Baldi 和 del Monte, 这些 Galileo 后来慷慨地称之为老师的人,他们在某些方面也为 Galileo 开辟了道路,但是因为他们倚靠着古老的思想方法,所以没有为解决什么数学、物理问题作出别开生面的贡献.

5. 要求科学改革的呼声

像过去各个世纪一样,数学从物理科学那里取得了主要的启示和课题. 但是,要想科学得到蓬勃的发展,欧洲人必须摆脱对权威的俯首听命. 不少人体会到科学的方法论必须要改变,他们倡议真正摆脱经院哲学和无批判地接受希腊知识.

最早明确地提出要以新的态度对待知识的人之一,是有名的文艺复兴时代艺术家 Leonardo da Vinci (1452—1519). 他在体力上和精神上有不可思议的天资,使他成为杰出的语言学家、植物学家、动物学家、解剖学家、地质学家、音乐家、雕塑家、绘画家、建筑学家、发明家和工程师. Leonardo 郑重宣布他不相信经院派学者奉为金科玉律的知识. 他对这些读书人是这样描写的:他们高傲自大,卖弄学问,并非以自己的钻研所得而只是以背诵别人的成果来炫耀自己. 他们只是别人学问的朗诵者和吹鼓手. 他也批判了书呆子的概念、方法和目标,因为他们不同现实世界打交道,他夸耀自己不是文学家而是能够在经验中学习做更多

更好的工作的人. 的确,他学了很多的数学,一些力学的法则以及杠杆的平衡定律. 他对鸟的飞行和水的流动,岩石的构造和人体的结构都做了引人注目的阐述. 他研究光和颜色,植物和动物. 他有一句名言:"如果你不立足于大自然这个很好的基础,你的劳动将无裨于人,无益于己."他说,经验永远是可靠的,虽然我们的判断会有错. "在以数学为依据的科学的研究中,如果有些人不直接向自然界请教而是向书本的作者请教,那么,他就不是自然界的儿子而只是孙子了."

Leonardo 相信实践和理论的结合. 他说:"一个人如喜欢没有理论的实践,他就像水手上船而没有舵和罗盘,永远不知道驶向何方."另一方面,他说,理论离开了实践是无法生存下去的,它产生之后便会消亡. "理论好比统帅,实践则是战士."他希望用理论指导实践.

然而,Leonardo 并没有掌握真正的科学方法. 实际上,他没有方法论,也没有以任何哲学作为基础. 他的工作是大自然研究者的实践,是受美学的推动和启发而来的,但在其他方面没有指导. 他有兴趣于寻找数量关系,从这一点说他是现代科学的先驱者. 但是,他不像 Galileo 那样自觉追求定量规律. 他有关数学和科学的作品虽然被 16 世纪的人如 Cardan, Baldi, Tartaglia 和 Benedetti 等所运用,但对 Galileo, Descartes, Stevin, Roberval 却没有产生什么作用.

Leonardo 对数学的看法以及他对数学的实际知识和用法是他那个时代所独有的,而且反映了那个时代的精神和方法. 读 Leonardo的著作时,人们发现有很多论述暗示他是一个有学问的数学家,也是一个有职业数学家的工作水平的渊博的哲学家. 例如,他说:"一个人如怀疑数学的极端可靠性就是陷入混乱,他永远不能平息诡辩科学中只会导致不断空谈的争辩……因为人们的探讨不能称为是科学的,除非通过数学上的说明和论证."为了超越

观察和经验而进一步探索,对他来说只有一条可靠的路能避开幻景和错觉——数学.只有紧紧地依靠数学,才能穿透那不可捉摸的思想迷魂阵.大自然按照数学规律运转,自然界的力和动作必须通过数量的研究来探讨.这些必须通过经验来获得的数学规律是研究自然的目的.人们无疑是根据这些话,才往往把 Leonardo 看成一个比他实际更为伟大的数学家.但当你审阅 Leonardo 的笔记本时,你会发现他的数学知识是多么少,而他处理问题的方法完全是经验的、直观的.

在倡导科学方法改革中更有影响的是 Francis Bacon (1561—1626). Bacon 寻找在智慧、道德、政治、物理诸方面获得真理的方法.虽然 16 世纪已经在物理科学的方法上发生变革,但广大公众甚至很多有学问的人也没有意识到这点. Bacon 的杰出口才、广博的知识、开阔的眼界以及对未来大胆的设想吸引人们去注视正在发生的事以及注意他所描写的“伟大复兴”而不是草草一看.他阐述的鲜明格言引起了人们的注意.最后当人们注意到科学正在开始作出 Bacon 所倡导的进步时,他们就推崇他为他所觉察到的革命的提倡者和领导者.实际上,他比他的同时代人更加理解正在发生的变革.

他哲学上的突出特点是确信和强调宣布科学发展上的新时代.在 1605 年,他发表了他的论文《崇学篇》(*Advancement of Learning*);接着在 1620 年发表了《新方法》(*Novum Organum*).在后一本书中他说得更明确了,他指出以前对自然界的研究软弱无力而所得结果微小.他说,科学过去只服务于医学和数学,或者被用来训练不成熟的年轻人.以后的进步在于方法的改变.所有的知识是从观察开始的.然后,他作出了非凡的贡献,就是坚持“逐步的和继续不断的归纳”以代替草率的一般结论. Bacon 说:“寻找和发现真理有两条路,也只有两条路.其一,通过感觉和特例飞跃到普遍的公理,然后通过这些原则及一劳永逸的真理发明和判断一

些派生的公理. 另一种方法是从感觉和特例收集公理,不断地逐步上升,这样最后到达更普遍的公理;这后一种方法是真实的,但尚未有人试用过."他的所谓"公理"是指通过归纳所得的一般性的命题,它适宜于用作演绎和推理的起点.

Bacon 攻击对自然现象学究式的探讨,说道:"由推辩发现的公理是不能用来得到新的发现的;因为自然界比推辩本身细致微妙许多倍……在人心目中第一个设想的根本错误是不会被后来优越的药物和条件治好的……我们必须引导人们去研究个别的现实,而人们自己则必须在一段时间内把自己的概念放下而使自己熟悉事实."

Bacon 没有认识到科学必须通过测量才能得到定量的规律. 也就是说,他没有看到必须做何种逐步的研究以及按什么样的次序,他也没有意识到一切发明必须具备的创造才华. 实际上,他说"天才的敏锐和力量是不足道的,所有天才和智慧都在同一水平上".

Bacon 虽然自己没有创造但却发出了关于实验方法的宣言. 他攻击先验的哲学体系、思维的创造和无聊的炫耀学问. 他说,科学工作不应该卷入寻求最终原因的迷阵中,这是属于哲学的事. 逻辑学和修辞学仅仅在组织我们已知的事物时才有用. 让我们接近大自然并面对着它. 我们不要搞杂乱的、偶然的试验,要让它成为系统的、彻底的和有一定方向的. 数学应该是物理学的仆人. 总之 Bacon 对后代人提出了一个吸引人的纲领.

另外一个学说和纲领也是和 Francis Bacon 有关的,虽然这是他以前的人提出的. 总的来说,希腊人满足于从数学和科学获得的对大自然规律的了解. 少数中世纪早期的科学家和学者研究大自然主要为了确定现象的最终原因和归宿. 但是,更实际的阿拉伯人研究自然是为了征服自然. 他们的占星术家、预言家和炼金术士寻找长生不老药,点金石,转变无用金属为有用金属的方法以及动物

和植物的奇异特性,以求长生,治疗他们的疾病和发财致富. 当这些假科学在中世纪盛极一时, 一些更有理性的经院派学者——例如 Robert Grosseteste 和 Roger Bacon——开始追求同一目标,但通过更妥当的科学研究方法. 由于 Francis Bacon 的劝告,掌握大自然变成了一种确定的学说和一个贯穿一切的动力.

Bacon 希望致知识于应用. 他想以掌握自然来服务并造福于人类,而不是为博得学者的高兴和快乐. 如他所说,科学应上升为公理然后又下降到应用. 在《新大西洲》(*The New Atlantis*)中 Bacon描写了一个学者组成的社会,它给他们提供了地方和装备去探索有用的知识. 他预见到科学将会供给人们以"无尽的商品"、"赋予人类生活以发明和财富,并提供便利与舒适."他说,这是科学的真正的合理的目标.

Descartes 在他的《方法论讲话》(*Discourse on Method*)中响应了这个思想:

> 获得对生活非常有用的知识是可能的,和学校里所教的纯思辨哲学不同,我们能够发现一个实用的哲学. 通过这种哲学,当我们像了解手工艺人的各种工艺一样地清楚了解了火、水、空气、恒星、宇宙和所有围绕着我们的物体间的作用和力后,我们同样也能够把这些规律运用于它所适宜的各种用途,使得我们自己成为大自然的主人和占有者.

化学家 Robert Boyle 说:"人类的福利能够通过自然科学家对各行各业的洞察力提高很多."

Bacon 和 Descartes 所提出的挑战很快地被接受了,科学家们乐观地投入到了解自然征服自然的工作. 这两种动机至今仍然是一种主要推动力. 从 17 世纪以来科学和工程间的相互联系确实飞快地增长起来.

这一纲领甚至也被政府认真采纳了.在1666年由Colbert建立的法兰西科学院,建于1662年的伦敦皇家学会都是为了培育"这种将来能有用的知识"和促使科学变得"有趣同时有用"的.

6. 经验主义的兴起

当科学的改革者主张转向自然并要求实验事实的时候,面向实际的手工业者、工程师和画家确实在获得扎实的经验事实.运用一般人天然的直观的处理方法,寻找的不是最终的真意而仅仅是他们在工作中遇到的现象的有效解释,这些技工们得到的知识嘲弄了那些博学的学究乃至人文主义者所提出的繁复辩解,在语汇学上的长篇推敲,纠缠不清的逻辑推理,以及对罗马和希腊权威的浮夸引证.由于文艺复兴时代的欧洲在技术上的成就超越并多于其他文明社会的成就,所以他们在工作中所得到的经验知识是巨大的.

手艺人、工程师和艺术家必须认真对付真实而行之有效的力学规律和材料的特性,并且用这样的方法获得的对物理世界的认识也是令人惊异的.那些眼镜制造者虽没有发现一个光学定理,却发明了望远镜和显微镜.技术人员由于注意现象而总结出规律来.他们以有分寸的、渐进的步骤(那是关于科学方法的任何抽象观点所不能启示的)获得的真理,就像大胆的猜测所敢于设想的那样深奥、广泛.理论上的改革者是大胆、自信、急促、有雄心和蔑视古老的东西,而实际的改革者则是小心、谦虚、缓慢并善于吸取所有的知识,不管是由传统而来还是由观察而来的.他们工作着而不是空想,研究细节而不是一般的规则,他们对科学添砖加瓦而不是给予定义或是建议如何来得到它.在物理、塑造工艺和一般技术领域中,不是理论上的思考而是经验成了知识的新来源.

和手工艺者的纯经验主义结合,或者受到他们所提出的问题

的启示,系统的观察和实验逐步地产生了,这主要是由一些较有学识的人们进行的. Aristotle 和 Galen 等希腊人曾经作了大量的观察,并且讨论了在观察基础上能够作出什么样的归纳,但是不能说希腊人曾经有过一个实验科学. 文艺复兴时代的科学活动在一定的程度上标志着现代宏大的科学事业的开始. 文艺复兴时代最可观的一批实验工作者是由 Andreas Vesalius (1514—1564)领导的生物学家团体,由 Ulysses Aldrovandi (1522—1605)领导的动物学家团体以及由 Andrea Cesalpino (1519—1603)领导的植物学家团体.

在物理科学方面,William Gilbert (1540—1603)在磁学方面的实验工作是最最杰出的. 他在著名的《磁学》(*De Magnete*, 1600)一书中明确地指出,我们必须从实验出发. 虽然他尊敬古人,因为不少智慧是从他们那里得来的,但他轻视那些专门把别人的话当作权威来引证而对这些话却不加实验考核的人. 他的一连串仔细进行的、周到而简单的实验在实验方法中是经典的. 他附带指出,Cardan 在他的《论事物的多样性》(*De Rerum Varietate*)中描写了一个永动机,并评注说:"上帝诅咒所有那些假的、偷来的、歪曲的工作. 这些工作只是把学生的思想弄乱."

我们曾经指出,各种各样的实践兴趣导致对自然界探讨的大发展以及随后对系统化实验的推动. 和这些实际工作同时,大多数与之独立但并非与之无关,人们追求一个科学上更大的目标——了解自然界. 前章所述晚期经院派学者们在落体方面的工作在 16 世纪继续有人进行. 他们主要的目标是获得运动的基本规律. 有关抛射体运动的工作,经常被说成是为了满足实际需要,但在更大程度上是由对力学所产生的广泛科学兴趣而引起的. Copernicus 和 Kepler 在天文学方面的工作(第 12 章第 5 节)肯定是由于想要改进天文理论而产生的. 甚至文艺复兴时代的艺术家也企图透过现象去了解现实的本质.

幸运的是技术人员和科学家开始看到共同的兴趣，并欣赏从对方得到的帮助. 15、16世纪的技术人员，即早期的工程师，他们依赖熟练的手工操作、机械的技巧和单纯的发明能力，很少关心原理，现在开始意识到他们能从理论中获得对实践的帮助. 在科学家方面也开始意识到手工艺者所获得关于自然界的知识是正确理论必须加以吸收的，并且他们能从手工艺者的工作中获得关于自己研究工作的启示. Galileo在他的《关于两门新科学的对话》(*Dialogues Concerning Two New Sciences*，即材料力学和物体运动理论这两门科学)的头一段中，承认对他的研究工作的这种启发，"你们威尼斯人在著名的兵工厂里持续的活动，特别是包含力学的那部分工作，对好学的人提出了一个广阔的研究领域，因为在这个部门中所有类型的机器和仪器在被很多手工艺者不断制造出来. 在他们中间一定有人因为继承经验并利用自己的观察，在解释问题时变得高度的熟练和非常的聪明."

实践和纯粹科学的兴趣在17世纪被融合了. 当大的原则和问题由于经验的需要而出现，希腊的数学知识被科学家们完全采用的时候，他们才能够更有效地着手进行纯科学的工作. 在没有丢失了解宇宙这一目标的同时，科学家也愿意设法帮助实践. 结果是在科学活动中出现了一个规模空前的发展，加上影响深远的、重大的技术改进，在工业革命中达到了顶峰.

对我们来说，现代科学开端之所以非凡重要，当然在于它为数学的重大发展铺平了道路. 它直接的效果是和具体问题相联系. 因为文艺复兴时代的数学家们为共和国和王子们工作，并和建筑师、手艺工人相结合——Maurolycus是墨西拿(Messina)城的一个工程师，Baldi是为Urbino公爵服务的，Benedetti是Savoy公爵的总工程师，还有Galileo是Tuscany大公爵的宫廷数学家——所以他们采纳了那些实践者的观察和经验. 到Galileo的时候，在Nicolò Tartaglia (1506—1557)的工作中能够大量看到科技人员

和建筑师的冲击和影响. Tartaglia 是当代科学上自修出来的一个天才. 他完成了从实践数学家到博学的数学家之间的过渡. 他有辨别地从经验知识中挑选出有用的题目和有用的结果. 他的独特之处在于有这些成就并在于他完全独立于那种不可思议的影响之外,而这影响在他的对手 Cardan 的工作中是典型的. Tartaglia 的地位在 Leonardo 和 Galileo 之间——不仅是按年代,也是因为他在动力学问题的数学工作上把这门学问提升为一种新的科学并且对 Galileo 的先驱者们很有影响.

长远的效果是现代数学在 Plato“数学是现实的核心”的学说指引下,几乎完全是由具体的科学问题产生的. 在研究自然并且得到包括观察和实验结果的规律这个新的方向的引导下,数学从哲学中分出来而且和物理科学联系在一起. 对数学说来,进一步的后果是爆发了一个空前活跃和富有创造性的时期. 这在数学史上是最最多产的时期.

参 考 书 目

Ball, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, Chaps. 12～13.

Burtt, E. A.: *The Metaphysical Foundations of Modern Physical Science*, Routledge and Kegan Paul, 1932.

Butterfield, Herbert: *The Origins of Modern Science*, Macmillan, 1951, pp. 1～87.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, 2nd ed., Macmillan, 1919, pp. 128～145.

Cardano, Gerolamo: *Opera Omnia*, Johnson Reprint Corp., 1964.

Cardano, Gerolamo: *The Book of My Life*, Dover (reprint), 1962.

Cardano, Gerolamo: *The Book on Games of Chance*, Holt, Rinehart and Winston, 1961.

Clagett, Marshall, ed.: *Critical Problems in the History of Science*, University of Wisconsin Press, 1959, pp. 3～196.

Crombie, A. C.: *Augustine to Galileo*, Falcon Press, 1952, Chaps. 5～6.

Crombie, A. C.: *Robert Grosseteste and the Origins of Experimental Science*, Oxford University Press, 1953, Chap. 11.

Dampier-Whetham, W. C. D.: *A History of Science*, Cambridge University Press, 1929, Chap. 3.

Farrington, B.: *Francis Bacon*, Henry Schuman, 1949.

Mason, S. F.: *A History of the Sciences*, Routledge and Kegan Paul, 1953, Chaps. 13, 16, 19 and 20.

Ore, O.: *Cardano: The Gambling Scholar*, Princeton University Press, 1953.

Randall, John H., Jr.: *The Making of the Modern Mind*, Houghton Mifflin, 1940, Chaps. 6～9.

Russell, Bertrand: *A History of Western Philosophy*, Simon and Schuster, 1945, pp. 491～557.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, pp. 242～265, and Chap. 8.

Smith, Preserved: *A History of Modern Culture*, Holt, Rinehart and Winston, 1940, Vol. 1, Chaps. 5～6.

Strong, Edward W.: *Procedures and Metaphysics*, University of California Press, 1936; reprinted by Georg Olms, 1966, pp. 1～134.

Taton, René, ed.: *The Beginnings of Modern Science*, Basic Books, 1964, pp. 3～51, pp. 82～177.

Vallentin, Antonina: *Leonardo da Vinci*, Viking Press, 1938.

White, Andrew D.: *A History of the Warfare of Science with Theology*, George Braziller (reprint), 1955.

第 12 章

文艺复兴时期数学的贡献

> 对外部世界进行研究的主要目的在于发现上帝赋予它的合理次序与和谐,而这些是上帝以数学语言透露给我们的.
>
> J. Kepler

1. 透　视　法

虽然文艺复兴时期人们只是模糊地理解了希腊人工作的远景、价值和目标,但是他们确曾在数学上迈出了有创造性的几步,并且他们在另一些领域里取得了进展,为我们这个学科在 17 世纪所达到的惊人的高潮铺平了道路.

艺术家们最先表示出对自然界恢复了兴趣,最先认真地运用希腊的学说:"数学是自然界真实的本质."这些艺术家们是自学的并且是通过实践来学习的.希腊知识的片断渗入给他们,但总的说来,他们对希腊的思想和智慧是感觉了,却很难说是理解了.在某种程度上这倒是有利的,因为未受正规学校教育,他们就不受那些教条的约束.另外,他们享有表达思想的自由,因为他们的工作被认为是"无害的".

文艺复兴时期的艺术家们从他们的职业来说是无所不知的,他们受雇于王公贵族去执行各种任务,从创作图画到设计防御工事、运河、桥梁、军事器械、宫殿、公共建筑和教堂.所以他们必须学习数学、物理、建筑学、工程学、石工、金工、解剖学、木工、光学、静力学和水力学.他们进行了手工操作但也解决了最抽象的问题.至

少,在15世纪他们是最好的数学物理学家.

要去评价他们对几何学的贡献,我们必须注意到他们在绘画方面的新目标.在中世纪颂扬上帝和为圣经插图是绘画的目的.金色的背景表明所描绘的人和物存在于天堂之中.对图形的要求是象征性超过现实性.画家创作的形象是不鲜明的、不自然的并且没有离开标准格式.到文艺复兴时期,描绘现实世界成为绘画的目标.所以艺术家们着手去研究大自然,为的是在画布上忠实地再现它,于是面临一个数学问题,就是把三维的现实世界绘制到二维的画布上.

Filippo Brunelleschi (1377—1446)是第一个认真地研究并使用数学的艺术家.意大利的艺术家兼传记作者 Giorgio Vasari (1511—1574)说,Brunelleschi 对数学的兴趣引导他去研究透视法,并说他从事绘画正是为了运用几何.他读了 Euclid, Hipparchus 和 Vitello 在数学和光学方面的作品,并且向佛罗伦萨的数学家 Paolo del Pozzo Toscanelli (1397—1482)学习数学.画家 Paolo Uccello (1397—1475)和 Masaccio (1401—1428)也探索了实际透视法的数学原理.

数学透视法方面的天才是 Leone Battista Alberti (1404—1472).他在《论绘画》(*Della pittura*, 1435)一书中介绍了他的想法.这书1511年出版,它的性质虽然全是数学,其中也包含了一些光学方面的工作.他的另一本重要的数学著作是《数学游戏》(*Ludi mathematici*, 1450),这本书里有机械、测量、计时和炮术方面的应用.Alberti 所设想的原理成了他艺术上的继承人所采用并加以完善的透视法数学体系的基础.虽然他非常清楚地知道在正常的视觉下,两只眼睛从稍有不同的位置看同一景色,只有通过大脑调和这两个映像才能觉察深度,但是他建议画一只眼睛所见到的景物.他的计划是通过光线的明暗和随距离而使颜色变淡的方法来加强深度的感觉.他的基本原理可以解释如下:在眼睛和景物

之间他插进一张直立的玻璃屏板. 然后他设想光线从眼睛或观测点出发射到景物本身的每一个点上. 他把这些线叫做光束棱锥或投影线. 他设想在这些线穿过玻璃屏板(画面)之处都标出一些点子,他把这点集叫做一个截景. 重要的事实是截景给眼睛的印象和景物本身一样,因为从截景发出的光线和从原景物发出的一样. 所以作画逼真的问题就是在玻璃屏板上(或者实际上是在画布上)作出一个真正的截景. 当然这个截景依赖于眼睛的位置和屏板的位置. 这意思就是对同一景物可以绘出不同的画.

因为画家并不透过画布来画出截景,他就必须有一些建立在数学理论上的基本法则,以便告诉他如何去画. Alberti 在他的《论绘画》中提供了一些正确的法则[1],但是没有给出全部细节. 他想要使他的书成为一本概要,通过与同辈画家的讨论来加以补充,并对他的简略表示歉意. 他试图把内容讲得具体而较少考虑形式和严密性,所以给出了原理和解释而没有证明.

除了引进投影线和截景的概念之外,Alberti 还提出了一个很重要的问题. 如果在眼睛和景物之间插进两张玻璃屏板,则在它们上面的截景将是不同的. 进一步,如果眼睛从两个不同的位置看同一景物,而在每一种情形下都插一张玻璃屏板在眼睛和景物之间,那么截景也将是不同的. 可是所有这些截景都传达原来的形象,所以它们必定有某种共性. 他提的问题就是:任意两个这种截景之间有什么数学关系,或它们有什么共同的数学性质? 这问题是射影几何发展的出发点.

虽然很多艺术家都在数学透视法方面写了书并且赞同Alberti的艺术哲学,但我们在此可以只提他们中主要的一两个. Leonardo 认为一幅画必须是实体的精确的再现,坚信数学的透视

---

① 关于其中的一些法则以及根据这些法则所作的画,请参看作者的另一本书《西方文化中的数学》(*Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, 1953).

法容许做到这一点.它就是"绘画的舵轮和准绳",涉及应用光学和几何学.对他来说,绘画是一种科学,因为它揭示了自然界的真实性;由此,绘画比诗歌、音乐和建筑更为优越. Leonardo 关于透视法的著作包含在他的书《绘画专论》(*Trattato della pittura*, 1651)中,这书由某个不知名的作者所编辑,这个作者采用了 Leonardo 有关笔记中最有价值的材料.

把透视法的数学原理以相当完整的形式陈述出来的画家是 Piero della Francesca (约 1410—1492).他还认为透视法是绘画的科学并且企图通过数学来修改和推广根据经验所得的知识.他的主要著作《透视画法论》(*De prospettiva pingendi*, 1482—1487)推进了 Alberti 的投影线和截景的思想.一般地说,他给出的方法对艺术家是有用的,他的说明使用了纸条、木头等等.就像 Alberti 一样,他给出了直观易懂的定义来帮助艺术家们.然后他提出定理,并且通过作图或作一个比例的计算来"论证"这些定理.他是杰出的画家兼数学家,也是科学的艺术家,他的同辈们也都这样认为.他还是那个时代最好的几何学家.

可是,文艺复兴时期全体艺术家中最好的数学家要算是德国人 Albrecht Dürer (1471—1528).他的《圆规直尺测量法》(*Underweysung der Messung mid dem Zyrkel und Rychtscheyd*, 1525)主要是几何方面的书,但它也想把 Dürer 在意大利所得到的知识介绍给德国,特别是想用透视法去帮助艺术家们.他的书谈论实际比理论多,很有影响.

从 16 世纪起透视法的理论就在绘画学校里按照前面所提到的大师们写下的原理讲授.不过,他们在透视法方面的论文总的说来只是些格言、法则和硬性规定的方法,缺乏一个坚实的数学基础. 1500 年到 1600 年这段时期的艺术家和后来的数学家把这门学科放在一个令人满意的演绎基础上,使它从半经验的艺术成为真正的科学.透视法方面的权威性著作是很久之后才由 18 世纪的

数学家 Brook Taylor 和 J. H. Lambert 写出来的.

2. 几何本身

15、16 世纪除透视法外,几何学的发展没有给人深刻的印象. Dürer, Leonardo 和 Luca Pacioli (约 1445—约 1514)(他是一个意大利的修士,Piero della Francesca 的学生,Leonardo 的朋友和教师)讨论的一个几何题目是作圆的内接正多边形. 这些人试图按阿拉伯人 Abû'l Wefâ 曾考虑过的限制用直尺和开口固定的圆规来完成作图,但他们只是给出了近似的方法.

画正五边形是一个很受注意的问题,因为它是在筑城设计中提出来的. 在《原本》四卷命题 11 中 Euclid 曾经给出一个画法,但是没有限制用开口固定的圆规,Tartaglia, Ferrari, Cardan, del Monte, Benedetti 和另外很多 16 世纪的数学家探讨了按照这种限制给出一个精确画法的问题. 后来 Benedetti 扩大了这个问题,寻找用直尺和开口固定的圆规来解 Euclid 的所有作图问题. 一般的问题是由丹麦人 George Mohr (1640—1697)在他的《奇妙的欧氏纲要》(*Compendium Euclidis Curiosi*, 1673)一书中解决的.

Mohr 在他的 *Euclides Danicus*(1672)一书中还指出,凡能用直尺和圆规作的图也可以只用一个圆规来完成. 当然,没有直尺就不能画出连结两点的直线,但是给定了这两点就可以画出这直线和圆的交点,并且给定了两对点就可以画出由两对点所决定的两条直线的交点. Lorenzo Mascheroni (1750—1800)重新发现只用一个圆规就足以完成 Euclid 作图这一事实并且发表在他的《圆周几何》(*La geometria del compasso*, 1797)一书中.

求物体的重心是希腊人另一个感兴趣的问题. 这问题到文艺复兴时期又被几何学家们提出来了. 例如,Leonardo 对求等腰梯形的重心给出了一个正确的方法和一个不正确的方法. 然后他不

加证明地给出了四面体的重心的位置,就是,重心在底面三角形的重心到对顶点的连线上四分之一的地方.

两个新颖的几何思想出现在 Dürer 的一些次要的著作里. 第一个是空间曲线. 他从空间螺旋线出发,并考虑这些曲线在平面上的投影. 投影是各种各样的平面螺旋线,Dürer 指出如何去画它们. 他还介绍了外摆线,这是一个动圆在一个定圆外滚动时动圆上一点的轨迹. 第二个思想是考虑曲线和人影在两个或三个相互垂直的平面上的正交投影. 这个想法 Dürer 只是接触了一下,后来到18世纪时由 Gaspard Monge 发展为画法几何.

Leonardo, Piero, Pacioli 和 Dürer 在纯粹几何方面的工作从其有无新结果的观点来看的确是不重要的. 它的主要价值是广泛地传播了某些几何知识,这些知识用希腊标准看来是粗浅的. Dürer 的《圆规直尺测量法》的第四部分与 Piero 的《论规则形体》(*De Corporibus Regularibus*, 1487)和 Pacioli 的《神妙的比例》(*De Divina Proportione*, 1509)一起,重新引起人们对立体几何学(立体形的量法)的兴趣. 立体几何学在 Kepler 时代繁荣起来.

另一个几何的活动是制作地图,它刺激了进一步地研究几何. 地形勘查揭露出现有地图的不妥当,同时揭开了新的地理知识. 地图的制作和印刷开始于15世纪后半叶,以安特卫普和阿姆斯特丹为中心.

制作地图的问题是从下述事实提出来的:一个球不能裂开展平而不畸变. 还有,方向(角)或面积,或两者都会发生畸变. 制作地图的最有意义的新方法是 Gerhard Kremer 提出的,他也叫 Mercator (1512—1594),他把终身贡献给这门科学. 1569年他作出了一幅地图,用了著名的 Mercator 投影. 在这张图上纬线和经线是直线. 经线是等距离的,但是纬线的间隔是递增的. 递增的目的是去保持经度1′和纬度1′的长的比值. 在地球上纬度1′的变化等于6 087英尺;而经度1′的变化仅在赤道上是6 087英尺. 例如,在纬

度 20°时,经度改变 1′是 5 722 英尺,得到比值

$$\frac{经度变\ 1'}{纬度变\ 1'}=\frac{5\ 722}{6\ 087}.$$

Mercator 的直线地图上经线是等距离的,每一分的变化是 6 087 英尺. 为了保持上面那个实际上的比值,当纬度 L 递增时他令纬线间的距离按倍数 $1/\cos L$ 递增. 他的地图上,在纬度 20°的地方纬度每变化 1′,纬线的距离是 6 087(1/cos 20°),也就是 6 450 英尺. 这样在纬度 20°处

$$\frac{经度变\ 1'}{纬度变\ 1'}=\frac{6\ 087}{6\ 450},$$

而这个比值和实际上的比值 $\frac{5\ 722}{6\ 087}$ 相等.

Mercator 地图有几个优点. 只是在这种投影之下地图上相互两点的罗盘方位才是正确的. 于是球面上罗盘方位是常数的线(即所谓斜驶线,它与子午线有相同的交角)成为地图上的一条直线. 距离和面积不保持;事实上,在两极的周围地图畸变得很厉害. 但是,因为方向是保持的,所以在一点处的两个方向之间的夹角是保持的,从而这个地图被称为是保形的.

虽然 16 世纪制作地图的工作中没有出现很多新的数学思想,但是后来这个问题被数学家们接了过去,并引导出微分几何中的工作.

3. 代　数

直到 Cardan 的《大衍术》(*Ars Magna*, 1545)出现(我们将在下一章里讨论),文艺复兴时期代数一直没有什么发展. 但是,Pacioli的工作是值得注意的. 就像他同时期的很多其他人一样,他认为数学是最广的有系统的学问,并且应用于所有人的实际生活和精神生活中. 他还体会到理论知识对实际工作的好处. 他告诉数

学家和技术人员,理论必须是主导.就像Cardan一样,他也属于人文主义者.Pacioli的主要出版物是《总论算术、几何、比例和比例性》(*Summa de Arithmetica*, *Geometria*, *Proportions et Proportionalita*, 1494).《总论》是一本当代数学知识的概要并且是这个时代的代表,因为它把数学和很多实际应用联系起来.

这本书的内容包含了印度-阿拉伯的数字符号(这些符号已在欧洲使用)、商业算术,包括簿记和当时的代数,Euclid《原本》的一个蹩脚的概括,还有一些从Ptolemy那里抄来的三角学.应用比例概念去揭露自然界的各个方面和宇宙本身是一个大的课题.Pacioli把比例叫做"母亲"和"皇后",并且把它应用于人体各部分的尺寸,应用于透视,甚至应用于混合颜料.他的代数是修辞性的,他追随Leonardo和阿拉伯人把未知数叫做那个"东西".Pacioli把未知数的平方叫*census*,有时他缩写成*ce*或Z;未知数的立方叫*cuba*,有时用*cu*或C表示.其他文字的缩写如p表示plus,*æ*表示*æqualis*也用到了.他所写的方程中,系数总是常数,并把各项放在使系数为正的一边.虽然偶尔要减去一项,例如会出现$-3x$,但纯负数是不用的,方程也只给正根.他用代数去计算几何量,如同我们用比例去求相似三角形边长的关系或去求一个未知的长度,不过他的用法常比这还要复杂.他认为解方程$x^3+mx=n$和$x^3+n=mx$(我们用了现代的符号)就像化圆为方的作图题一样是不可能的,他用这条意见结束了他的书.

虽然在《总论》里没有什么是独创的,但是这书和他的《神妙的比例》(*De Divina Proportione*)都是有价值的,因为它们包含的内容比在大学里教的多很多.Pacioli是已有学术著作同艺术家与技术人员所获得的知识之间的媒介.他试图去帮助艺术家与技术人员学习和使用数学.然而《总论》这书对1200年到1500年之间算术和代数的发展只是一个很有意义的数学注解,因为它出版在1494年,但并不比比萨(Pisa)的Leonardo 1202年的《算经》

(*Liber Abaci*)内容更多. 事实上,《总论》中的算术和代数是根据 Leonardo 的书而写的.

4. 三　角

1450 年以前三角主要是球面三角(第 5 章第 6 节);测量学还继续用罗马的几何方法. 虽然比萨的 Leonardo 在他的《几何实习》(*Practica Geometriae*, 1220)里就曾经倡导平面三角的方法,差不多到 1450 年左右平面三角学在测量中才变得重要起来.

15 世纪末叶和 16 世纪早期由德国人完成了三角学中的新方法,通常他们在意大利留学然后回到他们的祖国. 当德国开始兴旺时,北德汉萨同盟(Hanseatic League of North Germany)控制着很多贸易,得到很多财富,于是商人中的赞助者就可以支持我们将要提到的很多人的工作. 三角学的工作受到航行、推算日历和天文学的推动,对最后提到的这个领域的兴趣由于日心论的创造而增强,这日心论我们将在后面再讲.

维也纳的 George Peurbach (1423—1461)开始去校订《大汇编》(*Almagest*)的拉丁文译本,这本书是由阿拉伯版本转译的,他打算由希腊原文翻译. 他还开始去制作更精确的三角函数表. 但 Peurbach 死时太年轻,他的工作由他的学生 Johannes Müller (1436—1476)(又叫 Regiomontanus)继续下去,后者在欧洲传播了三角学. Regiomontanus 在维也纳跟 Peurbach 学习天文学和三角学后去罗马跟 Bessarion 大主教(约 1400—1472)学习希腊文,并且从逃避土耳其人的希腊学者那里收集希腊文的原稿. 1471 年他定居在纽伦堡,在 Bernard Walther 的保护之下. Regiomontanus 翻译了一些希腊作品——Apollonius 的《圆锥曲线》、Archimedes 和 Heron 的部分作品,自己成立印刷厂出版这些书.

他仿照 Peurbach 采用印度人的正弦,即半弧的半弦,然后造

了一个正弦表取圆半径为 600 000 单位和另一个取半径为 10 000 000单位的正弦表.他还计算了正切表.在《方位表》(*Tabulae Directionum*,写于 1464—1467)一书中他给出了五位正切表并取十等分角度,这在那个时代是一个很不平常的做法.

15、16 世纪有很多人在作表,其中有 George Joachim Rhaeticus (1514—1576), Copernicus, François Vieta (1540—1603)和 Bartholomäus Pitiscus (1561—1613).这一工作的特点是让圆半径的值很大很大以便能得到更精确的三角函数值而不用分数或小数.例如,Rhaeticus 计算一个正弦表,半径取的是 10^{10},另一个是 10^{15},并且对每 10 秒弧给一个值. Pitiscus 在他的《宝库》(*Thesaurus*, 1613)中修正并发表了 Rhaeticus 的第二个三角函数表. “trigonometry”一词就是他提出的.

更基本的工作是解平面和球面三角形.差不多直到 1450 年球面三角的内容由一些不严谨的法则组成,这些法则的基础是希腊、印度和阿拉伯的译本,最后这个译本来自西班牙.直到这个时候,欧洲还不知道东方阿拉伯人 Abû'l-Wefâ 和 Nâsir-Eddin 的工作. Regiomontanus 能够从 Nâsir-Eddin 的工作中得到益处,并且在 1462—1463 年写的《论三角》(*De Triangulis*)中用更为有效的方式把平面三角、球面几何和球面三角中有用的知识放在一起.他给出球面三角的正弦定律,就是

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

和涉及到边的余弦定律,即

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

《论三角》直到 1533 年才出版.在这同时 Johann Werner (1468—1528)在《论球面三角》(*De Triangulis Sphaericis*, 1514)一书中改进并发表了 Regiomontanus 的思想.

经过 Regiomontanus 多年的工作,球面三角仍然因为需要大

批的公式而处于困难中，这部分是因为 Regiomontanus 在他的《论三角》一书中（甚至 Copernicus 在一个世纪之后）只用到正弦和余弦函数. 还因为钝角的余弦和正切函数的负值没有被承认为数.

Rhaeticus 是 Copernicus 的学生，他改变了正弦的意义. 原来说 AD 的正弦是 AB，他改成说角 AOB 的正弦是 AB（图 12.1）. 但 AB 的长仍依赖于半径长度单位的选取. 作为 Rhaeticus 的改变的结果三角形 OAB 成为基本的结构，而半径为 OA 的圆成为附带的了. Rhaeticus 采用了全部六个函数.

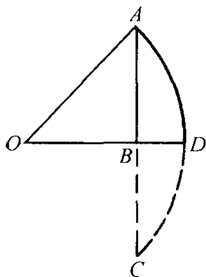


图 12.1

François Vieta（1540—1603）将平面和球面三角进一步系统化并稍微加以发展，Vieta 的职业是律师，但是他更被认为是 16 世纪第一流的数学家. 他的《标准数学》(*Canon Mathematicus*，1579）一书是他在三角的许多工作中的第一本. 在这里他把解直角和斜角平面三角形的公式收集到一起，也包括他自己的贡献，正切定律：

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}.$$

对球面直角三角形，他给出了用已知的两部分计算另一部分所需的一套完全的公式，并给出了用来记住这套公式的法则，我们现在把它叫做 Napier 法则. 他还提出了涉及钝角球面三角形角的余弦定律：

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a.$$

很多三角恒等式是 Ptolemy 建立的，Vieta 给以补充. 例如，他给出了恒等式

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

还有用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 表示 $\sin n\theta$ 和 $\cos n\theta$ 的恒等式. 后一个恒等式

写在他的《斜截面》(*Sections Angulares*)一书中，这本书于他死后在1615年出版①. Vieta把这些恒等式表示成代数形式，虽然那些符号并不是现代的.

他用 $\sin n\theta$ 的公式去解比利时数学家 Adrianus Romanus (1561—1615)在他的书《数学思想》(*Ideae Mathematicae*, 1593)中作为对法国人的挑战而提出的一个问题. 这个问题是求解 x 的一个45次方程. 法国的Henry四世找来了Vieta，他认为这个问题相当于：给定了一弧所对的弦，求该弧四十五分之一所对的弦. 也就是等价于：用 $\sin A$ 表示 $\sin 45A$，并求出 $\sin A$. 如果 $x = \sin A$，那么这个代数方程对 x 就是45次的. Vieta知道这个问题可解，只要把这个方程分成一个5次的方程和两个3次的方程，而这些方程他很快地解出. 他给出了23个正根，但忽略了负根. 在他的《回答》(*Responsum*, 1595)②一书中他解释了他的解法.

16世纪三角学开始从天文学里分出来，并成为数学的一个分支. 三角学在天文学方面的应用依然是广泛的，但是在其他学科方面的应用——例如在测量学方面——说明有必要用更独立的观点来研究三角学.

5. 文艺复兴时期主要的科学进展

文艺复兴时期的数学家们翻译了希腊和阿拉伯的著作，并且在已有知识的基础上编辑了百科全书，为欧洲数学研究的高涨作了准备. 但是欧洲后来的数学创作的启发和指导来自科学和技术问题，虽然也有些例外. 代数的发展，至少在开头是阿拉伯活动路线的继续；在几何方面一些新的工作是根据艺术家们发生的问题而提出来的.

---

① *Opera*, Leyden, 1646, 287～304.

② *Opera*, 305～324.

在文艺复兴时期,对推动以后两个世纪的数学具有决定意义的进展是 Copernicus 和 Kepler 领导的天文学革命. 大约在 1200 年以后,当希腊人的工作被采用的时候, Aristotle 的天文理论(Eudoxus 的一个修补)和 Ptolemy 的理论变得广泛流传并且互相对立. 严格地说,对这两个体系,阿拉伯人和中世纪后叶的天文学家引进了各种各样的补充,以改进这两个体系的准确性,或者使 Aristotle 的体系去适应基督教神学. Ptolemy 的体系在那个时代是相当准确的,它是纯数学的,所以只是作为一个假说,不作为真实构造的描述. Aristotle 的理论是为大多数人接受的,虽然 Ptolemy 的理论对天文预测、航行和计算日历更为有用.

一些阿拉伯人,中世纪后叶的人,文艺复兴时代的人物,包括 al-Bîrûnî(973—1048), Oresme 和库萨(Cusa)的 Nicholas(1401—1464)大主教,也许是响应希腊人的思想,当真考虑过地球或许在转动,并且考虑过在地球绕太阳转动的基础上,同样可能建立一种天文学理论,但是没有一个人作出新的理论.

在天文学家之中 Nicholas Copernicus (1473—1543)作为一个巨人突然出现. Copernicus 1473 年生于波兰的托伦(Thorn),在克拉科夫(Cracow)大学学习数学和科学. 23 岁时他到波洛尼亚(Bologna)进一步深造,在那里他熟悉了 Pythagoras 和另一些希腊人的学说,包括天文学. 他还研究医学和教会法令. 1512 年他回到波兰成为 Frauenberg 大教堂的典事(一种管理人员),他在那里一直住到 1543 年逝世. 他在完成工作职务的同时,专心致志于研究和观测,终于创立了革新的天文学理论. 思维领域的这一成就,就其重要性、勇敢和宏伟的程度来说,远远超过了征服海洋的壮举.

很难断定什么原因使 Copernicus 抛弃了有1 400年之久的 Ptolemy 理论. 在他的经典著作《天体运行论》(*De Revolutionibus Orbium Coelestium*, 1543)的序言中所述的是不完全的并且有几分不可思议. Copernicus 声明唤醒他的是关于 Ptolemy 体系的精

确度的各种不同观点，是认为 Ptolemy 的理论只是一个假说的观点，以及 Aristotle 和 Ptolemy 理论的追随者之间的争执.

Copernicus 保留了 Ptolemy 天文学的一些原理. 他用圆作基本曲线，在这曲线上他构造了对天体运动的解释. 像 Ptolemy 一样，他使用了这样一个事实，行星运动是由一系列的匀速运动构成的. 他的理由是：速度的变化只能由原动力的变化造成，而上帝，这个运动的根源是不变的，所以效果也是不变的. 他也采纳了希腊人关于在均轮上作周转运动的方案. 但 Copernicus 反对 Ptolemy 采用的在假想圆上的匀速运动，因为这个运动不要求均匀直线速度.

由于用了 Aristarchus 把太阳而不是把地球放在每个均轮的中心的思想，Copernicus 就能够用比较简单的图来代替以前描绘每一个天体运动所需要的复杂的图. 他用 34 个圆代替 77 个圆去解释月球和六个已知行星的运动. 后来他改善了这个方案，让太阳只是靠近这个体系的中心而不是正在这中心.

从与观测结果相符合这点来说，Copernicus 的理论并不比流行的 Ptolemy 的修正理论更好些. Copernicus 体系的优点乃是它用地球围绕太阳运动来解释行星运动的主要不规则性而不是用许多周转圆. 此外，他的方案用同样通用的方法对待所有的行星，而 Ptolemy 对内部行星水星、金星和外部行星，火星、木星、土星采用稍有不同的方法. 最后，在 Copernicus 的方案中天体的位置的计算是比较简单的，以至于在 1542 年天文学家们开始用他的理论来计算天体位置的新的表.

Copernicus 的理论遇到了合理的和怀偏见的两种反对意见. Copernicus 的理论同观测的不相符合使得 Tycho Brahe (1546—1601)放弃了这个理论而去寻找一个折衷的方案. Vieta 由于同样的原因完全地拒绝了它，并且转而去改进 Ptolemy 的理论. 很多知识分子拒绝这个理论或因为他们不了解它，或因为他

们不能接受革新的思想. 他书中所含的数学确是很难懂,就像Copernicus在他的序言里所说的,他的书是写给数学家看的. Brahe和德国天文学家在1572年对于新恒星的观测是有帮助的,星球的突然出现和不见反驳了Aristotle和经院派学者关于天体永恒不变的教条.

如果没有Johannes Kepler (1571—1630)的工作,日心论的命运将是不确定的. 他出生于符腾堡(Württemberg)公国的一个城市魏尔(Weil). 他的父亲是一个酒鬼,先是当一个雇佣兵,后来开了一家酒馆. 当Kepler上小学的时候,就得在酒馆里帮忙. 后来他退了学去工作,做一个田间的劳动者. 当他还是孩子的时候,他就得了天花,疾病留给他一双残废的手和损伤了的视力. 但无论如何,他设法在1588年得到了Maulbronn学院的学士学位,后来由于他向往教会职务就进蒂宾根(Tübingen)大学学习. 一个友好的数学和天文学教授Michael Mästlin (Möstlin, 1550—1631)私下里教他日心学说. Kepler在大学里的上级怀疑他不够虔诚,于是在1594年派他去奥地利的格拉茨(Grätz)担任数学和道德学教授,Kepler都接受了. 为了尽到他的责任,要求他了解占星术,这就使他更进一步倾向于天文学.

当格拉茨被天主教控制的时候,Kepler就被从这城市里驱逐了出去. 他到了布拉格,在Tycho Brahe的观象台里做他的助手. Tycho死后,Kepler被任命接替这个位置. 他的一部分工作是为他的雇主Rudolph Ⅱ大帝算命. Kepler用占星术有助于天文学家谋生的想法来聊以自慰.

Kepler的一生受各种困难的折磨. 他的第一个妻子和几个孩子都死了. 作为一个新教徒,他受天主教的各种迫害. 他经常在经济上处于绝望之中. 他的母亲被指控为巫婆,而Kepler得为她辩护. 虽然他始终遭遇不幸,但他用恒心、非凡的努力和丰富的想象力从事他的科学工作.

在探讨科学问题的态度方面,Kepler是一个过渡人物.像Copernicus和中世纪思想家一样,他被一种美好的、合理的理论所吸引.他接受了Plato的教义,那就是宇宙是按照一个事先建立好的数学方案安排的.但是他不像他的前人,他极其尊重事实,他的更为成熟的工作完全建立在事实的基础上,从事实发展到定律.在寻找定律时,他发挥了对假说的创造性,对真理的热爱和活跃的想象力但并不妨碍理智.虽然他设计了很多的假说,但当它们与事实不适合时,他毫不犹豫地抛弃它们.

被Copernicus体系的美好与和谐所触动,他决定从事于去寻求Tycho Brahe所提供的更为精确的观测可能允许怎样的几何上的和谐关系.他寻找数学上的关系,他确信这种关系是存在的,这使得他在错误的道路上探索了许多年.在他的《神秘的宇宙结构学》(*Mysterium Cosmographicum*, 1596)一书的序言中,他说道:"我企图去证明上帝在创造宇宙并且调节宇宙的次序时,看到了从Pythagoras和Plato时代起就为人们熟知的五种正多面体,他按照这些形体安排了天体的数目、它们的比例和它们运动间的关系."

于是他假定六个行星的轨道半径是那样一些球的半径,这些球和五种正多面体按以下方式联系起来.最大的半径是土星的轨道半径.在这一半径的球里他假设有一个内接正立方体.在这个立方体里有一个内接球,这球的半径就是木星的轨道半径.在这个球里面他假设有一个内接正四面体,对它又有另一个内接球,它的半径是火星轨道半径,如此继续下去,经过五种正多面体.这样可以作出六个球,正好和当时知道的行星数目一样.但是由这个假说作出的推论却和观测不一致,他抛弃了这个想法,但在这以前他异常努力地以改进了的形式去运用它.

虽然用这五种正多面体去探索自然界的秘密的企图没有成功,但是后来Kepler在寻找和谐的数学关系上有显著的成绩.他

的最有名最重要的成果今天以 Kepler 行星运动三定律著称. 前两条定律公布在 1609 年出版的一本书里,这本书有个很长的名字,有时简称它为《新天文学》(*Astronomia Nova*),有时叫《论火星的运动》(*Commentaries on the Motions of Mars*).

第一定律说每一个行星的轨道不是一些动圆联合的结果而是一个椭圆,太阳在它的一个焦点上(图 12.2). Kepler 的第二定律用图(图 12.3)来说明最好懂. 我们知道希腊人相信行星运动必须用均匀线速率来解释. Kepler 和 Copernicus 一样,一开始也坚定地相信匀速率的学说,但是他的观测迫使他又放弃了这个珍爱的信念. 当他能够用具有同样魅力的某些东西代替这信念时,他是非常高兴的,因为他的关于自然界遵循数学规律的信念又得到了肯定. 如果 MM' 和 NN' 是一个行星在同样长的一段时间里所通过的距离,那么按照匀速率的原理,MM' 和 NN' 一定是相等的距离. 而按照 Kepler 的第二定律,MM' 和 NN' 一般地是不相等的,但是面积 SMM' 和 SNN' 是相等的. 这样 Kepler 用等面积代替了等距离. 探索行星的这一奥秘确实是一个很大的胜利,因为所说的这个关系并不像它画在纸上那样容易被人发现.

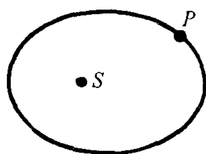


图 12.2

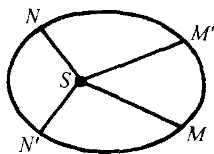


图 12.3

Kepler 作出了更为异常的努力来得到行星运动的第三个定律. 这定律说,取地球公转的周期和它到太阳的平均距离作为时间和距离的单位①,那么一个行星公转的周期的平方等于它到太阳的平均距离的立方. Kepler 在《世界的和谐》(*The Harmony of the World*, 1619)一书中公布了这个结果.

---

① 虽然 Kepler 这样叙述,但正确的叙述应该是用半主轴代替平均距离.

Kepler 的工作比 Copernicus 的工作要革命得多，他们在采用日心论上是同样的大胆，而 Kepler 采用椭圆（与采用圆运动相反）和非匀速运动则从根本上打破了权威和传统. 他坚持这样的立场：科学研究是独立于一切哲学和神学信条的；单单数学上的考虑就可以决定假说的正确性；假说以及从它作出的推理都必须通过实践来检验.

Copernicus 和 Kepler 的工作在很多方面都值得注意，但我们只限于考虑它和数学史的关系. 由于有很多严重的反对意见在反对这一个日心说，从他们的工作可见希腊人认为自然界的真理依赖于数学定律这一观点是多么有力地掌握了欧洲.

有些很有分量的科学上的反对意见，其中有许多是 Ptolemy 针对 Aristarchus 的意见提出来的. 地球是一个重的天体，怎样能使这样一个重的天体开始运动并且保持运动？即使按照 Ptolemy 的理论，另一些行星也是在运动着，但是希腊人和中世纪的思想家坚持认为这些行星是由某种特别轻的物质组成的. 还有一些反对的意见. 如果地球从西向东旋转，那么，为什么扔到空气中的物体不落到它原来的位置的西边呢？为什么地球在它旋转时不飞散？Copernicus 对后一个问题的极为软弱的回答是球是一个自然的形状，因此就自然地运动着，所以地球不会破坏它自己. 进一步又有人问，既然地球以每秒约 3/10 里的速度自旋，又以每秒约 18 里的速度绕太阳转动，为什么地球上的物体和空气本身却和地球在一起？如果像 Ptolemy 和 Copernicus 想象的那样，作自然运动的物体的速率正比于它的重量，那么地球将把较轻的物体留在它后面. Copernicus 回答说，空气具有“地球性”，所以它跟着地球转.

天文学家又增加了一些科学异议. 如果地球在运动，那么为什么“恒星”的方向不变？一个角的视差若是 $2'$，则到星球的距离至少需要 400 万倍于地球半径，而这样一个距离在当时是不可想象的. 没有觉察到星球的任何视差（这意味着这些星球甚至更远），

Copernicus 声明"天空与地球相比是无限的,好像是无穷大的……宇宙的边界是不知道的也是不可知的."后来他感到这个回答不妥当,就把这问题转给哲学家,从而回避了它. 直至 1838 年数学家 Bessel 才测量了最近一个恒星的视差,发现它是 0.31″.

如果 Copernicus 和 Kepler 是"清醒的"人,他们就永远不会去否定他们的感觉. 尽管地球在高速率地转动,但我们不能感觉到它的自转和公转. 另一方面,我们确实看到太阳在运动.

Copernicus 和 Kepler 都非常虔诚,但他们都否认基督教的一条中心教义,就是上帝主要关心的是人,而人是宇宙的中心,宇宙万物都围绕着人转. 相反,日心说把太阳放在宇宙的中心,这就威胁了这个慰藉人心的教义,因为它使得人成为可能有的一大群漂泊于寒冷天空的流浪者之一. 他很不像是生来为了荣宗耀祖,死后去进天堂. 更不像是上帝施恩的对象. 这样,通过用太阳替代地球,Copernicus 和 Kepler 就搬走了天主教神学的基石,并且危及其结构. Copernicus 指出宇宙比起地球来是如此巨大,以至去谈论中心是毫无意义的. 而这种议论就更加使他与宗教对立起来了.

反驳所有这些反对意见,Copernicus 和 Kepler 都只用了一个回答,但却是有分量的回答. 的确,每个人的回答都做到了数学上的简洁,压倒一切地协调并且是优美的理论. 如果承认数学关系是科学工作应有的目标,那么能够给出更好的数学处理这一事实就足以压倒一切反对意见. 这一看法由于相信上帝设计了这个世界并且显然会采用优秀的理论而更有说服力了. 他们都感到并且清楚地说明了他们的工作给出了协调、对称和神圣作坊的设计,还有上帝存在的有力的证据. Copernicus 抑制不住自己感激的心情说:"我们发现,在这有次序的安排之下,宇宙有一种奇异的对称性,天体运动和大小的协调有确定的关系,而这是不可能从其他途径去获得的."Kepler 1619 年的作品的题目是《世界的和谐》,他对上帝

的无尽的颂扬,对上帝数学设计的宏伟所表现的钦佩证明了他的信仰.

一开始只有数学家支持日心论是不奇怪的.只有数学家,而且只有相信宇宙是按照数学方式设计的数学家,才会有足够坚强的信心摆脱那些流行的哲学上、宗教上和物理上的信念.直到Galileo把他的望远镜对准着天空,天文学的物证才支持了数学的理论.17世纪初Galileo的观测看到在木星周围有四个卫星,证明了行星可以有卫星.由此得出,地球也不能因为它有一个月球而就不是行星.Galileo还看到月球有一个粗糙的表面,像地球一样有高山和深谷.所以地球也就是一个天体,未必是宇宙的中心.

最后日心论得到了承认,因为它计算简单,因为它的优越的数学,还因为观测结果支持着它.这表明运动科学应该在地球自转又公转的见解下改写.简单说来,需要一个新的力学.

关于光和光学的研究从中世纪时期起一直没有中断.17世纪天文学家对这个课题更有兴趣了,因为空气对光线产生折射效应,所以当光线从行星或恒星射来的时候会改变方向,这就给这些星球的位置以一种假象.16世纪末,发明了望远镜和显微镜.这些仪器在科学上的用途是明显的,它们打开了新的世界,在光学方面已经很广泛的兴趣被激发得更高了.在17世纪,几乎所有的数学家都研究过光学和透镜.

6. 文艺复兴时期评注

文艺复兴时期在数学方面没有出现任何杰出的新成就.数学领域的微小进展不能同文学、绘画、建筑、科学各领域所取得的进展相比.文学、绘画、建筑领域中创造出很多杰作,它们至今仍是我们文明的一部分.在科学方面,日心说使最好的希腊天文学说黯然失色,使阿拉伯或中世纪的贡献相形见绌.对于数学来说,这一时

期上要是一个吸收希腊成果的时期，它与其说是古代文化的新生，倒不如说是它的再现.

对于数学的茁壮成长同样重要的是：它又像亚历山大时代那样建立起它和科学、技术的密切联系. 在科学方面，认识到数学定律归根到底是终极的目标；在技术方面，认识到以数学式子来表达研究结果是知识的最完善、最有用的形式，是设计和施工的最有把握的向导. 这样的估价保证了数学成为现代的一个主要力量，还保证了数学的新发展.

参考书目

Armitage, Angus: *Copernicus*, W. W. Norton, 1938.

Armitage, Angus: *John Kepler*, Faber and Faber, 1966.

Armitage, Angus: *Sun, Stand Then Still*, Henry Schuman, 1947; in paperback as *The World of Copernicus*, New American Library, 1951.

Ball, W. W. Rouse: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, Chap. 12.

Baumgardt, Carola: *Johannes Kepler, Life and Letters*, Victor Gollancz, 1952.

Berry, Arthur: *A Short History of Astronomy*, Dover (reprint), 1961, pp. 86～197.

Braunmühl, A. von: *Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie*, 2 vols., B. G. Teubner, 1900 and 1903, reprinted by M. Sänding, 1970.

Burtt, E. A.: *The Metaphysical Foundations of Modern Physical Science*, 2nd ed., Routledge and Kegan Paul, 1932, Chaps. 1～12.

Butterfield, Herbert: *The Origins of Modern Science*, Macmillan, 1951, Chaps. 1～7.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1900, Vol. 2, pp. 1～344.

Caspar, Max: *Johannes Kepler*, trans. Doris Hellman, Abelard Schuman, 1960.

Cohen, I. Bernard: *The Birth of a New Physics*, Doubleday, 1960.

Coolidge, Julian L.: *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover (reprint), 1963, Chaps. 3～5.

Copernicus, Nicolaus: *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543), Johnson Reprint

Corp., 1965.

Crombie, A. C.: *Augustine to Galileo*, Falcon Press, 1952, Chap. 4.

Da Vinci, Leonardo: *Philosophical Diary*, Philosophical Library, 1959.

Da Vinci, Leonardo: *Treatise on Painting*, Princeton University Press, 1956.

Dampier-Whetham, William C. D.: *A History of Science*, Cambridge University Press, 1929, Chap. 3.

Dijksterhuis, E. J.: *The Mechanization of the World Picture*, Oxford University Press, 1961, Parts 3 and 4.

Drake, Stillman and I. E. Drabkin: *Mechanics in Sixteenth-Century Italy*, University of Wisconsin Press, 1969.

Dreyer, J. L. E.: *A History of Astronomy from Thales to Kepler*, Dover (reprint), 1953, Chaps. 12~16.

Dreyer, J. L. E.: *Tycho Brahe, A Picture of Scientific Life and Work in the Sixteenth Century*, Dover (reprint), 1963.

Gade, John A.: *The Life and Times of Tycho Brahe*, Princeton University Press, 1947.

Galilei, Galileo: *Dialogue on the Great World Systems* (1632), University of Chicago Press, 1953.

Hall, A. R.: *The Scientific Revolution*, Longmans Green, 1954, Chaps. 1~6.

Hallerberg, Arthur E.: "*George Mohr and Euclidis Curiosi*", *The Mathematics Teacher*, 53, 1960, 127~132.

Hallerberg, Arthur E.: "The Geometry of the Fixed Compass", *The Mathematics Teacher*, 52, 1959, 230~244.

Hart, Ivor B.: *The World of Leonardo da Vinci*, Viking Press, 1962.

Hofmann, Joseph E.: *The History of Mathematics*, Philosophical Library, 1957.

Hughes, Barnabas: *Regiomontanus on Triangles*, University of Wisconsin Press, 1967. A translation of *De Triangulis*.

Ivins, W. M., Jr.: *Art and Geometry* (1946), Dover (reprint), 1965.

Kepler, Johannes: *Gesammelte Werke*, C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, 1938~1959.

Kepler, Johannes: *Concerning the More Certain Foundations of Astrology*, Clancy Publications, 1942. Many of Kepler's books have been reprinted and a few translated.

Koyré, Alexandre: *From the Closed World to the Infinite Universe*, Johns Hopkins Press, 1957.

Koyré, Alexandre: *La Révolution astronomique*, Hermann, 1961.

Kuhn, Thomas S.: *The Copernican Revolution*, Harvard University Press, 1957.

MacCurdy, Edward: *The Notebooks of Leonardo da Vinci*, George Braziller (reprint), 1954.

Pannekoek, A.: *A History of Astronomy*, John Wiley and Sons, 1961, Chaps. 16～25.

Panofsky, Erwin: "*Dürer as a Mathematician*", in James R. Newman, *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, 1956, pp. 603～621.

Santillana, G. de: *The Crime of Galileo*, University of Chicago Press, 1955.

Sarton, George: *The Appreciation of Ancient and Medieval Science During the Renaissance*, University of Pennsylvania Press, 1955.

Sarton, George: *Six Wings: Men of Science in the Renaissance*, Indiana University Press, 1957.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, Chap. 8; Vol. 2, Chap. 8.

Smith, Preserved: *A History of Modern Culture*, Holt, Rinehart and Winston, 1930, Vol. 1, Chaps. 2～3.

Taylor, Henry Osborn: *Thought and Expression in the Sixteenth Century*, Crowell. Collier (reprint), 1962, Part V.

Taylor, R. Emmet: *No Royal Road: Luca Pacioli and His Times*, University of North Carolina Press, 1942.

Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik*, 7 vols., 2nd. ed., W. De Gruyter, 1921～1924.

Vasari, Giorgio: *Lives of the Most Eminent Painters, Sculptors, and Architects* (many editions).

Wolf, Abraham: *A History of Science, Technology and Philosophy in the Sixteenth and Seventeenth Centuries*, George Allen and Unwin, 1950, Chaps. 1～6.

Zeller, Sister Mary Claudia: "The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus", Ph. D. dissertation, University of Michigaa, 1944; Edwards Brothers, 1946.

第 13 章

16、17 世纪的算术和代数

代数是搞清楚世界上数量关系的智力工具.

A. N. Whitehead

1. 引　言

新的欧洲数学的第一个重大进展是在算术和代数方面. 印度和阿拉伯人的工作把实用的算术计算放在数学的首位,并把代数建立在算术的而不是几何的基础上. 他们的工作又吸引人们去注意解方程的问题.

在 16 世纪前半叶,欧洲人对待算术和代数的态度与精神,几乎还是同阿拉伯人一模一样,只是增加了他们从阿拉伯人著作里学来的数学门类. 到这个世纪的中叶,欧洲文明的实际生活和科学工作的需要,促使他们把算术和代数推向前进. 前已指出,科学成果在工程技术上的应用以及实践上的需要,要求人们得出数量上的结果. 例如,远涉重洋的地理探险需要人们有更准确的天文知识. 同时,把愈来愈精确的观察同新天文学说联系起来的兴趣,要求编制出更好的天文数表,而这又需要有更精确的三角函数表. 事实上,16 世纪对于代数的兴趣,多数是在制作三角函数表时为解方程和处理恒等式的需要而引起的. 日益发展的银行业务和商务活动要求有一个更好的算术. 许多人的著作都反映了这些需要,其中包括 Pacioli, Tartaglia 和 Stevin 的作品. Pacioli 的《总论》, Tartaglia 的《数量概论》(*General trattato de' numerie misure*, 1556)中都含有大量商业中的算术问题. 最后,工匠的技术工作,特

别是建筑、制造大炮和抛射体运动方面的工作,要求有定量的思维.除了这些应用之外,对代数还有一种完全新颖的应用——表示曲线——引起了大量的研究工作.在这些需要的压力下,代数的进展加速了.

我们分四个题目来考察这些新的发展:算术、符号体系、方程论和数论.

2. 数系和算术的状况

到1500年左右,零已被人接受作为一个数,无理数也用得更随便了.Pacioli,日耳曼数学家M. Stifel (1486? —1567),军事工程师S. Stevin (1548—1620)和Cardan都按照印度人和阿拉伯人的传统使用无理数,并引入了种类越来越多的无理数.例如,Stifel使用了$\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$这种形式的无理数.Cardan曾把含立方根的分数有理化.使用无理数的广泛程度,以Vieta那个表示π[①]的式子为例就可以看出来.Vieta考察单位圆的内接正4, 8, 16, …边形,求出π值的式子:

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{90^\circ}{4}\cos\frac{90^\circ}{8}\cdots$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

虽然人们对于用无理数进行计算是很随便的,但对于无理数是否确实是数却仍不放心.Stifel在他的重要著作《整数算术》(*Arithmetica Integra*, 1544)这一部论述算术、Euclid《原本》第十篇中的无理数以及代数的书中,讨论了用10进制小数的记号表达无理数的问题.他一方面说:

① π这个记号是William Jones (1706)第一个采用的.

> 在证明几何图形的问题中,由于当有理数不行而代之以无理数时,就能完全证出有理数所不能证明的结果……因此我们感到不能不承认它们确实是数,迫使我们承认的是由于使用它们而得出的结果——那是我们认为真实、可靠而且恒定的结果.但从另一方面讲,别的考虑却迫使我们不承认无理数是什么数.例如,当我们想把它们数出来[用十进制小数表示]时……就发现它们无止境地往远跑,因而没有一个无理数实质上是能被我们准确掌握住的……而本身缺乏准确性的东西就不能称其为真正的数……所以,正如无穷大的数并非数一样,无理数也不是一个真正的数,而是隐藏在一种无穷迷雾后面的东西.

他接着论证说实数不外乎整数或分数;无理数显然既非整数又非分数,因而不是实数.一个世纪之后,Pascal 和 Barrow 还说,像$\sqrt{3}$这样的数只能作为几何上的量来理解;无理数仅仅是记号,它们脱离连续的几何量便不能存在,而对无理数进行运算,要以 Eudoxus 关于量的理论来作逻辑依据.Newton 在他的《普遍的算术》(*Arithmetica Universalis*, 1707 年出版,但系根据其 30 年以前讲课内容所写)中也持这一观点.

其他一些人则肯定说无理数是独立存在的东西.Stevin 承认无理数是数,并用有理数来不断逼近它们.J. Wallis 在《代数》(*Algebra*, 1685)中也承认无理数是地地道道的数.他认为 Euclid《原本》的第五篇在本质上主要是算术性的.Descartes 也在《指导思想的法则》(*Rules for the Direction of the Mind*,约 1628)中承认无理数是能够代表连续量的抽象的数.

负数虽然通过阿拉伯人的著作传到欧洲,但 16 世纪和 17 世纪的大多数数学家并不承认它们是数,或者即使承认了,也并不认

为它们是方程的根. 15 世纪的 Nicolas Chuquet (1445? —1500?)和 16 世纪的 Stifel (1553 年)都把负数说成是荒谬的数. Cardan 把负数作为方程的根,但认为它们是不可能的解,仅仅是一些记号;他把负根称作是虚有的,而正根才算是实的根. Vieta 完全不要负数. Descartes 只是部分地接受了负数. 他把方程的负根称作假根,因为它们代表比无还少的数. 但他指出(见第 5 节),对于一个给定的方程,可以得出另一个方程,使它的根比原方程的根大任何一个数量. 这样,有负根的一个方程可以化成有正根的方程. 既然我们可以把假根化成真根,所以 Descartes 愿意接受负数. Pascal 则认为从 0 减去 4 纯粹是胡说.

Pascal 的一位密友,神学家兼数学家 Antoine Arnauld (1612—1694)提出一种有趣的说法来反对无理数. Arnauld 怀疑 $-1:1=1:-1$,因为(他说) -1 小于 $+1$;那么较小数与较大数的比,怎么能等于较大数与较小数之比呢? 许多人都讨论了这个问题. 1712 年,Leibniz 承认[①]这个反对意见合理,但申辩说可以用这种比例来进行计算,因为它们的形式是正确的,正如我们能够用虚量来进行计算一样.

最早接受无理数的代数学者之一是 Thomas Harriot (1560—1621),他偶尔把负数单独写在方程的一边,但他并不接受负根. Raphael Bombelli(16 世纪)给出了负数的明确定义. Stevin 在方程里用了正的和负的系数,并接受负根. A. Girard (1595—1632)在他的《代数中的新发明》(*L'Invention nouvelle en l'algèbre*, 1629)中把负数与正数等量齐观,并且甚至在二次方程的两根都是负数时也给出两个根. Girard 和 Harriot 都用减号表示减法运算和负数.

总的说来,在 16 世纪和 17 世纪,并没有很多数学家对于使用负数心安理得或者承认它是数,更谈不上承认它们可以作为方程

① *Acta Erud.*, 1712,167 ～ 169 = *Math. Schriften*, 5,387～389.

的真实的根.当时人对负数有一种古怪的信念.例如 Wallis 虽比他那个时代的人先进并且承认负数,但他认为负数大于无穷大而并非小于零.他在所著《无穷大的算术》(*Arithmetica Infinitorum*, 1655)中论证说:由于比 $a/0$ 在 a 为正数时是无穷大,故当分母变成负数时,例如当 a/b 中的 b 是负数时,这个比必定大于无穷大.

欧洲人在还没有完全克服无理数和负数带来的困难时,就又无意地陷入了我们如今称之为复数的问题.他们在用配方法解二次方程时碰到要把求平方根的算术运算推广到任何样的数上,得出了这些新的数.例如,Cardan 在所著《重要的艺术》(1545)的第37章中列出并解出把10分成两部分,使其乘积为40的问题.方程是 $x(10-x)=40$.他求得根为 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$,然后说"不管会受到多大的良心责备",把 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 相乘,得乘积为 $25-(-15)$ 或即40.于是他说:"算术就是这样神妙地搞下去的,它的目标,正如常言所说,是又精致又不中用的."我们不久会看到,Cardan 在解三次方程时(第4节),还要进一步同复数打交道.Bombelli 在解三次方程时也考虑了复数,并且几乎像现代形式那样规定了复数的四种运算,但他仍认为复数"无用"而且"玄".Albert Girard 则承认复数至少可作为方程的形式解.他在所著《代数中的新发明》中说:"有人可以说这些不可能的解[复根]有什么用?我回答:它有三方面用处——一是因为能肯定一般法则,二是因为它们有用,并且因为除此之外没有别的解."但 Girard 的先进观点并无多大影响.

Descartes 也摒弃复根,并造出"虚数"这个名称.他在《几何》(*La Géométrie*)中说:"真的和假的[负的]根都并不总是实在的,它们有时是虚的."他的论点是:负根至少可以在它们所出现的方程变换为只有正根的方程后弄成"实"的,但这对复根却办不到.所以这些根不是实的而是虚的,它们并不是数.Descartes 确实在区

分方程的实根和虚根这一点上比他的前辈搞得清楚.

甚至 Newton 也并不认为复数根是有意义的,这很可能是由于它们缺乏物理意义. 事实上,他在《普遍的算术》[①] 一书中说过:"正是方程的根常应出现为不可能的情况[复根],才不致使不可能解的问题显得像是可以解的样子."也就是说,在物理上和几何上没有实解的那些问题,应该具有复数根.

对复数没有清楚认识的这种情况,反映在常被人引述的 Leibniz 的一段话中:"圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示,这就是那个理想世界的端兆,那个介于存在与不存在之间的两栖物,那个我们称之为虚的 -1 的平方根."[②]Leibniz 虽在形式运算中使用复数,但并不理解复数的性质.

在 16、17 世纪中,实数的运算步骤有了改进和推广. 在比利时(当时荷兰的一部分),我们看到有 Stevin 在他的《十进制算术》(*La Disme*, 1585)中提倡用 10 进制小数来书写分数并对它们进行运算,而反对用 60 进制. 别的人,如 Christoff Rudolff(约 1500—约 1545),Vieta 和阿拉伯人 al-Kashî(卒于 1436 年左右)则早就采用了 10 进制. Stevin 提倡用 10 进制的度量衡,他很关心节省簿记人员的时间和劳力(他自己就是当小职员出身的). 他把 5.912写为 5⓪9①1②2③,或写为 $5,9'1''2'''$. Vieta 改进并推广了求平方根和立方根的方法.

这段时期的另一项进展是在算术里使用连分数. 我们可能记得印度人——特别是 Āryabhata——曾用连分数解一次不定方程. Bombelli 在他的《代数》(*Algebra*, 1572)里第一个用连分数来逼近平方根. 为求 $\sqrt{2}$ 的近似值,他写出

$$(1) \qquad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}.$$

---

① 第二版,1728,p. 193.

② *Acta Erud.*, 1702 = *Math. Schriften*, 5,350～361.

Brouncker 没有对这种形式作进一步的应用. 但 Wallis 进行了这项工作. 他在所著《数学著作集Ⅰ》(*Opera Mathematica* Ⅰ, 1695)中引入了"连分数"这一名称,给出了计算连分数的收敛子的一般法则. 这就是,若 p_n/q_n 是连分数

$$\frac{b_1}{a_1+}\ \frac{b_2}{a_2+}\ \frac{b_3}{a_3+}\cdots$$

的第 n 个收敛子,则

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_n p_{n-1}+b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+b_n q_{n-2}}.$$

关于 p_n/q_n 是否收敛于连分数所表示的那个数,当时还没有得到明确的结果.

16 世纪和 17 世纪算术的最大改进是对数的发明. Michael Stifel(1486? —1567)已经认识到对数的基本思想. 他在《整数的算术》里指出几何数列

$$1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ \cdots$$

的各项与其指数所形成的算术数列

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

的各项互相对应. 几何数列中两项相乘得出的项,它的指数等于算术数列中相应两项之和. 几何级数中两项相除得出的项,其指数等于算术级数中相应两项之差. 这一事实也由 Chuquet 在《数的科学三部曲》(*Le Triparty en la science des nombres*, 1484)中指出过. Stifel 还把两个数列间的这种联系推广到负指数和分数指数的情形. 例如,r^2 被 r^3 除得 r^{-1},它相应于扩充了的算术数列中的-1那一项. 但 Stifel 并没有利用两数列间的这一联系来引入对数.

苏格兰人 John Napier (1550—1617)在 1594 年左右搞出对数的时候就受了几何数列的项和算术数列的相应项之间这种对应关系的启发. Napier 关心的是简化为解决天文问题的球面三角的计算工作. 事实上,他曾把研究的初步结果送交 Tycho Brahe 征求他的赞许.

Napier 在他的《论述对数的奇迹》(*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, 1614)以及他死后出版的遗作《作出对数的奇迹》(*Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, 1619)中解释了他的想法. 因为他搞的是球面三角,所以处理的是正弦的对数. 他按照 Regiomontanus 的办法,将圆的半径分成 10^7 单位,以圆弧的半弦为正弦,以 10^7 作为最大的数开始计算. 他让 10^7 到 0 的正弦值表示在直线 AZ(图 13.1)上,并设 A 朝着 Z 运动,其速度正比于到 Z 点的距离.

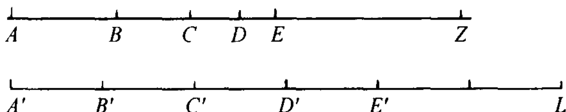


图 13.1

严格地说,动点的速度应随着它离开 A 点的距离连续变化,并且需要用微积分才能真正表达. 但若我们考察某一小段时间 t,并设 AB, BC, CD, …各段长度都是在这段时间里通过的,同时假设在 t 这段时间里速度不变并取动点在这段时间开始时的速度,那么 AZ, BZ, CZ, …这些长度就形成几何数列. 因若考虑 DZ,并设 k 是动点速度与它到 Z 之间距离的比例常数. 现因

$$DZ = CZ - CD.$$

又因动点在 C 处的速度是 $k(CZ)$. 于是距离 $CD = k(CZ)t$. 所以

$$DZ = CZ - k(CZ)t = CZ(1 - kt).$$

这样,序列 AZ, BZ, CZ, …中的任一个长度是其前一个长度的 $1 - kt$ 倍.

其次,Napier 假定有另一点与 A 同时开始在直线 $A'L$(图 13.1,其右方无限伸长)上以恒速运动,使得当第一点到达 B, C, D, …之时,第二点分别到达 B', C', D', …. 距离 $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, …显然形成算术数列. Napier 分别把 $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$,

…这些距离取作 BZ, CZ, DZ, …的对数. 他取 AZ 或即 10^7 的对数为 0. 这样,当数(正弦值)按几何数列递减时,对数按算术数列递增. 这里记为 $1-kt$ 的量在 Napier 的原著里是 $1-\frac{1}{10^7}$. 但他在进行计算对数之际改变了这个比值.

我们看到,若取的 t 愈小,则从 AZ 到 BZ 到 CZ 等等的正弦值的减小量就愈小. 这样,对数表里的数就愈靠近.

Napier 取距离 $A'B'$, $A'C'$, …为 1, 2, 3, …但那样做并非必需. 它们也可以取作 $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, …而方案仍一样行得通. 此外,原来那些数的意义同任何量一样,而与它们是否为正弦值不相干,所以 Napier 的方案实际给出了一般数的对数. Napier 本人则是用对数来作球面三角的计算的.

"对数"(logarithm)这个术语是 Napier 创造的,意即"比的数". "比"是指数列 AZ, BZ, CZ, …的公比. 他还把对数称为人造的数.

当时有一位数学和天文学教授 Henry Briggs (1561—1631)在 1615 年向 Napier 建议取 10 作为底数,使一个数的对数就等于该数的那个 10 的乘幂中的幂指数. 这就跟 Napier 的方案不同,事先取定了一个底数. Briggs 在计算他的对数时是逐次取 10 的平方根,即$\sqrt{10}$, $\sqrt{\sqrt{10}}$, …,一直取了 54 次这样的平方根,得出一个略大于 1 的数 A 时为止. 就是说,他得出一个数 $A=10^{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{54}\right]}$. 然后他取 $\log_{10}A=\left(\frac{1}{2}\right)^{54}$. 利用两数乘积的对数等于它们的对数之和这一事实,Briggs 为靠得很近的数算出了一张对数表. 现今常用的普通对数表就是从 Briggs 对数表演变而来的.

Joost Bürgi (1552—1632)是瑞士的一个钟表和仪器匠人,是 Kepler 在布拉格(Prague)的一名助手,他也曾有志于简化天文计算. 他在 1600 年左右未悉 Napier 的工作而独立发明了对数,但他

的著作《进数表》(*Progress Tabulen*)直到1620年才发表. Bürgi也受到了Stifel所指出的事实(几何数列中两项的乘除法可用指数的加减法来完成)的启发而发明对数的. 他的算术工作也同Napier的类似.

Napier思想的各种推衍逐步有人引入. 许许多多不同的对数表也用代数方法算了出来. 其后有James Gregory, Brounck勋爵, Nicholas Mercator(原名Kaufman, 1620—1687), Wallis和Edmond Halley用无穷级数计算对数(参阅第20章第2节).

虽然普通的做法是像Briggs那样,取固定的底数,以它的乘幂来代表数,并定义幂指数为该数的对数,但在17世纪初期,人们并不把对数定义为幂指数,因那时还没有用分数指数和无理数指数. 到17世纪末有些人认识到对数可以这样来定义,但直到1742年William Jones (1675—1749)在给William Gardiner的《对数表》(*Table of Logarithms*)写的序言中才第一次用这种方法作了系统的叙述. Euler早就把对数定义为指数,并于1728年在其一篇未发表的手稿《遗作》(*Opera Posthuma* Ⅱ,800—804)中引入了e作为自然对数的底.

算术上的第二项进展(它的进一步的实现在近代产生深远的影响)是加速算术运算的机械装置和机器的发明. Edmund Gunter (1581—1626)利用Napier的对数研制出计算滑尺. William Oughtred (1574—1660)制造出圆盘计算尺.

1642年,Pascal发明了能自动从个位进到十位,从十位进到百位等等的加法计算机. Leibniz在巴黎看到这机器后发明了能作乘法的计算机. 他在1677年把他的想法告诉了伦敦的皇家学会,1710年柏林科学院发表了这种想法的书面说明. 17世纪末期,Samuel Morland (1625—1695)又独立地发明了一架能作加减法的机器和另一架能作乘法的机器.

我们不打算细述计算机发展的历史,因为至少在1940年以

前,它们仅是些能作算术运算的简单机械装置,而且对数学进展并无影响.但我们要指出,在上述这种机器和现代电子计算机之间最重大的一步工作是由 Charles Babbage (1792—1871)作出的,他发明了一架原拟用于天文与航海计算方面的机器.他设计的"分析机"是打算先把一些指令输入机器后,让机器完成整个一系列的算术运算.这种运算是在蒸汽动力作用下自动进行的.他在英国政府支持下造出了演示模型.可惜这种机器的制造,远远超出了他那个时代工程技术的能力.

3. 符 号 体 系

代数上的进步是引用了较好的符号体系,这对它本身和分析的发展比 16 世纪技术上的进展远为重要.事实上,采取了这一步,才使代数有可能成为一门科学.在 16 世纪以前,自觉运用一套符号以使代数的思路和书写更加紧凑更加有效的人只有 Diophantus.记号上的所有其他变动基本上是标准文字的缩写,而且颇为随便.在文艺复兴时代,代数的普遍书写方式仍是文章式的,就是说用些特殊的字眼、缩写,当然还有数字符号.

16 世纪中引进符号体系的压力无疑来自迅速发展的科学对数学家提出的要求,正如计算方法的改进反映了这种技术的日益增多的应用.不过改进是断续进行的.许多改变是偶然作出的,而且很清楚,16 世纪的人们肯定没有体会到符号体系能对代数起多大作用,甚至在引进符号体系方面迈出了决定性的前进步伐以后,数学家也并不立即采纳.

从 15 世纪起,最早的缩写也许就是用 p 代表 plus(加),用 m 代表 minus(减).但在文艺复兴时代,特别是在 16、17 世纪中,已引用了一些特殊的符号.+和-这两个符号是 15 世纪德国人引入的,用来表示箱子重量的超亏,后被数学家袭用.这些记号出现在

1481 年以后的手稿中. 以符号×代表"乘"是 Oughtred 首创的, 但 Leibniz 合理地加以反对, 因它易于同 x 相混.

=号是 1557 年剑桥的 Robert Recorde (1510—1558) 引入的, 他写了第一篇英文的代数论文《砺智石》(*The Whetstone of Witte*, 1557). 他说他所知道的最相像的两件东西是两根平行线, 所以这两根线应该用来表示相等. Vieta 起初书写"aequalis", 以后用～表示相等. Descartes 用∝表示相等. ＞和＜这两个符号是 Thomas Harriot 首创的. 括号是 1544 年出现的. 方括号和花括号是大约从 1593 年起由 Vieta 引入的. 平方根号$\sqrt{\ }$是 Descartes 采用的, 但他把立方根号写为 $\sqrt{c.\quad}$.

我们不妨提出以下几点, 作为当时一些书写方式的例子. Cardan 用 R̸ 表示平方根, 用 p 表示加, 用 m 表示减, 他把今日的

$$(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40$$

写成

5p: R̸ m: 15

5m: R̸ m: 15

25m: m: 15qd. est40.

他又把

$\sqrt{7+\sqrt{14}}$ 写成 R̸. V. 7. p: R̸ 14.

这里 V 表示其后一切都在根号之下.

用符号表示未知量及未知量的乘幂这件事之出现缓慢是颇为惊人的, 因为这种记法既简单而且在实用上又非常有价值. (当然, Diophantus 已采用了这种符号.) 16 世纪早期的作者如 Pacioli 把未知量称作 *radix*(拉丁文"根")或 *res*(拉丁文"东西"), *cosa*(意大利文"东西")和 *coss*(德文"东西"), 因此, 在当时代数是以"*cossic*"术(意即求根术——译者)之名出现的. Cardan 在他的《重要的艺术》中把未知量称作 *rem ignotam*(不知道的东西). 他把 $x^2=4x+32$ 写作 qdratu aeqtur 4 rebus p: 32①. 他把常数项 32 称作

① Rem 和 rebus 是 res 一字的文法变形.

numero. 名称与记法因人而大有差异，许多符号是从缩写变来的. 例如，字母 R 曾作为未知量的符号之一，因它是 res 的缩写. 二次幂记为 Z(来自 zensus)，称作 quadratum 或 censo. C 取自 cubus，用来表示 x^3.

以后逐渐有人用指数来表示 x 的乘幂. 我们可能记得，指数附在数字上的记法是 Oresme 在 14 世纪时就采用了的. 1484 年 Chuquet 在《三部曲》里用 12^3，10^5 和 120^8 表示 $12x^3$，$10x^5$ 和 $120x^8$. 他又用 12^0 表示 $12x^0$，用 7^{1m} 表示 $7x^{-1}$. 这样，8^3，7^{1m} equals (等于) 56^2 就表示 $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$.

Bombelli 在他的《代数》一书中使用了 tanto 这个字而没有使用 cosa. 他把 x，x^2 和 x^3 写成 $\smile\!\!\!\!1$，$\smile\!\!\!\!2$ 和 $\smile\!\!\!\!3$. 例如，$1+3x+6x^2+x^3$ 就成了 $1p.\,3^{\smile\!\!\!1}\ p.\,6^{\smile\!\!\!2}\ p.\,1^{\smile\!\!\!3}$. 1585 年，Stevin 把这个式子写成 $1^{⓪}+3^{①}+6^{②}+1^{③}$. Stevin 还用分数指数 $\textcircled{\frac{1}{2}}$ 表示平方根，$\textcircled{\frac{1}{3}}$ 表示立方根等等. Claude Bachet de Méziriac (1581—1638) 则喜欢把 x^3+13x^2+5x+2 写成 $1C+13Q+5N+2$. Vieta 也用同样的记法来写数字系数的方程.

Descartes 曾颇为有系统地采用正整数指数. 他把

$$1+3x+6x^2+x^3 \text{ 写成 } 1+3x+6xx+x^3.$$

他和别的人偶尔也用 x^2 这种写法. 对较高的乘幂，他用 x^4，x^5，…来记，但不用 x^n. Newton 使用了正指数、负指数、整数指数和分数指数，如 $x^{5/3}$ 和 x^{-3}. 当 Gauss 在 1801 年采用 x^2 代替 xx 后，x^2 就变成了标准写法.

代数性质上最重大的变革是由 Francois Vieta (1540—1603) 在符号体系方面引入的. 他受的专业训练是律师，曾以这一身份在布列塔尼(Brittany)议会里工作过，以后当那瓦尔的 Henry 亲王的枢密顾问官. 当他由于政治上处于反对派地位于 1584 年至 1589 年间在野时，就献身研究数学. 总的说来，他把数学当作一种

业余爱好,并自己出资印刷和发行他的著作,正如一个作家所说,这办法是使人不致默默无名的一种保证.

Vieta 在精神上和意图上是个人文主义者,他希望自己成为古代数学的保存者、发掘者和继承者.他认为创新就是复古翻新.他把他所著的《分析术引论》(*In Artem Analyticam Isagoge*, 1591)①说成是"一部复古的数学分析著作".他在这书中引述了 Pappus 所著《数学汇编》(*Mathematical Collection*)的第七篇和 Diophantus 的《算术》.他相信古人是用过一般的代数形式来计算的,而他在他的代数里重新引用,所以这只不过是复活了古人已知道和赞许的一种技巧罢了.

Vieta 在他政治生涯的间歇期间研读了 Cardan, Tartaglia, Bombelli, Stevin 和 Diophantus 的著作.他从这些名家特别是从 Diophantus 那里,获得了使用字母的想法.以前虽然也有一些人,包括 Euclid 和 Aristotle 在内,曾用字母来代替特定的数,但他们这种用法不是经常的,是随着兴致所至偶尔用之的.Vieta 是第一个有意识地、系统地使用字母的人,他不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂,而且用来表示一般的系数.通常他用辅音字母表示已知量,用元音字母表示未知量.他把他的符号性代数称作 logistica speciosa(类的筹算术)以别于 logistica numerosa(数的筹算术). Vieta 充分体会到他在研讨一般二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (用我们今天的记法)时,所处理的是整个一类的表达式.Vieta 在他的《引论》中提出 logistica numerosa 和 logistica speciosa 之间的区别时,就规定了算术和代数的分界.他说代数,即所谓 logistica speciosa,是施行于事物的类或形式的一种运算方法;而算术,即所谓 logistica numerosa,是同数打交道的.这样,代数就一下子成为研究一般类型的形式和方程的学问,因为对一般情形的研究包括了无穷多的特殊情形.但 Vieta 只在正数的情形下才用文字系数.

---

① 英译名 *Introduction to the Analytic Art*, 1591 = *Opera*, 1～12.

Vieta 想把古代希腊著作中隐藏在几何形式下的代数恒等式建立起来,而这些关系在他心目中则认为是在 Diophantus 的著作中可以明显看出来的. 事实上如我们在第 6 章中所指出的, Diophantus 曾用他所未曾明确指出的前人的恒等式作过许多代数变换. Vieta 在他所著《分析五篇》(*Zeteticorum Libri Quinque*)①中打算把这些恒等式重新找出来. 他把一个一般二次式配成平方并表达出像

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

这样的一般恒等式,不过他的写法是

$$a \text{ cubus} + b \text{ in } a \text{ quadr. } 3 + a \text{ in } b \text{ quad. } 3 + b \text{ cubo}$$
$$\text{aequalia } \overline{a+b} \text{ cubo.}$$

我们可能以为继 Vieta 之后的数学家会立刻想到采用一般系数. 但根据我们今日的推断,用字母表示各类数的办法被人认为是符号体系发展史上的一件小事. 用文字系数的想法几乎是不知不觉地进入数学的. 不过 Vieta 关于符号体系的想法受到后人的赞赏,并被 Harriot, Girard 和 Oughtred 弄得更加灵活.

对 Vieta 的使用字母作了改进的是 Descartes. 他用字母表中前面的字母表示已知量,用末后的一些字母表示未知量,成为现今的习惯用法. 不过 Descartes 也像 Vieta 那样只在正数的情形下用字母表示,虽然他毫不迟疑地进行了文字系数项的相减. 一直到 John Hudde (1633—1704)在 1657 年用字母来表示正数和负数之后,大家才都这样做. Newton 是放手这样做的.

Leibniz 的名字在符号史上是必须提到的,虽然他在代数上采取这重大步骤的时间较晚. 他对各种记法进行了长期的研究,试用过一些符号,征求过同时代人的意见,然后选取他认为最好的符号. 以后在概述微积分发展史时,我们将碰到他所创立的一些符号. 他肯定认识到好的符号有可能大大节省思维劳动.

---

① *Five Books of Analysis*, 1593 = *Opera*, 41～81.

所以到17世纪末,数学里已特意(而不是偶然或碰巧地)使用符号并认识到它所能赋予的功效和一般性.只可惜那些并不认识符号重要性的人漫不经心而随意引入的符号太多了,而至今却都已通用.数学史家 Florian Cajori 在指出这一事实时曾慨叹说:"我们今日所用的符号,是许多早已摒弃的符号系统中个别残留记号的杂烩."

4. 三次与四次方程的解法

用配方法解二次方程是从巴比伦时代就已经知道的,从那时起直到1500年,这方面的唯一进展是印度人作出的,他们把 $x^2+3x+2=0$ 与 $x^2-3x-2=0$ 那样的二次方程作为同一类型来处理,而他们的前人乃至文艺复兴时期的绝大多数后继者却宁愿把后一个方程作为 $x^2=3x+2$ 的形式来处理.如前所指出的,Cardan 确曾解出一个有复数根的二次方程,但他认为这些解是无用的而未加考虑.至于三次方程,则除了个别情形之外数学家还对之束手无策,直到1494年那么晚近的年月,Pacioli 还宣称一般的三次方程是不可能解的.

1500年左右,波洛尼亚(Bologna)的数学教授 Scipione dal Ferro (1465—1526)解出了 $x^3+mx=n$ 类型的三次方程.但他没有发表他的解法,因在16、17世纪时,人们常把所得的发现保密,而向对手们提出挑战,要他们解出同样的问题.但在1510年左右,他确曾把他的方法秘传给 Antonio Maria Fior(16世纪前半叶)和他的女婿兼继承人 Annibale della Nave (1500? —1558).

直到布雷西亚(Brescia)的 Niccolò Fontana (1499? —1557)出场之前,情况没有什么变化.这人在孩提时被一个法国兵用马刀砍伤脸部而引起口吃,因此大家称他为 Tartaglia,意即"口吃者".他出身贫寒,自己学会拉丁文、希腊文和数学.他靠着在意大利各

城市讲授科学谋生. 1535 年,Fior 向 Tartaglia 挑战,要他解 30 个三次方程. Tartaglia 说他早已解出了 $x^3 + mx^2 = n$ (m 与 n 是正数)类型的三次方程,这次解出了所有 30 个方程,其中包括 $x^3 + mx = n$ 类型的方程.

在 Cardan 的恳切要求之下,并发誓对此保守秘密,Tartaglia 才把他的方法写成一首语句晦涩的诗告诉给 Cardan. 这是 1539 年的事. 1542 年 Cardan 和他的学生 Lodovico Ferrari (1522—1565)在 della Nave 访问他们的时候,肯定认为 dal Ferro 的方法同 Tartaglia 的方法是相同的. Cardan 不顾他的誓言,把他对这个方法的叙述发表在他的《重要的艺术》里. 他在第十一章里说:"波洛尼亚的 Scipio Ferro 差不多在 30 年以前就发现了这个法则,并把它传给威尼斯(Venice)的 Antonio Maria Fior, Fior 在他与布雷西亚的 N. Tartaglia 竞赛的时候使 Tartaglia 有机会发现这一法则. Tartaglia 在我的恳求下把这方法告诉了我,但保留了证明. 我在获得这种帮助的情况下找出了它的各种形式的证明. 这是很难做的. 我把它叙述如下."

Tartaglia 抗议 Cardan 背信弃义,并在《各种问题与发明》(*Quesiti ed invenzioni diverse*, 1546)中发表了他自己的方法. 但是无论在这本书中还是在他的《数量概论》(1556)(这是阐释那个时代的算术知识和几何知识的一本好书)中,他都没有给出关于三次方程本身的更多材料. 关于谁先解出三次方程的争议使 Tartaglia 与 Ferrari 发生公开冲突,最后以双方肆意谩骂而告终,但 Cardan 并未参与其中. Tartaglia 自己也不是无可非议的,他出版了 Archimedes 的一些著作的译本,实则是抄自 William of Moerbecke(卒于 1281 年左右)的,并且他自称发现了物体沿斜面运动的规律,但实际上这是 Jordanus Nemorarius 创立的.

在 Cardan 所发表的方法中,他先以 $x^3 + 6x = 20$ 为例. 但为说明这个方法的一般性,我们来考察

$$(4)\qquad x^3 + mx = n,$$

其中 m 与 n 是正数. Cardan 引入 t 与 u 两个量,并令

$$(5)\qquad t - u = n,$$

以及

$$(6)\qquad (tu) = \left(\frac{m}{3}\right)^3.$$

然后他断言

$$(7)\qquad x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}.$$

他利用(5)及(6)进行消元并解所得的二次方程,得出

$$(8)\; t = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2},\quad u = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}.$$

这里我们也像 Cardan 那样取正根. 求出了 t 和 u 后,Cardan 取两者的正立方根,并用(7)给出 x 的一个值. 据认为这就是 Tartaglia 所得出的同一个根.

以上是 Cardan 发表的方法. 不过他得证明(7)给出的是 x 的一个正确的值,他的证明是用几何方法的. Cardan 把 t 和 u 看成立方体的体积,其边长各为 $\sqrt[3]{t}$ 和 $\sqrt[3]{u}$,而乘积 $\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u}$ 是两边所形成的矩形,其面积为 $m/3$. 又,我们所说的 $t-u=n$ 对 Cardan 说是两个体积之差等于 n. 于是他说解 x 就等于两立方体边长之差,即 $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$. 为证明这 x 值是对的,他叙述并证明一个几何引理,这就是:若从一根线段 AC(图 13.2)上截去一段 BC,则 AB 上的立方体等于 AC 上的立方体减去 BC 上的立方体再减去以 AC, AB 及 BC 为边的正平行六面体. 这个几何引理的内容当然只不过是说

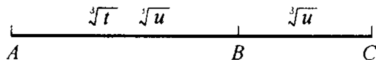


图 13.2

$$(9)\qquad (\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u})^3 = t - u - 3(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u})\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u}.$$

有了这个引理(应用二项式定理,我们知道这引理必然成立,但 Cardan 是引用 Euclid 书中的定理来证明的),Cardan 就只要证

明：若设 $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$，$t-u=n$ 以及 $\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u}=\frac{m}{3}$，则从引理便得 $x^3=n-mx$. 于是，如果他选取了 t 和 u 使之能满足条件(5)与(6)，则(7)所给出的以 t 与 u 表达的 x 值就能满足三次方程. 然后他纯粹用语言叙述这方法的算术规则，告诉我们怎样按照(8)用 m 及 n 表示 t 及 u 并作出 $\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$.

Cardan(还有 Tartaglia)又解出了下列三种特殊类型的方程：

$$x^3=mx+n,\ x^3+mx+n=0,\ x^3+n=mx.$$

他需要把这三种情形都分别处理，并且把三者同方程(4)分别处理，原因是，第一，那时候欧洲人写的方程中只含正数的项；第二，他得对每种情形所用的法则分别给出几何上的说明.

Cardan 还给出怎样解 $x^3+6x^2=100$ 这类方程的方法. 他知道怎样消去 x^2 项，即，由于该项的系数是 6，他以 $y-2$ 代 x，得出 $y^3=12y+84$. 他还指出像 $x^6+6x^4=100$ 这样的方程在设 $x^2=y$ 后可作为三次方程来处理. 他在书中自始至终都给出正根和负根，尽管他把负数称作虚拟的数. 但对复数根他是略而不提的. 事实上，他在第 37 章中把那些既解不出真根(正数根)又不能解出假根(负数根)的问题称作错题. 书中讲得很详细——对现代读者来说甚至腻人——因为 Cardan 把许多情形(不仅是对于三次方程，而且对于那些为求 t 及 u 而必须解出的辅助二次方程)都一一分别处理. 在每种情形下，他把方程都写成各项有正系数的形式.

Cardan 解三次方程的方法中有一个疑难点，他对此虽然指出了但并未解决. 当三次方程的三个根都是实根而且各不相同时，可以证明 t 和 u 将是复数，因为(8)中的被开方数是负数，然而我们却需要用 $\sqrt[3]{t}$ 和 $\sqrt[3]{u}$ 来求得 x. 这就意味着实数可以用复数的立方根来表示. 但这三个实根却不能用代数方法(也就是用根式)得出. 这种情形 Tartaglia 称之为不可约的. 我们也许以为，实数既能用复数组合来表示，这件事可能会使 Cardan 认真看待复数，但事实

并非如此.

Vieta 在他著于 1591 年并出版于 1615 年的《论方程的整理与修正》(*De Aequationum Recognitione et Emendatione*)中①,已能用一个三角恒等式解出了不可约三次方程,从而避免使用 Cardan 的公式. 这个方法如今还在用. 他从下列恒等式开始:

$$(10)\qquad \cos 3A \equiv 4\cos^3 A - 3\cos A.$$

令 $z = \cos A$,这恒等式就变为

$$(11)\qquad z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}\cos 3A \equiv 0.$$

设所给三次方程是(Vieta 处理的是 $x^3 - 3a^2x = a^2b$, 其中 $a > b/2$)

$$(12)\qquad y^3 + py + q = 0.$$

代入 $y = nz$, 其中 n 可按需要指定,便可使(12)的系数化成同(11)的系数一样. 将 $y = nz$ 代入(12),得

$$(13)\qquad z^3 + \frac{p}{n^2}z + \frac{q}{n^3} = 0.$$

现在我们需要取 n 使 $p/n^2 = -3/4$, 故

$$(14)\qquad n = \sqrt{-4p/3}.$$

选取了这个 n 值后,再取 A 值使

$$(15)\qquad \frac{q}{n^3} = -\frac{1}{4}\cos 3A,$$

也就是使

$$(16)\qquad \cos 3A = -\frac{4q}{n^3} = \frac{-q/2}{\sqrt{-p^3/27}}.$$

我们可证明:若三根是实数,则 p 是负数,因而 n 是实数. 又因 $|\cos 3A| < 1$, 故可从三角函数表查出 $3A$.

不管 A 取何值,$\cos A$ 总满足(11),因(11)是个恒等式. 现已选取 A 使(13)成为(11)的特例. 对于这个 A 值,$\cos A$ 满足(13). 但 A 值是由(16)确定的,而这 A 又确定了 $3A$. 但若 A 是满足(16)的任一值,则 $A+120°$ 及 $A+240°$ 也满足(16). 因 $z = \cos A$,故有

① 英译名:On the Review and Correction of Equations, *Opera*, 82～162.

三个值满足(13)：

$$\cos A,\ \cos(A+120°)\ 及\ \cos(A+240°).$$

满足(12)的那三个值是 z 值的 n 倍，而 n 是由(14)给出的. Vieta 得出的只是一个根.

三次方程当然有三个根. 对 Cardan 的三次方程解法的第一个完整的讨论是 1732 年由 L. Euler 作出的，他强调指出三次方程总有三个根，并指出怎样去求①. 若 ω 和 ω^2 是 $x^3-1=0$ 的复数根，也就是说，是 $x^2+x+1=0$ 的根，则(8)中 t 和 u 的三个立方根是

$$\sqrt[3]{t},\ \omega\sqrt[3]{t},\ \omega^2\sqrt[3]{t}\text{和}\sqrt[3]{u},\ \omega\sqrt[3]{u},\ \omega^2\sqrt[3]{u}.$$

现在必须从第一组里选取一根，从第二组里选取一根，使两者的乘积是实数 $m/3$.（参看 Cardan 解法中的方程(6).）因 ω 与 ω^2 是 1 的立方根，$\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1$；故据(7)可知合适选取的 x 应为

$$(17)\qquad \begin{cases} x_1=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u},\ x_2=\omega\sqrt[3]{t}-\omega^2\sqrt[3]{u},\\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{t}-\omega\sqrt[3]{u}.\end{cases}$$

三次方程成功地解出之后接着几乎立即成功地解出了四次方程. 解法是 Lodovico Ferrari 给出的并发表在 Cardan 的《重要的艺术》中，这里我们用现代的记号把它写出来并用文字系数以示其普遍性. 设方程是

$$(18)\qquad x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.$$

移项后得

$$(19)\qquad x^4+bx^3=-cx^2-dx-e.$$

在左边加上 $\left(\frac{1}{2}bx\right)^2$ 配成平方. 得

$$(20)\qquad \left(x^2+\frac{1}{2}bx\right)^2=\left(\frac{1}{4}b^2-c\right)x^2-dx-e.$$

两边再加上 $\left(x^2+\frac{1}{2}bx\right)y+\frac{1}{4}y^2$，得

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrog.*, 6, 1732/1733, 217～231, pub. 1738 = *Opera*, (1), 6, 1～19.

$$(21)\quad \left(x^2+\frac{1}{2}bx\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{2}bx\right)y+\frac{1}{4}y^2 = \left(\frac{1}{4}b^2-c+y\right)x^2+\left(\frac{1}{2}by-d\right)x+\frac{1}{4}y^2-e.$$

若使右边这个 x 的二次式的判别式等于零,就能使这一边成为 x 的一次式的完全平方. 于是设

$$(22)\quad \left(\frac{1}{2}by-d\right)^2-4\left(\frac{1}{4}b^2-c+y\right)\left(\frac{1}{4}y^2-e\right)=0.$$

这是 y 的一个三次方程. 选取这三次方程的任一个根代入(21)中的 y. 根据左边也是个完全平方这一事实,取平方根,得到 x 的一个二次式,它等于 x 的两个互为正负的线性函数之一. 解出这两个二次方程便得到 x 的 4 个根. 若从(22)选取另一个根就会从(21)引出一个不同的方程但得到同样的四个根.

Cardan 在《重要的艺术》的第 39 章里讲述 Ferrari 的方法时解出了许多数字系数的特例. 例如,他解出了下列类型的方程:

$$x^4=bx^2+ax+n,\qquad x^4=bx^2+cx^3+n,$$
$$x^4=cx^3+n,\qquad x^4=ax+n.$$

同讲述三次方程的情形一样,他给出了主要代数步骤的几何证明,然后用语言叙述求解的法则.

Cardan, Tartaglia, Ferrari 通过解出三次和四次方程的许多例子,表明他们曾寻求并获得能用之于一切情况的求解三次和四次方程的方法. 注重一般性是一种新的特色. 他们的工作做在 Vieta 引用文字系数之前,所以不能利用这个工具. Vieta 在创用文字系数之后使证明有可能获得普遍意义,又进而追求另一类普遍性. 他发现解二次、三次和四次方程的方法很不相同,就想找一种能适用于各次方程的方法. 他的头一个想法是用置换法消去比最高次项次数小一次的项. Tartaglia 对三次方程这样做了,但并未对所有方程都这样试做过.

Vieta 在他的《分析术引论》中做了如下的步骤:为解二次方程

$$x^2 + 2bx = c,$$

他让

$$x + b = y.$$

于是

$$y^2 = x^2 + 2bx + b^2.$$

利用原方程,得

$$y = \sqrt{c + b^2}.$$

于是

$$x = y - b = \sqrt{c + b^2} - b.$$

对于三次方程

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

Vieta 先设 $x = y - b/3$. 置换结果得约简三次方程

$$y^3 + py + q = 0. \tag{23}$$

其次他再作一次变换,那就是如今在学校里所教的,就是令

$$y = z - \frac{p}{3z}, \tag{24}$$

得

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0.$$

然后他解出这 z^3 的二次方程,得

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}, \text{其中 } R = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

这里也同 Cardan 的方法一样,有两个 z^3 的值. Vieta 虽然只用了 z^3 的正立方根,但我们可以用所有六个(复数)根. 应用(24)的结果可以证明从六个 z 值只能得出三个不同的 y 值.

为解一般四次方程

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

Vieta 设 $x = y - b/4$, 于是把方程化为

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

然后他把末后三项移到右边并在两边加上 $2x^2y^2 + y^4$. 这就使左

边配成完全平方，然后也像 Ferrari 的方法那样，适当选取 y，使右边成为形如 $(Ax+B)^2$ 的完全平方. 为选取合适的 y，他利用二次方程的判别式条件，得出 y 的一个六次方程而且凑巧还是 y^2 的三次方程. 这一步以及其余各步就完全和 Ferrari 的方法一样了.

Vieta 所探求的另一个一般性方法是把多项式分解成一次因子，如同我们把 x^2+5x+6 分解成 $(x+2)(x+3)$ 那样. 这事他没有做成功，部分原因是他只取正根而舍弃其他一切根，部分原因是他没有足够的理论(如分解因子定理)作为依据来搞出一般方法. Thomas Harriot 也有同样想法但也由于同样原因而归于失败.

寻求一般代数方法的工作接着就转向解四次以上的方程. James Gregory 在提出他自己的解三次及四次方程的方法后，便试图用这些方法来解五次方程. 他和 Ehrenfried Walter von Tschirnhausen (1651—1708)想通过变换把高次方程化为只含 x 的一个乘幂和一个常数那么两项的方程. 解四次以上的方程的这些尝试都失败了. Gregory 在其后关于积分法的著作中猜测，对 $n>4$ 的一般 n 次方程是不能用代数方法求解的.

5. 方　程　论

研究解方程的方法，得出了如今初等方程论里所学的一些有关定理和事实. 当时人们考虑了一个方程能有多少个根的问题. Cardan 引入了复数根，他似曾一度认为一个方程可以有任意个数的根. 但他不久认识到一个三次方程能有 3 个根，一个四次方程有 4 个根等等. Albert Girard 在他的《代数新发现》中推测并断言一个 n 次多项式方程，如果把不可能的根(即复数根)算在内并把一个几重根算作几个根，那它就有 n 个根. 但 Girard 没有给出证明. Descartes 在《几何》(*La Gèomètrie*)的第三篇中说，一个多少次的

方程就能有多少个不同的根. 他说"能有"是因他认为负根是假根. 其后为了便于计算根的个数,他把虚根和负根包括在内,从而得出结论说根的个数同方程的次数一样多.

次一个重要的问题是怎样预知正根、负根和复根的个数. Cardan 指出一个(实系数)方程的复根是成对出现的. Newton 在他的《普遍的算术》里证明了这一点. Descartes 在《几何》里未加证明地陈述了正负号法则(通称 Descartes 法则),即多项式方程 $f(x) = 0$ 的正根的最多个数等于系数变号的次数,而负根的最多个数等于两个+号与两个-号连续出现的次数. 在今日的教科书里,后一个法则的说法是:负根的最多个数等于 $f(-x) = 0$ 里的系数变号次数. 这法则被好几个 18 世纪的数学家所证明. 现今通常教给学生的证法是 Abbé Jean-Paul de Gua de Malves (1712—1785)作出的,他还证明,若方程中缺少 $2m$ 个先后相继的项,则按所缺项的前后那两项之为同号或异号,可知该方程有 $2m+2$ 个或 $2m$ 个复数根.

Newton 在他的《普遍的算术》中叙述(但未证明)了确定正和负的实根的最多个数的另一个方法,从而能推出复数根至少能有多少个. 这方法用起来较繁复,但比 Descartes 的正负号法则能给出更好的结果. 最后 Sylvester 证明这不过是一个更普遍定理的特例①. Gauss 在略早一些的时候证明,若正根个数少于变号次数,则所少的个数必为偶数.

另一类结果是关于方程的根和系数之间的关系. Cardan 发现诸根之和等于 x^{n-1} 的系数取负值,每两个根的乘积之和等于 x^{n-2} 的系数,等等. Cardan 和 Vieta(在《论方程的整理与修正》中)都利用低次方程的根与系数间的头一个关系,按照前述方式来消去多项式方程中的 x^{n-1} 项. Newton 在他的《普遍的算术》中叙述了根与系数间的关系;James Gregory 在给皇家学会秘书 John Collins

① *Proc. London Math. Soc.*, 1,1865, 1 ~ 16 = *Math. Papers*,2,498~513.

(1625—1683)的一封信中也说了这事.但这些人里面谁也没有给出证明.

Vieta 和 Descartes 从已给方程作出新的方程,使新方程的根大于或小于已给方程的根.做法只不过是把 x 换成 $y+m$ 就行.他们两人又都用变换 $y=mx$ 把已给方程化成一个新方程,使新方程的根是原方程根的 m 倍.对 Descartes 来说,前一种变换的意义先前已讲过,就是可以把假(负)根变成真(正)根,或者反过来.

Descartes 又证明:若一有理系数的三次方程有一个有理根,则此多项式可表为有理系数因子的乘积.

另一个重要结果就是现今所谓因子定理. Descartes 在《几何》的第三篇中提出:$f(x)$能为 $(x-a)$ 整除($a>0$),当且仅当 a 是 $f(x)=0$ 的一个根;而且当 a 是一个假根时,$f(x)$能为 $(x+a)$ 整除.利用这一事实以及他所提出的其他事实,Descartes 建立了求多项式方程有理根的现代方法.他在把最高项系数化成 1 之后,把所给方程的诸根乘以合适的因子,使所有系数都变成整数.这就是利用他给出的方法,把方程中的 x 换成 y/m.这时原方程的各有理根必定是新方程常数项的整数因子.如果通过试算得出 a 是一个根,则根据因子定理,$y-a$ 必是 y 的新多项式的一个因子.Descartes 指出,若消去这个因子,就可减小方程的次数,然后再处理这化简后的方程.

Newton 在《普遍的算术》中以及别的一些较早的人给出了关于方程根的上界的一些定理.其中有个定理牵涉到微积分,我们将在第 17 章(第 7 节)中叙述. Newton 发现了一个方程的根与其判别式之间的关系,例如,$ax^2+bx+c=0$,依 b^2-4ac 之等于 0,大于 0 或小于 0,而具有相等的根,实根或虚根.

Descartes 在《几何》中引入了待定系数的原理.这原理可举例说明如下:为把 x^2-1 分解成两个线性因子,先设

$$x^2-1=(x+b)(x+d).$$

把右边乘出来,再使两边 x 同幂项的系数相等,得

$$b+d=0,$$

$$bd=-1.$$

这就可以解出 b 和 d. Descartes 强调指出这一方法的用处很大.

另外一个方法,数学归纳法,也在 16 世纪晚期明确出现在代数里. 当然,甚至在 Euclid 证明质数个数无穷时就已隐含有这个方法. 他在证这定理时,指出若有 n 个质数,就必有 $n+1$ 个质数;而由于既有第一个质数,故质数的个数必为无穷. Maurolycus 在 1575 年所著《算术》(*Arithmetica*)中明确提出这一方法并用它来证明(比方说) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Pascal 在一封信中承认 Maurolycus 引入了这个方法并在他的《三角阵算术》(*Traité du triangle arithmétique*, 1665)中使用了这个方法,他在该书中还给出了现今所谓的 Pascal 三角阵(第 6 节).

6. 二项式定理及相关的问题

指数为正整数时的二项式定理,即 $(a+b)^n$ 在 n 为正整数时的展开式,那是 13 世纪时的阿拉伯人就已经知道了的. 在 1544 年左右, Stifel 引入了"二项式系数"这个名称,并指出怎样从 $(1+a)^{n-1}$ 来计算 $(1+a)^n$. 按下列方式排列的数阵:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

(其中每个数是其上方紧邻两数之和)是 Tartaglia, Stifel 和

Stevin都已知道的，并被Pascal (1654)用来得出二项展开式的系数. 例如，第四行中的数就是$(a+b)^3$的展开式中的系数. 尽管许多前人早就知道这个数阵，但一般仍称它为Pascal三角阵.

Newton在1665年指出可以不必利用$(1+a)^{n-1}$而直接展出$(1+a)^n$. 后来他深信这展开式对n为分数与负数的情形都适用(在这种情况下它是无穷级数)，并陈述了这个推广，但未加证明. 他验算了$(1+x)^{1/2}$的级数自乘得出$1+x$，但他和James Gregory (他独立发现这个定理)都不觉得需要一个证明. Newton在1676年6月6日和10月4日写给皇家学会秘书Henry Oldenburg(约1615—1677)的两封信中，把他早在1669年前就知道的那个更为一般的结果，即$(P+PQ)^{m/n}$的展开式，告诉了Oldenburg. 他觉得这是求根的一个有用的方法，因为若Q小于1(P先提出到括号外)，则后面各项都是Q的乘幂，数值就愈来愈小.

n个东西每次取r个的排列数和组合数的公式，起初是和二项式定理方面的工作无关的，它们早就出现在一些数学家如Bhāskara和法国人Levi ben Gerson (1321)的著作中. Pascal指出组合公式——常记为${}_nC_r$或$\binom{n}{r}$——也能给出二项式系数. 这就是，固定n，使r取0到n的值，这公式就给出二项展开式中相继各系数. James Bernoulli在他的《推想的艺术》(*Ars Conjectandi*, 1713)中推广了组合理论，然后用组合公式证明了n为正整数时的二项式定理.

排列和组合方面的工作还同另一门学科概率论有关. 概率论在19世纪晚期变得很重要，但在16、17世纪中只值得略加一提. 关于两个骰子掷出一特定数的概率问题，早在中世纪就已有人提出. 另一个问题是关于怎样分配一笔赌注的问题. 设有甲乙两人相赌，谁先得n分就能获得赌注，但在甲得p分乙得q分之时赌局中止. 怎样分配这笔赌注呢？这个问题曾出现在Pacioli的《要义》以

及 Cardan，Tartaglia 和其他人的一些书中. 当 Antoine Gombaud 和 Chevalier de Méré (1610—1685)向 Pascal 提出这一问题，并由 Pascal 和 Fermat 通信讨论之后，这个问题才显得有点重要. 这问题和各人提出的解法本身并不重要，但他们在这方面的工作标志了概率论的开始. 他们都应用了组合理论.

概率论方面的第一本重要著作是 Bernoulli 的《推想的艺术》. 现时仍称为 Bernoulli 定理的那个当时最重要的新结果是：若 p 是出现单独一次事件的概率，q 是该事件不出现的概率，则在 n 次试验中该事件至少出现 m 次的概率，等于 $(p+q)^n$ 的展开式中从 p^n 项到包括 $p^m q^{n-m}$ 为止的各项之和.

7. 数　　论

实际事务的需要促使人们在计算上、在符号体系上和在方程的理论上取得进展，而对纯数学问题的兴趣则重新引起在数论方面的研究. 这门学科当然是古希腊人开头搞的，Diophantus 又增添了不定方程的问题. 印度人和阿拉伯人至少没有使这门学科湮没无闻. 虽然前述文艺复兴时代几乎所有的代数学家都在数论方面作出一些猜测和指出一些事实，但第一个对数论作出广泛可观的贡献并给这门学科以巨大推动力的欧洲人是 Pierre de Fermat (1601—1665).

Fermat 出身于商人家庭，在法国图卢兹(Toulouse)学法律并以当律师谋生. 他一度是图卢兹议会的顾问. 虽然数学只不过是 Fermat 的业余爱好，而且他只能利用闲暇来研究，但他对数论和微积分作出了第一流的贡献，他是坐标几何的两个发明者之一，并且(如前所述)同 Pascal 一起开创了概率论的研究工作. 同他那个世纪的所有数学家一样，他研究了许多科学问题，对光学作出了不朽的贡献：Fermat 极小(时间)原理(第 24 章第 3 节). 他的大多数

工作是通过他写给朋友的信件闻名于后世的.他只发表了很少几篇论文,但有些书和论文是在他死后刊印发表的.

Fermat 认为数论被人忽视了.他有一次抱怨说几乎没有什么人提出或懂得算术问题,并提出:"这是不是由于迄今为止,人们都用几何观点而不是用算术观点来处理算术的缘故?"他说甚至连 Diophantus 也颇受几何观点的束缚.他相信算术有它自己的特殊园地:整数论.

Fermat 在数论上的工作决定了在 Gauss 作出贡献之前这门学科的研究方向.Fermat 的出发点是 Diophantus.后者的《算术》曾被文艺复兴时代的数学家翻成许多译本.1621 年 Bachet de Méziriac 出版了希腊文版和拉丁文译本.Fermat 手头有的就是这个版本,他的大部分结果都是由他记录在书页空白处的(不过有很少几个结果是通过给朋友的信传出去的).1670 年 Fermat 的儿子出版了附有他页边笔记的这本书.

Fermat 提出了数论方面的许多定理,但只对一个定理作出了证明,而且这证明也只是略述大意.18 世纪的最出色的数学家曾努力想证明他所提出的结果(第 25 章第 4 节).这些结果被证明都是正确的,只有一个是错的(以后即将指出),其中还有一个迄今尚未证明的著名"定理",所有迹象都说明它可能是成立的.[此即 Fermat 大定理,1994 年被英国数学家 Andrew Wiles(1953—)证明.——译者注]他无疑具有伟大的直观天才,但若要说他已证明了他所指出的所有结论则未必可信.

1879 年在 Huygens 的故纸堆中发现一个文件,其中叙述了一个著名的方法——无限下推法(the method of infinite descent),这是 Fermat 首创和应用的一个方法.为说明这个方法,我们来考察 Fermat 在 1640 年 12 月 25 日给 Marin Mersenne (1588—1648)的信中所提出的一个定理:形如 $4n+1$ 的一个质数可能而且只能以一种方式表达为两个平方数之和.例如 $17=16+$

1, 29 = 25 + 4. 应用这一方法时，我们要证，若有形如 $4n+1$ 的一个质数并不具有所需性质，那就将有形如 $4n+1$ 的一个较小质数也不具有那个性质. 于是，由于 n 是任意的，所以还必须有一个更小的. 这样通过 n 的正整数值往下推就必定能推到 $n=1$，从而推到质数 $4\cdot 1+1=5$. 于是 5 就不能具有所需性质. 而由于 5 能以唯一方式表达为两个平方数之和，因而每个形如 $4n+1$ 的质数都能这样表达. Fermat 在 1659 年把他这个方法的梗概写信告诉他的朋友 Pierre de Carcavi(卒于 1684 年). Fermat 说他用这方法证明了上述定理，但后人从未找到他的证明. 他又说他用这个方法还证明了其他一些定理.

无穷下推法和数学归纳法不同. 第一是这方法并不要求我们验证出哪怕是一个例子来说明所说定理成立，因为我们可以根据 $n=1$ 时的情况只会导出与某一其他已知结果相矛盾的这一事实，来作出论断. 还有，在对一个 n 值作了适当的假定后，这方法证明，还有一个较小的但未必就是次小的 n 值，也能使所作假定成立. 最后一点是，这方法否定了某些论断，所以事实上它在这方面是更为有用的.

Fermat 又断言没有一个形如 $4n+3$ 的质数能表达为两个平方数之和. Fermat 在他的 Diophantus 书页上的侧记中以及在写给 Mersenne 的一封信中，推广了著名的直角三角形的 3, 4, 5 关系，指出了如下一些定理：形如 $4n+1$ 的一个质数能够而且只能作为一个直角边为整数的直角三角形的斜边；$(4n+1)$ 的平方是两个而且只有两个这种直角三角形的斜边；它的立方是三个而且只有三个这种直角三角形的斜边；它的四次方是四个而且只有四个这种直角三角形的斜边，如此等等，乃至无穷. 例如，我们来看 $n=1$ 的情形. 这时 $4n+1=5$，而 3, 4, 5 是一个而且只有一个以 5 为斜边的直角三角形的边. 然而以 5^2 为斜边的则有两个而且只有两个，它们的边长分别是：15, 20, 25 及 7, 24, 25. 又以 5^3 为斜边的

直角三角形有且仅有三个,它们的边长分别是:75, 100, 125; 35, 120, 125 和 44, 117, 125.

Fermat 在给 Mersenne 的信中说,这 $4n+1$ 型的质数和它的平方都只能以一种方式表达为两个平方数之和;它的三次方和四次方都能以两种方式;它的五次方和六次方都能以三种方式,如此等等,乃至无穷. 例如,当 $n=1$ 时有 $5=4+1$ 及 $5^2=9+16$; $5^3=4+121=25+100$, 等等. 信中接着说:若等于两平方数之和的一个质数乘以另一个也是这样的质数,则其乘积将能以两种方式表达为两个平方数之和. 若第一个质数乘以第二个质数的平方,则乘积将能以三种方式表达为两个平方数之和;若乘以第二个质数的立方,则乘积将能以四种方式表达为两个平方数之和,如此等等,乃至无穷.

Fermat 指出了关于将质数表达为 x^2+2y^2, x^2+3y^2, x^2+5y^2, x^2-2y^2 以及其他这类形式的许多定理,它们都是关于质数表达为平方和定理的推广. 例如 $6n+1$ 型的每个质数可表为 x^2+3y^2; $8n+1$ 及 $8n+3$ 型的每个质数可表为 x^2+2y^2. 一个奇质数(除 2 以外的每个质数)能且只能以一种方式表为两个平方数之差.

Fermat 所提出的有两个定理被后人称为小定理和大定理,后者又被人称为最后定理. 小定理是 Fermat 在 1640 年 10 月 18 日给他朋友 Bernard Frénicle de Bessy(1605—1675)的一封信中传出去的,这定理说,若 p 是个质数而 a 与 p 互质,则 a^p-a 能为 p 整除.

Fermat 大"定理"是他相信自己已经证明了的. 这定理说,对 $n>2$, $x^n+y^n=z^n$ 不可能有正整数解. 这定理写在 Diophantus 书上 Diophantus 问题(把已给平方数分解为两个平方数之和)的旁边. Fermat 还写道:"然而此外,一个立方数不能分解为两个立方数,一个四次方数不能分解为两个四次方数,而一般说除平方以外的任何次乘幂都不能分解为两个同次幂. 我发现了这定理的一个真正奇妙的证明,但书上空白的地方太少,写不下."可惜的是,

Fermat 的证明(要是他真正有的话)从未被人找到过,而后代上百名最优秀的数学家都未能给予证明. Fermat 在致 Carcavi 的一封信中说他已用无穷下推法证明了 $n = 4$ 的情形,但并未给出全部证明细节. Frénicle 利用 Fermat 的少量提示,确实在 1676 年给出了对这一情形的证明,发表在他死后出版的《论直角三角形的数字性质》(*Traité des triangles rectangles en nombres*)一书中①.

这里,我们跨越时代提一下后日的事:Euler 证明了 $n = 3$ 的情形(第 25 章第 4 节). 因定理对 $n=3$ 成立,故它对 3 的任何倍数也都成立;因若它在 $n = 6$ 时不成立,则将会有这样的整数 x, y, z 使

$$x^6 + y^6 = z^6.$$

但那样就有

$$(x^2)^3 + (y^2)^3 = (z^2)^3,$$

从而定理就会对 $n = 3$ 不能成立. 于是我们知道 Fermat 定理对无穷多个 n 值是成立的,但仍不知道它对所有的 n 值是否都成立. 事实上我们只需要对 $n = 4$ 以及对 n 为一个奇质数的情形证明这定理就可以了. 因若先假定 n 是个不能被一个奇质数整除的数,那它必是 2 的一个乘幂,而由于它大于 2,所以它必是 4 或能被 4 所整除的数. 令 $n = 4m$. 于是方程 $x^n + y^n = z^n$ 就变成

$$(x^m)^4 + (y^m)^4 = (z^m)^4.$$

若定理对 n 不成立,那它对 $n=4$ 也不成立. 故若它对 $n=4$ 成立,它就对所有不能被奇质数整除的 n 都成立. 若 $n = pm$ 而 p 是个奇质数,则若定理对 n 不成立,那它对指数 p 也不会成立. 故若对 $n = p$ 成立,那它对能为奇质数整除的任何 n 都成立.

Fermat 确也出过错. 他相信他已经解决了那个老问题:列出一个对各种 n 值都能得出质数的公式. 如今不难证明:除非 m 是 2 的乘幂, 2^m+1 不可能是个质数. 从 1640 年起②,Fermat 在许多信

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 5, 1729, 83～166.

② *Œuvres*, 2, 206.

中提出了这个问题的逆命题,即 $2^{2^n}+1$ 表达一系列的质数——虽然他承认他不能证明这个断言.以后他又怀疑这断言的正确性.迄今为止,已知这公式给出的质数只有五个:3, 5, 17, 257 以及 65 537.(参看第25章第4节.)

Fermat 用无穷下推法提出并概括地证明了[①]下述定理:边长为有理数的直角三角形的面积不可能是一个平方数.这个概括的证明是他唯一详细写出的证明,而且是作为 $x^4+y^4=z^4$ 不可能有整数解的一个推论得出的.

关于多边形数,Fermat 在他的那本 Diophantus 的书上提出了一个重要定理:每个正整数或者本身是一个三角形数,或者是两个或三个三角形数之和;每个正整数或者本身是个正方形数,或者是 2, 3 或 4 个正方形数之和;每个正整数或者本身是个五边形数,或者是 2, 3, 4 或 5 个五边形数之和;以及对较高的多边形数的类似关系.这些结果只有在我们把 0 和 1 都归入多边形数之后才能成立,而证明它们需要做大量的工作.Fermat 声称他用无穷下推法证明了它们.

我们知道完全数是希腊人曾经研究过的,Euclid 还给出了基本的结果: $2^{n-1}(2^n-1)$ 在 2^n-1 为质数时是个完全数.对 $n=2$, 3, 5 和 7, 2^n-1 之值是质数,故 6 28 496 及 8 128 是完全数(如 Nichomachus 所指出的).在1456年的一份手稿中正确给出第五个完全数是 33 550 326;这是相应于 $n=13$ 的完全数.Hudalrich Regius 在他的《摘录》(*Epitome*, 1536)中也给出了这第五个完全数.Pietro Antonio Cataldi (1552—1626)在1607年指出 2^n-1 在 n 为复合数时是复合数,并验证出 2^n-1 在 $n=13$, 17 及 19 时是质数.1664年 Marin Mersenne 举出了其他一些完全数.Fermat 也搞过完全数的问题.他考察了什么时候 2^n-1 是个质数,并在1640年6月致 Mersenne 的一封信中提出了下面这些定理:(a)若 n 不是质数,

① *Œuvres*, 1, 340; 3, 271.

则 $2^n - 1$ 也不是质数.(b)若 n 是质数,则 $2^n - 1$ 在可能为他数所整除的情形下只能为 $2kn + 1$ 型的质数所整除. 现今所知的完全数约有 30 个. 至于是否存在奇完全数的问题尚为悬案.

Fermat 在 1636 年重新发现 Tâbit ibn Qorra 第一个提出的法则,给出了第二对亲和数 17 296 及 18 416(第一对亲和数 220 及 284 是 Pythagoras 给出的),Descartes 在致 Mersenne 的一封信中给出了第三对亲和数 9 363 584 和 9 437 056.

Fermat 重新发现了求解 $x^2 - Ay^2 = 1$ 的问题,其中 A 是整数但非平方数. 这问题在希腊人和印度人中间有久远的历史. Fermat 在 1657 年 2 月致 Frénicle 的一封信中提出一个定理: $x^2 - Ay^2 = 1$ 在 A 是正数而非完全平方时有无穷多个解①. Euler 把这方程误称为 Pell 方程,这名称流传到今天. Fermat 在同一封信中②向所有数学家挑战,要求他们求出无穷多个整数解. Brouncker 勋爵给出了解,但并未证明解有无穷多个. Wallis 则全部解出了这个问题. 并在 1657 年及 1658 年的信③中以及在他的《代数》的第 98 章中给出了解法. Fermat 又说他能指出:对于给定的 A 和 B, $x^2 - Ay^2 = B$ 在什么情况下可解,并能把它解出来. 我们并不知道 Fermat 是怎样解这两个方程的,尽管他在 1658 年的一封信中说他是用下推法解第一个方程的.

8. 代数同几何的关系

我们可以看出,代数在 16、17 世纪中得到巨大的发展. 由于把它同几何捆在一起,故在 1500 年以前人们认为三次以上的方程是不现实的. 当数学家不得不研究高次方程(例如由于辅助计算数

---

① *Œuvres*, 2, 333～335.

② *Œuvres*, 2, 333～335; 3, 312～313.

③ Fermat, *Œuvres*, 3, 457～480, 490～503.

字表而采用三角恒等式)或由对三次方程的自然推广而想到搞高次方程时,许多数学家对这种想法感到荒唐可笑. 如 Stifel 在他编辑出版的 Rudolff 的《代数》(*Coss*)中这样说道:"搞三次以上的方程,似乎以为竟有什么高于三维的东西……那是违反自然的."

然而代数终究摆脱了几何思维的束缚. 不过代数同几何的关系仍然是复杂的. 主要的问题是怎样使人认为代数推理是可靠的,而在 16 世纪以及在 17 世纪的大部分时间里,答案是依靠与代数相当的几何意义. Pacioli, Cardan, Tartaglia, Ferrari 和其他人都给代数法则作出几何证明. Vieta 也是大都拘泥于几何的. 例如他写 $A^3+3B^2A=Z^3$ (其中 A 是未知量,而 B 和 Z 是常数),为的是使每一项都是三次的,从而都可以代表一个体积. 然而我们即将看到,Vieta 对代数的这种看法和立场是过渡性的. Barrow 和 Pascal 确实反对过代数,后来又反对在坐标几何和微积分里用分析方法,因他们觉得代数缺乏可靠依据.

当 Vieta,其后又有 Descartes,用代数帮助解几何作图题时,代数依赖于几何的状况开始有点逆转过来了. Vieta 所著《分析术引论》(1591)中出现的许多代数问题大多数是由于为了解几何题或使几何作图法系统化而搞的. Vieta 把代数应用于几何的典型例子是他所著《分析五篇》中的这样一个问题:已给矩形的面积及其两边之比,求矩形的两边. 他设矩形面积为 B 亩(planum),设大边与小边之比为 S 比 R. 令 A 为较大边,则较小边为 RA/S. 于是 B 亩等于(R/S)(A 的平方). 两边乘以 S 得出最后的方程 $BS=RA^2$. 然后 Vieta 说明怎样从已知量 B 及 R/S,并依据这方程,用直尺和圆规作出 A 来. 这里解题的思想方法是:若找出所求长度 x 满足方程 $ax^2+bx+c=0$,就知道

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

于是就可以对 a, b 和 c 进行右边代数式里所规定的几何作图步骤,作出 x 来.

对 Vieta 来说,代数是发现数学真理的特设步骤,它就是 Plato 心目中所认为的分析法(相对于综合法而言). "分析"这个词是亚历山大的 Theon 引入的,他把分析定义为这样的步骤:先假定所求的结果成立,然后根据逐步推理,得出一个已知的真理. 所以 Vieta 才把他的代数称作分析术. 它执行了分析的过程,特别是对几何问题. 事实上这也是 Descartes 坐标几何思想的出发点,而他在方程论方面的工作也是从他想利用方程来协助解决几何作图问题而引起的.

代数与几何的相互依赖关系也可从 Vieta 一个学生 Marino Ghetaldi (1566—1627)的工作中看出来. 他在所著《Apollonius 著作的现代阐释》(*Apollonius Redivivus*, 1607)的一个篇章中对确定的几何问题的代数解法作了系统研究. 他反过来又用几何来证明代数法则. 他还用几何方法作出代数方程的根. 他死后出版的《数学的分析与综合》(*De resolutione et compositione mathematica*, 1630)一书是详尽讨论这一问题的著作.

我们也发现 16 世纪和 17 世纪的数学家承认应该发展代数来代替希腊人所引用的几何方法. Vieta 看到有关量的相等或成比例的问题,不管这些量是来自几何、物理或商业的,都有可能用代数来处理. 因此他对高次方程和代数方法论的研究是毫不迟疑的,他展望未来能出现一种运用符号的关于量的演绎科学. 他一方面诚然把代数主要当作是搞几何问题的方便工具,但也有足够广阔的远见,能看到代数有它自身的生命力和意义. Bombelli 不用几何而作出过一些能被当时所接受的代数证明. Stevin 断言凡是几何上所能做到的事都能用算术和代数做到. Harriot 所著《实用分析术》(*Artis Analyticae Praxis*, 1631)一书把 Vieta 著作中的一些思想观点加以引申加以系统化并使之突出. 这书很像一部现代的

代数课本,它比先前任何一部代数书更富于分析精神,并在系统运用符号方面向前迈出了一大步.它的流传很广.

Descartes 也开始看到代数的巨大潜力.他说他是继 Vieta 的未竟之业的.从提供物质世界的知识这个意义上说,他并不认为代数是一门科学.他说几何与力学才确实含有这种知识,他把代数看成是进行推理——特别是关于抽象的和未知的量进行推理的有力方法.他认为代数使数学机械化,因而使思考和运算步骤变得简单,而无需花很大的脑力.这有可能使数学创造变成一种几乎是自动化的工作.

对 Descartes 来说,代数居于数学其他各分支的最前列.它是逻辑的引申,是处理量的一门有用的学科,因而从这个意义上来说,它甚至比几何还具有根本的意义;就是说,在逻辑次序上它领先于几何.因此他想建立一门独立的有系统的代数,而不是一批符号的无计划无依据的堆砌和紧密依赖于几何的一些步骤方法.有一份关于代数论述的提纲,名为《计算》(*Le Calcul*, 1638),是 Descartes 本人或他所领导的人执笔的,那里就把代数作为一门独立的科学来处理.Descartes 的代数是空洞而没有意义的.它只是一种计算技巧或一种方法,是他寻求方法的总工作里的一部分.

Descartes 把代数看作是逻辑在处理量方面的一种延伸,这使他想到有可能创立一门范围较广的代数科学,能概括量以及其他概念,并能用于研讨一切问题.甚至逻辑上的原理和方法也可能用符号来表达,而整个体系则可用之于使一切推理过程机械化.Descartes 把这种想法称作"通用数学".这一思想在他的著作里是含糊不清的,也没有被他深入探讨.不过他毕竟是第一个把代数放在学术系统基本地位上的人.

对代数的这种观点有充分认识的第一个人是 Leibniz,他终于把它发展成符号逻辑(第 51 章第 4 节).Isaac Barrow 也具有这种观点,但范围较窄.他是 Newton 的师友,是在 Newton 之前担任

剑桥大学 Lucas 数学讲座的人. 他并不把代数看作是正规数学的一部分,而是把它看成逻辑的一种形式化. 他认为只有几何才是数学,而算术和代数是处理那种以符号形式表达出来的几何量的.

不管 Descartes 和 Barrow 对代数有什么样的哲学观点,也不管他们把代数看成一种普遍的推理科学将会有什么样的潜在可能性,算术和代数技巧的日益广泛的应用所产生的实际效果,是使代数成为独立于几何的一个数学分支. 在当时,Descartes 之既用 a^2 来表示一个长度又表示一块面积这件事是个重大的步骤,因为 Vieta 尚坚持认为二次方只能表示面积. Descartes 告诉读者注意他用 a^2 作为一个数,并且明确指出他和前人的用法不同. 他说 x^2 是适合 $x^2:x=x:1$ 的一个数量. 同样,他在《几何》中说一些线段的乘积可以是线段,这里他思想上指的是所涉及的数量,而不是古代希腊人所指的几何线段. 他明确认识到代数计算是不依赖于几何的.

John Wallis 受了 Vieta, Descartes, Fermat 和 Harriot 的影响,在使算术和代数脱离几何描述的工作上比他们这些人走得更远. 他在所著《算术》(1685)一书中用代数方法推导出 Euclid《原本》第五篇中的所有结论. 他不再把 x 和 y 的代数方程限定为齐次方程,因为人们之所以持有这种想法,是由于这类方程来自几何问题的缘故. 他看到代数具有简明易懂的特点.

Newton 虽然喜爱几何,但我们在他所著的《普遍的算术》中第一次看到他肯定算术与代数(相对于几何而言)具有根本的重要性,当时 Descartes 与 Barrow 则仍赞成以几何作为基本数学分支. Newton 为创立微积分需要而且也使用了代数语言,而微积分也以代数方法来处理最为适宜. 所以就代数之所以能居于几何之上这件事来说,微积分学方面的需要是有决定意义的.

到 1700 年之际,代数已达到能够自身站稳脚跟的地步了. 唯

一的困难是没有地方容纳它. 自从埃及与巴比伦时代以来,直观和边做边改的办法提供了一些实用法则;重新阐释希腊几何代数法的结果又提供了其他一些法则;16、17世纪中,部分地在几何意义的指引下进行的独立的代数研究工作,得出了许多新的结果. 但代数的逻辑基础,足以同 Euclid 提供给几何者相媲美的,却并不存在. 鉴于当时欧洲人已充分认识到严格的演绎式数学该有什么要求,所以我们对当时人对此事普遍地缺乏关心(除了 Pascal 和 Barrow 的反对以外)感到惊异.

数学家怎么来判断哪些东西是正确的呢? 正整数和分数的性质是如此直截了当地来自我们对事物集合的经验,以至于它们看来像是不言而喻似的. 甚至 Euclid 也不能给《原本》中那些讨论数论的篇章提供逻辑基础. 随着数系中添入了新型的数,人们就把那些用之于正整数和分数的运算法则也施行到新的数上,并以几何意义作为方便的向导. 字母一旦被人采用之后,它们就是数的化身,因而可以像数那样来处理. 比较复杂的代数技巧,可通过 Cardan 所用的那种几何论证,或者通过对特例的单纯归纳,而获得似乎合理的依据. 但所有这些做法在逻辑上都不能令人满意. 而且即使求助于几何,也不能给负数、无理数和复数提供逻辑依据,并且,举个例说,也不能用来合理地说明:若一多项式当 $x = a$ 时为负,而当 $x = b$ 时为正,则它必在 a 与 b 之间取零.

然而数学家满怀喜悦和信心百倍地着手运用新的代数. 事实上,Wallis 肯定说代数步骤的合法性并不逊于几何步骤. 数学家没有认识到他们即将进入一个新的时代,那时归纳、直观、边做边改的办法和物理论点将要作为证明的基础. 给数系和代数建立逻辑基础的问题是个难题,其难度远远超过17世纪的任何数学家所能认识到的程度. 数学家能那样大胆轻信甚至直率而不拘泥于逻辑却倒是一件好事,因为自由创造必须走在正规化和逻辑基础的前面,而数学创造的最伟大的时代已经到来了.

参考书目

Ball, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, Chap. 12.

Boyer, Carl B.: *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, 1956, Chap. 4.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chaps. 15～16.

Cajori, Florian: *Oughtred, A Great Seventeenth Century Teacher of Mathematics*, Open Court, 1916.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, 2nd ed., Macmillan, 1919, pp. 130～159.

Cajori, Florian: *A History of Mathematical Notations*, Open Court, 1928, Vol. 1.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1900, Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 2, pp. 369～806.

Cardan, G.: *Opera Omnia*, 10 vols., 1663, Johnson Reprint Corp., 1964.

Cardano, Girolamo: *The Great Art*, trans. T. R. Witmer, Massachusetts Institute of Technology Press, 1968.

Coolidge, Julian L.: *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover (reprint), 1963, Chaps. 6～7.

David, F. N.: *Games, Gods and Gambling: The Origins and History of Probability*, Hafner, 1962.

Descartes, René: *The Geometry*, Dover (reprint), 1954, Book 3.

Dickson, Leonard E.: *History of the Theory of Numbers*, Carnegie Institution. 1919～1923, Chelsea (reprint), 1951, Vol. 2, Chap. 26.

Fermat, Pierre de: *Œuvres*, 4 vols. and Supplement, Gauthier-Villars, 1891～1912, 1922.

Heath, Sir Thomas L.: *Diophantus of Alexandria*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1910; Dover (reprint), 1964, Supplement, Secs. 1～5.

Hobson, E. W.: *John Napier and the Invention of Logarithms*, Cambridge University Press, 1914.

Klein, Jacob: *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1968. Contains a translation of Vieta's *Isagoge*.

Knott, C. G.: *Napier Tercentenary Memorial Volume*, Longmans Green, 1915.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 1, Part 3, Book 3; Vol. 2, Part 4, Book 1.

Mordell, J. L.: *Three Lectures on Fermat's Last Theorem*, Cambridge University Press, 1921.

Morley, Henry: *Life of Cardan*, 2 vols., Chapman and Hall, 1854.

Newton, Sir Isaac: *Mathematical Works*, Vol. 2, ed. D. T. Whiteside, Johnson Reprint Corp., 1967. This volume contains a translation of *Arithmetica Universalis*.

Ore, Oystein: *Cardano: The Gambling Scholar*, Princeton University Press, 1953.

Ore, Oystein: "Pascal and the Invention of Probability Theory", *Amer. Math. Monthly*, 67, 1960, 409～419.

Pascal, Blaise: *Œuvres complètes*, Hachette, 1909.

Sarton, George: *Six Wings: Men of Science in the Renaissance*, Indiana University Press, 1957, "Second Wing."

Schneider, I.: "Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667—1754)", Archive for History of Exact Sciences, 5, 1968, 177～317.

Scott, J. F.: *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, 1958, Chaps. 6 and 9.

Scott, J. F.: *The Scientific Work of René Descartes*, Taylor and Francis, 1952, Chap. 9.

Scott, J. F.: *The Mathematical Work of John Wallis*, Oxford University Press, 1938.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, Chaps. 8～9; Vol. 2, Chaps. 4 and 6.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, 2 vols., Dover (reprint), 1959.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200—1800*, Harvard University Press, 1969, Chaps. 1～2.

Todhunter, I.: *A History of the Mathematical Theory of Probability*, Chelsea (reprint), 1949, Chaps. 1～7.

Turnbull, H. W.: *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, Bell and Sons, 1939.

Turnbull, H. W.: *The Mathematical Discoveries of Newton*, Blackie and Son, 1945.

Vieta, F.: *Opera mathematica* (1646), Georg Olms (reprint), 1970.

第 14 章

射影几何的肇始

> 我坦率承认,我从未对物理或几何的学习或研究抱有兴趣,除非能通过它们获得有助于目前需要的某种知识……能服务于生活的幸福与方便,能有助于保持健康,有助于施展某种技艺……我看到好大一部分技艺扎根于几何,如建筑上的采石工艺,制作日规,特别是透视法.
>
> Girard Desargues

1. 几何的重生

几何上重要创作活动的复兴晚于代数.从 Pappus 时代起到 1600 年光景,除了创立透视法的数学体系以及文艺复兴时代艺术家偶尔作出的几何研究(第 12 章第 2 节)之外,几何方面很少有成果的工作.Apollonius《圆锥曲线》的许多印刷版本的出现,特别是 1566 年 Federigo Commandino(1509—1575)对此书第一篇到第四篇的著名拉丁文译本的问世,引起了人们对几何的一些兴趣.其他译者又译出了第五篇到第七篇,并且还有一些人,包括 Vieta, Willebrord Snell (1580—1626)和 Ghetaldi 在内,着手重整失传的第八篇.

要使数学家的心思纳入新的轨道,所需要的而且确实出现的是新的问题.有一个问题是早已被 Alberti 所提出的:一个实物的同一投影的两个截景有什么共同的几何性质?许多问题是来自科学和实际的需要.Kepler 在他 1609 年的著作中对圆锥曲线的应用,有力地推动人们去重新考察这些曲线,并寻求其对天文有用的性质.光学自古希腊时代以来就是数学家所喜爱的,而在 17 世纪

初发明了望远镜和显微镜之后,它更受到人们大为增进的重视.给这些仪器设计透镜成了一件大事,这意味着人们要注意研究曲面,而由于透镜的表面都是旋转面,因而又要注重研究母曲线.地理探索产生了对地图的需要,引起人们研究在球面上和地图上表示的航行路线.产生了地球在转动的思想之后,需要新的力学原理来计算运动物体的路径,这就又需要研究曲线.而在运动物体之中,抛射体变得更加重要,因为人们已能用大炮把炮弹射到几百码的距离之外,预先算好弹道和射程就成为极端重要的事.计算面积和体积的实际问题也开始引起人们更多的注意.Kepler 的《测量酒桶体积的新科学》(*Nova Stereometria Doliorum Vinariorum*,1615)掀起了这方面一阵新的研究工作.

领会了希腊著作的内容之后,人们又重视起另一类问题来了.数学家开始感到希腊人的证明方法缺乏一般性.几乎每个定理都要想出一种特殊的方法来证.指出这一点的是早在1527年的 Agrippa von Nettesheim (1486—1532)和 Maurolycus,后者在圆锥曲线和其他数学问题方面,翻译过希腊人的著作并写过他自己的著作.

对新问题的大部分反应引起了对旧课题的小变动.对圆锥曲线的处理方法改变了.人们一开头就把这种曲线定义为平面上的轨迹,而不再像 Apollonius 的书里那样定义为圆锥面的截线了.例如,Guidobaldo del Monte 在1579年把椭圆定义为与两焦点距离之和为常数的动点的轨迹.不仅是圆锥曲线,还有古代希腊人研究过的许多曲线如 Nicomedes 蚌线,Diocles 蔓叶线,Archimedes 螺线和 Hippias 割圆曲线都被人重新加以研究.一些新的曲线也搞出来了,著名的如旋轮线(见第17章第2节).所有这种工作虽都有助于传播希腊人的学术成就,但都没有提出什么新的定理或新的证明方法.第一项有成就的创新工作是由于回答画家所提出的问题而产生的.

2. 透视法工作中所提出的问题

画家们所搞出来的聚焦透视法体系,它的基本思想是投影和截面取景原理(第 12 章第 1 节). 人眼被当作一个点,由此出发来观察实景. 从实景上各点出发,通往人眼的光线形成一个投射锥. 根据这一体系,画面本身必含有投射锥中的一个截景,从数学上讲,这截景就是一个平面与投射棱锥相截的一部分截面.

现设人眼在 O 处(图 14.1)观察水平面上的一个矩形 $ABCD$. 从 O 到矩形四边上各点的连线便形成一投射棱锥,其中 OA, OB, OC 及 OD 是四根典型直线. 若在人眼和矩形间插入一平面,则投射锥上诸直线将穿过那个平面,并在其上勾画出四边形 $A'B'C'D'$. 由于截面(截景)$A'B'C'D'$对人眼产生的视觉印象和原矩形一样,所以人们自然要问(正如 Alberti 所提出的那样):截景和原矩形有什么共同的几何性质? 从直观上看,原形和截景既不重合又非相似,它们也不会有相同的面积. 事实上截景未必是个矩形.

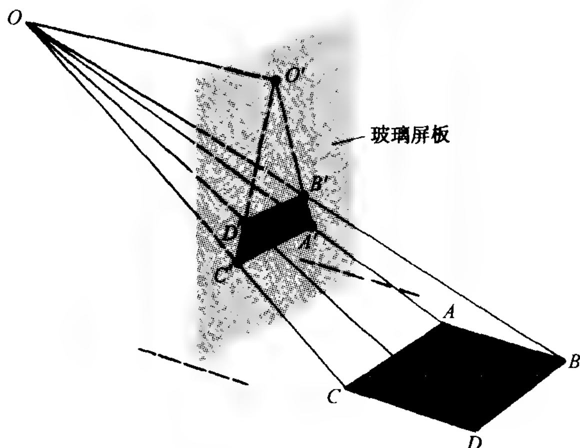


图 14.1

这问题的一个推广是:设有两个不同的平面以任意角度与这

同一个投射锥相截得到两个不同的截景,它们有什么共同的性质?

这问题还可进一步推广.设矩形 $ABCD$ 是从两个不同的点 O' 及 O'' 来观察(图 14.2).于是就有两个投射锥,一个由 O' 及矩形确定,第二个由 O'' 及矩形确定.若在每个投射锥里各取一截景,则由于每一截景应与矩形有某些共同的几何性质,则此两截景也应有某些共同的几何性质.

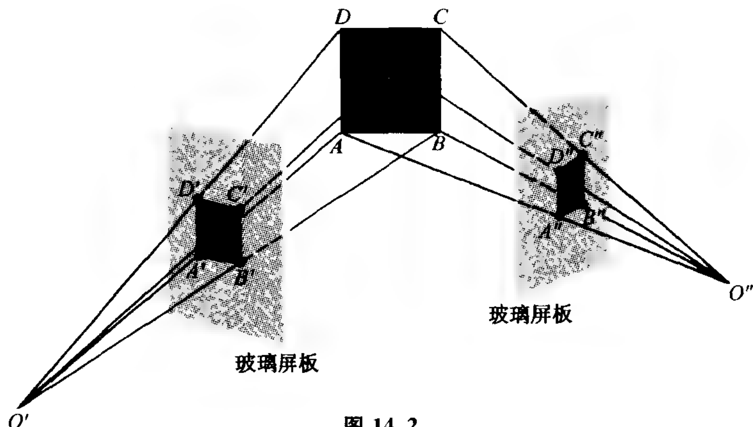


图 14.2

17 世纪的一些几何学者就开始找这些问题的答案.他们把所获得的方法和结果看成是 Euclid 几何的一部分.然而,这些方法和结果诚然大大丰富了 Euclid 几何的内容,但其本身却是几何一个新分支的开端,这个分支到了 19 世纪就被人称为射影几何.本章中我们就把这项工作称作射影几何,尽管在 17 世纪,人们并不对 Euclid 几何与射影几何加以区分.

3. Desargues 的工作

直接寻找上述问题答案的第一个人是自学成名的 G. Desargues (1591—1661).他先是陆军军官,其后成为一个工程师和建筑师.Desargues 通晓 Apollonius 的著作,并觉得他能发明新方法

来证圆锥曲线的定理. 他确实这样做了,并且充分认识到他这些方法的功效. Desargues 还关心改进艺术家、工程师和石匠的教育和技艺,他对于为理论而搞理论是很不赞成的. 他的头一步工作是汇集许多有用的定理,起初是通过书信和传单传播他所获得的成果. 他还在巴黎免费给人讲课. 后来他写了几本书,其中一本是教儿童学唱的书. 另一本讲几何在泥瓦工和石工方面的应用.

他的主要著作是《试论锥面截一平面所得结果的初稿》(*Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan*, 1639)①. 在这书之前他于 1636 年出版了关于透视法的一本小册子. 在这部主要著作中,他论述了现今所谓的几何中的射影法. Desargues 把书印了约 50 份,分送给他的朋友. 不久所有的复制本都失传了. 1845 年 Michel Chasles 偶然发现了 La Hire 手抄的复本,由 N. G. Poudra 加以复制,并由他在 1864 年编辑了 Desargues 的著作. 但 1950 年左右 Pierre Moisy 在巴黎国立图书馆里发现了一本 1639 年的原版本并复制发行. 这新发现的版本中包含了重要的附录和 Desargues 所作的订正. Desargues 关于三角形的主要定理和其他一些定理则于 1648 年发表在他朋友 Abraham Bosse (1602—1676)所著的一本关于透视法的书的附录中. Bosse 在他的这本《运用 Desargues 透视法的一般讲解》(*Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective*)中打算用通俗方式讲解 Desargues 的一些实用方法.

Desargues 用了一些古怪的术语,其中有些曾出现在 Alberti 的著作中. 他把一根直线称作一棵"棕"(palm),把标有点的一根直线叫做一个"干". 但若一直线上有三对点有对合关系(见下述),那它就叫做一棵"树". Desargues 采用这些新术语的用意是想用比较普通的说法讲清道理而避免意义含糊. 但这种语句和奇怪生疏的思想使他的书难于阅读. 除了他的朋友 Mersenne, Des-

---

① *Œuvres*, 1, 103～230.

cartes, Pascal 和 Fermat 外,他的同时代人都称他为怪人.甚至连 Descartes 本人,当他听说 Desargues 在创用一种新方法处理圆锥曲线时,也写信给 Mersenne 说,除了借助于代数之外他看不出任何人能对圆锥曲线搞出什么新的名堂来.但当 Descartes 知道了 Desargues 工作的细节之后就对之高度推崇. Fermat 认为 Desargues 是圆锥曲线理论的真正奠基者,并且觉得他写的书(Fermat 显然拥有此书)思想丰富.但由于一般人未能欣赏,使 Desargues 灰心丧气,退休回到老家.

在谈 Desargues 的几个定理之前,必须先引述对平行线的一个新规定. Alberti 指出过,在作画的某个实际图景里,画面上的平行线(除非它们平行于玻璃屏板或画面)必须画成相交于某一点.例如上面图 14.1 中的直线 $A'B'$ 及 $C'D'$(它们与平行线 AB 及 CD 相对应),根据投射及截景的原理,必须相交于某点 O'.事实上,O 及 AB 确定一平面,O 及 CD 也确定一平面.这两个平面各交玻璃屏板于 $A'B'$ 及 $C'D'$,而由于它们交于 O,所以这两个平面必有一公共线(交线);这直线交玻璃屏于某点 O',它也是 $A'B'$ 与 $C'D'$ 的交点.这点 O' 并不对应于 AB 或 CD 上的任何普通的点.事实上,OO' 线是水平的,从而是平行于 AB 及 CD 的.这个点 O' 叫做没影点,因它在 AB 或 CD 上没有对应的点,而 $A'B'$ 或 $C'D'$ 上任何其他的点都分别对应于 AB 或 CD 上某个确定的点.

为使 $A'B'$ 与 AB 上的点以及 $C'D'$ 与 CD 上的点之间有完全的对应关系,Desargues 在 AB 上以及在 CD 上引入一个新的点.它把这点叫做无穷远点,把它增添到两平行直线上普通的点之外,并把它看成是两平行线的公共点.而且平行于 AB 或 CD 的任何直线上都有这同一个点,并且都在该点处与 AB 或 CD 相交.方向不同于 AB 或 CD 的任何一组平行线都同样有一个公共的无穷远点.由于每组平行线都有一个公共点,而平行线组的数目是无穷的,所以 Desargues 的规定就是在 Euclid 平面上引入了无穷多新

的点. 他进一步假定所有这些点都在同一直线上,而这直线则对应于截景(或画面)上的水平线或没影直线. 这样就在 Euclid 平面的已有直线中添入了一根新的直线. 他假定一组平行平面上都有一根公共的无穷远线;就是说,所有平行平面都相交于一直线.

在每根线上增加一个新点,这件事并不与 Euclid 几何的任何公理或定理相矛盾,但它确乎需要在文字叙述上加以修改. 不平行的直线仍然相交于普通的点,但平行线则相交于每根线上的"无穷远点". 关于无穷远点的这一规定实质上是 Euclid 几何里一件方便的事,因它避免了特殊情形. 例如,现在就可以说任何两直线必然恰交于一点. 我们不久可以更充分地看出这个规定的好处.

Kepler 也(在 1604 年)决定要给平行线增添一个无穷远点,但出于不同的理由. 对于通过 P(图 14.3)而交于 l 的每根直线,有 l 上的一点 Q 与之对应. 但对于过 P 而平行于 l 的直线 PR,却没有 l 上的点同它对应. 但若增添 PR 及 l 所共有的一个无穷远点,Kepler 便可断言通过 P 的每根直线都交于 l. 又,

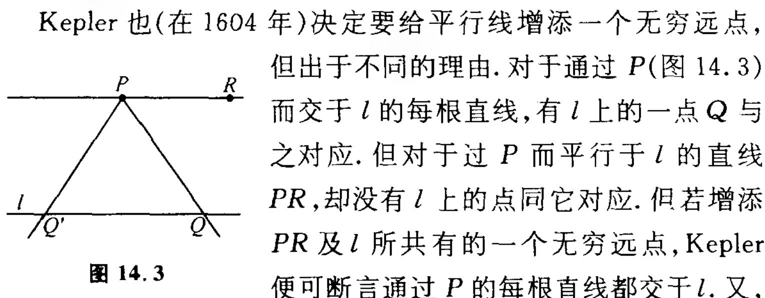


图 14.3

在 Q 往右移向"无穷远"而 PQ 变为 PR 后,可把 PR 与 l 的交点看成是 P 左边的一个无穷远点,而当 PR 继续绕 P 旋转时,PR 与 l 的交点 Q' 就从左边移近. 这样,就使 PR 与 l 交点的移动保持连续性. 换言之,Kepler(以及 Desargues)认为直线的两"端"是在"无穷远"处会合的,因而认为直线和圆有同样的结构. 事实上,Kepler 确乎把一根直线看做是圆心在无穷远处的一个圆.

引入了无穷远点及无穷远线之后,Desargues 就着手叙述一个基本定理,这定理现仍称为 Desargues 定理. 设有点 O(图 14.4)及三角形 ABC. 我们知道,从 O 到三角形边上各点的那些连线形成一投射锥. 这投射锥的一个截景就含有一个三角形 $A'B'C'$,其

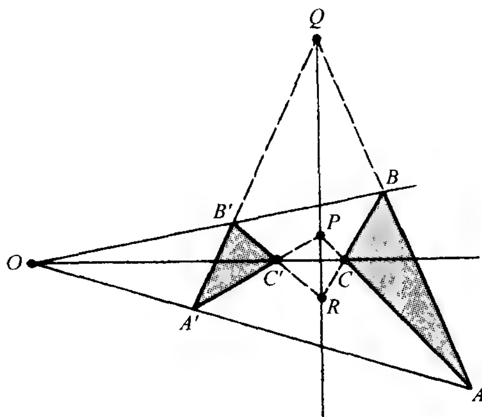


图 14.4

中 A' 对应于 A，B' 对应于 B，C' 对应于 C. ABC 及 $A'B'C'$ 这两个三角形叫做从 O 点看去的透视图. Desargues 定理断言：对于从一点透视出去的两个三角形，它们间成对的对应边 AB 与 $A'B'$，BC 与 $B'C'$，以及 AC 与 $A'C'$（或它们的延长线）相交的三个交点都在同一直线上. 反之，若两三角形的三对对应边相交于一直线上的三点，则连结对应顶点的三根连线必交于一点. 如果特别针对前面的图形来说，这定理本身告诉我们：AA'，BB' 以及 CC' 交于一点 O，AC 与 $A'C'$ 交于一点 P，AB 与 $A'B'$ 交于一点 Q；BC 及 $B'C'$ 交于一点 R，而 P，Q 与 R 在一直线上.

这定理虽然对三角形 ABC 与 $A'B'C'$ 在同一平面或不在同一平面这两种情形都成立，但其证明只在不同平面的情形才是简单的. Desargues 对二维和三维的两种情形都证明了正定理和逆定理.

在 Bosse 的 1648 年著作的附录里，载有 Desargues 的另一基本结论：交比在投影下的不变性. 一直线上 A，B，C，D 四点所形成的诸线段的交比（图 14.5）定义为 $\frac{BA}{BC}\Big/\frac{DA}{DC}$. Pappus 早就引入过这个比（第 5 章第 7 节），并证明了在 AD 及 $A'D'$ 上的交比是一样

的. Menelaus 也有一个关于球面上大圆弧的类似定理(第 5 章第 6 节). 但他们都不是从投射锥和截景的观点来考虑的. 而 Desargues 则是这样考虑的,并且证明了投射线的每个截线上的交比都相等.

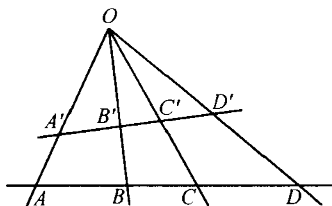


图 14.5

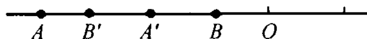


图 14.6

Desargues 在他的主要著作(1639)里处理了对合的概念,这是 Pappus 早就引入而由 Desargues 定名的. 直线上两对点 A, B 以及 A', B' 说是对合的,如果该直线上有一特定点 O(名叫对合中心),使 $OA \cdot OB = OA' \cdot OB'$ (图 14.6). 同样,三对点 A, B, A', B' 以及 A'', B'' 说是对合的,如果 $OA \cdot OB = OA' \cdot OB' = OA'' \cdot OB''$. 点 A 和 B, A' 和 B', 以及 A'' 和 B'' 叫做共轭点. 若有一点 E 使 $OA \cdot OB = \overline{OE}^2$, 则 E 叫做二重点. 在这情况下还有另一个二重点 F, 而 O 是 EF 的中点. O 的共轭点是无穷远点. Desargues 在一根与三角形三边相交的直线上应用 Menelaus 定理,证明在 A, B, A' 及 B' 有对合关系时(图 14.7),若从点 P 把它们投射到另一直线上,成为点 A_1, B_1, A_1' 和 B_1', 则这第二组点也是对合的.

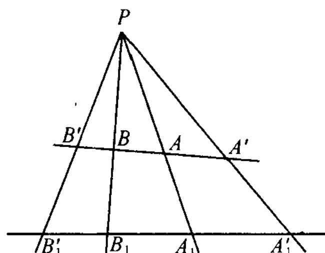


图 14.7

关于对合关系,Desargues 证明了一个主要定理. 为此我们先来考察完全四边形的概念,这是 Pappus 已经部分探讨过的一个概念. 设 B, C, D 及 E 是平面上任意四点,其中没有任何三点是共线的(图 14.8). 这时四点就确

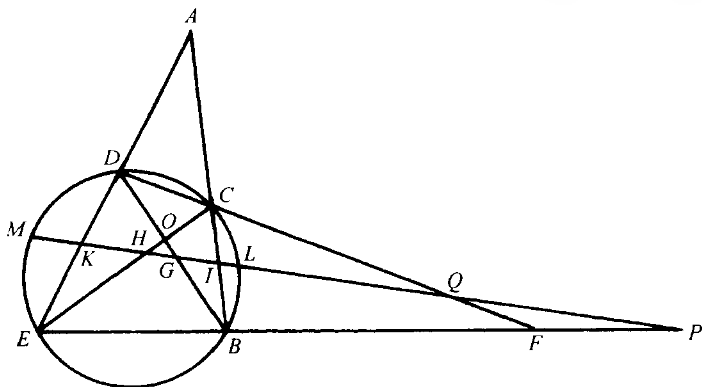


图 14.8

定了六根直线,形成完全四边形的各边.对边是彼此不相交于四点之一的两边.例如 BC 及 DE 是对边,CD 及 BE 还有 BD 及 CE 也都是对边.三对对边的交点 O,F 与 A 是四边形的对边点.今设四个顶点 B, C, D, E 在一圆上.如果一直线 PM 交各组对边于 P, Q, I, K 以及 G, H;交圆于 L, M. 那么这四组点是四组对合的点.

其次,设在图形所在平面外一点把整个图形作一投射,并取这投射锥的一个截景.这样原图里的圆就变成截景里的一个圆锥曲线,原图里的每根直线变成截景里的某根直线.特别是圆内接四边形就变成圆锥曲线内接四边形.由于对合关系在投影后还是对合关系,故得出一个重要而普遍的结论:若作一圆锥线的内接四边形,则任一不过顶点的直线与圆锥线以及与完全四边形对边相交的四对点有对合关系.

Desargues 其次引入了调和点组的概念.点 A, B, E 及 F 说是成为一调和点组,如果相对于对合关系中的二重点 E 和 F 来说,A 与 B 是共轭点.(现今定义交比等于-1的点组为调和点组,那是以后的说法.)[①]由于对合关系经投射后仍为对合关系,故调

① 这是 Möbius 定义的:*Barycentrische Calcul*(1827), p. 269.

和点组经投射后仍为调和点组. 接着 Desargues 又证明若调和点组中的一点是无穷远点(在四点所在直线上),则与之相配的那另一点平分其他两点间的线段. 又,若 A, B, A' 及 B' 是调和点组(图 14.9),且若从 O 作投射,则当 OA' 垂直于 OB' 时,OA' 平分 AOB 角而 OB' 平分它的补角.

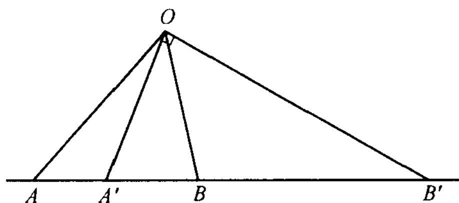


图 14.9

有了调和点组的概念之后,Desargues 就进而阐释极点与极带的理论,这是 Apollonius 早已引入过的理论. Desargues 从一圆和圆外一点 A 出发(图 14.10). 则在从 A 出发交圆于 C 及 D 的任一直线上,必有第四个调和点 B. 对于所有从 A 出发的这种直线而言,所有的第四调和点都位于一直线上,这直线就是点 A 的极带. 如 BB' 就是 A 的极带. 又,假设我们引入任一完全四边形,它以 A 为一个对边点而其四顶点都在圆上. 例如,取 C, D, D' 及 C' 作为这样一个完全四边形的顶点. 则 A 的极带将通过这完全四边形的另外两个对边点. (在图 14.10 中,R 是这两个对边点之一.)当 A 在圆内时,同样的断言也成立. 若 A 在圆外,则 A 的极带是从 A 所引圆的两根切线的切点(图中的点 P 及 Q)的连线.

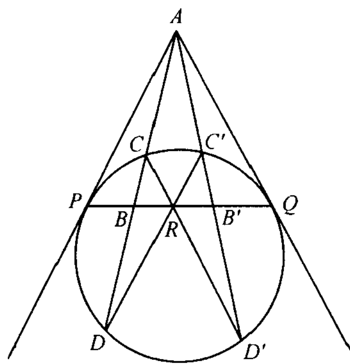


图 14.10

对于圆证明了上述断言之后,Desargues 又用从图形平面外

一点所作的投射及其一个截景来证明这些断言对任何圆锥曲线都成立.

Desargues 把圆锥曲线的直径看做无穷远点的极带. 我们马上可以看到这定义与 Apollonius 的定义是一致的. 设有一组平行线与圆锥曲线相交(图 14.11). 这些平行线有一公共点即无穷远点. 若 $A'B'$ 是其中一直线,则 $A'B'$ 上关于 A' 及 B' 而言的无穷远点的调和共轭点是弦 $A'B'$ 的中点 B. 同样,无穷远点对于 A_1' 和 B_1' 而言的调和共轭点是弦 $A_1'B_1'$ 的中点 B_1. 平行弦族的这些中点位于一根直线上,而这直线按 Apollonius 的定义也是直径. Desargues 然后证明关于双曲线的直径、共轭直径以及渐近线的一些事实.

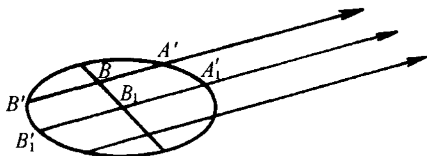


图 14.11

现在我们看到,Desargues 不仅引入了诸如无穷远元素等新的概念以及许多新的定理,尤其重要的是他引入了以投射和截景作为一种新的证明方法,而且通过投射和截景统一处理了几种不同类型的圆锥曲线,而 Apollonius 则是把每类圆锥曲线分别处理的. 在这一个天才辈出的世纪里,Desargues 是最有独创精神的数学家之一.

4. Pascal 和 La Hire 的工作

对射影几何作出贡献的第二个主要人物是 Blaise Pascal (1623—1662). 他生于法国克莱蒙(Clermont),从小多病,并在其短暂的一生中身体一直不好. 他的父亲 Etienne Pascal 本打算不让他在十五六岁以前学数学,因他认为一个孩子在年岁不够大因

而不能吸收时不应让他搞一门学科. 但 Blaise 在 12 岁的时候就一定要想知道几何究竟是怎么回事,而一旦人家告诉了他,就自己着手研究.

在 Pascal 八岁时,他家迁到巴黎. 早在孩提时,他就同他父亲参加每周一次的"Mersenne 学院"(其后变为自由学院,并于 1666 年变为科学院)的例会. 当时会员中的人有 Mersenne 神甫,Desargues,Roberval(法兰西学院数学教授),Claude Mydorge(1585—1647)和 Fermat.

Pascal 把相当多的时间和精力用于研究射影几何. 他是微积分的创始人之一,并在这方面对 Leibniz 有所影响. 我们也提及过,他也参与了开创概率论的工作. 他在 19 岁的时候就发明了第一架计算机,以帮助他父亲干课税员的工作. 他在物理上也有些贡献,如独创一种抽真空的器械,发现空气重量随高度的增加而递减,阐明了液体中的压力概念. 他在物理方面的工作是否具有独创性是有人怀疑的,事实上,有些科学史家按照他们的心胸是否宽大而把这看做是普及性工作或剽窃.

Pascal 在其他许多领域里都有伟大成就. 他是法文散文大师,他的《思绪》(*Pensées*)和《外地短札》(*Lettres provinciales*)是经典文学作品. 他也是出名的神学辩论家. 他从童年时期起便想把宗教信仰和数学及科学的理性主义调和起来,而这两方面的兴趣在他一生中都分去了他的精力和时间. 他也和 Descartes 一样,相信科学真理必须清楚而分明地符合感性认识或符合理智,或者是这类真理的逻辑推论. 他认为在科学和数学问题上不该有故弄玄虚之处. "凡有关信仰之事不能为理智所考虑."在科学问题上只牵涉到我们的自然思维,权威是无用的,科学知识只能建立在理智的基础上. 但信仰的奥秘是感觉和理性所不能察知的,所以必须凭圣经的权威加以接受. 他谴责那些在科学上滥用权威以及在神学上使用理智的人. 然而信仰的境界比理智更高出一层.

宗教在他24岁以后主宰了他的思想,虽然他仍继续从事数学和科学工作.他认为单纯作为一种乐趣来从事科学工作是错误的.以乐趣为主要目的而搞研究是糟踏了研究,因那样的人怀有"一种对学问的贪欲之心,对知识的无厌嗜求……这种对科学的钻研首先出于以自我为中心的关怀,而不是着眼于在周围一切自然现象中找出神的存在和荣耀."

他的数学工作主要是凭直观的,他预告了重大的结果,作出了高明的猜测,看出了推理和运算的捷径.在他生命的后期,他把一切真理来源归之于直观.他关于这方面的一些话久已闻名于世."心有其理,非理之所能知.""未谙真理者,才发觉需用理智这种迟缓迂回的方法.""孱弱无能的理智啊,你该有自知之明."

如果我们可以凭1660年8月10日Pascal去世前不久给Fermat的一封信来作判断的话,可以发现Pascal似对数学颇有腻烦之心.他信中写道:"随便谈到数学,我觉得它是对精神的最高锻炼;但同时我又觉得它是那么无用,以至使我觉得一个单纯的数学家同一个普通工匠极少差别.我也觉得它是世界上最可爱的职业,然而仅仅是一种职业;我也常说想[学数学]是件好事,但为此费力则不然.所以我不愿为数学而多走两步,而我想你也会深有同感."Pascal是个多才多艺然而性格矛盾的人.

Desargues敦促Pascal搞投射和取截景法,并建议他要把圆锥曲线的许多性质简化为少数几个基本命题作为目标.Pascal接受了这些建议.1639年他16岁时就用投射法(即取投射锥和截景)写了关于圆锥曲线的著作.这本著作现已失传,但Leibniz确于1676年在巴黎见过,并对Pascal的侄甥谈过这作品的内容.有一篇长约8页的《略论圆锥曲线》(*Essay on Conics*, 1640)当时只有少数人知道,旋即失传,直到1779年才重新发现①.Descartes曾见过1640年的这篇短文,觉得如此出色,竟然不相信它是一个

① *Œuvres*, 1, 1908, 243～260.

这样年轻的人写的.

Pascal 在射影几何里的一个最著名的结果(都发表在上述两篇著作中)是现今以他的名字命名的定理. 用现代语言叙述,这定理的内容如下:若一六边形内接于一圆锥曲线,则每两条对边相交而得的三点在同一直线上. 例如(图 14.12)P,Q 及 R 在同一直线上. 若六边形的对边两两平行,则 P, Q, R 将在无穷远线上.

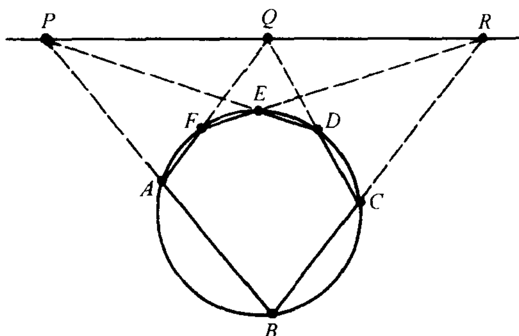


图 14.12

关于 Pascal 是怎样证明这定理的,我们只有一些线索. 他说由于这对于圆成立,故通过投射和取截景,它必对所有圆锥曲线都成立. 显然,若从图形平面外一点作上述图形的投射锥并取一截景,则截景必含一圆锥曲线及其内接六边形. 而且这六边形的对边将相交于一直线上的三点,即对应于原图 P, Q, R 三点的点及 PQR 线的直线. 顺便提一下,关于两直线的每根线上有三点的那个 Pappus 定理(第 5 章第 7 节)也是上述定理的一个特例. 当圆锥曲线退化为两条直线(例如当双曲线退化为它的渐近线时),那就得出 Pappus 所说的定理.

Pascal 定理的逆定理(即:若一六边形的三对对边的三个交点共线,则六边形顶点在一圆锥曲线上)也是成立的,但 Pascal 并没有加以考虑. Pascal 1640 年论文中还有其他结果,但不值得在这里多谈.

投射和取截景法也为 Philippe de La Hire (1640—1718)所接受. La Hire 年轻时是个画家,以后转而搞数学和天文. La Hire 也同 Pascal 一样受了 Desargues 的影响,并在圆锥曲线方面做了相当多的工作. 有些结果发表在 1673 年和 1679 年的论文中,是按希腊人的综合方法但采用了新的观点,例如以焦点-距离来定义椭圆及双曲线,有些结果应用了 Descartes 和 Fermat 的解析几何. 他的最大著作是《圆锥曲线》(*Sectiones Conicae*, 1685),这是专门研究射影几何的.

同 Desargues 和 Pascal 一样,La Hire 也先证明了牵涉到调和点组的圆的性质,然后通过投射和取截景,把这些性质推到其他圆锥曲线. 这样他可以用一种方法把圆的性质推到任一类圆锥曲线上. 在 La Hire 的这部 1685 年的著作中,虽然漏掉了一些材料,如 Desargues 的对合定理和 Pascal 定理,但几乎包括了现今关于圆锥曲线的所有熟知的性质,并且都用综合方法证明,作出了有系统的陈述. 事实上,La Hire 几乎全部证明了 Apollonius 的 364 个关于圆锥曲线的定理. 书中也有关于四边形的调和性质. La Hire 总共证明了约有 300 个定理. 他打算以此表明投射法比 Apollonius 的方法高明,也比当时已经创立的 Descartes 和 Fermat 的新的解析方法(第 15 章)优越.

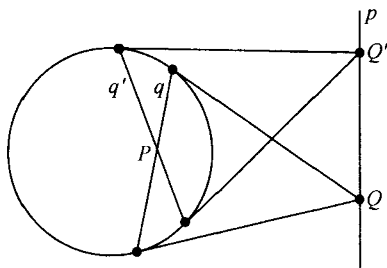


图 14. 13

总的说来,La Hire 所得结果并未超出 Desargues 的和 Pascal 的. 但在极点和极带理论上他有一个重大的新结果. 他证得:若一点在直线上移动,则该点的极带将绕那直线的极点转动. 例如,若 Q(图 14. 13)沿直线 p 移动,则 Q 的极带绕直线 p 的极点 P 转动.

5. 新原理的出现

在 Desargues,Pascal 和 La Hire 这些人得出的一些特殊定理之外和之上,当时开始出现一些新的思想和观点.第一个是关于一个数学对象从一个形状连续变到另一形状的思想,这里的数学对象就是几何图形.从 Kepler 1604 年的《天文学的光学部分》(*Astronomiae pars Optica*[①])里,可以看出他似乎是第一个掌握了这一事实的人:抛物线、椭圆、双曲线、圆、由两直线组成的退化圆锥曲线,都可以从其中之一连续变为另一个.为实现从一个图形连续变换为另一个图形这个过程,比方说,从椭圆变到抛物线然后变到双曲线,Kepler 设想一个焦点固定而让另一个焦点在它们的连线上移动.若让动点移向无穷远(同时让偏心率趋于 1),椭圆就成为抛物线;然后让那个动焦点又出现在定焦点的另一方,这时抛物线就变成双曲线.当两焦点合而为一,椭圆变成圆;当双曲线的两焦点合在一起,双曲线便退化为两直线.要使一焦点从一个方向移往无穷远而又从另一个方向重新出现,Kepler 就假定了(如前所指出过的)直线向两端无限延伸之点在无穷远处合成一点,从而赋予直线以圆的性质.虽然在直观上这样看待直线并不令人满意,但这种思想在逻辑上是合理的,而且事实上在 19 世纪的射影几何里成为一个基本原理.Kepler 又指出,若连续改变那个截割圆锥的平面的倾角,便可得各种不同的圆锥曲线.

Pascal 也应用了图形连续变化的观点.他让六边形的两相邻顶点彼此靠近合而为一,使之变成一五边形.然后他从六边形的性质,考察这些性质在图形连续变动时出现什么情况,来推断出五边形的性质.同样,他从五边形变到四边形.

---

① *Ad Vitellionem Paralipomena*, *quibus Astronomiae pars Optica Traditu* (Vitello 一书补遗,内含天文学的光学部分).

从射影几何研究工作中明显出现的第二个思想是变换和不变性. 从某点作一图形的投射,然后取这投射的一个截景,这就是把原图形变换成一个新图形. 原图形中值得研究的性质是那些在变换后保持不变的性质. 17 世纪的其他一些数学家如圣·文森特的 Gregory(1584—1667)和 Newton① 还引入了投射取截法之外的其他变换.

射影几何学家也着手搞代数学家(特别是 Vieta)所开创的寻求一般方法的研究. 在希腊时代,证明方法的功效是有限的. 每个定理都需要有新的一种办法. Euclid 和 Apollonius 似都不关心找一般方法. 但 Desargues 却强调投射取截法,因他看出凡是对于圆证明了的性质,都可拿它作为一般方法来证明它们对圆锥曲线也成立. 他又从对合与调和点组的概念,看到有比 Euclid 几何里更一般性的概念. 事实上,四个形成调和组的点,若其中之一在无穷远处,就变成三个点,其中一点在另外两点连线的中点处. 于是调和点组的概念及有关的定理比一点平分一线段的概念更一般. Desargues 和 Pascal 想从单独一个定理推出尽可能多的结果来. Bosse 说 Desargues 从他的对合定理推出了 Apollonius 的 60 个定理,受到 Pascal 的称颂. Pascal 通过寻求不同图形间的关系如六边形与五边形之间的关系,也想找出处理这些图形的共同原理. 事实上,据说他通过考察有关图形的定理和推论,从他关于六边形的定理得出了约 400 个系. 但现在找不到他在这方面的著作了. 注重方法的精神在 La Hire 1685 年的著作中是很明显的,因它的主要目标是为了显示投射取截法比 Apollonius 的方法甚至比 Descartes 的代数方法优越. 追求结果与方法的一般性这项工作在其后的数学工作中成为一股强大的力量.

几何学家虽重视了方法的一般性,他们无意中却又发掘出另一类一般性. 许多定理,如 Desargues 的三角形定理,处理的是点

---

① 《原理》,第 3 版,第 1 篇,引理 22 及命题 25.

和线的相交问题，而不是像 Euclid 几何里所处理的线段、角度和面积的大小问题.线的相交这一事实在逻辑上应先于考虑量的大小，因为正是相交这样的事实才确定了一个图形的组成.几何的一个新的基本的分支诞生了，它着重位置和相交方面的性质，而不是大小和度量方面的性质.然而 17 世纪的射影几何学者用 Euclid 几何作为基础，特别是用了距离和角的大小这些概念.而且这些几何学家非但没有用新几何的观点来思考问题，事实上他们还打算改进 Euclid 几何里的方法.他们工作中蕴含着几何新分支这一事实，是直到 19 世纪才认识到的.

虽然射影几何方面的工作起初是为了想给画家提供帮助而搞的，但后来就分散到圆锥曲线方面并与之合流，因那时对圆锥曲线的兴趣又高涨起来了.不过纯粹数学并不迎合 17 世纪的时尚，那时的数学家对理解自然和控制自然的问题——简言之就是对科学问题——远比这个来得关心.用代数方法处理数学问题一般更为有效，特别是易于得出科技所需要的数量结果.而射影几何学家用综合方法得出的定性结果并不那样有用.因此射影几何就让位给代数、解析几何、微积分，而这些学科又进一步产生出在近代数学中占中心地位的其他学科. Desargues, Pascal 和 La Hire 得出的结果被人遗忘了，直到 19 世纪才又重新被人发现，而那时候新获得的结果和新观点使数学家能培育出潜伏在射影几何里的重要思想.

参考书目

Chasles, Michel: *Aperçu historique des méthodes en géométrie*, 3rd ed., Gauthier-Villars et Fils, 1889, pp. 68～95, 118～137. (Same as first edition of 1837.)

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, pp. 88～92.

Coolidge, Julian L.: *A History of the Conic Sections and Quadric surfaces*, Dover

(reprint), 1968, Chap. 3.

Coolidge, Julian L.: "The Rise and Fall of Projective Geometry", *Amer. Math. Monthly*, 41, 1934, 217～228.

Desargues, Girard: *Œuvres*, 2 vols., Leiber, 1864.

Ivins, W. M., Jr.: "A Note on Girard Desargues", *Scripta Math.*, 9, 1943, 33～48.

Ivins, W. M., Jr.: "A Note on Desargues's Theorem", *Scripta Math.*, 13, 1947, 203～210.

Mortimer, Ernest: *Blaise Pascal: The Life and Work of a Realist*, Harper and Bros., 1959.

Pascal, Blaise: *Œuvres*, Hachette, 1914～1921.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2, pp. 307～314, 326～330.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200—1800*, Harvard University Press, 1969, pp. 157～168.

Taton, René: *L'Œuvre mathématique de G. Desargues*, Presses Universitaires de France, 1951.

第 15 章

坐标几何

……我决心放弃那个仅仅是抽象的几何.这就是说,不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题.我这样做,是为了研究另一种几何,即目的在于解释自然现象的几何.

René Descartes

1. 坐标几何的缘起

Fermat 和 Descartes 是数学中下一个巨大创造的主要负责人,他们和 Desargues 及其追随者一样,关心到曲线研究中的一般方法.但他们两人在很大程度上参加了科学研究工作,敏锐地看到了数量方法的必要性,而且注意到代数具有提供这种方法的力量.因此,他们就用代数来研究几何.他们所创立的科目叫做坐标几何或解析几何,其中心思想是把代数方程和曲线曲面等联系起来.这个创造是数学中最丰富最有效的设想之一.

科学的需要和对方法论的兴趣推动了 Fermat 和 Descartes 对坐标几何的研究,这是无可怀疑的.Fermat 对于微积分的贡献,如作曲线的切线,计算最大值和最小值等(这些将在后面讲到微积分的历史时,更清楚地说明),是为解答科学问题而设计的.他还对光学做了第一等的贡献.他对方法论的兴趣,在他的一本小书《平面和立体的轨迹引论》(*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*)[①]中的一个明白的叙述里得到证实(此书写于 1629 年,但 1679 年才出版)[②].他在书中说,他找到了一个研究有关曲线问题的普遍方法.

---

① Fermat 是在 Pappus 所解释的意义下用这些名词的,参看第 8 章第 2 节.

② *Œuvres*, 1, 91~103.

至于 Descartes，他是 17 世纪中最伟大的科学家之一，他把方法论作为他一切工作的首要对象.

2. Fermat 的坐标几何

在他的数论工作中，Fermat 从 Diophantus 出发. 他关于曲线的工作，则从研究希腊的几何学家，特别是 Apollonius 开始，Apollonius 的《论平面轨迹》(*On Plane Loci*)一书，久已失传，而 Fermat 却是把它重新写出的人之一. 他对代数做了贡献之后，准备把它用来研究曲线. 这一点他在上述小书《轨迹引论》中做了. 他说他打算发起一个关于轨迹的一般研究，这种研究是希腊人没有做到的. Fermat 的坐标几何究竟是怎样产生的，我们不知道. Fermat 是熟悉 Vieta 用代数解决几何问题的用法的，但更可能的是他把 Apollonius 的结果直接翻译成代数的形式.

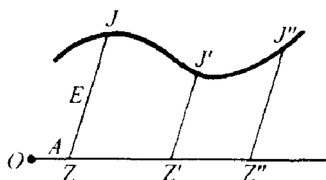


图 15.1

他考虑任意曲线和它上面的一般点 J(图 15.1). J 的位置用 A, E 两字母定出：A 是从点 O 沿底线到点 Z 的距离，E 是从 Z 到 J 的距离. 他所用的坐标就是我们所说的倾斜坐标，但是 y 轴没有明白出现，而且不用负数. 他的 A, E 就是我们的 x, y.

Fermat 早就叙述出他的一般原理："只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就描绘出一条直线或曲线."图中对于不同位置的 E，其末端 J, J', J''、…就把"线"描出. 他的未知量 A 和 E，实际上是变数，或者可以说，联系 A 和 E 的方程是不确定的. 在这里，Fermat 用 Vieta 的办法，让一个字母代表一类的数，然后写出联系 A 和 E 的各种方程，并指明它们所描绘的曲线. 例如，他写出"*D in A aequetur B in*

E"(用我们的记号就是 $Dx = By$)并指明这代表一条直线. 他又给出(以下用我们的写法) $d(a-x) = by$,并肯定它也代表一条直线. 方程 $B^2 - x^2 = y^2$ 代表一个圆, $a^2 - x^2 = ky^2$ 代表一个椭圆, $a^2 + x^2 = ky^2$ 和 $xy = a$ 各代表一条双曲线,而 $x^2 = ay$ 代表一条抛物线. 因 Fermat 不用负坐标,他的方程不能像他所说代表整个曲线,但他确实领会到坐标轴可以平移或旋转,因为他给出一些较复杂的二次方程,并给出它们可以简化到的简单形式,他肯定:一个联系着 A 和 E 的方程,如果是一次的,就代表直线轨迹,如果是二次的,就代表圆锥曲线. 在他的《求最大值和最小值的方法》(*Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam*, 1637)① 中,他引进了曲线 $y = x^n$ 和 $y = x^{-n}$.

3. René Descartes

Descartes(1596—1650)是第一个杰出的近代哲学家,是近代生物学的奠基人,是第一流的物理学家,但只偶然地是个数学家. 不过,像他那样富于智力的人,即使只花一部分时间在一个科目上,其工作也必定是很有意义的.

他于 1596 年 3 月 31 日出生在都兰的拉哈耶(La Haye in Touraine)地方. 他父亲是个相当富有的律师. 当他 8 岁的时候,他父亲把他送进安茹的拉弗莱什(La Flèche in Anjou)地方的一个耶稣会学校. 因为他身体不好,被允许每天早上在床上工作,这习惯他一直保持到老. 他 16 岁离开拉弗莱什,20 岁毕业于普瓦蒂埃(Poitiers)大学,去巴黎当律师. 在那里他遇见 Mydorge 和 Marin Mersenne 神甫,花了一年的时间和他们一起研究数学. 但他却变得不安静起来,而于 1617 年投入了奥拉日的 Maurice 王子的军队. 在那以后的九年里,他时而在几个军队中服役,时而在巴黎狂

① *Œuvres*, 1,133～179;3,121～156.

欢作乐,但一直继续研究数学.在荷兰布雷达(Breda)地方的招贴牌有一个挑战性的问题,他给解决了,这使他自信有数学才能,从而开始认真地用心于数学.他回到巴黎,为望远镜的威力所激动,闭门钻研光学仪器的理论与构造.1628年他移居到荷兰,得到较为安静自由的学术环境.他在那里住了20年,写出了他的著名作品.1649年他被邀请去瑞典做Christina女皇的教师,他为王室的尊崇与荣誉所吸引,接受了这一邀请.1650年他在那里患肺炎逝世.

他的第一部著作《思想的指导法则》(*Regulae ad Directionem Ingenii*)①是1628年写成的,但在他死后才出版.他的第二部重要著作《世界体系》(*Le Monde*, 1634),包括一个宇宙漩涡理论,是用来说明行星是如何转动不息而且保持在它们绕日的轨道中的.但他害怕教会的迫害,没有发表.1637年,他出版了他的《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》(*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*)②.此书是文学和哲学的经典著作,包括三个著名的附录:《几何》(*La Géométrie*)、《折光》(*La Dioptrique*)和《陨星》(*Les Météores*).其中的《几何》部分包括了他关于坐标几何和代数的思想.这是Descartes所写的唯一的数学书,虽然他在许多通信中,也确实传播过许多其他关于数学的思想.《方法论》一书,立刻给他带来了很大的声誉.随着时间的流逝,他和他的群众,更加注意他的著作.1644年,他发表了《哲学原理》(*Principia Philosophiae*),专论物理科学,特别是运动定律和漩涡理论.此书也包括《世界体系》中的材料,他相信这次已经写得使教会容易接受些.1650年他发表了《音乐概要》(*Musicae Compendium*).

Descartes的科学思想,支配着17世纪.他的教导和著作,因

---

① 1692年用荷兰文出版;*Œuvres*, 10, 359~469.

② *Œuvres*, 6, 1~78.

为表达得非常清楚动人,甚至在非科学家中间也很通行.只有教会排斥他.实际上 Descartes 是虔诚的,并且他相信他已经证明了上帝的存在,因而感到高兴.但他教导说,圣经不是科学知识的来源,只凭理性就足以证明上帝的存在,并且说,人们应该只承认他所能了解的东西.教会对他这些话的反应是:在他死后不久,就把他的书列入《禁书目录》(*Index of Prohibited Books*),并且当在巴黎给他举行葬礼的时候,阻止给他致悼词.

Descartes 是通过三条途径来研究数学的:作为哲学家,作为自然的研究者,作为一个关心科学的用途的人.试图把这三条思路分离开来是困难的,而且也许是不实际的.他生活在清教与天主教间的争论达到高潮的时代,又在科学刚刚开始发现出一些向主要的宗教教条挑战的自然规律的时代.因此,他就开始怀疑他在学校里所得到的一切知识.早在他在拉弗莱什结束了课业的时候,他就断定他所受的教育仅仅加重了他的烦闷.他是这样地为他的怀疑所困扰,以至他相信除了认识到他自己的无知外,没有什么进步.但是,由于他曾在欧洲最著名学校之一里呆过,又由于他相信他在那里不是一个劣等生,他感到有理由去怀疑在任何地方有没有可靠的成套知识.于是他就想这个问题:我们是怎样知道一些东西的?

但他不久就断定逻辑本身是无结果的:“谈到逻辑,它的三段论和其他观念的大部分,与其说是用来探索未知的东西,不如说是用来交流已知的东西,或者用来无判断地空谈我们所不知道的东西.”所以逻辑不能提供基本的真理.

但是,到哪里去找基本真理呢?他排斥了通行的、大部分是经院派的哲学,说它虽然有吸引力,但显得没有明确的基础,而且所用的推理法并不总是无可非议的.他说,哲学仅仅提供一个“从表面上看来是到处为真的讨论工具.”神学指出了上天堂去的道路,他自己也和别人一样激动着要上那儿去,但这条道路是正确的吗?

在一切领域里建立真理的方法,据他说,是在1619年11月10日出现在他梦里的,那时他正在一次军事行动中,那个方法就是数学方法.他为数学所吸引是因为它的立足于公理上的证明是无懈可击的,而且是任何权威所不能左右的.数学提供了获得必然结果以及有效地证明其结果的方法.此外,Descartes还清楚地看到,数学方法超出他的对象之外.他说:"它是一个知识工具,比任何其他由于人的作用而得来的知识工具更为有力,因而他是所有其他知识工具的源泉."在这同一个意向下,他写道:

>……所有那些目的在于研究顺序和度量的科学,都和数学有关.至于所求的度量是关于数的呢,形的呢,星体的呢,声音的呢,还是其他东西的呢,都是无关紧要的.因此,应该有一门普遍的科学,去解释所有我们能够知道的顺序和度量,而不考虑它们在个别科学中的应用.事实上,通过长期使用,这门科学已经有了它自身的专名,这就是数学.它之所以在灵活性和重要性上远远超过那些依赖于它的科学,是因为它完全包括了这些科学的研究对象和许许多多的别的东西.

他于是就作出结论:"几何学家惯于在困难的证明中用来达到结论的成长串的简单而容易的推理,使我想到:所有人们能够知道的东西,也同样是互相联系着的."

从他的数学方法的研究中,他抽出了(并且写进了他的《思想的指导法则》一书里)在任何领域中获得正确知识的一些原则:不要承认任何事物是真的,除非它在思想上明白清楚到毫无疑问的程度;要把困难分成一些小的难点;要由简到繁,依次进行;最后,要列举并审查推理的步骤,要做得彻底,使之毫无遗漏的可能.

这些是他从数学家的实践中提炼出来的方法要点.他希望用这些要点,去解决哲学、物理学、解剖学、天文学、数学和其他领域

中的问题.虽然这个大胆的计划并未成功,但他确实对于哲学、科学和数学,做出了可观的贡献.心的直观力量(即对于基本的、清楚的、明显的真理的直接了解)和演绎推理,是他的知识哲学的要素.用别的方法得来的所谓知识,由于有错误的嫌疑和危险性,都应该摒弃.

他在《方法论》中所写的三个附录,就是为了证明他的方法是有效的,他相信他已经证明了.

Descartes 创立了近代哲学.我们不能详细叙述他的系统,只能注意其中与数学有关的几点.在哲学中,他找出了一些明白到他可以立刻接受的真理作为公理,最后他定出四条:(a)我思故我在;(b)每一现象必有原因;(c)效果不能大于它的原因;(d)心中本来就有完美、空间、时间和运动的观念.根据(c),完美的观念(即"完美的东西"的观念)不能从人的不完美的心中推导或创造出来,它只能从一个完美的东西得到.因此,上帝存在.因为上帝不欺骗我们,所以我们就能保证:在直观上很明白的数学公理,以及通过纯粹的思想程序从这些公理得出来的推论,确实可应用于物理世界,因而它们都是真理.由此可见,上帝一定是按照数学定律来建立自然界的.

对于数学本身,他相信他有明白而清楚的数学概念,例如三角形的概念.这些概念确实存在,而且是永恒的、不变的,它们的存在,不依赖于人是否正想着它们.因此,数学是永恒地客观地存在着的.

Descartes 的第二个主要兴趣,是大多数和他同时代的思想家所共有的,这就是对自然界的了解.他用了许多年的时间在科学问题上,甚至广泛地做了力学、水静力学、光学和生物学方面的实验.他的漩涡理论是 17 世纪中最有势力的宇宙学.他是机械论哲学的奠基人.这个机械论说:一切自然现象包括人体的作用,都可归结到服从于力学定律的运动,但 Descartes 却把灵魂除外.他对于光

学、特别对于透镜的设计感兴趣；他的《几何》的一部分和《折光》都是讲光学的．他和 Willebrord Snell 分享了发现光的折射定律的荣誉．他的科学工作，和他的哲学工作一样，是根本性的而且是革命性的．

Descartes 的科学工作的另一重要之点，是强调要把科学成果付之应用（第 11 章第 5 节）．在这一点上，他同希腊人明白地公开地决裂．为了人类的幸福而去掌握自然，他追究了许多科学问题．由于他注意到数学的力量，他自然会给它寻找用途．对他来说，数学不是思维的训练，而是一门建设性的有用科学．他与 Fermat 不同，几乎不注意美与协调性．他不推崇纯粹数学，认为把数学方法只用到数学本身是没有价值的，因为这不是研究自然．那些为数学而搞数学的人，是白费精神的盲目的研究者．

4. Descartes 在坐标几何方面的工作

Descartes 既然断定方法的重要性，并断定数学可以有效地应用到科学上去，他就把方法应用到几何．在这里，他对方法的普遍兴趣和他对代数的专门知识，就组成联合力量．他对于下述事实深感不安：Euclid 几何中每一证明，总是要求某种新的、往往是奇巧的想法．他明白地批评希腊人的几何过于抽象，而且过多地依赖于图形，以至"它只能使人在想象力大大疲乏的情况下，去练习理解力．"他对当时通行的代数也加以批评，说它完全受法则和公式的控制，以至于"成为一种充满混杂与晦暗、故意用来阻碍思想的艺术，而不像一门改进思想的科学．"他因此主张采取代数和几何中一切最好的东西，互相以长补短．

事实上，他所着手开发的，是把代数用到几何上去．他完全看到代数的力量，看到它在提供广泛的方法论方面，高出希腊人的几何方法．他同时强调代数的一般性，以及它把推理程序机械化和把

解题工作量减小的价值. 他看到代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力. 他把代数应用到几何的产物,是他的《几何》一书.

虽然他在这本书里用了改进的记号(这在第 13 章已提到),但这书本是不容易读的,许多模糊不清之处是故意搞的,他自吹说欧洲几乎没有一个数学家能懂他的著作,他只约略指出作图法和证法,而留给别人去填入细节. 他在一封信里,把他的工作比作建筑师的工作,即立下计划,指明什么是应该做的,而把手工操作留给木工与瓦工. 他还说:"我没有做过任何不经心的删节,但我预见到:对于那些自命为无所不知的人,我如果写得使他们能充分理解,他们将不失机会地说我所写的都是他们已经知道的东西."在《几何》中,他又给了一些别的理由,例如,他不愿夺去读者们自己进行加工的乐趣. 后来有人给此书写了许多评注,使它易于了解.

他的思想必须从他书中许多解出的例题里去推测. 他说,他之所以删去绝大多数定理的证明,是因为如果有人不嫌麻烦而去系统地考查这些例题,一般定理的证明就成为显然的了,而且照这样去学习是更为有益的.

在《几何》中,他开始仿照 Vieta 的方式,用代数来解决几何作图的问题;后来才逐渐地出现了用方程表示曲线的思想. 他首先指出,几何作图要求对线段作加减乘除,对特别的线段取平方根,因为这几种运算也包括在代数里,所以它们都可用代数的术语表出.

在考虑作图问题时,Descartes 说,我们必须假定问题已经解决,而用字母表示所有那些看来是作图所必需的已知和未知的线段;然后,不管线段是已知的还是未知的,我们必须这样去解除困难:弄清楚这些线段之间的相互关系,使得同一个量能够用两种方式表示出来,这样就得到一个方程. 我们必须求出与未知线段数目相同的方程. 如果方程不止一个,我们必须把它们组合起来,使得最后只剩下一个方程,其中只有一个未知的线段,用已知的线段表出. Descartes 然后说明怎样利用该未知线段的代数方程来把它

画出.

例如,假定某几何问题归结到寻求一个未知长度 x,经过代数运算知道 x 满足方程 $x^2 = ax + b^2$,其中 a, b 是已知长度.于是由代数学得出

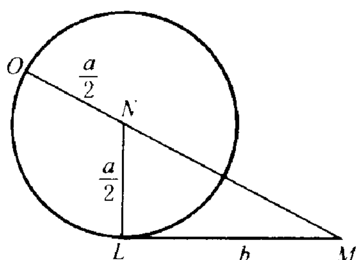


图 15.2

(1) $$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

(Descartes 不考虑负根).他画出 x 如下:作直角三角形 NLM(图 15.2),其中 $LM = b$, $NL = \frac{a}{2}$. 延长 MN 到 O,使 $NO = NL = \frac{a}{2}$. 于是 x 就是 OM 的长度.Descartes 没有证明这个结论的正确性,但是很明显

$$OM = ON + MN = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

这就是说,由解一个代数方程而得到的(1)式,指明了 x 的画法.

在第一卷书的前一半中,Descartes 用代数解决的,只是古典的几何作图问题.这是代数在几何上的一个应用,并不是现代意义下的解析几何.以上所说的问题,可以叫做确定的作图问题,因为结果是一个唯一的长度.Descartes 下一步考虑不确定问题,其结果有许多长度可以作为答案.这些长度的端点充满一条曲线,他在这里说,"也要求发现并且描出这条包括所有端点的曲线."曲线的描出,根据于最后得到的不定方程,此方程把未知的长度 y 用任意的长度 x 表出.对此,Descartes 着重指出,对于每个 x,长度 y 满足一个确定方程,因而可以画出.如果方程是一次的或二次的,就可以按照第一卷的方法,用直线和圆把 y 画出;对于高次方程,他说将在第二卷中说明怎样画 y.

Descartes 用 Pappus(第 5 章第 7 节)的问题来说明当问题归结到一个含有两个未知长度的方程时该怎么办,这问题(他并没有

普遍地解出)的叙述如下:在平面上给定三条直线,求所有这样的点的位置(即轨迹),从这点作三条直线各与一条已知线交于已知角(三个角不一定相同),使在所得的三条线段中,某两条的乘积(指长度的乘积)与第三条的平方成定比.如果给定四条直线,画法同上,但要求在所得的四条线段中,某两条的乘积,与其余两条的乘积成定比.如果给定五条直线,画法仍同上,但要求在所得的五条线段中,某三个的乘积与其余两个的乘积成定比.如果给定的直线多于五条,作法照此类推.

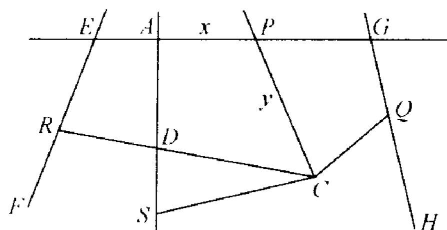


图 15.3

Pappus 曾宣称,当给定的直线是三条或四条时,所得的轨迹是一条圆锥曲线.在第二卷中,Descartes 处理了四条直线时的 Pappus 问题.设给定的线(图 15.3)是 AG, GH, EF 和 AD.考虑一点 C,从点 C 引四线各与一条已知线交于已知角(四个角不一定相同),把所得的四条线段记为 CP, CQ, CR 和 CS.要求找出满足条件 $CP \cdot CR = CS \cdot CQ$ 的点 C 的轨迹.

Descartes 记 AP 为 x,记 PC 为 y.经过简单的几何考虑,他从已知量得出 CR, CQ 和 CS 的值.把这三个值代入 $CP \cdot CR = CS \cdot CQ$,他就得到一个 x 和 y 的二次方程

(2)
$$y^2 = Ay - Bxy + Cx + Dx^2,$$

其中 A, B, C, D 是由已知量组成的简单的代数式.于是他指出,如果任意给 x 一个值,就得到一个 y 的二次方程;从这个方程可以解出 y,于是就能用直尺和圆规把 y 画出,像在第一卷里那样.由此可知,如果我们取无穷多个 x 值,就得到无穷多个 y 值,从而得到无穷多个点 C.所有这些 C 点的轨迹,就是方程(2)所代表的曲线.

Descartes 的做法,是选定一条线(图 15.3 中的 AG)作为基

线,以点 A 为原点. x 值是基线上的长度,从 A 量起;y 值是一个线段的长度,由基线出发,与基线作成一个固定的角度. 这个坐标系,我们现在叫做倾斜坐标系. Descartes 的 x, y 只取正值,他的图局限在第一象限之内,但方程(2)所代表的曲线却无此限制. Descartes 简单地假定轨迹根本上位于第一象限之内;只附带地说了一下在第一象限外可能出现的情况,他又不自觉地假定了对于每个正实数有一个长度.

有了曲线方程的思想之后,Descartes 就进一步发展这个思想. 他断言,容易证明曲线的次与坐标轴的选择无关. 他指出这个轴要选得使最后得到的方程愈简愈好. 他又迈出另外一大步,这就是考虑两个不同的曲线,用同一坐标轴来写出它们的方程,并且联立地解出这两个方程来求出这两条曲线的交点.

也是在第二卷里,Descartes 批判地考虑了希腊人关于平面曲线、立体曲线和线性曲线的区别. 希腊人说,平面曲线是可以用圆规和直尺画出的曲线,立体曲线是圆锥曲线,其余的都是线性曲线,例如蚌线、螺线、割圆曲线和蔓叶线. 希腊人也把线性曲线叫做机械曲线,因为需要用某些特殊机械来画出它们. 但是 Descartes 说,就是直线和圆,也需要一些工具. 机械作图的准确性是无关紧要的,因为在数学上只有推理才算数. 他继续说,古人反对线性曲线可能是因为它们的定义不可靠. 本此理由,Descartes 排斥了这种思想:只有用直尺和圆规画出的曲线是合法的①. 他甚至提出一些用机械画出的新的曲线. 他用一句高度有意义的话来作结论:“几何曲线”是那些可用一个唯一的含 x 和 y 的有限次代数方程来表出的曲线. 因此,Descartes 承认蚌线和蔓叶线是几何曲线,其他如螺线和割圆曲线等,他都叫做“机械曲线”.

Descartes 坚持:可以认为是曲线的,是具有代数方程的那一种. 这就开始取消了曲线是否存在看它是否可以画出这个判别标

① 比较第8章第2节中的讨论.

准. Leibniz 比 Descartes 更进一步,用"代数的"和"超越的"字样来替代 Descartes 的词"几何的"和"机械的",他对曲线必须有代数方程这一要求提出抗议[1]. 实际上 Descartes 和他的同时代人都忽略了这个要求而以同样的热情去研究旋轮线、对数曲线、对数螺线($\log \rho = a\theta$)和其他非代数曲线.

在推广容许曲线的概念方面,Descartes 迈出了一大步. 他不但接纳以前被排斥的曲线,而且开辟了整个的曲线领域. 因为给定任何一个含 x 和 y 的代数方程,人们可以求出它的曲线,从而得到一些全新的曲线. 在《普遍的算术》(*Arithmetica Universalis*)一书(1707)中,Newton 说:"但是近代人走得更远[比起希腊人的平面、立体和线性的轨迹来],把所有可以用方程表示的线都接收到几何里."

Descartes 下一步考虑几何曲线的分类. 含 x 和 y 的一次和二次曲线,属于第一类,即最简单的类. 关于这一点,Descartes 说,圆锥曲线的方程是二次的,但他没有证明. 三次和四次方程的曲线,构成第二类. 五次和六次方程的曲线构成第三类,余类推. 他把三次和四次的曲线归为一类,五次和六次的归为一类,是因为他相信,在每一类中,高次的那一个可以化为低次的,正如四次方程的解可以通过三次方程的解来求出. 当然,他这个信念是不对的.

《几何》的第三卷,又回到第一卷的课题. 它的目的是要解决这样的几何作图问题:当用代数语言叙述时,它们引到三次和高次的方程,而且依照代数,它们需要圆锥曲线和高次曲线. 例如,Descartes 考虑了求两个已知量 a 和 q 的两个比例中项这一作图问题. 对于 $q = 2a$ 的特殊情形,古希腊人曾经尝试过许多次,这一情形的重要处,在于它是解决"双倍立方"问题的一种方式. Descartes 对此问题是这样进行的:设 z 是一个比例中项,则另一个必

---

[1] *Acta Erud.*, 1684, pp. 470, 587; 1686, p. 292 = *Math. Schriften*, 5, 127, 223, 226.

定是 z^2/a,因为

$$\frac{a}{z}=\frac{z}{z^2/a}=\frac{z^2/a}{z^3/a^2}.$$

因此,如果取 z^3/a^2 为 q,就得到 z 必须满足的方程.由此可见,给定 q 和 a 之后,我们必须求 z 使

$$z^3=a^2q. \tag{3}$$

这就是说,必须解一个三次方程.这时,Descartes 就证明,z 和z^2/a 可以借助一条抛物线和一个圆,用几何作图法求出.

从 Descartes 所描写的这个作图法上看,似乎没有牵涉到坐标几何.但是,抛物线是不能用直尺和圆规画出的(除非逐点去画),所以必须按方程把它准确地描出.

Descartes 得到 z,并不是由于联立地解抛物线和圆的方程而求出它们的交点(x,y).换句话说,他并不是在我们现在的意义下来图解方程.他所用的是纯粹的几何作图法(但假定抛物线是可画的)和 z 满足方程(3)的事实,以及圆和抛物线的几何性质(这些性质可以更容易地从这两个曲线的方程看出).Descartes 在这里做的和他在第一卷里做的完全一样,只不过在这里解决的几何作图问题中,其未知长度所满足的方程是三次或高次的,而不是一次或二次的.他所给出的关于问题的纯代数方面的解,以及随之而来的作图法,实际上和阿拉伯人所给出的一样,只不过他能够利用圆锥截线的方程来推导关于曲线的事实并且把它画出.

Descartes 不但立意说明某些立体问题怎样可以在代数和圆锥曲线的帮助下得到解决,而且注意于问题的分类,使人从中知道问题牵涉到什么以及怎样进行解决.他的分类法根据于作图问题所引出的代数方程的次.如果方程是一次的或二次的,就可用直线和圆把图作出.如果方程是三次或四次的,那就非用圆锥曲线不可.他无意中断言:所有三次的问题都可化为三等分角和双倍立方的问题,而且不用比圆更为复杂的曲线,三次问题是不能解决的.

如果方程的次高于四,作图时就需要用比圆锥曲线更为复杂的曲线.

Descartes 又强调曲线方程的次是衡量曲线繁简的标准.作图时应该用最简单的曲线(即最低次的方程).他把曲线的次强调到这个程度,以至认为像 Descartes 叶线 $x^3+y^3-3axy=0$ (图 15.4)这样复杂的曲线,比曲线 $y=x^4$ 还要简单.

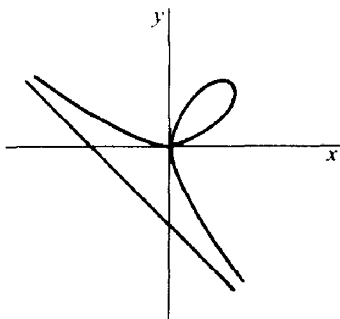


图 15.4

Descartes 把代数提高到重要地位.其意义远远超过他对作图问题的洞察和分类.这个关键思想使人们能够认识典型的几何问题并且能够把在几何形式上互不相关的问题归在一起.代数给几何带来最自然的分类原则和最自然的方法层次.不仅可解性问题和作图可能性问题,能够从平行于几何的代数来漂亮、迅速、完全地决定,而且离开代数,决定就成为不可能的了.因此,体系和结构就从几何转移到代数.

在《几何》第二卷的一部分和《折光》里,Descartes 用坐标几何作为助力,从事于光学的研究.他对望远镜、显微镜以及其他光学仪器中透镜的设计非常关心,因为他体会到这些仪器对于天文学和生物学是重要的.他在《折光》里讨论了折射现象.在他之前,Kepler 和 Alhazen 已经注意到下述说法对大的角度是不正确的:折射角和入射角成比例,其比例常数依赖于引起折射的介质.但他两人没有发现正确的定律.Snell 在 1626 年之前发现了(但未发表)正确的定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2},$$

其中 v_1 是光在第一介质中的速度,v_2 是光进入第二介质后的速度(图 15.5).Descartes 于 1637 年在他的《折光》里给出同样的定

律，他是不是独立地发现了这个定律，至今还没有考查清楚. 关于这个定律，他所给出的证明是错误的. Fermat 立即对定律及其证明进行攻击. 这就引起了两人之间长达十年之久的争论. Fermat 一直到他从他的"最短时间原理"（第 24 章第 3 节）导出此定律后，才承认它是正确的.

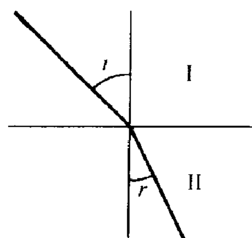


图 15.5

Descartes 在《折光》里描述了眼的动作之后，进而考虑怎样去恰当地设计望远镜、显微镜和眼镜的聚焦透镜. 早在古代就知道球形透镜不能使平行光线或从光源 S 发出的光线聚焦于一点，因此什么形状的透镜能起这样的聚焦作用，还是一个没有解决的问题. Kepler 建议用某种圆锥截线，Descartes 试图设计一个能完全聚焦的透镜.

他成功地解决了这个一般性问题：什么样的曲面作为两种介质的交界面时，能使从第一种介质内一点发出的光线射到曲面上，折入第二种介质而聚于一点. 他发现：具有这个性质的旋转面是由一个卵形线（叫做 Descartes 卵形线）产生的. 他在《折光》里讨论这个曲线和它的折光性质，并且在《几何》的第二卷里作了补充.

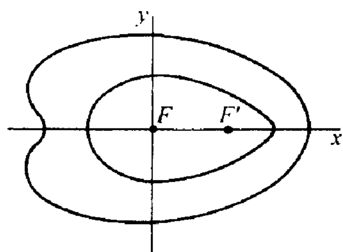


图 15.6

这条曲线的近代定义是满足条件

$$FM \pm nF'M = 2a$$

的点 M 的轨迹，其中 F 和 F' 是固定点，$2a$ 是大于 FF' 的任意实数，n 是任意实数. 如果 $n = 1$，曲线就成了椭圆. 在一般情形下，卵形线的方程对 x 和 y 是四次的，这个曲线包括两个没有共同点的闭线，而且一个在另一个之内. 在内的那个，类似于椭圆，在外的那个可能是凸的，也可能有拐点，如图 15.6 所示.

我们现在能够看到，Descartes 和 Fermat 研究坐标几何的方

法大不相同. Descartes 批评了希腊的传统,而且主张同这传统决裂;Fermat 则着眼于继承希腊人的思想,认为他自己的工作只是重新表述了 Apollonius 的工作. 真正的发现——代数方法的威力——是属于 Descartes 的,他知道他是在改换古代方法. 虽然用方程表示曲线的思想在 Fermat 的工作中比在 Descartes 的工作中更为明显,但 Fermat 的工作主要是这样一个技术的成就:他完成了 Apollonius 的工作,并且利用了 Vieta 用字母代表数类的思想. Descartes 的方法是可以普遍使用的,而且就潜力而论也适用于超越曲线.

尽管 Descartes 和 Fermat 研究坐标几何的方式和目的有显著的不同,他们却卷入谁先发现的争论. Fermat 的著作直到 1679 年才出版,但他在 1629 年已发现了坐标几何的基本原理,这比 Descartes 发表《几何》的年代 1637 年还早. Descartes 当时已完全知道 Fermat 的许多发现,但否认他的思想是从 Fermat 来的. 荷兰数学家 Isaac Beeckman(1588—1637)把 Descartes 的坐标几何思想回溯到 1619 年,而且坐标几何中的许多基本思想,无疑是 Descartes 首创的.

当《几何》出版的时候,Fermat 批评说,书中删去了极大值和极小值、曲线的切线以及立体轨迹的作图法. 他认为这些是值得所有几何学家注意的. Descartes 回答说,Fermat 几乎没有做什么,至多做出一些不费气力不需要预备知识就能得到的东西,而他自己却在《几何》的第三卷中,用了关于方程性质的全部知识. 他讽刺地称呼 Fermat 为我们的**极大和极小大臣**,并且说 Fermat 欠了他的债. Roberval, Pascal 和其他一些人站在 Fermat 一边,而 Mydorge 和 Desargues 站在 Descartes 一边. Fermat 的朋友们给 Descartes 写了尖刻的信. 后来这两人的态度趋于缓和. 在 1660 年的一篇文章里,Fermat 虽然指出《几何》中的一个错误,但他宣称他是如此佩服 Descartes 的天才,即使 Descartes 有错误,他的工

作甚至比别人没有错误的工作更有价值. Descartes 却不像 Fermat 那样宽厚.

后代人对待《几何》并不像 Descartes 那样重视. 虽然对数学的前途来说,方程和曲线的结合是一个显著的思想,但对 Descartes 来说,这个思想只是为了达到目的——解决作图问题——的一个手段.

Fermat 强调轨迹的方程,从近代观点来看,是更为恰当的. Descartes 在卷一和卷三中所着重的几何作图问题,已逐渐失去重要性,这主要是因为不再像希腊人那样,用作图来证明存在了.

第三卷中也有一部分是在数学里占永久地位的. Descartes 解决几何作图问题时,首先把问题用代数表出,接着就解出所得到的代数方程,最后按解的要求来作图. 在这个过程中,Descartes 收集了自己的和别人的有助于求解的方程论工作. 因为代数方程不断地出现在成百的、与作图问题无关的不同场合中,所以这个方程论已经成为初等代数的基础部分.

5. 坐标几何在 17 世纪中的扩展

有种种原因,使坐标几何的主要思想——用代数方程表示并研究曲线——没有被数学家热情地接受并利用. Fermat 的《轨迹引论》虽然在他的朋友中得到传播,但迟至 1679 年才出版. Descartes 对于几何作图问题的强调,遮蔽了方程和曲线的主要思想. 事实上,许多和他同时代的人认为坐标几何主要是解决作图问题的工具,甚至 Leibniz 也说 Descartes 的工作是退回到古代. Descartes 本人确实知道他的贡献远远不限于提供一个解决作图问题的新方法. 他在《几何》的引言中说:"此外,我在第二卷中所作的关于曲线性质的讨论,以及考查这些性质的方法,据我看,远远超出了普通几何的论述,正如 Cicero 的词令远远超过儿童的简单语言

一样.”但是,他利用曲线方程之处,例如,解决 Pappus 问题,求曲线的法线,找出卵形线的性质等,大大地被他的作图问题所遮盖.坐标几何传播速度缓慢的另一原因,是 Descartes 坚持要把他的书写得使人难懂.

还有一个原因,是许多数学家反对把代数和几何混淆起来,或者把算术和几何混淆起来.早在16世纪当代数正在兴起的时候,已经有过这种反对的意见了.例如,Tartaglia 坚持要区别数的运算和希腊人对于几何物体的运算.他谴责《几何原本》的译者不加区别地使用 *multiplicare*(乘)和 *ducere*(倍)两字.他说,前一字是属于数的,后一字是属于几何量的.Vieta 也认为数的科学和几何量的科学是平行的,但是有区别.甚至 Newton 也如此,他虽然对坐标几何有贡献,而且在微积分里使用了它,但反对把代数和几何混淆起来,他在《普遍的算术》中说[①]:

> 方程是算术计算的表达式,它在几何里,除了表示真正几何量(线、面、立体、比例)间的相等关系以外,是没有地位的.近来把乘、除和同类的计算法引入几何,是轻率的而且是违反这一科学的基本原则的……因此这两门科学不容混淆,近代人混淆了它们,就失去了简单性,而这个简单性正是几何的一切优点所在.

对于 Newton 的立场的一个合理解释是:他想把代数排斥到初等几何之外,但他也确实知道,代数在处理圆锥截线和高次曲线时是有用的.

使坐标几何迟迟才被接受的又一原因,是代数被认为缺乏严密性.我们已经谈到(第13章第2节),Barrow 不愿承认:无理数除了作为表示连续几何量的一个符号外,还有别的意义.算术和代数从几何得到逻辑的核实,因而代数不能替代几何,或与几何并

---

① *Arithmetica Universalis*, 1707, p. 282.

列.哲学家 Thomas Hobbes(1588—1679)虽然在数学里是个小人物,但当他反对"把代数应用到几何的一整批人"时,却代表许多数学家发了言,说这批数学家错误地把符号当做几何.他又认为 John Wallis 论圆锥曲线的书是卑鄙的,是"符号的结痂".

上述种种,虽然阻碍了对 Descartes 和 Fermat 的贡献的了解,但也有很多人逐渐采用并且扩展了坐标几何.第一个任务是解释 Descartes 的思想.Frans van Schooten(1615—1660)将《几何》译成拉丁文,于1649年出版,并再版了若干次,这本书不但在文字上便于所有的学者(因为他们都能读拉丁文),而且添了一篇评论,对 Descartes 的精致陈述加以阐发.在1659—1661年的版本中,van Schooten 居然给出坐标变换——从一条基线(x 轴)到另一条基线——的代数式.他如此深切地感到 Descartes 方法的力量,以至宣称希腊人就是用这个方法导出他们的结果的.照 van Schooten 的说法,希腊人是先由代数工作看出怎样去综合地得出结果——van Schooten 说明如何做到这一步——然后发表那些没有代数方法显明的综合方法来惊世骇俗.van Schooten 可能误解了"分析"(这个词按希腊人的意思是分析某个问题)和"解析几何"(这个词特别描写 Descartes 把代数当作方法使用)的意义.

John Wallis 在《论圆锥曲线》(*De Sectionibus Conicis*, 1655)中,第一次得到圆锥曲线的方程.他是为了阐明 Apollonius 的结果,把 Apollonius 的几何条件翻译成代数条件(就像我们在第4章第12节所做的),从而得到这些方程的.他于是把圆锥曲线定义为对应于含 x 和 y 的二次方程的曲线,并证明这些曲线确实就是几何里的圆锥曲线.他很可能是第一个用方程来推导圆锥截线的性质的人.他的书大大有助于传播坐标几何的思想,又有助于普及这样的处理法:把圆锥截线看做平面曲线,而不看做是圆锥与平面的交线,虽然这后一种看法仍继续流传着.此外,Wallis 强调代数推理是有效的,而 Descartes 至少在他的《几何》中实际上依靠几

何，认为代数只是一种工具. Wallis 又是第一个有意识地引进负的纵横坐标的人. 略晚一些，Newton 也这样做，可能是从 Wallis 那里学来的. 我们可以比较 van Schooten 和 Wallis 的说法，Wallis 说，Archimedes 和几乎所有的古代人把他们的探索和分析问题的方法对后辈如此保密，使近代人觉得发明一种新的分析法比寻找旧的还要容易些.

Newton 的《流数法与无穷级数》(*The Method of Fluxions and Infinite Series*)大约于 1671 年写成，但第一次出版的，却是 John Colson (死于 1760 年)的英译本，出版于 1736 年. 此书包括坐标几何的许多应用，例如按方程描出曲线. 书中创见之一，是引进新的坐标系. 17 甚至 18 世纪的人，一般只用一根坐标轴(x 轴)，其 y 值是沿着与 x 轴成直角或斜角的方向画出的. Newton 所引进的坐标系之一，是用一个固定点和通过此点的一条直线作标准，略如我们现在的极坐标系. 书中还包括其他与极坐标有关的思想. Newton 又引进了双极坐标，其中每点的位置决定于它至两个固定点的距离(图 15.7). 由于 Newton 的这个工作直到 1736 年才为世人所知，而 James (Jakob) Bernoulli 于 1691 年在《教师学报》(*Acta Eruditorum*)上发表了一篇基本上是关于极坐标的文章，所以通常认为 James Bernoulli 是极坐标的发现者.

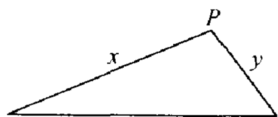


图 15.7

后来又出现了许多新的曲线和它们的方程. 1694 年，Bernoulli 引进了双纽线[1]，这个线在 18 世纪起了相当大的作用. 这条曲线是一大族叫做 Cassini 卵形线的一个特例. 这族曲线是 Jean-Dominique Cassini(1625—1712)引进的，但迟至 1749 年才由他的儿子 Jacques (1677—1756)发表在《天文学初步》(*Eléments d'astronomie*)里. Cassini 卵形线(图15.8)的定义是：线上的任何点到两个固定点

---

① *Acta Erud.*, Sept. 1694 = *Opera*, 2.608～612.

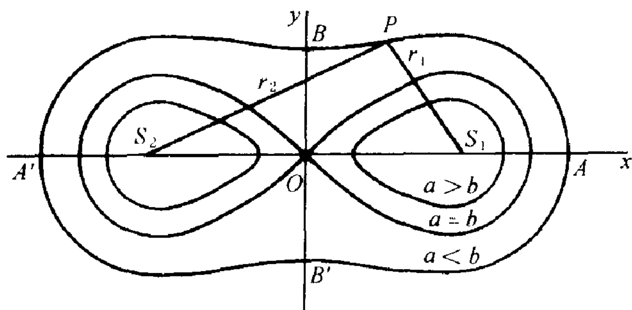


图 15.8

S_1，S_2 的距离 r_1，r_2 的乘积等于常数 b^2，b 是正常数. 设 S_1 与 S_2 间的距离是 $2a$，如果 $b>a$，就得到一个没有自交点的卵形线. 如果 $b=a$，就得到 James Bernoulli 所引进的双纽线. 如果 $b<a$，卵形线就分为两个. Cassini 卵形线的直角坐标方程是四次的. Descartes 自己引进了对数螺线[①]，它的极坐标方程是 $\rho=a^{\theta}$，并且发现了它的许多性质. 还有其他曲线，包括悬链线和旋轮线，将在别处谈到.

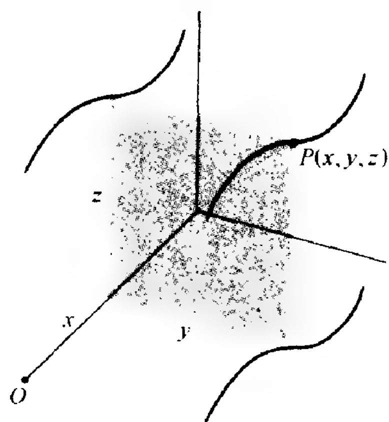


图 15.9

把坐标几何推广到三维空间，是在 17 世纪中叶开始的. 在《几何》的第二卷中，Descartes 指出，容易使他的想法运用到所有这样的曲线，即可以看做是一个点在三维空间中作规则运动时所产生的曲线. 要把这种曲线用代数表示出来，Descartes 的计划是：从曲线的每个点处作线段垂直于两个互相垂直的平面(图 15.9). 这些线段的端点将分别在这两个平面上描出两条曲线，而这两条平面曲线就可用已知的方法处理. 在第二卷的靠前一部分里，Descartes 指出，一个含有三

① 1638 年 9 月 12 日给 Mersenne 的信 = *Œuvres*, 2, 360.

个未知数——这三个数定出轨迹上的一点 C——的方程所代表的 C 的轨迹是一个平面，一个球面，或一个更复杂的曲面. 他显然体会到他的方法可能推广到三维空间中的曲线和曲面，可是他没有进一步去考虑这种推广.

Fermat 在 1643 年的一封信里，简短地描述了他的关于三维解析几何的思想. 他谈到柱面、椭圆抛物面、双叶双曲面和椭球面. 然后他说，作为平面曲线论的顶峰，应该研究曲面上的曲线. "这个理论，有可能用一个普遍的方法来处理，我有空闲时将说明这个方法."在一篇只有半页长的文章(*Novus Secundarum*)[1]里，他说，含有三个未知数的方程表示一个曲面.

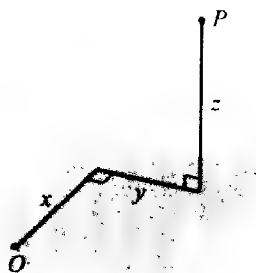


图 15.10

La Hire 在他的《圆锥截线新论》(*Nouveaux élémens des sections coniques*，1679)里，对三维坐标几何作了较为特殊的讨论. 为了表示曲面，他先用三个坐标表示空间中的点 P(图 15.10)，然后实际写出了曲面的方程. 尽管如此，三维坐标几何的发展，是 18 世纪里的事，我们以后将讨论到.

6. 坐标几何的重要性

在 Fermat 和 Descartes 走上数学舞台之前，代数已有相当大的进展，鉴于这个事实，坐标几何不是一个巨大的技术成就. 对 Fermat 来说，它是 Apollonius 工作的代数翻版. 对于 Descartes 来说，它几乎是一个偶然的发现，这个发现，是他继续 Vieta 和其他人的工作，利用代数来解决确定的几何作图问题时得到的. 然而坐标几何却改变了数学的面貌.

---

① *Œuvres*, 1,186～187;3,161～162.

Descartes 辩论说，曲线是任何具有代数方程的轨迹. 他这话一下子就扩大了数学的领域. 我们只要考虑到在数学中已经被承认被使用的曲线种类，并且把这些种类同希腊人所承认的曲线种类相比较，就知道冲破希腊人的堤防是如何重要的了.

Descartes 企图通过坐标几何来给几何引进新方法. 他的成就远远超过他的期望. 在代数的帮助下，不但能够迅速地证明关于曲线的任何事实，而且这个探索问题的方式，几乎成为自动的. 这些认识，在今天已经是平淡无奇的事了. 这套研究方法甚至是更为有力的. 当 Wallis 和 Newton 开始用字母代表正数、负数甚至以后代表复数时，就有了可能把综合几何中必须分别处理的情形，用代数来统一处理. 例如，在综合几何中证明三角形的高交于一点时，必须分别考虑交点是在三角形内和三角形外，而用坐标几何来证，则不加区别.

坐标几何把数学造成一个双面的工具. 几何概念可用代数表示，几何的目标，可通过代数达到. 反过来，给代数语言以几何的解释，可以直观地掌握那些语言的意义，又可以得到启发去提出新的结论. Lagrange 曾把这些优点写进他的《数学概要》(*Leçons élémentaires sur les mathématiques*)[1] 中："只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄. 但是当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善."的确，17 世纪以来数学的巨大发展，在很大程度上应归功于坐标几何.

坐标几何的显著优点，在于它恰好提供了科学久已迫切需要的，而且在 17 世纪一直公开要求着的数学设备. 这设备就是数量的工具. 研究物理世界，似乎首先需要几何. 物体基本上是几何的形象，运动物体的路线是曲线. Descartes 自己确也认为全部物理都可归结到几何. 但是，我们已经指出，把科学应用到短程测地学、

① *Œuvres*, 7, 183～287, p. 271 in part.

航海学、日历计算、天文预测、抛射体的运动，以及 Descartes 曾经搞过的透镜设计时，都需要数量知识. 坐标几何使人能把形象和路线表为代数的形式，从而导出数量知识.

因此，代数变得比几何更为重要，虽然 Descartes 认为它只是一种工具，又认为与其说它是数学的一部分，还不如说它是逻辑的一个推广. 事实上，坐标几何为倒换代数和几何的作用铺平了道路. 从希腊时代到 1600 年，几何统治着数学，代数居于附庸的地位. 1600 年以后，代数成为基本的数学部门. 在这作用的交替中，微积分将是决定的因素. 不过，代数的升级、加重了我们已经指出过的困难，即算术和代数没有逻辑基础，这个困难直到 19 世纪晚期，还没有解决的办法.

代数建立在经验的基础上这一事实，引起了数学名词的混乱. Fermat 和 Descartes 所创立的科目，通常叫做“解析几何”.“解析”一词用在这里是不恰当的，叫坐标几何或代数几何较好(代数几何现在有另外的意义). 自 Plato 以后，“解析”一词指的是这样的过程：从所要证明的结论开始，往回做去，直至达到一些已知的东西为止. “解析”在这个意义下与“综合”相反，后者系指演绎的表述而言. 约在 1590 年，Vieta 认为 algebra(代数)一字在欧洲语言中没有意义，摒弃不用，而建议用 analysis(解析)字样(第 13 章第 8 节)，他的建议没有被采用. 但对 Vieta 和 Descartes 来说，用“解析”一词来描写把代数应用到几何上还是恰当的，因为他们是用代数来分析几何作图问题的. 他们假定要求的几何长度已经知道，找出这长度所满足的方程，并调整这方程，使得从中能看出怎样去画出所求的长度. 因此 Jacques Ozanam (1640—1717)在他的《词典》(*Dictionary*, 1690)中说，“近代人用代数来进行分析”. 在 18 世纪著名的《百科全书》(*Encyclopédie*)中，d'Alembert 把“代数”和“解析”当作同义词用. “解析”一词逐渐地变为专指代数方法而言，而新的坐标几何，大约直到 18 世纪末，在形式上几乎一律被描写成

代数在几何上的应用.但是,到了18世纪末年,"解析几何"已经成为标准的名词,常常用作书的名字.

在代数变成一个突出的科目时,数学家就认为它的作用远远大于希腊人所理解的"对问题作分析".在18世纪中,这样的看法——应用到几何上的代数,不像Descartes所说的只是一种工具,而是像Fermat所说的,它本身就是一个引进并研究曲线和曲面的基本方法——通过Euler,Lagrange和Monge的工作而得到胜利.据此,"解析几何"一词含有证明和使用代数方法的意思,因而我们现在把解析几何和综合几何相提并论,不再认为一个是发明的手段,而另一个是证明的方法了.两者都是演绎的.

与此同时,微积分和无穷级数进入了数学.Newton和Leibniz都认为微积分是代数的扩展;它是"无穷"的代数,或者是具有无穷多个项的代数,例如无穷级数.就在1797年这样近的年代里,Lagrange在他的《解析函数论》(*Theórie des fonctions analytiques*)中说,微积分及其以后的发展只是初等代数的一个推广.因为代数和解析是同义词,所以微积分也叫做解析.Euler于1748年在一本著名的微积分教科书中,用"无穷小量解析"一词来描写微积分.这个名字直到19世纪晚期还在使用,当时解析一词是用来描写微积分和建筑在微积分上的那些分支的.这样就给我们遗留下来一个混乱的情况:"analysis"包括所有建立在极限过程上的数学,而"analytic geometry"则与极限过程无关.

参考书目

Boyer, Carl B.: *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, 1956.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1900, Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 2, pp. 806~876.

Chasles, Michel: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 3rd ed., Gauthier Villars et Fils, 1889, Chaps. 2~3 and relevant

notes.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, pp. 117～131.

Descartes, Rene: *La Géométrie* (French and English), Dover (reprint), 1954.

Descartes, Rene: *Œuvres*, 12 vols., Cerf, 1897～1913.

Fermat, Pierre de: *Œuvres*, 4 vols. and Supplement, Gauthier-Villars, 1891～1912; Supplement, 1922.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 2, pp. 102～177.

Scott, J. F.: *The Scientific Work of René Descartes*, Taylor and Francis, 1952.

Smith, David E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2, pp. 389～402.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200－1800*, Harvard University Press, 1969, pp. 87～93, 143～157.

Wallis, John: *Opera*, 3 vols., (1693～1699), Georg Olms (reprint), 1968.

Vrooman, Jack R.: *René Descartes: A Biography*, G. P. Putnam's Sons, 1970.

Vuillemin, Jules: *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Presses Universitaires de France, 1960.

第16章

科学的数学化

> 我们可以说,现在是第一次把一个拥有许多奇妙结果的新方法公开出来;在未来的年月里,它将赢得别人的重视.
>
> Galileo Galilei

1. 引　　言

截至1600年,欧洲的科学家无疑地注意到数学在自然科学研究上的重要性.这种信念的最有力的证据是Copernicus和Kepler的工作,他们为了一个在当时仅仅具有数学优越性的理论而坚决地去推翻久已公认的天文学和力学的定律以及宗教信条.尽管如此,倘若科学仍然跟着以往的脚步前进,就很可能不会有近代科学的惊人成就,数学也就不会从中取得推动创造性工作的巨大力量.可巧在17世纪中,Descartes和Galileo两人针对科学活动的基本性质,进行了革命化.他们选定科学应该使用的概念,重新规定科学活动的目标,改变科学中的方法论.他们这样做,不仅使科学得到出乎意料和史无前例的力量,而且把科学和数学紧紧地结合起来.他们这个计划,实际上是要把理论科学归结到数学.想要了解从17世纪到19世纪这段时间中推动数学的力量,我们必须先考察Descartes和Galileo两人的思想.

2. Descartes的科学观

Descartes明确宣称,科学的本质是数学.他说,他"既不承认

也不希望物理学中有任何原理不同于几何学和抽象数学中的原理,因为后者能解释一切自然现象,并且能对其中一些现象给出证明."客观世界是固体化了的空间,或者说是几何的化身.因此它的性质应该可以从几何的基本原理推导出来,而其中一些简单性质隐含着逻辑推理中的基础作用.

Descartes 精心讨论了为什么世界是可以接近的,并可归结到数学.他坚持:物质的最基本和最可靠的性质是形状、延展和在时空里的运动.因为形状也只是延展,所以他断言:"给我延展和运动,我将把宇宙构造出来."运动本身是由于力作用在分子上的结果. Descartes 相信这些力服从于不变的数学定律,而且由于延展和运动都可用数学表出,所以一切现象都可用数学描写出来.

Descartes 的机械哲学甚至推广到人体的机能上去.他相信,力学定律可以解释人和其他动物的生命.在他的生理学著作中,他用热、水力、管子、活塞和杠杆的机械作用去解释身体的作用;只有上帝和灵魂不是机械的.

如果 Descartes 把周围的一切看做只是由运动的物质构成的,那么,他怎样解释味道、气味、颜色和声音的质量呢? 这里他采用了古希腊关于第一性和第二性的学说,依照 Democritus,这个学说主张"甜与苦、冷与热以及颜色等东西,只在意念中存在,在实际中不存在,真正存在的是不变的粒子、原子以及它们在空的空间中的运动."第一性的东西,即物质与运动,存在于物理世界中;第二性的东西,仅仅是当外界原子冲击到人的感官时,第一性的东西产生这些感官上的效果.

因此,在 Descartes 看来,有两个世界:一个是巨大的协调地设计出来的数学机器,存在于空间和时间中,另一个是思维的世界.第一世界中的元素作用在第二世界上的效果就产生出物质的非数学性质或次要的性质.此外,Descartes 肯定了自然界定律的不变性,因为这些定律只是预先规定的数学图案的一部分,就是上

帝,也不能改动这不变的自然界.在这里,Descartes否认了通行的信条:上帝不断地干预着宇宙的活动.

虽然Descartes的哲学和科学学说,背离了Aristotle主义和经院主义,但在一个基本的方面,他还是一个经院主义者:他从自己的心里得出关于存在和实在的命题.他相信有先天的真理,而且理智本身的力量,可以得到对于一切事物的完全知识.例如,他是在先天推理的基础上,叙述出运动定律的(实际上,在他的生物学工作中,他做了些实验,并且从中得出重要的结论).但是除了依靠先天原理以外,他的确传播了一个普遍的系统的哲学,从而震撼了经院主义的堡垒,开辟了新鲜的思想渠道.他的关于清除一切先入之见和偏见的企图,是他对过去造反的明白的宣告.通过把自然现象归结为纯物理的事态,他的确作了许多努力去剥掉科学中的神秘主义和玄虚成分.Descartes的著作影响很大,他的演绎而且系统的哲学,风行于17世纪,特别是使Newton注意到运动的重要性.他的哲学著作的精装本,甚至成为贵妇们梳妆台上的点缀品.

3. Galileo的科学研究方式

虽然Galileo的科学哲学大部分与Descartes的一致,但是给近代科学制定出更彻底更有效更具体的程序,并用自己的工作证实该程序的效果的,却是Galileo.

Galileo(1564—1642)出生于比萨(Pisa)一个布商的家庭,他进了比萨大学学医.那里的课程还是在中世纪的水平上.Galileo从一位工程师那里学了数学,在17岁那年他从医学转到数学.学了大约8年之后,他向波洛尼亚(Bologna)大学申请一个教师职位,但因他不够优秀而遭到拒绝.后来他到底得到比萨大学的一个数学教授职位.在那里,他开始攻击Aristotle派的科学,并且毫不

迟疑地发表他的看法. 即使因为他的批评,同事们疏远了他,也在所不顾. 那时他已经开始写出重要的数学论文,从而引起一些能力较差的人的忌妒,这使他感到不愉快,因而在 1592 年接受了帕多瓦(Padua)大学数学教授的职位. 在那里,他写了一本小册子《力学》(*Le mecaniche*, 1604). 在帕多瓦呆了 18 年后,他被美第奇(Medici)的大公爵 Cosimo Ⅱ 邀请到佛罗伦萨,并被任命为宫廷首席数学家. Cosimo 给了他一所住房和可观的薪俸,并且保护他免受耶稣会的迫害(那时耶稣会把持着教皇职位,而 Galileo 由于拥护 Copernicus 的学说已经受到它的威胁). 为了表达他的谢意,Galileo 把他所发现的木星的卫星命名为美第奇卫星,这些星是在他为 Cosimo 服务的第一年中发现的. 他在佛罗伦萨有充分时间从事研究和写作.

他提倡 Copernicus 学说,触怒了罗马宗教法庭,1616 年他被召到罗马. 他对于太阳中心论的传播,受到了谴责. 他不得不答应不再发表关于这个专题的东西. 1630 年教皇 Urban 八世确实允许他发表,只要他的书是数学的而不是教义的. 因此,在 1632 年,他出版了他的经典著作《关于两大世界体系的对话》(*Dialogo dei massimi systemi*)[①]. 1633 年罗马教皇法庭再次传唤他去. 在刑具威胁下,强迫他放弃对于太阳中心论的拥护. 他再度被禁止发表东西,而且被迫过着实际上是软禁的生活. 但他仍然从事于写出他多年来关于运动现象和材料力学的思想与工作. 他的著作《关于两门新科学的探讨和数学证明》(*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*),又叫《关于两门新科学的对话》,被秘密地运到荷兰,于 1638 年在那里出版. 这是一部经典著作,在书中 Galileo 提出了他的新的科学方法. 他用以下的话为他的行为辩护:“我对教会和对我自己的良心的虔诚和崇敬从来没有

---

① 此书有中译本,书名是《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》,上海外国自然科学哲学著作编辑组译(据加利福尼亚大学 1953 年英译本译出). ——译者注

衰减过."

Galileo在许多科学领域里是一个杰出的人物. 他是敏锐的天文观察者. 他常被称为近代发明之父;虽然他没有发明望远镜(当时诗人Ben Jonson称之为迷惑镜),但他一听说这种想法,他就能立刻造出一个来. 他是显微镜的一个独立发明者,并且设计了第一个摆钟. 他又设计并制成一个罗盘,其标尺自动地给出数值的结果,使用者能在标尺上读出,避免了计算之烦. 这种罗盘销路很广,他做了许多个出售.

Galileo是第一个重要的近代声学的研究者. 他提出一个声波理论,并且开始进行关于音调、谐音和弦振动的研究工作. 这工作被Mersenne和Newton继承,成为18世纪中数学工作的主要激发力.

Galileo的主要著作,虽然讨论的是科学课题,但至今仍被认为是文学杰作. 在他1610年写的《恒星的使者》(*Sidereus Nuncius*)一书里,他宣布了他的天文观测,并宣称他是Copernicus理论的支持者. 这书立刻给他带来胜利,他被选为著名的罗马"山猫学院"(Academy of the Lynx-like)的成员. 他的两部经典著作《关于两大世界体系的对话》和《关于两门新科学的对话》写得清楚、直接、机智而又深奥. 在这两本书中,Galileo让一个角色提出流行的观点,让另一个角色对他作巧妙而坚定的辩论,指出这些观点的错误和弱点以及新观点的力量.

在他的科学哲学中,Galileo对于自然界,坚决地同臆测的、神秘的看法决裂而赞成力学的和数学的观点. 他还相信,科学问题不应该为神学的辩论所迷惑、所蒙蔽. 事实上,他的科学成就之一(虽然多少离开了我们将要考察的方法)就是他明确地认识了科学领域而决然地把它同宗教教条割断.

Galileo和Descartes一样,相信自然界是用数学设计的. 他的1610年的叙述是著名的:

> 哲学[自然]是写在那本永远在我们眼前的伟大书本里的——我指的是宇宙——但是,我们如果不先学会书里所用的语言,掌握书里的符号,就不能了解它. 这书是用数学语言写出的,符号是三角形、圆形和别的几何图像. 没有它们的帮助,是连一个字也不会认识的;没有它们,人就在一个黑暗的迷宫里劳而无功地游荡着[①].

自然界是简单而有秩序的,它的行为是规则的而且必要的. 它按照完美而不变的数学规律活动着. 神圣的理智,是自然界中理性事物的源泉. 上帝把严密的数学必要性放入世界,人只有通过艰苦努力才能领会这个必要性. 因此,数学知识不但是绝对真理,而且像圣经那样,每句每行都是神圣不可侵犯的. 实际上,数学更优越,因为对圣经有许多不同的意见,而对数学的真理,则不会有不同的意见.

另一信条,希腊人 Democritus 的原子论,在 Galileo 的著作中,比在 Descartes 的著作中更为明显. 原子论预先假定有空的空间(Descartes 不承认这一点)和单个的不可毁灭的原子. 变化是由原子的组合和分解构成的. 物体中所有质的差别,都是由原子在数量、大小、形状和位置排列上的差别造成的. 原子的主要性质是不可透入性和不可毁灭性. 这些性质可用来解释化学现象与物理现象. Galileo 拥护原子论,把它摆在科学学说的前线.

原子论把 Galileo 吸引到第一性和第二性的学说. 他说:"如果把耳朵、舌头和鼻子都去掉,我的意见是:形状、数量[大小]和运动将仍存在,但将失掉嗅觉、味觉和声觉,这些是从活的动物抽象出来的,照我看来,只是一些名词而已."因此,Galileo 和 Descartes 一样,一下子就剥掉了千百种现象和性质而集中到物质和运动这两种可用数学描述的东西. 在一个把运动问题作为最突出

① *Opere*, 4,171.

最严肃的问题的世纪里,科学家认为运动是一个基本的物理现象,也许是不足为怪的.

集中到物质和运动,只是 Galileo 研究自然的新方式的第一步.他的下一步思想,Descartes 也曾提到过的,就是任何科学分支应在数学模型上取图案.这包括两个主要步骤.数学从公理——清楚而自明的真理——出发,通过演绎推论而建立新的真理.据此,任何科学分支,都应从公理或原理出发,然后演绎地进行下去.不但如此,还应从公理推出尽量多的结果.当然,这个思想源于 Aristotle,他所寻求的也是在数学模型指引下的演绎结构.

可是,Galileo 根本上不同于希腊人,不同于中世纪的科学家甚至 Descartes 之处,在于他的寻求基本原理的方法.Galileo 以前的人和 Descartes 都相信基本原理出自心中,心只需对任何一类现象去想,它就能认出基本的真理.心的这种力量,在数学中明白地得到证实.像"等量加等量结果还相等"和"两个点确定一条直线"等公理,只要我们想到数和几何图形,就会立刻呈现出来,而且是无可争辩的真理.希腊人也曾这样找出一些自明的物理原理.例如"宇宙中所有物体都应有自然位置"这条原理是再恰当没有的了.静止状态看来显然比运动状态更为自然.必须用力来推动和保持物体的运动,这也似乎是无可争辩的.相信心能够提供基本原理,并不否认观测在获得这些原理的过程中可能起的作用,但是观测只是唤起正确的原理,正如看见一个熟识的面孔,就能想起有关那个人的事情一样.

希腊和中世纪的科学家,如此相信先天的基本原理,以至当观测偶然不符合时,他们就造出特殊的解释来保存原理,同时也说明异常的地方.这些人,照 Galileo 的说法,是首先决定世界应该如何作用着,然后把他们所看见的东西配合到他们预想的原理中去.

Galileo 决定:在物理学中,和在数学中相反,基本原理必须

来自经验与实验. 寻求正确而基本的原理的道路,是要注意什么是自然界说的,而不必注意什么是心之所愿的. 他辩论道,自然界不是先造出人脑,然后把世界安排得使它能被人的智慧所接受. 对于中世纪的思想家无休止地重复 Aristotle 的话并且争论它的含义,Galileo 给以批评说,知识来自观测,不来自书本,关于 Aristotle 的辩论是无用的. 他说:"当我们得到自然界的意志时,权威是没有意义的……"当然,有些文艺复兴时代的思想家以及 Galileo 的同时代人 Francis Bacon 也得出同样的结论:实验是必要的. 在他的新方法的这一特殊方面,Galileo 并没有走在别人前面. 但是,近代主义者 Descartes 却认为 Galileo 依赖于实验的办法是不明智的. Descartes 说,感官所及的事情只能引向幻觉,只有理性能透过幻觉. 从内心所提供的天生的一般原理,我们能推出自然界的特殊现象,并且理解它们. Galileo 确曾领会到:人可能从实验得出一个不正确的原理,因而从这原理得出的推论,也是不正确的. 因此,他建议用实验去考核推理的结果,并且去获得基本原理.

就实验而论,Galileo 确是一个过渡人物. 他,还有 50 年后的 Newton,都相信少数关键性实验应该能产生正确的基本原理. 不仅如此,有许多 Galileo 叫做实验的,实际上是思想中的实验,这就是说,他依靠日常经验去想象如果真做实验的话,应该得到什么结果,于是他就坚信不疑地作出结论,好像他曾真正做过实验一样. 当他在《关于两大世界体系的对话》中描写到一个球从航行着的船的桅杆顶上掉下来的运动时,Simplicio(书中对话人之一)问他是否做过实验. Galileo 答道:"没有做过,我不需要做,即使没有任何经验,我也能肯定是这样的,因为它不能不是这样."事实上,他说他很少做实验;做实验主要是为了驳斥那些不遵循数学的人. 虽然 Newton 做了一些著名而巧妙的实验,却也说,他做实验是为了使他的结果在物理上易于了解,并且使普通人相信.

这事的真实情况是:Galileo对于自然有一些成见,这使他相信有少许实验就足够了.例如,他相信自然界是简单的,因此,当他考虑自由落体以递增的速度下降时,他断定速度的增加,在下降的每秒时间内是一样的,这是最简单的"真理".他也相信自然界是用数学设计出来的,因此任何数学定律,即使只是在很有限的实验中似乎是对的,在他看来就是对的.

Galileo和Huygens,Newton一样,认为科学工作中的演绎数学部分所起的作用比实验部分所起的作用要大.对Galileo说来,由一个单独的原理推出大量定理所引起的自豪感,不亚于该原理本身的发现所引起的自豪感.为近代科学造型的人——Descartes,Galileo,Huygens和Newton(还可加上Copernicus和Kepler)——都是以数学家的身份去探索自然,无论在一般方法上或具体研究上都是这样.他们是悬拟式的思想家,期望通过直观或通过关键性的观察和实验去了解广泛的、深刻的(但是简单的)、清晰而且不变的数学原理,然后从这些基本原理导出新的定律,完全和数学本身构造它的几何的方式一样.大量的活动是演绎部分,整个的思想体系就是这样导出的.

17世纪的大思想家所想象的科学的正当程序,后来确实证明是有益的.用理性去寻求自然界定律,到了Newton的时代,在薄弱的观察和实验的基础上,导出了极有价值的结果.16、17世纪的巨大科学成就是在天文学和力学方面,关于前者,观测只给出了很少一点新鲜的东西;关于后者,实验的结果,很难说是惊人的,而且确实是没有决定性的.但是,数学理论却达到了广博与完善的地步.在后来的两个世纪中,科学家根据极少甚至琐碎的观测和实验,给出了深刻而广泛的自然定律.

Galileo,Huygens和Newton都期望有少数实验就够了.这期望是容易理解的,因为他们都相信自然界是用数学设计的,所以照他们看来,没有理由不按照数学家搞数学的程序去进行科学的研

究. 正如 John Herman Randall 在《近代思想的形成》(*Making of the Modern Mind*)一书中所说的:"科学产生于用数学解释自然这一信念……"

但是,Galileo 确实从经验中得出几个原则,而且在这个工作中,他的研究方式截然不同于他的前辈的研究方式. 他断定:人必须深入到现象的基本中去,而把后者作为起点. 在《关于两门新科学的对话》中,他说,处理无穷多样的重量,形状和速度是不可能的. 他曾经观察到不同的物体在空气里降落的速度差异,比在水里的要小. 所以,介质越稀薄,物体下降的差异越小. "当观察到这点之后,我就得出结论:在一个完全没有阻力的介质中,所有物体以同一速度降落. "Galileo 在这里所做的是去掉偶然的或次要的效应,去得到首要的效应.

当然,实际的物体是在有阻力的介质中降落的,对于这些运动,Galileo 该怎样说呢? 他的回答是:"……因此,为了科学地进行处理,必须割掉这些困难[空气阻力,摩擦力等],在无阻力的情形下,发现并且证明这些定理之后,再按照实际经验所给予的限制来应用这些定理. "

去掉空气阻力和摩擦力之后,Galileo 找出了在真空里运动的基本定律. 这样,他不仅用物体在空的空间中运动的概念来驳斥 Aristotle,甚至驳斥 Descartes,而且他所做的,正如数学家在研究实际图形时所做的那样. 数学家从线上去掉分子构造、颜色和厚度而得到线的基本性质,然后就集中研究这些性质. Galileo 就是这样深入到物理因素的. 数学的抽象方法确实离开了现实,但是说也奇怪,当回到现实时,它却比所有因素都考虑进去更为有力.

以上所说的是 Galileo 所表述的一些方法论原理,其中有许多是由于受到数学的研究方式——数学用以研究几何的方式——的启发而来的. 他的下一个原理,是关于数学本身的应用,但只是一个特殊方式的应用. Aristotle 派和中世纪的科学家都倒向质的方

面,他们认为质是基本的,他们研究了质的获得与丧失,辩论了质的意义,Galileo 和他们不同,主张寻求量的公理. 这个改变最为重要. 我们稍后将看到它的全部意义,现在举个简例也许有用. Aristotle 派说,球的降落,是因为它有重量;它落在地上,是因为任何物体都要找它的自然位置;而重物的自然位置是地球的中心. 这些原理都是属于质的. 甚至 Kepler 的第一运动定理——行星的轨道是椭圆——也是属于质的. 与此相反,让我们来看这一叙述:球在降落中每秒钟的速度,以英尺计,是 32 乘以开始降落后所经历的秒数,用符号表出便是 $v = 32t$. 这是一个关于球如何降落的量的叙述. Galileo 着意于找出这样的叙述作为公理,并期望用数学方法得出一些推论,这些推论将仍给出量的知识. 另外,我们已经看到,数学是他要用的主要工具.

决定去寻求用公式表达的量的知识,带来了另一个根本的决定,虽然同这一根本的决定初次接触时,很难揭示出它的全部意义. Aristotle 派相信,科学的任务之一是要解释事情为什么发生,解释一词意味着把现象的原因挖掘出来."物体降落,因为它有重量"这一叙述给出降落的直接原因,而"物体找它的自然位置"这一叙述则给出最后原因. 但是,量的叙述 $v = 32t$, 不管它价值如何,没有解释物体为什么降落,它只说明速率是怎样随着时间而变的. 换句话说,公式不解释,只描写. Galileo 所寻求的自然知识,是描写性的. 他在《两门新科学》中说:"落体运动的加速度的原因何在,不是研究工作的必要部分."更一般些,他指出,他将研究并证明运动的若干性质,而不管其原因是什么. 实证的科学探讨,要同最后原因的问题分开,对于物理原因的忖度应该放弃.

对 Galileo 的这个原理的初次反应,势必是否定的. 用公式描写自然现象,只能说是第一步. Aristotle 派好像实际上已掌握了科学的真正作用,这就是解释种种现象为什么发生. 甚至 Descartes 对 Galileo 追求描写性公式的决定也提出抗议. 他说:"Gali-

leo 关于真空中落体所说的一切都是没有根据的，他应该首先定出重量的本质.”他又说，Galileo 应该在最后的理由上着想. 但是，再过几章之后，我们将清楚地看到，Galileo 追求描写的决定，是历来关于科学方法论的最深刻最有成效的思想.

尽管 Aristotle 派已经谈到一些关于质的名词，例如流动性、刚性、要素、自然位置、自然的和猛烈的运动，以及潜势等，Galileo 却选择了一组全新的可以测量的概念，使得它们的测度可以用公式联系起来. 这组概念包括距离、时间、速度、加速度、力、质量和重量等. 这些概念我们是太熟悉了，不觉得有什么奇怪，但在 Galileo 的时代，这是彻底的改造，至少作为基本概念来说是如此，这些概念在了解和掌握自然的努力中，已证明是最有帮助的.

我们已经描述出 Galileo 程序的主要特点. 其中有些思想是别人曾经提出过的，有些则完全是他自己的创造. 但是，Galileo 的卓越之处在于他非常清楚地看出当时科学研究工作中的错误和缺点，彻底地抛弃了旧的方式，而又非常明白地制定了新的程序. 另外，在应用这些程序于运动问题时，他不但表演了这个方法，而且成功地获得了辉煌的成果——换句话说，他证明了他的程序是有效的. 他工作的完整、思想和表达的明晰以及论辩的力量，影响了几乎所有他的同辈和后辈. Galileo 是近代科学方法论的奠基人. 他完全意识到他的成就(见本章开端处的引言). 别人也意识到他的成就，哲学家 Hobbes 谈到 Galileo 时说：“他是第一个给我们打开通向整个物理领域的门的人.”

我们不能细述科学方法论的历史，但因数学在这个方法论中非常重要，而这个方法论的采用，又反过来大大促进了数学，我们就应该注意到像 Newton 这样的大人物，是怎样全盘地接受了 Galileo 的程序的. Newton 断言，需要用实验来提供基本定律. 他又明白知道：在得到一些基本原理之后，科学的作用就是从这些原理推出新的事实. 他在他所著的《自然哲学的数学原理》(*Philoso-*

phiae Naturalis Principia Mathematica)的序文中说:

> 古代人(正如 Pappus 告诉我们的那样)在自然事物的研究中,把力学科学推崇到极端重要的地位,而近代人则排除物体的形式和玄妙的质,努力把自然现象放在数学的控制之下.本此理由,我在这本书里,培育数学直至它联系到哲学[科学]时为止……所以我献出这本书作为哲学的数学原理,因为哲学的整个负担似乎在于——从运动现象去考察自然的力,然后从这些力去阐明其他现象……"

当然,数学原理对 Newton 和对 Galileo 一样,都是量的原理.他在《原理》中说,他的目的,是要发现并宣告"一切事物按测度、数目和重量安排"的准确方式. Newton 有充分理由来强调与物理解释针锋相对的量的数学定律,因为在他的天体力学里,中心的物理概念是引力,而引力的作用是完全不能用物理的术语解释的. Newton 不给解释,只给出一个显明而有用的数量公式,表明引力是怎样作用的.这就是为什么他在《原理》的开端处说:"因此,我计划在这里只给出这些力的数学概念,不考虑它们的物理原因和根底."在书的接近末尾的地方,他又重复他的思想:

> 但是我们的目的,是要从现象中寻出这个力的数量和性质,并且把我们在简单情形下发现的东西作为原理.通过数学方法,我们可以估计这些原理在较为复杂情形下的效果……我们说通过数学方法(Newton 加了着重号),是为了避免关于这个力的本性或质的一切问题,这个质是我们用任何假设都不会确定出来的.

放弃物理的机械解释而改用数学的描写,甚至杰出的科学家也感到震惊. Huygens 认为引力的概念是"荒谬的",因为穿越空的空间的作用,排除了任何机械的解释.他很惊讶 Newton 竟然自

找麻烦去做这样多费力的计算，其中除了引力的数学原理以外，别无根据. Leibniz 攻击引力，说它是一个无实质而又不可解释的力量. John Bernoulli(James 的弟弟)也否定了它，认为它"背叛了那些习惯于除了无可争辩和论据确凿的物理原理而外，不接受任何物理原理的思想."但是，只有依靠数学的描写(即使完全缺乏物理的了解时也依靠它)才使得 Newton 的惊人贡献成为可能，更不用说后来的发展了.

由于科学变得沉重地依赖于——几乎附属于——数学，所以扩展数学领域和数学技术的人是科学家；而科学所提供的种种问题，给数学家的创造性工作指出了许多重要的方向.

4. 函数概念

按照 Galileo 程序进行的科学探讨，其第一个数学收获来自对运动的研究. 这个问题吸引了 17 世纪的科学家和数学家. 其原因是容易知道的. 虽然在 17 世纪的早期，特别是在 Galileo 给太阳中心论增添了证据之后，Kepler 的天文学已为一般人所接受，但是他的椭圆运动定律只是近似的，除非天空只有太阳和一个行星(在这个理想情形下，该定律是准确的). 人们已经在考虑着这样一些思想：每个行星的椭圆运动受到其他行星的干扰，月球绕地球的椭圆运动受到太阳的干扰. 事实上，作用于任何两个物体间的引力的概念，已由 Kepler(还有别人)提示过. 因此，如何改进计算行星位置的问题还未解决. Kepler 得到他的定律，主要是依靠用曲线去配合天文数据，但他并没有根据基本的运动定律去解释为什么行星沿着椭圆轨道运动. 关于如何从运动原理导出 Kepler 定律这一基本问题，是一个明显的挑战.

改进天文学理论，还有一个实用的目的. 为了寻找原料和通商，欧洲人已从事于大规模的、看不见陆地的长距离海航. 因此水

手们就需要测定纬度和经度的准确方法. 纬度可以通过观察太阳或恒星来确定,但测定经度则较困难. 16 世纪中的测经度的办法是这样地不准确以至经常产生大约 500 英里的误差. 到了大约 1514 年之后,经度是用月球对一些恒星的相对方向来确定的. 并且把从某个标准地点在不同时间观测到的相对方向制成表册. 航海者可以测定月球的方向(人所在的地点虽不同,但不太影响月球的方向),又可以利用例如恒星的方向来测定他的当地时间,于是他就可以根据所测定的月球方向直接查表或通过插值,找出标准地点的时间,从而算出他所测定的当地时间和标准地点的时间之差. 时间上差一小时意味着经度上差 15°. 不过,这个方法也不准确. 由于那时的船在水上起伏不定,要得到月球的准确方向是困难的;另一方面,由于月球相对于恒星的运动,在几个小时内不会太大,月球的方向必须较为准确地测定. 角度上差 1′就意味着经度上差 0.5°;但是要使误差小于 1′,在当时是远远做不到的. 虽然有人提出过并且试用过其他测定经度的方法,但是,为了扩展并改进已有的表册,进一步了解月球的轨道看来是必要的,而且许多科学家,包括 Newton,都研究过这个问题. 就是在 Newton 的时代,关于月球位置的知识,仍是这样地不准确以至用表册来确定船在海中的位置,可以导致大到 100 英里的误差.

那时航运的损失很大,欧洲各国政府甚为关心. 1675 年,英王 Charles 二世在格林尼治(Greenwich)建立起皇家观测台,以期对月球运动得到较好的观测,并且把该台作为测定经度的固定站. 1712 年,英国政府设立一个"经度测定委员会",并且设置高到两万英镑的奖金来征求测量经度的方案.

17 世纪的科学家也面临着解释地球运动的问题. 按照太阳中心的理论,地球既自转又围绕太阳运行. 为什么物体应该呆在地球上呢? 既然地球不再是宇宙的中心,为什么下降的物体还要落到地球上呢? 不仅如此,从一切运动,例如抛射体的运动来看,好像

地球是静止的. 这些问题激起了许多人的注意，其中包括 Cardan, Tartaglia, Galileo 和 Newton. 抛射体的路线、射程和所能达到的高度，以及炮弹的速度对于高度和射程的影响都是基本的问题，因而当时的亲王们，和现在的国家一样，花了大量的钱来谋求解决. 这就需要有新的运动原理来解释地球的现象. 科学家们就想到：因为宇宙据信是按照一个宏伟的计划造成的，所以能解释地球运动的原理，也能解释天体的运动.

从各种运动问题的研究中出现了一个特殊的问题：如何设计一些较为准确的方法来测量时间. 从 1348 年以后通用的机械钟是不够准确的. 佛兰芒人（Flemish）的制图家 Gemma Frisius (1508—1555) 曾提出用时钟来测定经度. 在一个已知经度的地方把钟对好，放在船上；因为船的当地时间比较容易确定，例如按太阳的位置来确定，所以航海者只须记下这两个时间的差数，就能立刻把这个差数翻译成经度的差数. 但是截止到 1600 年，还没有准确的、耐久的、适用于航海的钟.

单摆的运动似乎提供了测量时间的基本装置. Galileo 已注意到摆的一个往复所用的时间是固定的，而且看来是与摆幅无关的. 他设计了摆钟，并且叫他的儿子造出一个来. 但是，对单摆作出基本工作的，却是 Robert Hooke 和 Huygens. 虽然摆钟不适于用在船上（为了计算经度，钟每天的误差不得超过二或三秒，而船的运动对摆的影响很大），但它在科学工作中以及家庭和商业方面的计时上，确实是有很大价值的. 适用于航海的钟终于由 John Harrison (1693—1776) 在 1761 年设计出来，在 18 世纪末开始使用. 在这之前，由于没有适当的钟，所以关于月球运动的准确观测，还是那个世纪的主要科学问题.

数学从运动的研究中引出了一个基本概念. 在那以后的二百年里，这个概念在几乎所有的工作中占中心位置，这就是函数——或变量间的关系——的概念. Galileo 创立近代力学的著作《两门

新科学》一书，几乎从头至尾包含着这个概念. Galileo 用文字和比例的语言表达函数关系. 例如，在他的关于材料力学的作品中，他有时说："两个等体积圆柱体的面积(底面积除外)之比，等于它们高度之比的平方根."又如："两个侧面积相等的正圆柱，其体积之比等于它们高度之比的反比."在他的关于运动的作品中，他说(例如)："从静止状态开始以定常加速度下降的物体，其经过的距离与所用时间的平方成正比.""沿着同高度但不同坡度的倾斜平板下滑的物体，其下滑的时间与平板的长度成正比."这些话清楚地表明他是在讨论变数和函数，只差把文字叙述表为符号形式这短短的一步了. 因为代数的符号化那时正在扩展，所以不久之后，Galileo 关于落体距离的叙述就写为 $s = kt^2$，关于沿斜板下滑时间的叙述就写为 $t = kl$ 了.

在 17 世纪引进的绝大部分函数，在函数概念还没有充分认识以前，是当作曲线来研究的. 例如，关于 $\log x$，$\sin x$ 和 a^x 等初等超越函数的研究就是这样. Galileo 的学生 Evangelista Torricelli (1608—1647)在 1644 年的一封信里，描述他对曲线(用现在的写法) $y = ae^{-cx}$ $(x \geqslant 0)$ 的研究(他的原稿直到 1900 年才刊出). 他是受到当时的对数工作的启发而考虑这条曲线的. Descartes 在 1639 年也碰到过这条曲线，但没有谈到它和对数的关系. 正弦曲线是通过 Roberval 关于旋轮线的研究，作为旋轮线的伴侣曲线而进入数学的(第 17 章第 2 节). Wallis 在他的《力学》(*Mechanica*, 1670)中给正弦曲线画了两个周期的图. 当然，到了那时期，列在表里的三角函数和对数函数的值，是非常精确的.

另一与此有关的事，是用运动概念来引进旧的和新的曲线. 在希腊时代，有少数曲线，例如割圆曲线和 Archimedes 螺线，是用运动定义的. 但在那时这些曲线不属于正规数学的范围. 到了 17 世纪，看法就不同了. Mersenne 在 1615 年把前人已知的曲线 cycloid(旋轮线)定义为当车轮沿地面滚动时轮上一个定点的轨

迹. Galileo 证明:把物体斜抛(即与地平线成一角度)向空中时,它的路径是一个 parabola(抛物线),因而把这曲线看做是动点的轨迹.

把曲线看做是动点的路径这一概念,通过 Roberval, Barrow 和 Newton 而获得明显的认可与接受. Newton 在他的《求曲边形的面积》(*Quadratare of Curves*,写于 1676 年)中说:"我认为这里的数学量,不是由小块合成的,而是由连续运动描出的. 线[曲线]是描画出来的,因而它的产生不是由于凑零为整,而是由于点的连续运动……这样的起源,真正发生在事物的本性中,并且是日常从物体的运动中看见的."

逐渐地就给这些曲线所代表的各种类型的函数引进了名词和记号. 但还存在着许多没有认识到的细微的难点. 例如,在 17 世纪中,函数 a^x(x 是正负整数或分数)的使用,已经很普通了. 那时假定(此假定一直到 19 世纪定义了无理数之后才取消)此函数对于无理数也有意义. 因此人们对于形如 $2^{\sqrt{2}}$ 的式子没有发生过疑问,而默认为它的值位于同样形式的两个数之间,其中一个的指数是小于$\sqrt{2}$的任何有理数,另一个的指数是大于$\sqrt{2}$的任何有理数.

Descartes 所提的几何曲线和机械曲线的区别,引出了代数函数和超越函数的区别. 幸而 Descartes 的同时代人没有注意到他排斥机械曲线的事. 通过求面积,求级数和,以及进入微积分里的其他运算,人们发现并研究了许多超越函数. James Gregory 在 1667 年证明圆扇形的面积不能表为圆半径和弦的代数函数,从而明确了代数函数和超越函数的区别. Leibniz 证明 $\sin x$ 不可能是 x 的代数函数,无意中证明了 Gregory 所寻求的结果①. 对于超越函数的完全了解和使用就渐渐地实现了.

17 世纪中,函数概念的定义,以 James Gregory 在他的论文

① *Math. Schriften*, 5, 97～98.

《论圆和双曲线的求积》(*Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, 1667)中所给出的最为明显. 他定义函数是这样一个量:它是从一些其他的量经过一系列代数运算而得到的,或者经过任何其他可以想象到的运算而得到的. 这最后一句话的意思,据他的解释是:除了五种代数运算以外,必须再加上一个第六种运算,即趋于极限的运算(我们将在第17章中看到Gregory所关心的是求面积的问题). Gregory的定义被遗忘了,但无论如何,不久就证明他的定义太窄,因为函数的级数表示式,不久就广泛地使用开了.

自从Newton于1665年开始微积分的工作之后,他一直用"流量"(fluent)一词来表示变量间的关系. Leibniz在他1673年的一篇手稿里用"函数"(function)一词来表示任何一个随着曲线上的点的变动而变动的量——例如,切线、法线、次切线等的长度以及纵坐标等. 至于该曲线本身,据他说是由一个方程式给出的. Leibniz又引进"常量"、"变量"和"参变量",这最后一词是用在曲线族中的①. John Bernoulli自1697年起就谈到一个按任何方式用变量和常量构成的量②("任何方式"一词,据他说是包括代数式子和超越式子而言). 到1698年他采用了Leibniz的"x的函数"一词,作为他这个量的名字. Leibniz在他的著作《历史》(1714)中,用"函数"一词来表示依赖于一个变量的量.

在符号方面,John Bernoulli利用X或ξ表示一般的x的函数,但到了1718年他又改写为ϕx. Leibniz同意这样做,但又提出用x^1, x^2等来表示x的函数,其上标是在同时考虑几个函数时用的. 记号$f(x)$是Euler于1734年引进的③. 从此函数概念就

---

① *Math. Schriften*, 5,266～269.

② *Mém. de l'Acad. des Sci.*, Paris, 1718,100 ff. = *Opera*, 2, 235～269, p. 241 in particular.

③ *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7,1734/1735,184～200,pub. 1740 = *Opera*, (1),22,57～75.

成了微积分里的中心概念.我们以后将看到这个概念的扩展情况.

参考书目

Bell, A. E.: *Christian Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century*, Edward Arnold, 1947.

Burtt, A. E.: *The Metaphysical Foundations of Modern Physical Science*, 2nd ed., Routledge and Kegan Paul, 1932, Chaps. 1~7.

Butterfield, Herbert: *The Origins of Modern Science*, Macmillan, 1951, Chaps. 1~7.

Cohen, I. Bernard: *The Birth of a New Physics*, Doubleday, 1960.

Coolidge, J. L.: *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover (reprint), 1963, pp. 119~127.

Crombie, A. C.: *Augustine to Galileo*, Falcon Press, 1952, Chap. 6.

Dampier Whetham, W. C. D.: *A History of Science and Its Relations with Philosophy and Religion*, Cambridge University Press, 1929, Chap. 3.

Dijksterhuis, E. J.: *The Mechanization of the World Picture*, Oxford University Press, 1961.

Drabkin, I. E., and Stillman Drake: *Galileo Galilei: On Motion and Mechanics*, University of Wisconsin Press, 1960.

Drake, Stillman: *Discoveries and Opinions of Galileo*, Doubleday, 1957.

Galilei, Galileo: *Opere*, 20 vols., 1890~1909, reprinted by G. Barbera, 1964~1966.

Galilei, Galileo: *Dialogues Concerning Two New Sciences*, Dover (reprint), 1952.

Hall, A. R.: *The Scientific Revolution*, Longmans Green, 1954, Chaps. 1~8.

Hall, A. R.: *From Galileo to Newton*, Collins, 1963, Chaps. 1~5.

Huygens, C.: *Œuvres complètes*, 22 vols., M. Nyhoff, 1888~1950.

Newton, I.: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, University of California Press, 1946.

Randall, John H., Jr.: *Making of the Modern Mind*, rev. ed., Houghton Mifflin, 1940, Chap. 10.

Scott, J. F.: *The Scientific Work of Rene Descartes*, Taylor and Francis, 1952,

Chaps. 10～12.

Smith, Preserved: *A History of Modern Culture*, Henry Holt, 1930, Vol. 1, Chaps. 3, 6 and 7.

Strong, Edward W.: *Procedures and Metaphysics*, University of California Press, 1936, Chaps. 5～8.

Whitehead, Alfred North: *Science and the Modern World*, Cambridge University Press, 1926, Chap. 3.

Wolf, Abraham: *A History of Science, Technology and Philosophy in the 16th and 17th Centuries*, 2nd ed., George Allen and Unwin, 1950, Chap. 3.

第 17 章

微积分的创立

> 他以几乎神一般的思维力，最先说明了行星的运动和图像，彗星的轨道和大海的潮汐.
>
> Newton 墓志铭

1. 促使微积分产生的因素

紧接着函数概念的采用，产生了微积分，它是继 Euclid 几何之后，全部数学中的一个最大的创造. 虽然在某种程度上，它是已被古希腊人处理过的那些问题的解答，但是，微积分的创立，首先是为了处理 17 世纪主要的科学问题的.

有四种主要类型的问题：第一类是已知物体移动的距离表示为时间的函数的公式，求物体在任意时刻的速度和加速度；反过来，已知物体的加速度表示为时间的函数的公式，求速度和距离. 这类问题是研究运动时直接出现的，困难在于：17 世纪所涉及的速度和加速度每时每刻都在变化. 比如，计算瞬时速度，就不能像计算平均速度那样，用运动的时间去除移动的距离，因为在给定的瞬时，移动的距离和所用的时间都是 0，而 0/0 是无意义的. 但是，根据物理，每一个运动的物体在它运动的每一时刻必有速度，这也是无疑的. 已知速度公式求移动距离的问题，也遇到同样的困难，因为速度每时每刻都在变化，所以不能用运动的时间乘任意时刻的速度，来得到移动的距离.

第二种类型的问题是求曲线的切线. 这个问题的重要性来源于好几个方面，它是纯几何的问题，而且对于科学应用有巨大的重

要性. 正如我们知道的那样,光学是17世纪的一门较重要的科学研究. 透镜的设计直接吸引了 Fermat, Descartes, Huygens 和 Newton. 要研究光线通过透镜的通道,必须知道光线射入透镜的角度以便应用反射定律. 重要的角是光线同曲线的法线间的夹角(图17.1). 法线是垂直于切线的,所以问题在于求出法线或者是求出切线. 另一个涉及到曲线的切线的科学问题出现于运动的研究中. 运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向,是轨迹的切线方向.

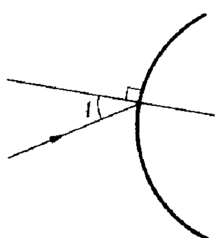


图 17.1

实际上,甚至"切线"本身的意义也是没有解决的问题. 对于圆锥曲线,把切线定义为和曲线只接触于一点而且位于曲线的一边的直线就足够了. 这个定义古希腊人曾经用过,但是对于17世纪所用的较复杂的曲线,它就不适用了.

第三类问题是求函数的最大值与最小值. 炮弹在炮筒里射出,它运行的水平距离,即射程,依赖于炮筒对地面的倾斜角,即发射角. 一个"实际"问题是求能获得最大射程的发射角. 17世纪初期,Galileo 断定(在真空中)最大射程在发射角是45°时达到;他还得出炮弹从各个不同角度发射后所达到的不同的最大高度. 研究行星的运动也涉及最大值和最小值的问题,例如求行星离开太阳的最远和最近的距离.

第四类问题是求曲线长(例如,行星在已知时期中移动的距离);曲线围成的面积;曲面围成的体积;物体的重心;一个体积相当大的物体(例如行星)作用于另一物体上的引力. 古希腊人用穷竭法求出了一些面积和体积. 尽管他们只是对于比较简单的面积和体积应用了这个方法,但也必须添上许多技巧,因为这个方法缺乏一般性. 他们还经常得不到数字的解答. 当 Archimedes 的工作在欧洲闻名时,求长度、面积、体积和重心的兴趣复兴了. 穷竭法先

是逐渐地被修改,后来由于微积分的创立而被根本地修改了.

2. 17 世纪初期的微积分工作

微积分问题至少被 17 世纪十几个最大的数学家和几十个小一些的数学家探索过. 位于他们全部贡献的顶峰的是 Newton 和 Leibniz 的成就. 这里我们只能谈谈这两位大师的一些先驱者的主要贡献.

从距离(作为时间的函数)求瞬时速度的问题以及它的逆问题,不久就被看出是计算一个变量对另一个变量的变化率的问题以及它的逆问题的特例. 一般变化率问题的第一个有效的解决属于 Newton,这将放在后面考察.

先叙述几种求曲线的切线的方法. Gilles Persone de Roberval (1602—1675)在他的《不可分量论》(*Traité des indivisibles*,此书注明 1634 年,可是直到 1693 年才出版)中,推广了 Archimedes 用来求他的螺线上任一点处切线的方法. 同 Archimedes 一样, Roberval 认为曲线是一个动点在两个速度作用下运动的轨迹. 例如,从炮筒里发射的炮弹是在水平速度 PQ 和垂直速度 PR 的作用下(见图 17.2),这两个速度的合速度是 PQ 和 PR 构成的平行四边形的对角线. 他把这条对角线作为在 P 点的切线. 正如 Torricelli 指出的那样, Roberval 的方法是应用了 Galileo 已经宣布过的法则,即水平的和垂直的速度是彼此独立地作用着的. Torricelli 本人应用 Roberval 的方法,求得了曲线(按我们的写法) $y = x^n$ 的切线.

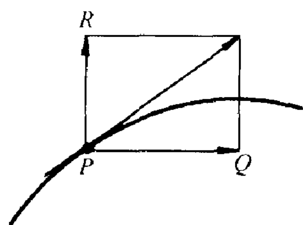


图 17.2

把切线定义为合速度方向的直线,比古希腊人把它定义为接触曲线于一点的直线要复杂些,但这个较新的概念适用于许多旧

概念不能适用的曲线. 一方面,这个概念是有价值的,因为它把纯几何同力学联系起来了,而在 Galileo 以前,这个联系是根本没有的. 但在另一方面,这个切线的定义在数学领域内是令人讨厌的,因为它是在物理的概念上定义切线的. 很多曲线是在与运动无关的情况下产生的,切线的这个定义就相应地不适用了. 所以求切线的其他方法受到欢迎.

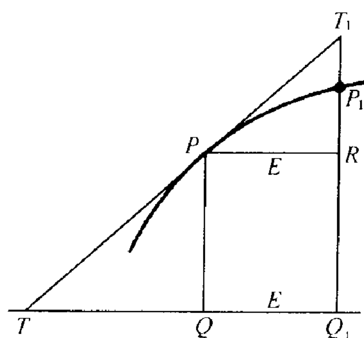


图 17.3

Fermat 的方法是他在 1629 年已设计好,但在他 1637 年的手稿《求最大值和最小值的方法》[①]中才发现的. 这方法实质上就是现在的方法. 设 PT 是曲线上一点 P 处的切线(图 17.3). TQ 的长叫次切线. Fermat 的计划是求出 TQ 的长度,从而知道 T 的位置,最后就能作出 TP.

设 QQ_1 是 TQ 的增量,长度为 E. 因为 $\triangle TQP \backsim \triangle PRT_1$,所以

$$TQ : PQ = E : T_1R.$$

但是,Fermat 说,T_1R 和 P_1R 是差不多长的;因此

$$TQ : PQ = E : (P_1Q_1 - QP).$$

用我们现在的符号,把 PQ 叫做 $f(x)$,我们就有

$$TQ : f(x) = E : [f(x+E) - f(x)].$$

因此,
$$TQ = \frac{E \cdot f(x)}{f(x+E) - f(x)}.$$

对于 Fermat 所处理的 $f(x)$,马上就可以用 E 除上面分式的分子和分母. 然后令 $E = 0$(他说是去掉 E 项),就得到 TQ.

Fermat 应用他的切线方法于许多难题. 虽然这个方法完全依赖于深奥的极限理论,但它具有微分学的现在的标准方法的

---

① *Œuvres*, 1,133～179;3,121～156.

形式.

对于 Descartes,求曲线的切线的问题是重要的,因为通过它能获得曲线的性质——例如两条曲线相交的角度. 他说:"这不但是我所知道的最有用最一般的问题,而且,甚至可以说,是我仅仅想要在几何里知道的问题."他在《几何》的第二册中给出了他的方法. 这是纯代数的,不牵涉极限概念;相反,Fermat 的方法,如果严密地阐述的话,就要牵涉到极限. 但是 Descartes 的方法,仅仅对于方程形式是 $y = f(x)$ (其中 $f(x)$是简单的多项式)的曲线有用. 虽然 Fermat 的方法是普遍的,但 Descartes 却认为自己的方法较好. Descartes 批评了 Fermat 的方法(应该承认,这个方法在当时表达得不清楚),而且想用自己的思想去解释它. 而 Fermat 却也宣称他的方法优越,他看到了用小增量 E 的好处.

Isaac Barrow(1630—1677)也给出了求曲线的切线的方法. Barrow 是剑桥大学的数学教授,精通希腊文和阿拉伯文,他能够翻译一些 Euclid 的著作并修改一些 Euclid, Apollonius, Archimedes 和 Theodosius 的作品的译文. 他的主要著作《几何讲义》(*Lectiones Geometricae*, 1669)是对微积分的一个巨大贡献. 其中他应用了几何法,正如他所指出的:"从讨厌的计算重担中解放出来." 1669 年 Barrow 辞去了他的教授席位并让给 Newton,自己转向神学的研究.

Barrow 的几何法相当复杂,而且用了辅助曲线. 但有一个特点值得注意,因为它反映出那个时代的思想,这就是利用所谓微分三角形或者特征三角形. 他是从三角形 PQR 出发的(图 17.4),这个三角形是增量 PR 的产物,他用了这个三角形相似于三角形 PMN 的事实,断定切线的斜率 QR/PR 等

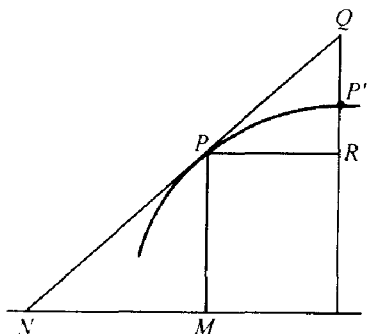


图 17.4

于 PM/MN. Barrow 说，当弧 PP'足够小的时候，我们可以放心地把它和 P 点切线的一段 PQ 等同起来. 三角形 PRP'(图 17.5)是特征三角形，其中 PP'既是曲线的弧长，又是切线的一部分. 很早以前 Pascal 在求面积时用过特征三角形，在他以前别人也用过.

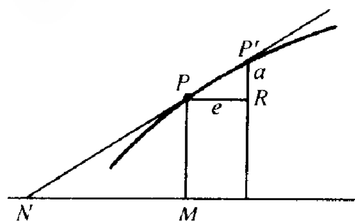


图 17.5

在《讲义》的第十讲中，Barrow 还是依靠计算，求出曲线的切线. 实质上，他的方法和 Fermat 的方法是一致的. 他用了曲线的方程，例如 $y^2 = px$，并用 $x+e$ 代替 x，用 $y+a$ 代替 y. 这时

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe.$$

消去 $y^2 = px$，得到

$$2ay + a^2 = pe.$$

然后他去掉 a 和 e 的高次幂(如果有的话)，这相当于用图 17.5 中的 PRP'代替图 17.4 中的 PRP'. 由此得出

$$\frac{a}{e} = \frac{p}{2y}.$$

这时，他说明 $a/e = PM/NM$，所以

$$\frac{PM}{NM} = \frac{p}{2y}.$$

因为 PM 是 y，所以他算出 NM，即次切线，从而知道 N 的位置.

关于第三类问题，即求函数的最大值和最小值的问题，这方面的工作，可以说是由 Kepler 的观测开始的. 他对酒桶的形状感兴趣，在他的《测量酒桶体积的新科学》(*Stereometria Doliorum*, 1615)中，他证明在所有内接于球面的、具有正方形底的正平行六面体中，立方体的容积最大. 他的方法是对特殊选择的尺寸计算容积，这本身并不重要；但他注意到，当越来越接近最大体积时，对应于一个尺寸固定的变化，体积的变化越来越小.

Fermat 在他的《求最大值和最小值的方法》中给出了他的方法，并用下面的例子进行说明：已知一条直线(段)，要找出它上面的一点，使被这点分成的两部分线段组成的矩形最大. 他把整个线段叫做 B，并设它的一部分为 A. 那么矩形的面积就是 $AB - A^2$. 然后他用 $A + E$ 代替 A，这时另外一部分就是 $B - (A + E)$，矩形的面积就成为 $(A + E)(B - A - E)$. 他把这两个面积等同起来，因为他认为，当取最大值时，这两个函数值——即两个面积——应该是相等的. 所以

$$AB + EB - A^2 - 2AE - E^2 = AB - A^2.$$

两边消去相同的项并用 E 除两边后，得到

$$B = 2A + E.$$

然后令 $E = 0$ (他说去掉 E 项)，得到 $B = 2A$. 因此这矩形是正方形.

Fermat 说，这个方法是完全普遍的. 他这样描述道：如果 A 是自变量，并且如果 A 增加到 $A + E$，那么，当 E 变成无限小，且当函数经过一个极大值(或极小值)时，函数的前后两个值将是相等的. 把这两个值等同起来；用 E 除方程，然后使 E 消失，就可以从所得的方程，确定使函数取最大值或最小值的 A 值. 这个方法实质上是他用来求曲线的切线的方法. 但是基本的事实在那里是两个三角形相似；而在这里是两个函数值相等. Fermat 没有看到有必要去说明先引进非零 E，然后在用 E 通除之后，令 $E = 0$ 的合理性①.

17 世纪求面积、体积、重心、曲线长的工作开始于 Kepler，据说他被体积问题吸引住了，因为他注意到酒商用来求酒桶体积的方法不精确. 用现在的标准来看，(在《测量酒桶体积的新科学》中

---

① 对于他的在令 $E = 0$ 之前的方程，Fermat 用了名词"*adaequalitas*". Carl B. Boyer 在《微积分概念》(*The Concepts of the Calculus*)的 p. 156 中，恰当地把它译为"假等式".

的)这个工作是粗糙的. 例如,圆的面积对他来说是无穷多个三角形的面积,每个三角形的顶点在圆心,底在圆周上,于是由正内接多边形的面积公式,周长乘上半径除以 2,他就得到了圆的面积. 类似地,他认为球的体积是小圆锥的体积的和,这些圆锥的顶点在球心,底在球面上. 他把圆锥看成是非常薄的圆盘的和,并由此算出它的体积. 然后他进而证明球的体积是半径乘球面积的三分之一. 在 Archimedes 的《球和柱》(*Spheroids and Conoids*)的启发下,他把面积旋转成新的图形,并计算其体积. 同样地,他把被弦割下的弓形绕着弦旋转,并求其体积.

用无数个同维的无穷小元素之和来确定曲边形面积和体积,是 Kepler 方法的精华. 把圆看做是无数个三角形的和,在他的思想中是用连续性原理(第 14 章第 5 节)证明的. 他看到两种图像本质上没有区别. 由同样的理由,一条直线和一个无穷小面积实际上是一样的;而且,在一些问题中,他的确认为面积就是直线的和.

在《两门新科学》中,Galileo 对于面积的想法和 Kepler 的想法相似. 在处理匀加速运动的问题时,他给出了论据,证明在时间-速度曲线下的面积就是距离. 假定一个物体以变速 $v = 32t$ 运动,这个速度在图 17.6 中用直线表示;那么,在时间 OA 通过的距离就是面积 OAB. Galileo 得到这个结论,是认为 $A'B'$ 是某个瞬时的速度,又是所走过的无穷小距离(如果乘上一个无穷短的时间,认为它就是距离),然后证明由直线 $A'B'$ 组成的面积 OAB 必定是

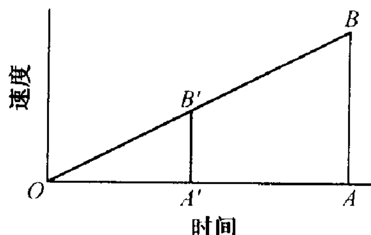


图 17.6

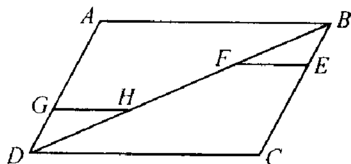


图 17.7

总的距离. 因为 AB 是 $32t$,OA 是 t,所以 OAB 的面积是 $16t^2$. 这个推理当然是不清楚的. 但在 Galileo 的思想里,却得到一种哲学观点的支持,即面积 OAB 是由 $A'B'$ 那样无数多个不可分的单位堆积而成的. 他在线段和面积一类的连续量的结构问题上花了很多时间,但没有得到解决.

Bonaventura Cavalieri(1598—1647)是 Galileo 的学生,波洛尼亚(Bologna)学府的教授. 他在 Kepler 和 Galileo 的影响下,并且在后者的敦促下,考察了微积分问题. Cavalieri 把 Galileo 和其他人在不可分量方面的思想发展成几何方法,并出版了这方面的著作《用新的方法推进连续体的不可分量的几何学》(*Geometria Indivisibilibus Continuorum Noxa quadam Ratione Promota*, 1635). 他认为面积是无数个等距平行线段构成的,体积是无数个平行的平面面积构成的;他分别把这些元素叫做面积和体积的不可分量. Cavalieri 承认组成面积或体积的不可分量的数目一定是无穷大的,但他不想在这点上反复推敲. 粗浅地说,正如 Cavalieri 在他的《六道几何练习题》(*Exercitationes Geometricae Sex*, 1647)中指出的,不可分法认为线是由点构成的,就像链是由珠子穿成的一样;面是由直线构成的,就像布是由线织成的一样;立体是由平面构成的,就像书是由页组成的一样. 不过,它们是对于无穷多个组成部分来说的.

Cavalieri 的方法(或者原则)可用下面的命题来说明(这个命题当然可以用其他方法证明). 为了证明平行四边形 $ABCD$(图 17.7)是三角形 ABD 或者 BCD 的两倍,他证明当 $GD = BE$ 时,$GH = FE$. 因此三角形 ABD 和 BCD 是由相等数目的等长线段 GH 和 EF 构成的,所以一定有相等的面积.

这个原则已编入现在通行的立体几何书中,作为一个定理,叫做 Cavalieri 定理. 这个原则说,如果两个立体有相等的高,而且它们的平行于底面并且离开底面有相等距离的截面面积总有一定的

比的话，那么这两个立体的体积之间也有这个比. 实质上，运用了这个原则，Cavalieri 证明了圆锥的体积是外接圆柱的三分之一. 同样，他考虑了在两条曲线下的面积. 用我们的写法，曲线可为 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$，其中 x 的范围相同. 把面积看成是纵坐标的和，如果一条曲线的纵坐标与另一条曲线的纵坐标的比是常数，那么 Cavalieri 说，这两个面积也有同样的比. 他用这个方法在《一百道杂题》(*Centuria di varii problemi*, 1639)中证明：对于从 1 到 9 的正整数 n，公式(按我们的记法)

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

成立. 可是，他的方法完全是几何的. 他能成功地获得正确的结果，是因为他运用他的原则计算面积间和体积间的比的时候，组成相应的面积和体积的不可分量间的比是常数.

Cavalieri 的不可分法遭到了同时代人的批评. 他企图回答他们，但没有严密的理由. 有些时候他宣称他的方法只是一个避免穷竭法的实用方法. 尽管方法受到批评，但许多数学家还是广泛地利用了它. 另外，像 Fermat，Pascal 和 Roberval 都用了这个方法，甚至用了“纵坐标的和”那样的语言，但是他们把面积想象成是无数无穷小长方形的和，而不是线的和.

1634 年 Roberval(他宣称曾研究过“神圣的 Archimedes”)使用了实质上是不可分法去求出旋轮线的一个拱下面的面积，这是 Mersenne 在 1629 年让他注意的问题. 有时 Roberval 被认为是不可分法的独立发现者，但实际上他相信线、面和体的无限可分性，因此就不存在任何最后的部分. 他的作品以《不可分量论》命名，但是他把他的方法叫做“无穷大法”.

Roberval 获得摆线下的面积的方法是有启发性的. 设 $OABP$ (图 17.8)是旋轮线的半个拱下的面积. OC 是母圆的直径，P 是拱上的任意一点. 作 $PQ = DF$. Q 的轨迹叫做伴旋轮线(只要原点

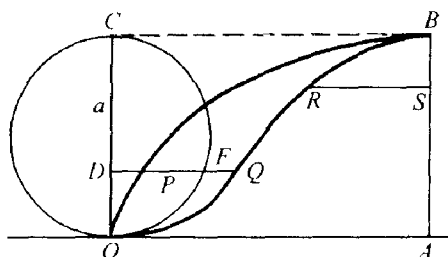


图 17.8

是 OQB 的中点，x 轴平行于 OA，那么用我们的写法，曲线 OQB 就是 $y = a\sin x/a$，其中 a 是母圆的半径). Roberval 断言，曲线 OQB 把矩形 $OABC$ 分成两个相等的部分，因为基本上，对于 $OQBC$ 中的每一条线 DQ，在 $OABQ$ 中都相应地有一条线 RS. 所以 Cavalieri 的原理用上了. 矩形 $OABC$ 的底和高分别等于母圆的半圆周和直径；因此它的面积是圆面积的 2 倍. 而 $OABQ$ 的面积和母圆面积相等. 另外，OPB 和 OQB 之间的面积等于半圆 OFC 的面积，这是因为由 Q 的定义，$DF = PQ$，使得这两块面积在每个线段上都有相等的宽. 所以在半拱下的面积是母圆面积的 $1\frac{1}{2}$ 倍. Roberval 还求出正弦曲线的一个拱下的面积，这拱绕着底旋转后产生的体积，以及其他与旋轮线有关的体积和旋轮线面积的形心.

计算面积、体积和其他量的最重要的新方法，从修改古希腊的穷竭法开始. 让我们考虑一个典型的例子：计算抛物线 $y = x^2$ 下

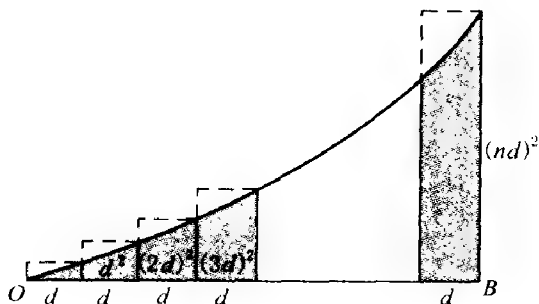


图 17.9

从 $x=0$ 到 $x=B$ 的面积(图17.9).穷竭法对于不同的曲线形面积,用不同类型的直线形去逼近,而17世纪的一些人却采用系统的程序,使用矩形如图所示.当这些矩形的宽度 d 越来越小时,这些矩形的面积的和就越来越接近曲线下的面积.如果底宽都是 d,那么,根据纵坐标是横坐标的平方这一抛物线的特性,这和就是

$$(1)\qquad d\cdot d^2+d(2d)^2+d(3d)^2+\cdots+d(nd)^2$$

或者

$$d^3(1+2^2+3^2+\cdots+n^2).$$

因为前 n 个自然数的 m 次幂的和,Pascal 和 Fermat 就为着这样的问题的需要已经求得,所以数学家能够容易地用

$$(2)\qquad d^3\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)$$

代替上一个式子.但是 d 是定长 OB 除以 n.因此(2)式成为

$$(3)\qquad OB^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

现在如果照这些人的说法,认为当 n 是无穷大时,最后两项能够忽略的话,正确的结果就得到了.那时极限过程还没有提出——或者仅仅是粗糙地觉察到——所以最后两项的省略并没有证明.

我们看到这种方法和穷竭法一样,要求用直线形逼近曲线形.但是,在最后的步骤中存在着重要的差别:在老方法中用到间接证明的地方,在这里矩形的数目成为无穷大,而且当 n 成为无穷大时,人们就取(3)的极限——虽然当时他们并没有明显地从极限上着想.这条新的途径,最早是 Stevin 于1586年在他的《静力学》(*statics*)中提出来的,并有许多追随者,包括 Fermat 在内①.

如果涉及的曲线不是抛物线,那就必须用问题中曲线的特性代替抛物线的特性,并因此得出一些其他的级数来代替(1).从类似于(1)的求和得到(2)的类似是需要技巧的.因此关于面积、体积

---

① *Œuvres*, 1,255～259;3,216～219.

和重心的结果是不多的. 当然用强有力的反微分法来计算这样的和的极限的方法,那时候还不能想象.

实质上应用我们刚才说明的求和技巧,Fermat 在 1636 年以前就知道:对于除了 −1 以外的任何有理数 n,有(用我们的记法)[①]

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

这个结果也由 Roberval, Torricelli 和 Cavalieri 各自独立地获得,虽然有些仅仅是几何的形式,有些对 n 加了限制.

在用几何形式求和法的人中间有 Pascal. 1658 年他从事于摆线问题研究[②]. 他计算出曲线的任一段和平行于底的一直线所包围的图形面积,该图形的形心,以及由该图形绕着它的底(图17.10中的 YZ)或者垂直线(对称轴)旋转生成的立体的体积. 在这一工作中,和在关于 $y = x^n$ 一类曲线下的面积的早期著作中,他把小矩形加起来,其方式与上文处理(1)的方式相同,只不过他的工作与结果都是用几何语言叙述的. 他用 Dettonville 的假名提出了他已解决的问题,向其他数学家挑战,然后出版了他自己的卓越的解[《Dettonville 的信》(*Lettres de Dettonville*), 1659].

在 Newton 和 Leibniz 以前,对于把分析方法引入微积分的工作做得最多的人是 John Wallis(1616—1703). 虽然他直到二十岁左右才开始学习数学——他在剑桥大学时是专门研究神学的——但是他在牛津大学成为几何教授而且在那个世纪中是仅次于 Newton 的最能干的英国数学家. 在他的《无穷的算术》(*Arithmetica Infinitorum*, 1655)中,他运用分析法和不可分法求出了

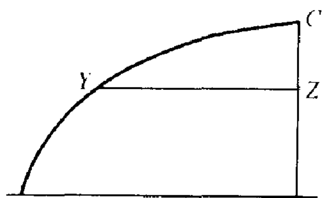


图 17.10

① *Œuvres*, 1,255~259;3,216~219.

② *Traité des sinus du quart de cercle*, 1659—*Œuvres*, 9,60~76.

许多面积并得到广泛而有用的结果.

Wallis 的一个值得注意的结果,是在他分析地计算圆面积的努力中得到的,即 π 的新的表达式. 他计算由坐标轴, x 点的纵坐标和函数

$$y=(1-x^2)^0,\ y=(1-x^2)^1,\ y=(1-x^2)^2,\ y=(1-x^2)^3,\ \cdots$$

的曲线围成的面积,得到的结果分别是

$$x,\ x-\frac{1}{3}x^3,\ x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5,\ x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7,\ \cdots$$

当 $x=1$ 时这些面积是

$$(4)\qquad 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{15},\ \frac{48}{105},\ \cdots$$

而圆却是由 $y=(1-x^2)^{1/2}$ 给出的. 应用归纳法和插值法, Wallis 算出它的面积,并通过更复杂的推理得到

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

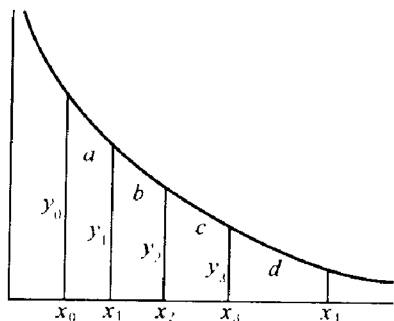


图 17.11

圣文森特(St. Vincent)的 Gregory 在他的《几何著作》(*Opus Geometricum*, 1647)中给直角双曲线和对数函数之间的重要联系提供了根据. 他用穷竭法证明:对于曲线 $y=1/x$ (图 17.11),如果 x_i 选择得使面积 $a, b, c, d, \cdots$ 相等,则 y_i 便构成几何数列. 这意味着从 x_0 到 x_i 的面积之和(这些和构成算术数列)是与 y_i 值的对数成比例的,这可用我们的符号写为

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x}=k\log y.$$

因为 $y=\frac{1}{x}$, 所以这和我们熟悉的积分结果是一致的. 第一个注意到面积能解释成对数的人是 Gregory 的学生——比利时耶稣会

会员 Alfons A. de Sarasa(1618—1667),这个解释见于他的书《关于 Mersenne 的命题的问题的解答》(*Solutio Problematis a Mersenno Propositi*, 1649). 1665 年左右 Newton 也注意到双曲线下的面积与对数之间的关系,并将这个关系写在他的《流数法》中. 他用二项式定理展开 $1/(1+x)$, 并逐项积分,得到

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Nicholas Mercator 用 Gregory 的结果,在他的 1668 年的《对数技术》(*Logarithmotechnia*)中,独立地给出了同样的级数(但没有明显地叙述出来). 其他的人不久发现了(按照我们的说法)收敛得更快的级数. 关于抛物线的求积以及它和对数函数的联系这一工作是由许多人做的,而且有很多是在通信中交流的,因此很难查出谁是最先发现的人.

直到 1650 年还无人相信一曲线的长度能完全等于某直线长度. 实际上,在《几何》第二册中,Descartes 说在曲线和直线之间的关系是未知的或者是永不可知的. 但是 Roberval 求出了摆线的一个拱的长度. 建筑师 Christopher Wren(1632—1723)由证明弧 $PA = 2PT$ 而算出摆线的长度(图 17.12)[①]. William Neile(1637—1670)也得到(1659)一个拱的长度,他还用 Wallis 的提示,算出了半立方抛物线($y^3 = ax^2$)的长度[②]. Fermat 也计算了一些曲线的长度. 这些人一般是用内接多边形去逼近曲线的,先求出各边的和,然后随着每条边长的缩小而使边数成为无穷大. 圣安德鲁斯(St. Andrews)大学和爱

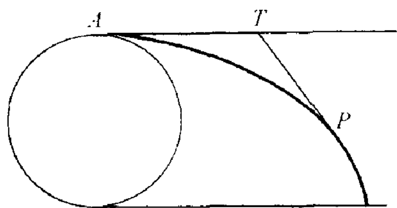


图 17.12

① 这个方法由 Wallis 在《续论》(*Tractatus Duo*, 1659 = *Opera*, 1,550～569)中公布. Wren 只是给出了结果.

② Neile 的工作由 Wallis 在注①引证的书中发表.

丁堡(Edinburgh)大学的教授 James Gregory(1638—1675,对他的工作,他的同时代人略有所知,直到 H. W. Turnbull 编辑的纪念册于 1939 年出版后,才一般地被人知道),在他的《几何的通用部分》(*Geometriae Pars Universalis*, 1668)中给出了计算曲线长度的方法.

关于计算曲线长度的更进一步的结果是 Christian Huygens(1629—1695)得到的.实际上,他给出了蔓叶线的弧长.他还对面积和体积的工作作出贡献,而且是第一个得到除了球以外的表面积的结果的.例如,他得到抛物面和双曲面的一部分表面的面积.Huygens 用纯几何的方法得到所有这些结果,不过,也和 Archimedes 一样,他有时用算术得到数量的解答.

计算椭圆的长度难住了数学家们.事实上,James Gregory 声称椭圆和双曲线的长度不能用已知函数表出.有一段时期数学家们对这问题的进一步工作失望了,直到下一世纪才得到新的结果.

我们讨论了 Newton 和 Leibniz 的先驱者对于推动微积分工作的四个主要问题所作的主要贡献.当时认为这四个问题是不同的,但也注意到,甚至于利用了它们之间的联系.例如 Fermat 就是用同样的方法求函数的最大值和曲线的切线.另外,那时也已看出函数对于自变量的变化率问题与切线问题是同一问题.实际上,Fermat 和 Barrow 的求切线的方法,仅仅是求变化率的几何副本.但是,微积分的主要特征——仅次于导数的概念以及积分作为和的极限的概念本身的——便是积分可以由微分的逆过程求得,或者说,求反导数.这一关系的很多迹象早已遇到过,但是它的意义却没有人体会到.Torricelli 在特殊的例子中看到了变化率问题本质上是面积问题的反问题.事实上,这包含在 Galileo 所用的事实中:在速度-时间的图形下的面积就是距离.因为距离的变化率必定是速度,所以如果把面积看做是"和",它的变化率必定是面积函数的导数.但是 Torricelli 没有看到普遍的情况.Fermat 同样也只

在特殊的例子中知道了面积和导数间的关系，没有体会到它的一般性或重要性. James Gregory 在他的 1668 年的《几何的通用部分》中证明切线问题是面积问题的逆问题，但是他的书未引起注意. 在《几何讲义》中，Barrow 有了求曲线的切线问题和面积问题之间的关系，但它是几何形式的，而且他本人也没有认识到它的重要性.

实际上在 Newton 和 Leibniz 作出他们的冲刺之前，微积分的大量知识已经积累起来了. 甚至在 Barrow 的一本书里，就能看到求切线的方法，两个函数的积和商的微分定理，x 的幂的微分，求曲线的长度，定积分中的变量代换，甚至还有隐函数的微分定理. 虽然在 Barrow 那儿，几何的表达使得普遍思想难于辨识，但在 Wallis 的《无穷的算术》中，可与之相比较的结果，是用代数的形式表达的.

人们于是惊问，在主要的新结果方面，还有什么有待于发现呢？问题的回答是方法的较大的普遍性以及在特殊问题里已建立起来的东西中认识其普遍性. 这世纪的前三分之二的时间内，微积分的工作沉没在细节里. 另外，许多人在通过几何来获得严密性的努力中，没有去利用或者探索新的代数和坐标几何中蕴含的东西，作用不大的细微末节的推理使他们精疲力竭了. 最终能培育出必要洞察力和高度概括力的是 Fermat，圣文森特的 Gregory 和 Wallis 的算术工作，而 Hobbes 批评他们用符号替代几何. James Gregory 在《几何的通用部分》的序言中说，数学的真正划分不是分成几何和算术，而是分成普遍的和特殊的. 这普遍的东西是由两个包罗万象的思想家——Newton 和 Leibniz 提供的.

3. Newton 的工作

数学和科学中的巨大进展，几乎总是建立在几百年中作出一

点一滴贡献的许多人的工作之上的. 需要有一个人来走那最高和最后的一步,这个人要能足够敏锐地从纷乱的猜测和说明中清理出前人的有价值的想法,有足够想象力地把这些碎片重新组织起来,并且足够大胆地制定一个宏伟的计划. 在微积分中,这个人就是 Isaac Newton.

Newton(1642—1727)生于英格兰伍尔斯索普(Woolsthorpe)的一个小村庄里,他的母亲在那里管理着丈夫遗留下来的农庄,他父亲是在他出生前两个月去世的. 他在低标准的地方学校中接受教育,而且是一个除了对机械设计有兴趣以外,没有特殊才华的青年人. 他考取了大学,但他的 Euclid 几何的答卷是有缺陷的. 1661 年他进入剑桥大学的三一学院,安静而没有阻力地学习着. 有一次,他几乎要改变方向,从学自然哲学(即科学)转到学法律. 显然,可能除了 Barrow 以外,他从他的老师那里得到了很少一点鼓舞,他自己做实验并且研究 Descartes 的《几何》,以及 Copernicus, Kepler, Galileo, Wallis 和 Barrow 的著作.

Newton 刚结束了他的大学课程,学校就因为伦敦地区鼠疫流行而关闭. 他离开剑桥,在安静的伍尔斯索普的家乡度过了 1665 年和 1666 年. 在那里开始了他在机械、数学和光学上的伟大工作. 这时他意识到引力的平方反比定律——这个概念早已有人提出过,包括 Kepler 在内,可以回溯到 1612 年——这是打开那无所不包的力学科学的钥匙. 他获得了解决微积分问题的一般方法;并且通过光学的实验,他作出了划时代的发现,即像太阳光那样的白光,实际上是从紫到红的各种颜色光混合而成的. "所有这些", Newton 后来说:"是在 1665 和 1666 两个鼠疫年中做的,因为在这些日子里,我正处在发现力最盛的时期,而且对于数学和哲学(自然哲学)的关心,比其他任何时候都多."

关于这些发现,Newton 什么也没有说过. 1667 年他回到剑桥获得硕士学位,并被选为三一学院的研究员. 1669 年 Isaac Barrow

辞去他的教授席位,Newton 被委任接替 Barrow,担任 Lucas 数学教授. 显然,他不是一个成功的教员,因为听他的课的学生很少;他提出的独创性的材料没有受到同事们的注意. 只有 Barrow,稍后一些还有天文学家 Edmond Halley(1656—1742),认识到他的伟大,并给他以鼓励.

起初 Newton 并没有公布他的发现. 人们说他有一种变态的害怕批评的心理. De Morgan 说是"一种病态的害怕别人反对的心理统治了他的一生."1672 年他确实也发表了他的光学论文并附带发表了他的自然哲学思想的作品,遭到了同时代大多数人的严厉批评,包括 Robert Hooke 和 Huygens 在内,他们对于光的本性持有不同的看法. Newton 吃了一惊,决心以后再不发表了. 但是 1675 年他又发表了另一篇光学论文,其中包括光是质点流的想法——光的粒子学说. 他再一次遭到了暴风雨般的批评,甚至有人声称他们已经发现了这些思想. 这次 Newton 决心死后才公开他的成果. 然而,他还是发表了后来的论文及几本著名的书:《原理》,《光学》(*Opticks*, 1704 年英文版,1706 年拉丁文版)和《普遍的算术》(1707).

从 1665 年起他把引力定律应用于行星的运动,在这方面,Hooke 和 Huygens 的著作极大地影响了他. 1684 年他的朋友 Halley 力劝他发表已取得的成果,但是除了因为不愿意外,Newton 还没有证明:一个实心球体所作用的引力恰好等于球心处一个质点所产生的引力,这个质点上集中了球的全部质量. 1686 年 6 月 20 日在给 Halley 的信中他说,直到 1685 年他仍然怀疑这是错的. 在这一年中他证明了:一个实心球,它的密度随着到球心的距离而变化,在吸引一个外部质点时,实际上就好像球的质量集中在它的中心一样. 并且同意写出他的著作.

这时 Halley 协助 Newton 编辑并且出资付印. 1687 年《自然哲学的数学原理》(*Philosophiae Naturalis Principia Mathemati-*

ca)第一版出版了. 以后的两个版本是1713年和1726年,第二版包括了一些改进. 虽然这本书给Newton带来巨大的名望,但它很难懂. 他告诉朋友说,他有意使它难懂,"目的是为了避免遭到数学知识浅薄的人的抑制."毫无疑问,他希望这样可以避免他早期的光学论文所曾遭到的批评.

Newton也是一个大化学家. 虽然在这个领域里没有什么大的发现联系到他的工作,但是必须记住,那时化学正处在婴儿时期. 他有试图用最终的微粒解释化学现象的正确想法,而且还有广博的实验化学知识. 在这门学科中,他写了一篇重要论文《酸的性质》(写于1692年,发表于1710年). 在1701年的皇家学会哲学汇刊上他发表了一篇关于热的论文,其中包括他的著名的冷却定律. 虽然他读了炼金术士的书,但并没有接受他们模糊的和神秘的观点. 他相信,物体的物理性质和化学性质,可以用最终的微粒的大小、形状和运动来说明. 他排除了炼金术士的神秘的力,诸如:同情、厌恶、和谐、诱惑等等.

除了天体力学、光学和化学的工作以外,Newton还研究了流体静力学和流体动力学. 在他的超等的光学实验工作之后,他又实验了钟摆运动在各种介质中的衰减,以及做了球在空气和水中下落、水从喷嘴里喷出的实验. 他和当时的大多数人一样,自己制造实验装置. 他造了两个反射望远镜,甚至于制造出做架子用的合金、浇铸框架、做底座、磨光镜头.

在当了35年教授之后,Newton成为沮丧的、痛苦的神经衰竭者. 他决定放弃研究,并于1695年接受任命,担任伦敦的不列颠造币厂监察. 在造币厂的27年中,除了关于个别问题的工作以外,他没有进行研究. 1703年他成为皇家学会会长,一直到逝世;1705年他被授予爵士的称号.

很明显,Newton对于科学的兴趣要比对于数学的兴趣大得多,而且还是一个研究当代问题的积极参加者. 他认为,他的科学

工作的主要价值在于它支持天启教(即由上帝直接启示于人的宗教——译者). 他虽然不是牧师,但实际上他是一个博学的神学家. 他认为科学研究虽然是艰苦而又枯燥的,但要坚持,因为它给上帝的创造提出证据. 像他的前辈 Barrow 一样,晚年 Newton 转向神学的研究. 在《修改的古代王国年表》(*The Chronology of Ancient Kingdoms Amended*)中,他想把圣经和宗教文件上记载的事件和天文事件联系起来,从而精确地注明这些事件的日子. 他的主要宗教著作是《对于 Daniel 的预言和 St. John 的启示录的观察》(*Observations Upon the Prophecies of Daniel and the Apocalypse of St. John*). 圣经的注释是对宗教作理性探讨的一个方面,这种探讨在理性时代是很流行的,Leibniz 也参加了这种探讨.

关于微积分,Newton 总结了已经由许多人发展了的思想,建立起成熟的方法,并且提出了前面叙述的几个主要问题之间的内在联系. 虽然他在学生时期向 Barrow 学了很多,但在代数和微积分方面,他更受 Wallis 的影响. 他说《无穷的算术》引导他在分析中有所发现,确实,在他的微积分著作中,他是通过分析的思想前进的. 但是,甚至 Newton 自己也认为,对于严密的证明,几何是必需的.

1669 年 Newton 在他的朋友中散发了题为《运用无穷多项方程的分析学》(*De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*)的小册子,这本书直到 1711 年才出版. 他假定有一条曲线而且曲线下的面积 z(图 17.13)已知是

(5) $$z = ax^m,$$

其中 m 是整数或者分数. 他把 x 的无限小的增量叫做 x 的瞬(moment),并用 o 表示,这是

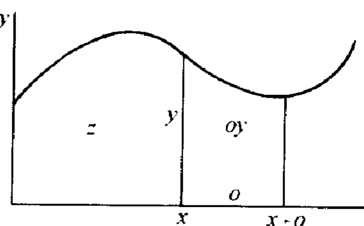


图 17.13

James Gregory 用的符号,相当于 Fermat 的符号 E. 由曲线、x 轴、

y 轴和 $x+o$ 处的纵坐标围成的面积，他用 $z+oy$ 表示，其中 oy 是面积的瞬. 那么，

$$z+oy=a(x+o)^{m}. \tag{6}$$

运用二项式定理于右边，当 m 是分数时，得到一个无穷级数，从(6)减去(5)，用 o 除方程的两边，略去仍然含有 o 的项，就得到

$$y=max^{m-1}.$$

因此，用我们的话来讲就是，面积在任意 x 点的变化率是曲线在 x 处的 y 值. 反过来，如果曲线是 $y=max^{m-1}$，那么，在它下面的面积就是 $z=ax^{m}$.

在这里，Newton 不仅给出了求一个变量对于另一个变量(在上面的例子中是 z 对 x)的瞬时变化率的普遍方法，而且证明了面积可以由求变化率的逆过程得到. 因为面积也是用无穷小面积的和来表示从而获得的，所以 Newton 证明了这样的和能由求变化率的逆过程得到. 和(更精确些说，和的极限)能够由反微分得到，这个事实就是我们现在所叫的微积分基本定理. 虽然 Newton 的先驱者在特殊的例子中知道了并且也模糊地预见到了这个事实，但是 Newton 看出它是普遍的. 他应用这个方法得到了许多曲线下的面积，并且解决了其他能够表成和式的问题.

在证明了面积的导数是 y 值，并断言逆程序是正确的以后，Newton 给出了法则：如果 y 值是若干项的和，那么面积就是由每一项得到的面积的和. 用现在的话来说，就是函数之和的不定积分是各个函数的积分之和.

他在这篇专题文章中的又一个贡献，是更进一步运用他的无穷级数. 为了积分 $y=a^{2}/(b+x)$，他用 $b+x$ 除 a^{2} 得到

$$y=\frac{a^{2}}{b}-\frac{a^{2}x}{b^{2}}+\frac{a^{2}x^{2}}{b^{3}}-\frac{a^{2}x^{3}}{b^{4}}+\cdots$$

他把这个无穷级数逐项积分，求出了面积

$$\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}+\cdots$$

对于这个无穷级数，他说，只要 b 是 x 的倍数，对于任何用途，取最初几项就足够了.

同样地，为了积分 $y=1/(1+x^2)$，他用二项式展开，写成

$$y=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

并且逐项积分. 他注意到，如果把 y 取成 $1/(x^2+1)$ 的话，那么，由二项式展开将得到

$$y=x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}+\cdots$$

而且现在也能逐项积分. 随后他说，当 x 相当小时，应该用第一个展开式；但当 x 大时，必须用第二个展开式. 因此他稍微有些意识到我们现在叫做收敛性的重要，但是还没有关于它的明确概念.

Newton 意识到他已经把逐项积分扩展到用于无穷级数，但在《分析学》中，他说：

> 任何事情，只要是普通分析能够通过有限多项的方程去做的，也能够通过无限多项的方程去做，这就使我没有问题地把这后一种也叫做分析. 因为后一种推理的正确性不少于前一种，后一种方程的正确性也不少于前一种；不过，我们这些凡人的推理力量，是局限在狭窄的范围内的，所以既不能表达出，也无法去想象方程的一切项，使得能够从中确知所求的量.

到此为止，Newton 对微积分的探讨，用了可以说是无穷小的方法. 瞬是无限小的量，不可分的量，或者是微元. 当然 Newton 这样做在逻辑上是不清楚的. 在这本书中他说他的方法"与其说是精确的证明，不如说是简短的说明."

在写于 1671 年但直到 1736 年才出版的书《流数法和无穷级数》(*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*)中，Newton

给他的思想作出了第二种更广泛而且更明确的说明. 在这本书中，他说他认为变量是由点、线和面的连续运动产生的，而不是他在早期论文中所说的无穷小元素的静止的集合. 他现在把变量叫做流量(fluent)，变量的变化率叫做流数(fluxion). 对于流量 x 和 y 的流数，他记为 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$. $\dot{x}$ 的流数是 $\ddot{x}$ 等等. 流数为 x 的流量是 $\overset{\prime}{x}$，后者的流量是 $\overset{\prime\prime}{x}$.

在这第二本书中，Newton 更清楚地陈述了微积分的基本问题：已知两个流之间的关系，求它们的流数之间的关系，以及它的逆问题. 由已知关系给定的两个变量，能够表示任何量. 但是 Newton 认为它们是随时间变化的，因为这是一种有用的，虽然不是必需的思想方法. 因为如果 o 是“无穷小的时间间隔”，那么 $\dot{x}o$ 和 $\dot{y}o$ 就是 x 和 y 的无穷小增量，或者说是 x 和 y 的瞬. 例如，假定流量是 $y = x^n$，为着求出 $\dot{y}$ 和 $\dot{x}$ 之间的联系，Newton 首先建立

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n,$$

然后按早期论文中说的那样去做. 他用二项式定理展开右边，消去 $y = x^n$，用 o 除两边，略去所有仍然含有 o 的项，得到

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}.$$

用现在的记号，这个结果可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = nx^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

而且因为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$，所以 Newton 在求出 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 对 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，或者说 $\dot{y}$ 对 $\dot{x}$ 的比中，已经求出了 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

流数法同《分析》中使用的方法并无本质区别，也没有任何好一点的严密性，Newton 扔掉 $\dot{x}\dot{x}o$ 和 $\dot{x}\dot{x}o\dot{x}o$(他写成 $\dot{x}^3oo$)那样的项，根据是它们同剩余下来的项相比是无穷小. 但是，他在《流数法》中的观点毕竟是有些不同了. 瞬 $\dot{x}o$ 和 $\dot{y}o$ 是随时间 o 变化的，而在第一篇论文中的瞬是 x 和 z 的最后的固定的一小片. 这个新观点是遵循着 Galileo 的更富有动力学思想的想法；而旧的观点

是运用Cavalieri的静力学不可分法. 正如Newton指出的,这个改动只是为了从不可分法的学说中排除生涩,但是,瞬 $\dot{x}o$ 和 $\dot{y}o$ 仍然是某种无穷小量. 另外,x 和 y 的对于时间的流数或者导数 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 从来没有真正定义过,这个中心问题是避开了的.

已知 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 之间的关系,要求出 x 和 y 之间的关系,比之仅仅积分 x 的函数更困难些. Newton处理了几种类型的问题:(1)有 $\dot{x}$, $\dot{y}$,还有 x 或 y 出现;(2)有 $\dot{x}$, $\dot{y}$, x 和 y 出现;(3)有 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ 和它们的流量出现. 第一类是最简单的,在现在的记法中,要求解 $dy/dx = f(x)$. 在第二类中,Newton处理了 $\dot{y}/\dot{x} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$, 而且是用逐步逼近法去解的. 他从 $\dot{y}/\dot{x} = 1 - 3x + x^2$ 作为第一近似出发,得到作为 x 的函数的 y,将这个 y 值代入原等式的右边,并继续这一手续. Newton叙述了他的做法,但没有证明. 在第三类中,他解了 $2\dot{x} - \dot{z} + \dot{y}x = 0$. 他假定了 x 和 y 之间的一个关系式,比如说, $x = y^2$, 于是 $\dot{x} = 2\dot{y}y$. 这样,方程就成为 $4\dot{y}y - \dot{z} + \dot{y}y^2 = 0$, 从此得到 $2y^2 + (y^3/3) = z$. 所以,如果把第三种类型认为是偏微分方程,那么Newton只得到了一个特殊积分.

Newton意识到在这篇论文中他已提出了一个普遍的方法. 他在1672年10月10日的写给John Collins的信中,给出了他的方法的真相和一个例子,他说,

> 这是普遍方法的一个特殊方法,或者更确切地,一个推理,它本身用不着任何麻烦的计算,不仅可以用来作出任何曲线的切线(不管这曲线是几何的还是机械的),而且还可以用来解出其他关于曲度、面积、曲线的长度、重心等深奥问题;它的应用并不限于没有无理根的方程. 通过把方程化为无穷级数,我把这个方法和在方程中起作用的其他方法紧密结合起来.

Newton强调无穷级数的用处,因为用它能处理像 $(1 + x)^{3/2}$

一类的函数,相反,他的前人却完全限制在有理代数函数方面.

在写于1676年,发表于1704年的第三篇微积分论文《求曲边形的面积》(*Tractatus de Quadratura Curvarum*)中,Newton 说他已放弃了微元或无穷小量.他现在批评扔掉含 o 项的做法,因为他说,

> 在数学中,最微小的误差也不能忽略……在这里,我认为数学的量并不是由非常小的部分组成的,而是用连续的运动来描述的。直线不是一部分一部分地连接,而是由点的连续运动画出的,因而是这样生成的;面是由线的运动,体是由面的运动,角是由边的旋转,时间段落是由连续的流动生成的……
>
> 随我们的意愿,流数可以任意地接近于在尽可能小的等间隔时段中产生的流量的增量,精确地说,它们是最初增量的最初的比,它们也能用和它们成比例的任何线段来表示.

这就是 Newton 的新概念:最初和最后比的方法.他考虑函数 $y=x^n$.为了求出 y 或者 x^n 的流数,设 x"由流动(by flowing)"成为 $x+o$.x^n 就成为

$$(x+o)^n=x^n+nox^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2}+\cdots$$

x 和 y 的增量的比,即 o 和 $nox^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2}+\cdots$ 的比,等于(都用 o 来除):

$$1\text{ 和 }nx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}ox^{n-2}+\cdots\text{ 的比.}$$

"现在设增量消失,它们的最后比就是"

$$1\text{ 比 }nx^{n-1}.$$

因此 x 的流数和 x^n 的流数的比就等于1比 nx^{n-1},或者如我们今天说的,y 对于 x 的变化率是 nx^{n-1},这是最初增量的最初比.当

然,这种说法的逻辑性并不比前面的两种好;然而 Newton 说这个方法与古代的几何是融洽的而且没有必要引进无穷小量.

Newton 还给出了几何的解释.在图 17.14 中,假定 bc 移向 BC,使得 c 和 C 重合.那么曲边三角形 CEc 以"最后的形式"和三角形 CET 相似,因此,它的"即将消失的"各边将和 CE, ET 和 CT 成比例.所以 AB, BC 和 AC 的流数,在它们的消失的增量的最后比中,和三角形 CET 或者三角形 VBC 的边成比例.

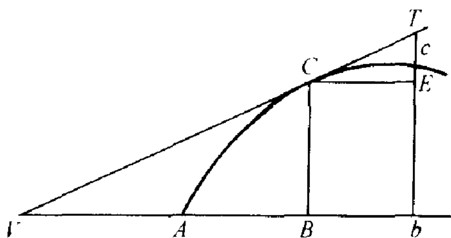


图 17.14

在《流数法》中,Newton 作了一些应用,用流数法微分隐函数,求曲线的切线、函数的最大值与最小值、曲线的曲率和曲线的拐点.他也得到了曲线下的面积和曲线的长度.关于曲率,他给出曲率半径的正确公式,即

$$r = \frac{(1+\dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}},$$

其中 $\dot{x}$ 取作 1.他还给出极坐标中的曲率半径的公式.最后,他附了一个积分简表.

在写完微积分的基本论文以后,过了很长时间,Newton 才发表这些论文.他的流数理论最早发表在 Wallis 的《代数》(*Algebra*, 1693 年,拉丁文第二版)中,Newton 写了书的第 390 至 396 页.如果当初他写出来就发表的话,也许可以避免与 Leibniz 发生谁先发现的争论.

Newton 的第一本包括他的微积分的书是他的巨著《自然哲学的数学原理》[①].只要涉及到微积分的基本概念,即流数或者我

---

① 第三版由 Andrew Motte 在 1729 年译成英文.由 Florian Cajori 修订和编注的这一版,由加利福尼亚(California)大学出版社出版.

们说的导数，Newton就作出几种陈述，他舍弃了无穷小量或者最后的不可分量而用了"消失的可分量"，即能够无穷地缩小的量.在《原理》的第一版和第三版中，Newton说："量在其中消失的最后比，严格说来，不是最后量的比，而是无限减少的这些量的比所趋近的极限，而它与这个极限之差虽然能比任何给出的差更小，但是在这些量无限缩小以前既不能越过也不能达到这个极限."[①]这是他曾经给过的作为最后比的意思的最清楚的说明.关于前面的引文，他还说："最后速度的意思是：它既不是在物体达到最后位置(在该处假定物体停止)之前的速度，也不是在达到以后的速度，而是正达到的那瞬间的速度……因此，同样的，就消失量的最后比来说，应理解为，不是在量消失以前，也不是在消失以后，而是正当它们消失时的比."

在《原理》中Newton用了几何的证明方法.然而在包含有他的未出版的著作的名叫《朴次茅斯论文集》(*Portsmouth Papers*)中，他用分析的方法找出了一些定理.这些论文说明，除了能归结到几何的以外，他也分析地获得了一些结果.他诉诸几何的一个原因是相信证明将更能被他的同时代人理解.另外一个原因是他非常赞赏Huygens的几何著作并希望和它并列.在这些几何证明中，Newton用了微积分的基本的极限过程.因此，正如今天的微积分所做的那样，曲线下的面积本质上被认为是近似矩形的和的极限.但是，他用了这个概念去比较不同的曲线下的面积，而没有计算这样的面积.

他证明，当AR和BR(图17.15)垂直于弧ACB在A点和B点的切线时，弦AB，弧ACB和AD这三个量中任意两个的最后比，当B接近于A并和A重合时，都等于1.因此他在书的第一卷的引理2的系3中说："因此在关于最后比的所有推论中，我们可以用这些线中的任意一个随意代替另一个."然后他证明，当B接近

① 第三版，第39页.

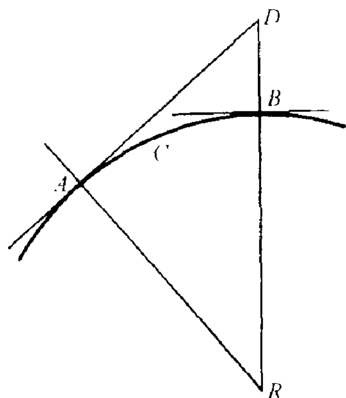


图 17.15

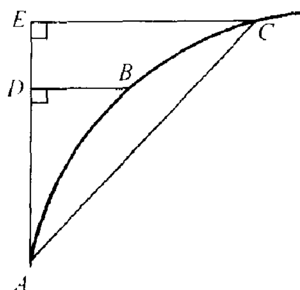


图 17.16

并重合于 A 时，三角形 RAB、$RACB$、RAD 中任意两个的面积之比将等于 1."因此，在关于最后比的所有推论中，我们可用这些三角形中的任意一个代替另一个."同样的，设 BD 和 CE(图17.16)垂直于 AE(它不必是弧 ABC 在 A 点的切线). 当 B 和 C 接近 A 并和 A 重合时，ACE 和 ABD 的面积的最后比将等于 AE^2 和 AD^2 的最后比.

《原理》包含丰富的成果，其中的一些我们将要提到. 虽然这本书是研究天体力学的，但是对于数学史也有极大的重要性，这不仅因为 Newton 自己在微积分方面的工作，大部分是由他对书中处理的问题的压倒一切的兴趣激发的，而且还因为《原理》对许多问题提出了新的课题和研究方式，而这些问题经过下一个世纪的研究，产生出大量的分析成果.

《原理》分成三卷①. 在引言性章节中 Newton 定义了诸如惯量、动量和力等力学概念，然后叙述了三条著名的运动学公理或定律. 在他的书中是这样说的：

定律Ⅰ. 每一个物体保持它原来的静止状态或匀速直线运动状态不变，除非由作用于它的力迫使它改变这种状态.

① 所有的出处都是第 75 页的注①中提到的版本.

定律 Ⅱ. 运动的(量的)改变与施加的动力成正比,而且是朝着力所作用的直线方向改变.

Newton 所谓的动量,正如他先前曾说明过的,等于质量乘上速度.因此,如果质量是常数,那么动量的变化就是速度的变化,即加速度.当力的单位是磅达,质量的单位是磅,加速度的单位是英尺/秒^2 时,第二定律现在通常写成 $F = ma$. Newton 第二定律实际上是矢量的叙述,这就是,如果力是由三个互相垂直的方向上的分力合成的,那么每一个分量在它自己的方向上引起一个加速度. Newton 在特殊的问题中用了力的矢量特性,但是定律的矢量本质的全部意义,首先是由 Euler 充分认识的.这个定律具体化了对 Aristotle 力学的关键性的改革, Aristotle 断言力引起速度.他还断言,力对于维持速度是必需的.定律 Ⅰ 否定了这一点.

定律 Ⅲ. 每一个作用总是引起一个相等的反作用.

我们不去深究力学的历史,只是指出:前两个定律是先前由 Galileo 和 Descartes 发现并提出,而由 Newton 给以更明确和更概括的叙述的.在质量(即一个物体对于它在运动中的变化的抵抗)和重量(即作用在任何物体质量上的引力)之间的差别,也归功于这些人.力的向量特性推广了 Galileo 的原则:抛射体的竖直方向和水平方向的运动能够分开来处理.

《原理》的第一卷以一些微积分的定理开始,包括上面引到的关于最后比的一些定理.然后讨论了中心力作用下的运动,这个力总是把运动物体引向一个固定点(实际上就是太阳),并且证明了命题 1:在相等的时间内扫出相等的面积(这包含了 Kepler 的面积定律).接着, Newton 考虑了一个沿着圆锥曲线运动的物体,并且证明(命题 11、12 和 13):力必定是随着到某个定点的距离的平方的反比变化的.他还证明了逆定理,这包含 Kepler 的第一定律.在作了向心力的论述之后,他推出了 Kepler 第三定律(命题 15).

接着的两节是研究圆锥曲线性质的. 主要的问题是构造满足五种已知条件的二次曲线,这些条件实际上是平常观察的数据. 这样,已知一个物体沿着圆锥曲线运动的时间,他求出了它的速度和位置. 他着手于拱点线(apse line)的运动,即连结(在一个焦点上的)引力的中心和沿着一条本身以某种速度绕焦点旋转的圆锥曲线移动的物体的最大或最小距离位置的直线. 第 10 节参考特殊的单摆运动来研究物体沿着表面的运动. 这里 Newton 给 Huygens 以应有的感谢. 联系到重力在运动中的加速作用,他研究了摆线、圆外旋轮线、四尖圆内旋轮线的几何性质,并给出圆外旋轮线的长度(命题 49).

第 11 节中 Newton 从运动定律和引力定律推断出两个物体的运动法则,这两个物体按照引力彼此吸引. 它们的运动归结为一个物体围绕着固定的第二个物体的运动. 这个运动的物体是沿着椭圆移动的.

然后他考虑均匀密度和变化密度的球体以及球型物体对一个质点的吸引力. 他给出一个几何证明(第 12 节命题 70),证明一个薄的匀质球壳对它内部的质点没有吸引力. 因为这个结论对薄壳成立,所以对于这样的薄壳的和,即对于一定厚度的壳也成立.(他后来证明命题 91 系 3,对于均匀的椭球壳,即包含在同样放置的两个相似的椭球面之间的壳,这个结论也成立.)命题 71 证明一个薄的均匀球壳对外部质量的吸引力,等于球壳的质量集中在中心时产生的吸引力,所以球壳吸引外部质点的力是向着它的中心的,这个力与离开中心的距离的平方成反比. 命题 73 证明一个均匀的实心球体,吸引内部质点的力与质点离开球心的距离成比例. 至于球体对外部质点的吸引力,命题 74 证明它与球的质量集中在中心时产生的吸引力是相同的. 据此,如果两个球互相吸引,第一个球对第二个球的每一个质点的吸引力,就好像第一个球的质量集中在它的中心时产生的吸引力一样. 这样,第一个球就

成为被第二个球的离散质量吸引的质点;所以第二个球也可以当作质量集中在中心的一个质点.因此两个球都可以作为质量分别集中在中心的质点.所有这些由 Newton 首创的结论,都推广到密度是球对称的球体,以及不同于平方反比定律的其他引力定律.

接着,Newton 着手处理三体运动,这三体的每一个吸引其他两个,得到一些近似的结果.三体运动问题成为 Newton 以来的一个主要问题,至今还未解决.

《原理》的第二卷是研究物体在气体和液体那样的有阻力的介质中的运动,这是流体动力学的开端.Newton 在一些问题中假定介质的阻力与运动物体的速度成比例,在另一些问题中假定与运动物体速度的平方成比例.他考虑物体必须具有什么形状才能使它遇到的阻力最小(见第 24 章第 1 节).他还考虑了钟摆和射弹在空气和液体中的运动.有一节是研究空气中的波动理论的(例如声波),并且得到声音在空气中的速度公式.他还论述了水中的波的运动.Newton 接着描写他所做的一些实验,这些实验用来决定在流体中运动的物体所受到的阻力.一个主要的结论是:行星在真空中运动.在这本书中 Newton 完全打开了一个新的境界,但是流体运动的决定性工作还有待于完成.

第三卷的标题是《论世界的体系》(*On the System of the World*),它将第一卷中建立的普遍理论应用于太阳系.它说明了太阳的质量怎样可以用地球的质量计算出来;并说明了任何有卫星的行星的质量也可以用同样的方法去求.他计算了地球的平均密度,发现它是在水的密度的 5～6 倍之间(今天的数值是 5.5).

他证明地球不是一个真的球而是一个扁球,而且计算了扁平度.他的结论是扁球的椭率是 1/230(今天的数值是 1/297).从观察到的任何一个行星的扁率,就可以算出它的日长.用扁平度的大小以及向心力,Newton 计算了地球的引力在地球表面上的变化,

从而求出物体的重量的变化. 他证明扁球的引力与这扁球的质量集中在它的中心时的引力是不一样的.

然后他解释(分点)岁差. 这个解释的依据是:地球不是球体而是沿着赤道凸出的. 因此,在月球的引力作用下,地球的受力点实际上不是地球的中心,而是周期性地在地球的旋转轴上变动. 这个变化的周期 Newton 计算出来是 26 000 年. 这个值曾由 Hipparchus 从他所能得到的观察资料中推断出来过.

Newton 说明了潮汐的主要特征(第一卷的命题 66 和第三卷的命题 36 和 37). 月球是主要原因;太阳是第二位的原因. 用太阳的质量他算出了太阳潮汐的高度. 由观察大潮和小潮的高度(太阳和月球正连成一线或正相反时发生的潮汐),他求出了太阳潮汐并估计了月球的质量. Newton 还作出一些近似办法来讨论太阳对月球绕地球运动的影响,他求出了月球在纬度和经度的运动;拱点线的运动(连接地球中心到月球的最大距离的线);交点的运动(这些点是月球轨道与地球轨道平面的交点,这些点退行着,即背着月球自身运动的方向缓慢地移动);出差(月球轨道偏心度的周期变化);年方程(地球和太阳间距离的每天变化对月球运动的影响);以及月球轨道平面与地球轨道平面的倾角的周期变化. 月球运动的无规律性已知有七项,Newton 又发现了两项:远地点(拱点线)的不等性和交点的不等性. 他的近似法只给出拱点线运动的一半. 1752 年 Clairaut 改进了计算,并得到满 3°的拱点线的旋转;然而,很晚以后,John Couch Adams 在 Newton 的论文中发现了正确的计算. 最后,Newton 证明了彗星一定是在太阳的引力下运动的,因为在观察的基础上测定出它们的轨迹是圆锥曲线. 正如我们在前一章中指出的,Newton 花了大量的时间于月球运动的问题,是因为这个知识对于改进求经度的方法是必需的. 他工作得如此艰苦,以至他抱怨说,这个问题使得他头疼.

4. Leibniz 的工作

在建立微积分中和 Newton 并列的是 Gottfried Wilhelm Leibniz(1646—1716),虽然他的贡献是完全不同的.他研究法律,在答辩了关于逻辑的论文之后,得到哲学学士学位.1666年他写了论文《论组合的艺术》(*De Arte Combinatoria*)①,这是一本关于一般推理方法的著作,这就完成了他在阿尔特多夫(Altdorf)大学的哲学博士论文并使他获得教授席位.1670和1671年,Leibniz 写了他的第一篇力学论文,1671年左右,他制造出他的计算机.他得到一件差使,作为美因茨(Mainz)选帝侯(德国有权选举神圣罗马帝国皇帝的诸侯.——译者注)的大使在1672年3月政治出差到巴黎.这次访问使他同数学家和科学家接触,其中值得注意的是 Huygens,激起了他对数学的兴趣.虽然他在这门学科中作过一些阅读并写了1666年的论文,但他说直到1672年他还基本上不懂数学.1673年他到伦敦,遇到另外一些科学家和数学家,包括当时的伦敦皇家学会秘书 Henry Oldenburg.虽然他靠做外交官生活,但却更深入地钻研了数学,研究了 Descartes 和 Pascal.1676年他被任命为汉诺威(Hanover)选帝侯的图书馆管理员和顾问.24年后勃兰登堡(Brandenburg)的选帝侯邀请 Leibniz 在柏林工作.尽管 Leibniz 卷入了各种政治活动,其中包括 George Ludwig 继承英国王位的活动,但他的工作领域是广泛的,他的业余活动的范围是庞大的.1716年他无声无息地死去.

除了是外交官外,Leibniz 还是哲学家、法学家、历史学家、语言学家和先驱的地质学家,他在逻辑学、力学、光学、数学、流体静力学、气体学、航海学和计算机方面做了重要的工作.虽然他的教授席位是法学的,但是他在数学和哲学方面的著作列于世界上曾

① 1690年发表于《哲学论文》(*Die philosophische Schriften*),4,27~102.

产生过的最优秀的著作之中. 他用通信保持和人们接触,最远的到锡兰(Ceylon)[1]和中国. 他无休止地想调和旧教和新教的信仰. 正是他,在1669年提议建立德国科学院,1700年柏林科学院终于组织起来了. 他原来的意见,是要成立一个学会,从事于对人类有益的力学中的发明和化学、生理学方面的发现. Leibniz 要求知识是应用的. 他把大学称作"僧院",指责他们拥有知识而没有判断力,并且专门注意小事情. 相反地,他力劝追求真正的知识——数学、物理、地理、化学、解剖学、植物学、动物学和历史. 在 Leibniz 看来,手工艺人和实践者的技能比专门学者的深奥的细微末节要有价值. 他认为德文优于拉丁文,因为拉丁文联系于古老的无用的思想. 他说,人们用拉丁文来吸引别人的注意,而掩饰自己的无知. 相反,德语是一般人都理解的,而且经过发展,能帮助思想的清晰和说理的锐利.

Leibniz 从1684年起发表微积分论文,以后我们将更多地谈到它们. 然而,他的许多成果,以及他的思想的发展,都包含在他从1673年起写的、但他自己从未发表过的成百页的笔记本中. 这些笔记,人们也许能预料到,从一个课题跳到另一个课题,并且随着他思想的发展而改变他所用的记号. 有些是在他研究圣文森特的 Gregory, Fermat, Pascal, Descartes 和 Barrow 的书或文章时,或是试图把他们的思想纳入他自己处理微积分的方式时所出现的简单思想. 1714年 Leibniz 写了《微分学的历史和起源》(*Historiaet Origo Calculi Di fferentialis*),在这本书中,他给出一些关于他自己思想发展的记载. 但是,这是在他的工作做了以后许多年才写的,而且由于人的记忆力的衰减和他在此时获得的巨大洞察力,他的历史可能不是精确的. 又因为他的目的是针对当时加于他的剽窃的罪名而保卫自己,所以他可能不自觉地歪曲了关于他的思想来源的记载.

---

[1] 锡兰,1972年5月22日改名为斯里兰卡. ——译者注

不管 Leibniz 的笔记怎么混乱,我们将仔细检查几篇,因为它们揭示了一个最伟大的天才,怎样为了达到理解和创造而奋斗. 1673 年左右,他看到求曲线的切线的正问题和反问题的重要性;他也完全相信,反方法等价于通过求和来求面积和体积. 他的思想的一些较为系统的发展开始于 1675 年的笔记. 然而,谈一谈他在《论组合的艺术》中所考虑的数的序列、第一阶差、第二阶差以及高阶差,对于了解他的思想是有帮助的. 例如,对于平方的序列

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,$$

第一阶差是

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,$$

第二阶差是

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2.$$

Leibniz 注意到自然数列的第二阶差消失以及平方序列的第三阶差消失等等. 当然,他还观察到,如果原来的序列是从 0 开始的,那么第一阶差的和就是序列的最后一项.

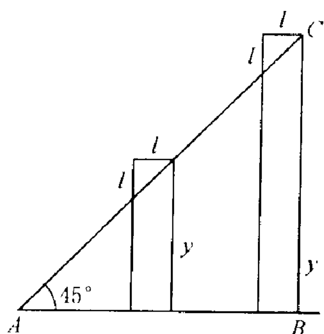


图 17.17

要把这些事实和微积分联系起来,他必须把序列看做是函数的 y 值,而把任何两项的差看做是邻近两个 y 值的差. 最初他认为 x 表示序列中的项的次序,y 表示这一项的值. 量 $\mathrm{d}x$,他经常写作 a,这时候等于 1,因为它是两个相连的项的序数之差,$\mathrm{d}y$ 是两个相连项的值的实际的差. 然后用 omn. ,即拉丁文 omnia 的缩写,表示和,并用 l 代替 $\mathrm{d}y$,Leibniz 断言 omn. $l = y$, 因为 omn. l 是首项为 0 的序列的第一阶差的和,这样就给出了最后一项. 但是,omn. yl 产生一个新问题. Leibniz 获得 omn. $yl - \frac{y^2}{2}$ 的结论是在 $y = x$ 的条件下

考虑的. 因此，如图 17.17 所示，三角形 ABC 的面积是 yl 的和(对于"很小"的 l 来说)，它也是 $\frac{y^2}{2}$. Leibniz 说："从 0 起增长的直线，每一个用与它相应的增长的元素相乘，组成三角形."这几点事实，和一些较复杂的东西，已经出现在 1673 年的论文中.

下一阶段中，他和几个困难作斗争. 他必须从一串离散的值过渡到 dy 和 dx 是 x 的任意函数 y 的增量的情况. 因为他仍然局限于数列，而在数列中 x 是项的顺序，所以他的 a 或 dx 是 1；因此他自由地插入或者去掉 a. 当他过渡到任意函数的 dy 和 dx 时，这个 a 就不再是 1 了. 但是，当他仍然与和的概念作斗争时，他忽略了这个事实.

因此在 1675 年 10 月 29 日的手稿中，Leibniz 从

$$\text{omn.}\, yl = \overline{\text{omn.}\,\overline{\text{omn.}\,l}\,\frac{l}{a}} \tag{7}$$

出发，因为 y 本身就是 omn. l，所以(7)是成立的. 他用 a 除 l 保持量纲. Leibniz 说，无论 l 等于什么，(7)是成立的. 但是，我们已经在图 17.17 中看到：

$$\text{omn.}\, yl = \frac{y^2}{2}. \tag{8}$$

所以，由(7)和(8)得

$$\frac{y^2}{2} = \overline{\text{omn.}\,\overline{\text{omn.}\,l}\,\frac{l}{a}}. \tag{9}$$

用我们的记号来写，就是

$$\frac{y^2}{2} = \int\left\{\int dy\right\}\frac{dy}{dx} = \int y\frac{dy}{dx}.$$

Leibniz 说，这个结论是值得称赞的.

Leibniz 从几何的论据中得来的另一个同类型的定理是

$$\text{omn.}\, xl = x\,\text{omn.}\, l - \text{omn.}\,\text{omn.}\, l, \tag{10}$$

其中 l 是一个序列中相连两项的差，x 是项数. 对于我们，这个方程就是

$$\int x\mathrm{d}y = xy - \int y\mathrm{d}x.$$

Leibniz 又假定(10)中的 l 本身是 x，就得到

$$\text{omn.}\, x^2 = x\text{omn.}\, x - \text{omn. omn.}\, x.$$

他说，但是 omn. x 是 $\frac{x^2}{2}$ $\left(\text{他已证明了 omn.}\, yl = \frac{y^2}{2}\right)$，所以

$$\text{omn.}\, x^2 = x\frac{x^2}{2} - \text{omn.}\,\frac{x^2}{2}.$$

由移置最后一项，他得到

$$\text{omn.}\, x^2 = \frac{x^3}{3}.$$

在 1675 年 10 月 29 日的手稿中，Leibniz 决定用 $\int$ 代替 omn.；因此

$$\int l = \text{omn.}\, l, \qquad \int x = \frac{x^2}{2}.$$

记号 $\int$ 是"sum"(和)的第一个字母 S 的拉长.

可能是由于研究 Barrow 的著作的关系，Leibniz 很早就意识到，微分与积分(看做是和)必定是相反的过程，所以面积被微分时，必定给出长度. 因此，在 10 月 29 日的同一篇手稿中，他说："已知 l 及它与 x 的关系，求 $\int l$." 然后，他说："假定 $\int l = ya$. 设 $l = ya/\mathrm{d}$. [这里他把 d 放在分母中. 如果他写成 $l = \mathrm{d}(ya)$，那对我们就会有更好的理解.]那么正如 $\int$ 将增加维数那样，d 将减少维数. 但是 $\int$ 意味着和，d 意味着差. 从已知的 y 我们总能求出 y/d 或者 l，即 y 的微差. 因此一个方程能变到另一个方程；正如从方程

$$\overline{\int c\int \overline{l^2}} = \frac{c\int \overline{l^3}}{3a^3},$$

我们得到方程

$$c\int \overline{l^2}=\frac{c\int \overline{l^3}}{3a^3\mathrm{d}}$$

一样."

在这篇早期论文中,Leibniz 似乎是在探索 $\int$ 的运算和 d 的运算,并看出它们是相反的. 最后他意识到 $\int$ 不提高维数,d 也不降低维数,因为 $\int$ 实际上是矩形的和,因而是面积的和. 所以他承认,要从 y 回到 $\mathrm{d}y$,必须做出 y 的微差或者取 y 的微分. 然后他说:"但是 $\int$ 意味着和,d 意味着差."这可能是后来加进去的. 因此两个星期以后,为了从 y 得到 $\mathrm{d}y$,他从用 d 除改成作 y 的微差,并写作 $\mathrm{d}y$.

在此之前,Leibniz 还认为 y 值是序列的项的值,x 通常作为这些项的序数. 但是现在,在这篇论文中他说:"所有这些定理对于那些级数是正确的,在这些级数中项的差和项本身间之比小于任意指定的量."这就是说,$\mathrm{d}y/y$ 可以小于任意指定的量.

在注有 1675 年 11 月 11 日,标题为《切线的反方法的例子》的手稿中,Leibniz 用 $\int$ 表示和,x/d 表示差. 然后他说,x/d 是 $\mathrm{d}x$,是两个相邻的 x 值的差,但是显然这里的 $\mathrm{d}x$ 是常数,并且等于 1.

根据上面的勉强可以理解的议论,Leibniz 断定一个事实:**作为求和的过程的积分是微分的逆**. 这个想法已出现在 Barrow 和 Newton 的著作中,他们用反微分求得面积. 但 Leibniz 是第一次表达出求和与微分之间的关系. 除了这个直率的断言以外,他并不清楚怎样可以从这样一个粗糙的式子 $\sum y\mathrm{d}x$ 去得到面积——即怎样从一组矩形得到曲线下的面积. 当然,这个困难困扰了 17 世纪所有的数学家. 由于没有清楚的极限概念,或者甚至没有清楚的面

积概念. Leibniz 有时认为后者是非常小而又非常多的矩形的和，因而这个和与曲线下的真正的面积之差是可以忽略的；他有时又认为面积是纵坐标 y 的和. 这后一个面积概念是普通的，尤其是在不可分量论者中，他们认为面积的最终单元与 y 值是同样的.

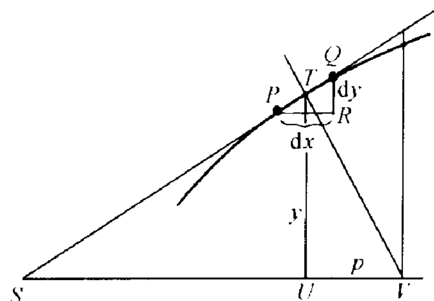


图 17.18

谈到微分，即使承认了 dy 和 dx 能是任意小的量之后，Leibniz 仍然必须克服 dy/dx 不完全是我们意义中的导数这个基本困难. 他在 Pascal 和 Barrow 曾用过的特征三角形上建立他的理论. 这个三角形（图 17.18）由 dy，dx 和弦 PQ 组成，Leibniz 还认为弦 PQ 是"**P 和 Q 之间的曲线，而且是 T 点的切线的一部分**". 虽然说这个三角形是无穷小的，但他坚持它和确定的三角形是相似的，即相似于由次切线 SU，T 点的纵坐标以及切线 ST 组成的三角形 STU. 因此，dy 和 dx 是最终的元素，它们的比有确定的意义. 事实上，他用三角形 PRQ 和 SUT 相似的论据得到 $dy/dx = TU/SU$.

在 1675 年 11 月 11 日的手稿中，Leibniz 说明他怎样能解答一个确定的问题. 他寻求次法线与纵坐标成反比的曲线. 在图 17.18 中，法线是 TV，次法线是 UV. 由三角形 PRQ 和 TUV 的相似性，他得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

或者

$$p\,dx = y\,dy.$$

但是曲线有已知的性质

$$p = \frac{b}{y},$$

其中 b 是比例常数. 因此

$$dx = \frac{y^2}{b}dy.$$

所以

$$\int dx = \int \frac{y^2}{b}dy,$$

即

$$x = \frac{y^3}{3b}.$$

Leibniz 还解决了其他的反切线问题.

在 1676 年 6 月 26 日的手稿中, 他意识到求切线的最好方法是求 dy/dx, 其中 dy 和 dx 是差, dy/dx 是商. 他忽略 $dx \cdot dx$ 和 dx 的高次幂.

1676 年 11 月左右, 他能够给出一般法则 $dx^n = nx^{n-1}dx$ 和 $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, 其中 n 是整数或分数. 他说:"这个道理是普遍的, 不管 x 的序列是什么样的."这里 x 仍然意味着序列的项的次序. 在这篇手稿中, 他说要微分 $\sqrt{a+bz+cz^2}$ 的话, 设 $a+bz+cz^2=x$, 微分 $\sqrt{x}$, 然后乘以 dx/dz. 这就是链式法则.

1677 年 7 月 11 日左右, Leibniz 又能给出正确的法则去微分两个函数的和、差、积、商以及幂和方根, 但没有证明. 在 1675 年 11 月 11 日的手稿中, 他致力于 $d(uv)$ 和 $d(u/v)$, 并认为 $d(uv) = du \cdot dv$.

1680 年, dx 成为横坐标的差, dy 成为纵坐标的差. 他说: "……现在把 dx 和 dy 取为无穷小, 或者把曲线上的两个点理解为它们中间的距离比任何给定的长度都小……"他把 dy 叫做当纵坐标沿着 x 轴移动时 y 的"瞬时的增长". 但是图 17.18 中的 PQ 仍被认为是直线的部分. 它是"曲线的一个元素, 或者是代替曲线的无穷多角的多边形的一条边……"他继续用

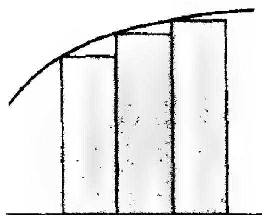


图 17.19

通常的微分形式. 例如,如果 $y = a^2/x$, 则

$$dy = -\frac{a^2}{x^2}dx.$$

他还说差是相反于和的. 因此为了得到曲线下的面积(图17.19),他就计算矩形的和并说能忽略剩余的"三角形,因为它们同矩形相比是无穷小……因此在我的微积分中,我用 $\int y dx$ 表示面积……"对于弧的元素,他给出

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

对于曲线绕 x 轴旋转而得到的旋转体体积,他给出

$$V = \pi\int y^2 dx.$$

尽管他先前说过,dx 和 dy 是很小的差,但他仍然谈到序列. 他说,"差与和是彼此相反的,这就是说,一个级数[序列]的差之和是级数的项,级数和的差也是级数的项,所以我用 $\int dx = x$ 表示前者,用 $d\int x = x$ 表示后者."事实上,在 1684 年以后写的手稿中,Leibniz 说他的无穷小方法已经众所周知地作为差的微积分了.

Leibniz 在微积分方面的首次发表的文章是在 1684 年的《教师学报》① 上. 在这篇文章中,dy 和 dx 的意义仍然是不清楚的. 在一个地方,他说设 dx 是任意的量,dy 是由(图 17.18)

$$dy : dx = y : \text{次切线}$$

来定义的. dy 的这个定义假定了次切线的一些表达式,因此,这个定义不是完全的. 另外,Leibniz 把切线定义为连结两个无限邻近的点的直线,也不是令人满意的.

在这篇文章中,他还给出在 1677 年获得的两个函数的和、积、商的微分法则以及求 $d(x^n)$ 的法则. 对于最后一种情况,他对于 n

---

① *Acta Erud.*, 3, 1684, 467～473 = *Math. Schriften*, 5, 220～226.

是正整数的情况作出了证明,但是他说对于所有的 n,它都是正确的;对于其他法则他没有证明.他给出求切线、求最大最小值以及求拐点方面的应用.这篇 6 页长的文章,是如此的不清楚,以至 Bernoulli 兄弟说它"与其说是解释,不如说是谜."①

在 1686 年的论文中②,Leibniz 给出

$$y=\sqrt{2x-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

作为摆线的方程.这里,他的意图在于说明用他的方法和符号,可以把一些曲线表为方程,而其他方法是办不到的.在他的《历史》中他重申了这一点,他说他的 dx, ddx(二阶微分),以及作为这些微分的逆的和能应用到所有的 x 的函数,而且不排除 Vieta 和 Descartes 的机械曲线,虽然 Descartes 曾说过这种曲线没有方程. Leibniz 还说,他能包括那些即使用 Newton 的级数法也不能处理的曲线.

在 1686 年及其后来的论文中③,Leibniz 给出对数函数和指数函数的微分并承认指数函数是一类.他还讨论了曲率、密切圆和包络理论(见第 23 章). 1697 年在给 John Bernoulli 的一封信中,他在积分号下对参变量求微分.他还有这样的想法,即许多不定积分能够在化为已知形式后计算出来,并说在为这种化法准备表格,换句话说,就是准备一个积分表.他试着定义如 $ddy(d^2y)$ 和 $dddy(d^3y)$ 等高阶微分,但是定义不令人满意.他还想发现 $d^\alpha y$ 的意义,其中 α 是任意实数,但没有成功.

谈到记号,Leibniz 煞费苦心地工作,要把记号选得最好.当然,他的 dx, dy 和 dy/dx 仍然是标准的.他引进记号 $\log x$,对于 n 阶微分引进 d^n,甚至对 $\int$ 与 n 重和分别引进 d^{-1} 与 d^{-n}.

---

① Leibniz: *Math. Schriften*, 3, Part 1,5.

② *Acta Erud.*, 5,1686,292~300—*Math. Schriften*, 5,226~233.

③ *Acta Erud.*, 1692,168~171—*Math. Schriften*, 5,266~269; *Acta Erud.*, 1694—*Math. Schriften*, 5,301~306.

一般地说,Leibniz 的工作,虽然富于启发性而且意义深远,但它是如此的零碎不全,以至几乎不能理解.幸好 Bernoulli 兄弟,James 和 John,在 Leibniz 思想的巨大影响和激动下,把他的梗概性的文章大力加工,并做了大量的新发展.这我们以后将要谈到. Leibniz 同意他们在微积分方面的工作和他一样多.

5. Newton 与 Leibniz 的工作的比较

微积分是能应用于许多类函数的一种新的普遍的方法,这一发现必须归功于 Newton 和 Leibniz 两人.经过他们的工作,微积分不再是古希腊几何的附庸和延展,而是一门独立的科学,用来处理较前更为广泛的问题.

两人也都算术化了微积分,即在代数的概念上建立微积分. Newton 和 Leibniz 使用的代数记号和方法,不仅给他们提供了比几何更为有效的工具,而且还允许许多不同的几何和物理问题用同样方法处理.从 17 世纪开始到末尾,主要的变化就是微积分的代数化.这同 Vieta 在方程理论、Descartes 和 Fermat 在几何中所做的是可以比美的.

Newton 和 Leibniz 平分的第三个极端重要的贡献是把面积、体积及其他以前作为和来处理的问题归并到反微分.因此,四个主要问题——速率、切线、最大值和最小值、求和——全部归结为微分和反微分.

两个人的工作的主要差异是,Newton 把 x 和 y 的无穷小增量作为求流数或导数的手段.当增量越来越小的时候,流数(或导数)实际上就是增量的比的极限.而 Leibniz 却直接用 x 和 y 的无穷小增量(即微分)求出它们之间的关系.这个差别反映了 Newton 的物理方向和 Leibniz 的哲学方向.在物理方向中,速度之类是中心概念,而哲学则着眼于物质的最终的微粒,这些微粒,Leib-

niz 称作单子(monad). 从而, Newton 完全是从考虑变化率出发来解决面积和体积问题的. 对于他来说, 求导数是基础, 这个过程和它的逆解决了所有的微积分问题. 事实上, 用和来得到面积、体积或者重心, 在他的著作中是少见的. 相反, Leibniz 首先着想的是和, 当然这些和仍是用反微分计算的.

这两个人的工作的第三个差别, 在于 Newton 自由地用级数表示函数; 而 Leibniz 宁愿用有限的形式. 在 1676 年给 Leibniz 的信中, Newton 强调用级数, 甚至对于解简单的微分方程也如此. 虽然 Leibniz 用了无穷级数, 但他回答说, 真正的目标是在确定的范围内获得结果, 在代数函数不能起作用的地方, 要用三角函数和对数函数. 他向 Newton 回忆 James Gregory 的断言: 椭圆和双曲线的长度不能归结为圆函数和对数函数, 他向 Newton 挑战用级数来决定 Gregory 是否正确. Newton 回答说, 用级数他能决定一些积分是否能在有限项的范围内得到, 但没有给出判别法. 再者, 在 1712 年给 John Bernoulli 的信中, Leibniz 反对把函数展成级数, 他说微积分应着眼于把结果归结为求积(积分), 而且如果必要的话, 归结为含有超越函数的积分.

他们的工作方式也不相同. Newton 是经验的、具体的和谨慎的, 而 Leibniz 是富于想象的、喜欢推广的而且是大胆的. Leibniz 更关心的是用运算公式创造出广泛意义下的微积分, 例如函数的积或商的微分法则, 关于 $d^n(uv)$ (u 和 v 都是 x 的函数)的法则, 以及积分表. 正是他, 建立了微积分的规范, 即法则和公式的系统. 至于 Newton, 即使他能容易地推广他的具体结果, 他也没有费心去提出法则. 他知道, 如果 $z = uv$, 那么 $\dot{z} = u\dot{v} + v\dot{u}$, 但他并没有指出这个普遍的结论. 虽然 Newton 创立了许多方法, 但他并没有加以强调. 他的宏伟的微积分应用不仅证明了它的价值, 而且远远超过 Leibniz 的工作, 刺激并决定了几乎整个 18 世纪分析的方向.
Newton 和 Leibniz 在对记号的关心方面也有差别. Newton 认为

这事无关紧要，而 Leibniz 却花费了很多日子来选择富有提示性的记号.

6. 优先权的争论

1687 年以前，Newton 没有发表过微积分方面的任何工作，虽然他从 1665 年到 1687 年把结果通知了他的朋友. 特别地，1669 年他把他的短文《分析学》送给 Barrow，后者把它送给 John Collins. Leibniz 于 1672 年访问巴黎，1673 年访问伦敦，并和一些知道 Newton 工作的人通信. 然而，他直到 1684 年才发表微积分的著作. 于是就发生 Leibniz 是否知道 Newton 工作详情的问题，他被指责为剽窃者. 但是，在这两个人死了很久以后，调查证明：虽然 Newton 工作的大部分是在 Leibniz 之前做的，但是 Leibniz 是微积分主要思想的独立发明者. 两个人都受到 Barrow 的很多启发，虽然 Barrow 几乎无例外地用了几何方法. 这场争吵的重要性不在于谁胜谁负的问题，而是使数学家分成两派. 大陆的数学家，尤其是 Bernoulli 兄弟，支持 Leibniz，而英国数学家捍卫 Newton. 两派不和甚至尖锐地互相敌对，John Bernoulli 甚至嘲笑并猛烈攻击英国人.

这件事的结果，英国的和大陆的数学家停止了思想交换. 因为 Newton 在关于微积分的主要工作和第一部出版物，即《原理》中使用了几何方法，所以在他死后差不多一百年中，英国人继续以几何为主要工具. 而大陆的数学家继续 Leibniz 的分析法，使它发展并得到改善. 这些事情的影响非常巨大，它不仅使英国的数学家落在后面，而且使数学损失了一些最有才能的人应可作出的贡献.

7. 微积分的一些直接增补

微积分当然是数学中最庞大的部分的开端，这一部分一般叫

做分析.我们将在以下几章里叙述这个领域中的重要发展,但是在这里,我们可以注意在 Newton 和 Leibniz 的基础工作之后立即作出的一些补充.

在 Newton 的《普遍的算术》(1707)中,他建立了多项式方程实根的上界定理.这个定理说:数 a 是 $f(x)=0$ 的实根的上界,如果用 a 代替 x 时,$f(x)$ 和它的所有的导数,都给出相同的符号.

在他的《分析学》和《流数法》中,他给出一个一般的方法去逼近 $f(x)=0$ 的根,这个方法发表在 1685 年的 Wallis 的《代数》里. Joseph Raphson(1648—1715)在小册子《普遍方程分析》(*Analysis Aequationum Universalis*, 1690)中,改善了这个方法,虽然他只把这个方法应用到多项式,但它有更广泛的用处.这个修改后的方法现在叫做 Newton 法或者 Newton-Raphson 法.它首先是选择一个近似值 a.然后计算 $a-f(a)/f'(a)$.记这数为 b,再计算 $b-f(b)/f'(b)$.把结果记为 c,如此继续做下去,数 a, b, c, …是根的逐次近似值(用的记号是现在的).实际上,这个方法不一定给出根的越来越好的近似值. J. Raymond Mourraille 在 1768 年证明,a 必须选择得使 $y=f(x)$ 的曲线在 a 和根的区间内凸向 x 轴.很久以后,Fourier 也独立地发现了这一点.

Michel Rolle(1652—1719)在他的《任意次方程的一个解法的证明》(*Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitéz de tous les dégrez*, 1691)中给出了著名的现在以他的名字命名的定理,即如果函数在 x 的两个值,比如说 a 和 b 处等于 0,那么在 a 和 b 之间的某个 x 值上,函数的导数等于 0. Rolle 叙述了定理但没有证明.

在 Newton 和 Leibniz 之后,微积分的两个最重要的奠基者是 Bernoulli 兄弟,James 和 John. James(也叫 Jakob 或 Jacques) Bernoulli(1655—1705)是自学数学的,因而在这门学科中成熟缓慢.在他父亲的敦促下,他为做一个牧师而进行学习,但最后转向了数

学,并在1686年成为巴塞尔(Basel)大学的教授.从此以后,他的主要兴趣就是数学和天文学.在17世纪70年代末,当他开始研究数学问题时,他还不知道Newton和Leibniz的工作.他也学习了Descartes的《几何》、Wallis的《无穷的算术》以及Barrow的《几何讲义》.虽然他从Barrow那里学到很多,但他却把Barrow的结果表为分析的形式.他逐渐地熟习了Leibniz的工作,但是因为后者的工作很少印出发表,所以使得James的许多结果和Leibniz重叠.实际上,他和当时的数学家一样,并没有充分理解Leibniz的工作.

James的活动和他的弟弟John(或叫做Johann或Jean,1667—1748)的活动紧密地连接在一起.John被他的父亲送去经商,但转向了医学,并从他哥哥那里学习数学.他成为荷兰格罗宁根(Groningen)的数学教授,后来继承他的哥哥成为巴塞尔的数学教授.

James和John都经常地和Leibniz,Huygens以及其他数学家通信,他们俩也互相通信.所有这些人都致力于信中提出的或者提出作为挑战的许多共同的问题.在这些日子里,因为结论也是在信中通知的,随后也没有发表,所以谁先发现是一个复杂的问题.有时把信誉归于那些虽已公开但当时还没有证明的结论.问题由于独特关系的出现而更加复杂化.John非常急于成名而开始和他的哥哥竞争,很快两人在许多问题上互相挑战.John毫不迟疑地用不正当手段把别人的、包括他哥哥的成果作为自己的结果.James非常敏感,并且照样回击.他们各自发表文章,大部分互相取资,但不指明他们思想的来源.John实际上成了他哥哥的尖刻的批评者,Leibniz想在两人之间进行调和.虽然在赞扬Barrow时,James早就说过,Leibniz的工作不应该贬低,但是他越来越怀疑Leibniz.另外,他忿恨Leibniz超等的洞察力,认为Leibniz态度傲慢,因为James认为起源于自己的事情,Leibniz声称他已经做

了. 他开始确信 Leibniz 蓄意要贬低他的工作,而且在他们兄弟间的争吵中偏袒 John. 当 Nicholas Fatio de Duillier(1664—1753)赞扬 Newton 创立了微积分而且卷入与 Leibniz 的争论时,James 写信给 Fatio 反对 Leibniz.

至于 Bernoulli 兄弟在微积分方面的工作,也是关于求曲线的曲率、法包线(曲线的法线的包络)、拐点、曲线的求长以及其他基本的微积分课题. Newton 和 Leibniz 的结论后来扩展到各种各样的螺线、悬链线和曳物线(它是这样一条曲线,其中 PT 和 OT 的比等于常数,图 17.20). James 还写了五篇关于级数的文章(第 20 章第 4 节),文章把 Newton 的级数的应用扩展到积分复杂的代数函数和超越函数. 1691 年 James 和 John 给出曲线的曲率半径的公式. James 称之为"黄金定理"并写作

图 17.20

$$z = \mathrm{d}x\mathrm{d}s : \mathrm{dd}y = \mathrm{d}y\mathrm{d}s : \mathrm{dd}x,$$

其中 z 是曲率半径. 如果我们用 $\mathrm{d}s^2$ 除每一个比的分子和分母,就得到

$$z = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}s}{\mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}s}{\mathrm{d}^2 x/\mathrm{d}s^2},$$

这是更熟悉的形式. James 也在极坐标中给出了这个结果.

John 作出一个现今著名的定理,它是用来求一个分数当分子和分母都趋于 0 时的极限的. 这个定理,由 John 的学生 Guillaume F. A. l'Hospital(1661—1704)编入微积分的一本有影响的书《无穷小分析》(*Analyse des infiniment petits*, 1696)中,现在通称为 L'Hospital 法则.

8. 微积分的可靠性

从引进求速度、切线、最大值和最小值等新方法开始,它的证

明就被攻击为是不可靠的. Cavalieri 的使用不可分量的最终元素以及他的论据震惊了那些重视逻辑严密性的人们. Cavalieri 答复他们的批评说,当代的几何学家在逻辑方面比他还随便——Kepler 在他的《测量酒桶体积的新科学》中就是一例. 他继续说,这些几何学家在面积计算中满足于模仿 Archimedes 的求直线的总和的方法,但没有能够给出像希腊人用来使工作严密的那种完整的证明. 他们满足于他们的计算,只要结果有用就行了. Cavalieri 感到有理由采用同样的观点. 他说,他的做法能引向新的创造,而且他的方法一点也没有强迫人们把一个几何结构看成是由无穷多部分组成的;除了在面积之间和体积之间建立正确的比之外,没有其他目的. 但是这些比保持它们的意义和值,而不管人们对于连续统有什么见解. 无论如何,Cavalieri 说:"严密是哲学所关心的,而不是几何所关心的事情."

Fermat,Pascal 和 Barrow 意识到他们在求和工作中的不严密性,但是相信照 Archimedes 的方式就能作出严密的证明. 在《Dettonville 的信》(1659)中,Pascal 断言,无限小的几何与古希腊几何是一致的. 他断言,"凡是能用不可分量的正确法则证明的东西,也能用古代的方式去严密地证明."更进一步,他说不可分法必定会受到任何一个自称为几何学者的数学家的承认. 它和古代的方法只是语言上的不同. 然而,Pascal 对于严密性也有矛盾心理. 有时他辩护道,内心的干预给我们保证了数学步骤的正确性. 为了做正确的工作所必需的东西是专门的"技巧",而不是几何的逻辑,正如宗教对皈依的领会高于理智一样. 在微积分中运用的几何的悖论,如同圣经中的明显的荒唐事一样,几何中的不可分量与有限量之间的关系同人类的公正与上帝的公正之间的关系是一样的.

Cavalieri 和 Pascal 提供的辩护适用于无穷小量的求和. 关于导数,早期的作者如 Fermat 和 Roberval 认为他们有一套简单的

代数程序,这个程序有着非常明白的几何解释,因而能用几何的论据证明是合理的. 实际上,当 Fermat 不能用穷竭法去核实他所提出的任何想法时,他谨慎地避免宣布一般性的定理. Barrow 局限于几何论证,而且尽管他攻击代数学家缺乏严密性,可是,对于他的几何论据的可靠性也是不够注意的.

Newton 和 Leibniz 都没有清楚地理解也没有严密地定义他们的基本概念. 我们已经观察到他们在定义导数和微分时都是犹豫不定的. Newton 实际上是不相信他违背了希腊几何. 虽然他使用了不合他口味的代数和坐标几何,但他认为归根到底他的方法不过是纯几何的自然延展. 然而,Leibniz 像 Descartes 一样,是一个思想开阔、很有远见的人,他看到了新思想有长远的潜力,而且毫不犹豫地宣告新科学出世了. 因此,对于微积分中严密性的缺乏,不很担心.

对于他的思想的批评者,Leibniz 作出各种不能令人满意的回答. 他在 1690 年 3 月 30 日给 Wallis 的信中[①]说:

> 考虑这样一种无穷小量将是有用的,当寻找它们的比时,不把它们当作是零,但是只要它们和无法相比的大量一起出现,就把它们舍弃. 例如,如果我们有 $x+\mathrm{d}x$,就把 $\mathrm{d}x$ 舍弃. 但是如果我们求 $x+\mathrm{d}x$ 和 x 之间的差,情况就不同了. 类似地,我们不能把 $x\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}x\mathrm{d}x$ 并列. 因此如果我们微分 xy,我们写下 $(x+\mathrm{d}x)(y+\mathrm{d}y)-xy=x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 但 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是不可比较地小于 $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$,所以必须舍弃. 这样就在任何特殊的情况下,误差都小于任何有限的量.

至于 $\mathrm{d}y$,$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的最终的含意,Leibniz 仍然是含糊的. 他说 $\mathrm{d}x$ 是两个无限接近的点的 x 值的差, 切线是连结这样两点

① Leibniz: *Math. Schriften*, 4,63.

的直线.虽然他在各阶无穷小量之间确实作出了区别,但是他没有经过证明就扔掉高阶微分.有时候把无穷小量 dx 和 dy 描述成正在消失的或者刚出现的量,与已经形成的量相对应.这些无穷小量不是 0,但小于任意有限的量.有时他求助于几何,说,高阶微分和低阶微分相比,如同点和直线相比一样[①],又说 dx 比 x 如同点比地球,或地球的半径比宇宙的半径一样.他认为两个无穷小量的比是不能指出的量之商或者是无限小的量之商,但是这个比仍然能用有限的量表出,如同纵坐标对次切线的比那样.

暴风雨般的攻击和反驳开始于 1694 年和 1695 年荷兰物理学家和几何学家 Bernard Nieuwentijdt(1654—1718)的书.虽然他承认,一般地说来,新方法引向正确的结果,但他批评方法的含糊,并指出有时方法引向荒谬.他抱怨说他无法理解无穷小量怎样和 0 有区别,并质问为什么无穷小量的和能是有限的量.他还质问高阶微分的意义和存在,质问在推理的过程中为何舍弃无穷小量.

在可能写于 1695 年的回答 Nieuwentijdt 的草稿中,以及在 1695 年的《教师学报》的一篇文章中[②],Leibniz 作出了各种回答.他谈到"过分苛刻"的批评者,并说过分的审慎不应该使我们抛弃创造的成果.然后他说他的方法不同于 Archimedes 方法之处,只在于所用的表达方面,但他自己的方法更好地适应于发明的艺术."无穷大"和"无穷小"仅仅表示愿要多大就多大和愿要多小就多小的量,这是为了证明误差可以小于任何指定的数——换句话说,就是没有误差.人们能用这些最终的东西——即无穷大量和无穷小量——作为一种工具,正如在代数里用虚根有极大的好处一样.

到这时为止,Leibniz 的论据,是他的微积分只用到通常的数

---

① *Math. Schriften*, 5,322 ff.

② *Acta Erud.*, 1695,310～316 = *Math. Schriften*, 5,320～328.

学概念.但是因为不能使他的批评者满意,所以他说了一个叫做连续性定律的哲学原理,这个原理实际上和 Kepler 叙述的是一样的. 1687 年在给 Pierre Bayle 的信中[1],Leibniz 叙述这个原理如下:"在任何假定的向任何终点的过渡中,允许制定一个普遍的推论,使最后的终点也可以包括进去."为了支持这个原理,在 1695 年左右的没有发表的手稿中,作为例子,他给出一个把椭圆和抛物线包括在内的论证,虽然抛物线是椭圆的一个焦点移向无穷远时的极限情形.然后他运用这个原理为抛物线 $y=x^2/a$ 计算 dy/dx. 在得到

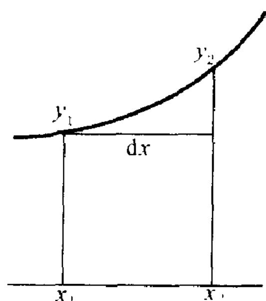


图 17.21

$$dy : dx = (2x + dx) : a$$

之后,他说:"现在,因为按我们的公设,允许在一个普遍的道理下,也包括纵坐标 x_2y_2 越来越向确定的纵坐标 x_1y_1 移近并最终和它重合的情形(图 17.21),所以,明显地,在这种情形下,dx 成为 0,并且应该忽略……"Leibniz 没有说明应该给予方程左边的 dx 以什么意义.

他说,当然,绝对相等的东西总有一个绝对是无的差别,因此抛物线不是椭圆.

> 然而一个过渡的状态或者即将消失的状态是可以设想的,其中实际上仍然没有出现完全的相等或者静止……而是进入这样一种状态,即差小于任何指定的量,在这种状态中还剩余一些差,一些速度,一些角度,但它们每个都是无穷小……
>
> 是否这样一个从不等到相等的瞬时过渡……能够保持在严密的或者形而上学的意义中呢?或者无穷大的扩

1) *Math. Schriften*, 5,385.

> 展顺次地越来越大,或者无穷小的扩展顺次地越来越小,这是否是合法的考虑呢? 在目前,我承认这可能还是未解决的问题.
>
> 如果当我们说到无穷大(或者更严格些说,无限制的大)或者无穷小量(即在我们的知识中是最小的)时,就理解为我们意味着无限大的或者无限小的量(即要多大就多大,要多小就多小,使得任何人得到的误差可以小于某个指定的量),那就足够了.
>
> 在这些假定下,我们在1684年10月的《教师学报》中列出的算法的全部规则,都能够不很麻烦地给以证明.

然后Leibniz重新给出这些规则. 他引进量$(d)y$和$(d)x$,并用它们完成通常的微分手续. 他叫这些量是能指定的或者有限的没有消失的量. 在得到最后的结果之后,他说,我们能够用消失的或不能指定的量dy和dx代替$(d)y$和$(d)x$,因为我们"假定消失量dy和dx的比等于$(d)y$和$(d)x$的比,而这个假定永远能归结到一个不容怀疑的真理."

Leibniz的连续性原理确实不是今天的一个数学公理,但是他强调它,而且后来它成为重要的东西. 他给出许多和这个原理相符的论据. 例如在给Wallis的信中[1],Leibniz为他使用一个没有量的形式的特征三角形,即量缩小为0之后,特征三角形的形式仍然保存作辩护,而且挑战地反问道:"谁不承认没有量的形式呢?"同样的,在给Guido Crandi的信中[2],他说无穷小不是简单的、绝对的零,而是相对的零,这就是说,它是一个消失的量,但仍保持着它那正在消失的特征. 然而,Leibniz在另外的时候又说,他不相信度量中真正的无穷大或者真正的无穷小.

---

① *Math. Schriften*, 4,54.

② *Math. Schriften*, 4,218.

Leibniz 对于他的一套做法是否正确的最终验证比 Newton 更少关心,认为这应取决于做法的有效性.他强调他所创造的东西在做法上或算法上的价值.在某种程度上,他确信只要他清楚地表述并且恰当地运用他的运算法则,就会获得合理而正确的结果,而不管所用符号的意义怎样可疑.

很明显,Newton 和 Leibniz 都没有把微积分的基本概念——导数和积分——弄清楚,更不用说弄精确了.他们不能正确地掌握这些概念,而是依靠成果的彼此一致和方法的多产,没有严密性地向前推进.

有几个例子可以说明即使在 Newton 和 Leibniz 的卓越的最接近的继承者那里也缺乏明晰性. John Bernoulli 在 1691 和 1692 年写出第一本微积分教材.积分部分于 1742 年出版①;微分部分,《微分学》(*Die Differentialrechnung*),直到 1924 年才出版.但是 Marquis de l'Hospital 以他自己的名义在 1696 年出版了一个略加修改的法文译本(前已提到过). Bernoulli 以三条公设开始《微分学》.第一条说:"一个量增加或减少一个无穷小量之后,它既没有增加也没有减少."第二条公设是:"每一条曲线是由本身是无穷小的无数条直线组成的."在推理中他追随 Leibniz,用了无穷小量.例如,为了从 $y=x^2$ 得到 dy,他用 e 代替 dx 并得到 $(x+e)^2-x^2$ 即 $2xe+e^2$,然后只须去掉 e^2.像 Leibniz 一样,他用了含糊的比拟说明微分是什么东西.他说,因此无穷大量像是天文距离,而无穷小量像是显微镜揭示出来的微生物. 1698 年他辩论无穷小量必定存在②.为此,只要考虑无穷数列 1, 1/2, 1/4, …就行了.如取 10 项,1/10 就存在;如取 100 项,1/100 就存在.相应地取无穷多个项,那就是无穷小量了.

包括 Wallis 和 John Bernoulli 在内的很少的几个人,试着定

---

① *Opera Omnia*, 3,385~558.

② Leibniz: *Math. Schriften*, 3,Part 2,563 ff.

义无穷小是∞的倒数,他们认为∞是明确的数.还有其他一些人似乎认为,不可理解的东西不需要进一步解释.对于17世纪的大多数人来说,严密不是一件关心的事情.他们经常说的能够用Archimedes方法严密化的东西实际上不能够用Archimedes式的严密化,对于微分特别是这样,因为在古希腊数学中没有类似于微分的东西.

实际上,新的微积分正在引进与先前的工作根本不同的概念和方法.经过Newton和Leibniz的工作,微积分成为一门完全新的要求有它自己的基础的学科.虽然他们没有完全意识到这一点,但是数学家们已经同过去决裂了.

正确的新概念的萌芽甚至能在17世纪的文献中发现.Wallis在《无穷的算术》(1655)中,提出了函数的极限的算术概念:它是被函数逼近的数,使得这个数和函数之间的差能够小于任一指定的数,并且当过程无限地继续下去,差最终将消失.他的话是不严密的,但却包含了正确的思想.

James Gregory在他的《论圆和双曲线的求积》(1667)中明白指出,求面积、体积和曲线长度的方法,包含一个新的过程,即极限过程.他又说,这种运算同加、减、乘、除以及开方等五种代数运算的性质不同.他把穷竭法表为代数的形式,并看出用外切于已知面积或体积的直线形与用内接直线形得到的逐次逼近值都收敛到相同的"最后项".他还注意到极限过程产生不是有理数的根的无理数.但是Wallis和Gregory的见解在他们的世纪中没有引起注意.

微积分的基础仍然是不清楚的.更加混乱的是:Newton的支持者继续谈论最初比和最后比,而Leibniz的追随者使用无穷小的非零量.许多英国数学家也许是由于基本上仍然为古希腊的几何所束缚,因而怀疑微积分的全部工作.这个世纪就这样在微积分处于混乱状态之下结束了.

参考书目

Armitage, A.: *Edmond Halley*, Thomas Nelson and Sons, 1966.

Auger, L.: *Un Savant méconnu: Gilles Persone de Roberval* (1602～1675), A. Blanchard, 1962.

Ball, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover (reprint), 1960, pp. 309～370.

Baron, Margaret E.: *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, 1969.

Bell, Arthur E.: *Newtonian Science*, Edward Arnold, 1961.

Boyer, Carl B.: *The Concepts of the Calculus*, Dover (reprint), 1949.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chaps. 18～19.

Brewster, David: *Memoirs of the Life, Writings and Discoveries of Sir Isaac Newton*, 2 vols., 1855, Johnson Reprint Corp., 1965.

Cajori, Florian: *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Open Court, 1919.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, Macmillan, 1919, 2nd ed., pp. 181～220.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1900 and 1898, Vol. 2, pp. 821～922; Vol. 3, pp. 150～316.

Child, J. M.: *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, Open Court, 1916.

Child, J. M.: *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Open Court, 1920.

Cohen, I. B.: *Isaac Newton's Papers and Letters on Natural Philosophy*, Harvard University Press, 1958.

Coolidge, Julian L.: *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover (reprint), 1963, Chaps. 7, 11, and 12.

De Morgan, Augustus: *Essays on the Life and Work of Newton*, Open Court, 1914.

Fermat, Pierre de: *Œuvres*, Gauthier Villars, 1891～1912, Vol. 1, pp. 133～179, Vol. 3, pp. 121～156.

Gibson, G. A.: "James Gregory's Mathematical Work", *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 41, 1922/1923, 2～125.

Huygens, C.: *Œuvres complètes*, 22 vols., Sociéte Hollandaise des Sciences, Nyhoff, 1888～1950.

Leibniz, G. W.: *Œuvres*, Firmin Didot, 1859～1875.

Leibniz, G. W.: *Mathematische Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, 7 vols., Ascher Schmidt, 1849～1863. Reprinted by Georg Olms, 1962.

More, Louis T.: *Isaac Newton*, Dover (reprint), 1962.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 2, pp. 102～177, 348～403; Vol. 3, pp. 102～138.

Newton, Sir Isaac: *The Mathematical Works*, ed. D. T. Whiteside, 2 vols., Johnson Reprint Corp., 1964～1967. Vol. 1 contains translations of the three basic papers on the calculus.

Newton, Sir Isaac: *Mathematical Papers*, ed. D. T. Whiteside, 4 vols., Cambridge University Press, 1967～1971.

Newton, Sir Isaac: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, ed. Florian Cajori, 3rd ed., University of California Press, 1946.

Newton, Sir Isaac: *Opticks*, Dover (reprint), 1952.

Pascal, B.: *Œuvres*, Hachette, 1914～1921.

Scott, Joseph F.: *The Mathematical Work of John Wallis*, Oxford University Press, 1938.

Scott, Joseph F.: *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, 1958, Chaps. 10～11.

Smith, D. E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, pp. 605～626.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200—1800*, Harvard University Press, 1969, pp. 188～316, 324～328.

Thayer, H. S.: *Newton's Philosophy of Nature*, Hafner, 1953.

Turnbull, H. W.: *The Mathematical Discoveries of Newton*, Blackie and Son, 1945.

Turnbull, H. W.: *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, Royal Society of Edinburgh, 1939.

Turnbull, H. W. and J. F. Scott: *The Correspondence of Isaac Newton*, 4 vols., Cambridge University Press, 1959～1967.

Waller, Evelyn: *A Study of the* Traité des indivisibles *of Gilles Persone de Roberval*, Columbia University Press, 1932.

Wallis, John: *Opera Mathematica*, 3 vols., 1693～1699, Georg Olms (reprint), 1968.

Whiteside, Derek T.: "Patterns of Mathematical Thought in the Seventeenth Century", *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 1961, pp. 179～388.

Wolf, Abraham: *A History of Science, Technology and Philosophy in the 16th and 17th Centuries*, 2nd ed. George Allen and Unwin, 1950, Chaps. 7～14.

第 18 章

17 世纪的数学

考虑了很少的那几样东西之后，整个的事情就归结为纯几何，这是物理和力学的一个目标.

G. W. Leibniz

1. 数学的转变

17 世纪开始时，Galileo 仍然发现与过去开展争论是必要的. 到这个世纪的末尾，数学已经经历了如此广阔而又根本的变化，以至没有一个人不意识到新时代的降临.

欧洲数学家在大约 1550 年到 1700 年间创造的成果比希腊人在大约 10 个世纪中所创造的要多得多. 这很容易由下面的事实来说明，即数学在希腊只是极少数人从事研究，而在欧洲，教育的传播虽然一点也不普遍，但促进了英国、法国、德国、荷兰和意大利的数学家的发展. 印刷的发明，使人们不仅广泛地接近了希腊人的著作，而且也接近了欧洲人自己的成果，这在当时用于激发新的思想是很有成效的.

但是这世纪的天才并不仅仅是因为活动性的膨胀而得到证明. 在这个简短的时期中打开的新领域之多种多样是使人印象深刻的. 代数上升为一门科学(因为使用文字系数使证明有了一种尺度)以及它的方法和理论的大大扩展，射影几何和概率论的开端，解析几何，函数概念，而首要的是微积分，都是重大的创新，而且每一个都使希腊人的巨大成就——Euclid 几何相形见绌.

超过数量的扩展和探索的新途径的，是代数和几何作用的完

全颠倒. 希腊人偏爱几何,因为它是他们能够得到严密性的唯一方式;甚至在17世纪,数学家们还觉得应当用几何证明去为代数方法辩护. 可以说直到1600年数学的主体是几何的,加上一些代数和三角的附属物. 经过Descartes,Fermat和Wallis的工作,代数成为不仅仅是适合于本身目的的一套有效方法,而且也是解决几何问题的极好途径. 分析方法在微积分中表演出来的更大的有效性解决了竞争,于是代数成为数学中占优势的实体了.

正是Wallis和Newton清楚地看到代数提供了优越的方法论. Descartes认为代数只是一种技巧,Wallis和Newton与他不同,他们意识到代数是极重要的研究题材. Desargues,Pascal和La Hire的工作被蔑视和忘却了,Cavalieri,圣文森特的Gregory,Huygens和Barrow的几何方法也被取代了. 纯几何黯然失色了近一百年的时间,至多不过成为代数的一种解释,或经由坐标几何到达代数思想的向导. 事实上,对于《原理》中Newton的几何工作的过分崇拜(由于Newton和Leibniz的争吵而产生的对大陆数学家的敌意,使这一崇拜增强了)使得英国数学家固执在微积分的几何形式的发展中. 但是他们的贡献和大陆上的人用分析方法所能得到的东西比起来是微不足道的. 到1700年已如此明显的事情,已被清晰地叙述出来了,Euler表达了这种权威性的说法,他在他的《无穷小分析引论》(*Introductio in Analysin Infinitorum*,1748)中,赞扬代数大大优越于希腊人的综合法.

数学家们放弃几何的探讨途径是非常勉强的. 按照编注了Newton《原理》第三版的Henry Pemberton(1694—1771)的说法,Newton不仅经常表达对希腊几何学家十分赞赏,而且还因为不如过去那样更紧密地追随他们而责备自己. 在给James Gregory的侄子David Gregory(1661—1708)的一封信中,Newton评述道:"代数是数学中的笨拙者的分析."但是他自己1707年的《普遍的算术》却同任何一本建立代数优越性的著作一样. 在这本书中,

他使算术和代数成为基础科学,仅在能使证明容易一些的地方才允许几何存在. 同样地,Leibniz 也注意到了代数的增长着的优势,在一篇未发表的随笔[①]中,他被迫说:"常常是几何学者能用几句话证明了的,在微积分中却是十分冗长的……代数的见解是使人放心的,但它并不更好一些."

数学本质的另外一个更微妙的变化已经被大师们不知不觉地承认了. 直到 1550 年,数学的概念还是直接观念化的,或是从经验中抽象出来的. 当时负数和无理数已经出现,而且逐渐赢得了承认. 再加上,当复数、使用文字系数的广泛的代数以及导数、积分的概念进入数学的时候,问题就变成从人类脑子的深处导出的概念占优势了. 特别地,瞬时变化率的概念,虽然在速度的物理现象中当然有一些直观的基础,但是它更多的是思维的产物,它还是与数学中的三角形在质上完全不同的一种贡献. 除了这些概念以外,希腊人故意避开的无穷大量和被他们灵巧地捉住的无穷小量,也必定是要辨明的.

换句话说,数学家们在贡献出概念,而不愿意从现实世界中抽象出概念. 但是这些概念在物理研究中是有用的,因为(除复数还必须检验它们的价值以外)它们和物质的现实性存在着某种联系. 当然,没有真正辨别出所涉及的因果关系,欧洲人对于这些新型的数和微积分概念是心中不安的. 然而当这些概念在应用中被证明越来越有用时,他们起先是不情愿地,后来是消极地接受了. 熟悉不产生轻视,反而产生承认,甚至是当然的承认. 1700 年以后,越来越多的、更远离自然界的、从人的脑子中源源不断地涌出的概念,进入了数学,而且以较少的疑虑被接受了. 由于数学概念的起源,使它逐渐从感觉的学科转向思维的学科.

微积分结合进数学,产生了另外一个变化,恰恰是在数学概念

---

① Couturat, L.: *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, 1903, reprinted by Georg Olms, 1961, p. 181.

本身,破坏了古希腊人塑造的完美性.我们已经注意到代数和微积分的兴起引出了数学的这些部分的逻辑基础的问题,而且这个问题并没有解决掉.整个世纪中有些数学家由于演绎意义的证明被抛弃而心烦意乱,但是他们的抗议淹没在代数的扩展着的内容和使用以及微积分之中了;这个世纪的末尾,数学家实质上已经扔掉了对明确定义的概念和演绎证明的要求.严格的公理化结构,给出了从特殊的例子、对事物的直观的洞察以及不严密的几何证据和物理的论点进行归纳的方法.因为演绎法证明已经是数学的最显著的特征,所以数学家们在抛弃他们学科的标志.

回顾一下就容易看到他们为什么会被迫进入这种境地.只要数学家们从直接经验中引出他们的概念,那么定义概念,选择必要的公理,是行得通的——虽然,要说起来,Euclid 在《原本》的第七到第九卷中提出的整数理论的逻辑基础,是十分令人遗憾地有缺陷的.但是,当他们引进不再是观念化直接经验的概念,比如无理数、负数、复数、以及导数和积分时,他们就不能认识到这些概念在本质上是不相同的,从而也就不能认识到那些异于不言而喻的真理的公理发展必须有一个基础.事实上,新概念比旧概念要精细得多.适当的公理基础,正如我们现在所知道的,不可能是容易地建立起来的.

那些对希腊数学造诣很深的、善于批判的数学家们,怎么能满足于在启发性的基础上进行工作呢?他们关心科学中重大的、在某些情况下是紧迫的问题,而且他们所使用的数学又解决了这些问题.他们不愿去探求对新创造的完全理解,也不愿试着去建立必要的演绎式结构,而宁愿用他们的胜利安慰他们的良心.偶然地求助于哲学的或者神秘的教义所获得的成功掩盖了某些困难,使它们不再是明显的.

一个新的目标特别地表现了17世纪和以后几个世纪数学的特征——方法和成果的普遍化.我们已经注意到了 Vieta(在他的

文字系数的引进中),射影几何学家们,Fermat 和 Descartes(在对曲线的探索中),以及 Newton 和 Leibniz(在对函数的处理中)对方法的普遍性给予的重要地位. 至于谈到成果的普遍化,其造诣却是受到限制的. 有许多仅仅是一种断言,比如 n 次多项式方程有 n 个根,或者每一个 x 和 y 的二次方程都是圆锥曲线等等. 数学的方法和记号对建立普遍性结果来说仍然太局限. 然而这一点却成了数学努力的目标.

2. 数学和科学

从古希腊时代起,数学因为它在考察自然中所起的作用而被评价为头等重要的. 天文学和音乐经常与数学相连结,而力学和光学则毫无疑问是数学的. 但是,数学对科学的关系,在几个方面由于 17 世纪的工作而改变了. 第一方面,因为大大地扩展了的科学已被 Galileo 指导去使用量的公理和数学的演绎(第 16 章第 3 节),所以由科学直接激发的数学的活力就变得占支配地位了.

第二方面,Galileo 指令去寻求数学的描述而不是去探索因果关系的解释,导向了接受像万有引力那样的概念. 万有引力和运动定律是 Newton 力学系统的全部基础. 因为对万有引力,唯一可靠的认识是数学的认识,所以数学变成了科学理论的实体. 造反的 17 世纪发现了一个质的世界,它的研究要辅助以数学的抽象;而遗留下一个数学的量的世界,它把物质世界的具体性统归在它的数学定律之下.

第三方面,当希腊人在他们的科学中自由地使用数学时,对数学来说,只要 Euclid 基础得到满足,那么,在数学和科学之间就存在着明显的差别. Plato 和 Aristotle 都把这两者区分开来(第 3 章第 10 节和第 7 章第 3 节),虽然是通过不同的方式的;而 Archimedes 特别清楚哪些是数学地建立起来的,哪些是物理地认识的.

但是，当数学的领域扩张时，数学家不仅依靠物理意义去理解他们的概念，而且还因为数学的论点给出正确的物理结论而接受这些论点，这时，数学和科学之间的界限就变得模糊了. 反过来说，当科学变得越来越依仗数学来产生它的物理结论时，数学也变得越来越依赖于科学的成果，来证实自己的做法的正确性.

这个互相依赖的结局是数学同科学的宏大领域的一种实际融合. 在 17 世纪中，人们理解的数学范围，可从 Claude-François Milliet Deschales(1621—1678)著的、1674 年出版、1690 年增订出版的《数学课程或者数学世界》(*Cursus seu Mundus Mathematicus*)中看到. 除了算术、三角和对数以外，他还论述了实用几何、力学、静力学、地理、磁学、土木工程学、(大)木工、石工、军事建筑、流体静力学、液体流动、水力学、船体结构学、光学、透视图、音乐、火器和火炮的设计、星盘、日晷、天文学、日历计算和算命天宫图. 最后他还把代数、不可分理论、圆锥理论和诸如二次曲线和螺线那样的特殊曲线包括在内. 这本书受到大众的喜爱和尊重. 虽然书中包含某些课题是反映了文艺复兴时期的兴趣，但是整个说来，它描绘了 17 甚至 18 世纪数学领域的一幅合理的图画.

也许有人以为数学家们将会关心于保持他们学科的特性. 但是事实并非如此，他们根本不是被迫依赖于物理意义和结果来捍卫他们的论点，事实上，17(和 18)世纪对数学贡献最大的人或者主要地是科学家，或者至少同等地涉及这两个领域. 比如 Descartes, Huygens 和 Newton，他们作为物理学家要大大地超过他们作为数学家. Pascal, Fermat 和 Leibniz 在物理学中是很活跃的. 事实上，在这一世纪，很难说出一位对科学没有浓厚兴趣的杰出的数学家的名字. 结果是这些人并不希望或企图去作出这两领域的任何差别. Descartes 在他的《思想的指导法则》中说，数学是次序和计量的科学，除了代数和几何以外，还包括天文学、音乐、光学和力学. Newton 在《原理》中说："在数学中我们必须与力的比

率一起研究力的量,这些比率是随假定的任何条件而产生的;所以,当着我们开始研究物理学时,我们要把这些比率和自然现象进行比较……”这里,物理学指的是实验和观察. Newton 的数学可以看作是今天的数学物理.

3. 数学家之间的交流

直到大约 1500 年,数学还是由单个的人或者由一两个卓越的领袖为首的小团体进行研究的. 成果是用口头交流的,偶尔也写成文字——可是,它们是些手稿. 因为复制品必须用手抄写,所以是很稀少的. 17 世纪时印刷的书籍变得普通一些了,但是即使经过这种改进,知识的传播也并没有如想象那样广泛. 因为高等数学的市场是很小的,所以印刷者必须索取高价. 好的印刷者是少见的. 出版后接踵而来的往往是肆无忌惮的反对者对作者的攻击,对于这种批评家来说,要找出攻击的地方是一点也不费力的,尤其是因为代数和微积分还根本没有牢固的逻辑基础. 通常,书籍在任何情况下并不都有新的创造,因为重大的成果不一定以书的形式发表.

结果是造成许多数学家只能通过写信给朋友们来叙述他们的发现. 因为害怕信会落到那些可能趁机利用这些非正式文件的人手里,所以写信人常常把成果写成密码或者搞成字谜,当需要的时候就能够把它们翻译出来.

随着参加数学研究的人数的增加,人们要求交换情报资料,要求会见意趣相投的人来互相激励的愿望,导致了科学学会或研究院的组成. 1601 年,由青年贵族在罗马建立了“山猫学会”(Accademia dei Lincei),这个学会持续了 30 年. Galileo 在 1611 年成了它的一个成员. 另一个意大利学会,实验研究院(Accademia del Cimento)于 1657 年在佛罗伦萨(Florence)建立,作为一个经常在

实验室里集会的人们的正式组织，这个实验室是大约10年前由Medici家族的两个成员建立的. 这个研究院的成员包括了Vincenzo Viviani(1622—1703)和Torricelli，两人都是Galileo的学生. 遗憾的是，这个学会于1667年解散了. 在法国，Desargues，Descartes，Gassendi，Fermat和Pascal夹在其他人中间，在Mersenne的领导下从1630年开始秘密地集会. 这个非正式的团体在1666年被Louis XIV特许为"皇家科学院"，它的成员由皇帝资助. 与法国的情况相类似，以John Wallis为中心的英国团体1645年开始在伦敦格雷沙姆学院(Gresham College)集会. 这些人强调数学和天文学. 1662年这个团体由Charles Ⅱ颁发了正式的特许书，而且取名为"增进自然知识的伦敦皇家学会". 这个学会致力于数学和科学的应用，认为染色业、货币、射击学、金属精炼、人口统计等都是重要课题. Leibniz鼓吹了好几年的柏林科学院，终于在1700年开办了，Leibniz当了第一任院长. 在俄罗斯，1724年Peter大帝在彼得堡建立了圣彼得堡科学院.

研究院是重要的，不仅由于通过它可以进行直接的接触和思想的交流，而且还因为它们支持了定期刊物. 第一个科学刊物(虽然不是由一个科学院主办的)名叫《博学者杂志》(*Journal de Sçavans*或*Journal des Savants*)，于1665年开始出版. 这个杂志和同一年开始出版的《皇家学会哲学汇刊》(*Philosophical Transactions of the Royal Society*)是第一批载有数学文章和科学文章的刊物. 法国科学院创办了《皇家科学院史以及数学和物理的论文报告》(*Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique*). 它还发行了《由博学者和会员呈交皇家科学院或者在会上宣读的各种数学和物理的论文报告》(*Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Sçavans et Lus dans ses Assemblées*)，也称为《外国学者的论文报告》(*Mémoires des*

Savants Etrangers). 另外一个较早的科学杂志是《教师学报》,于1682 年开始出版,因为它是拉丁文的,所以很快获得了国际性的读者. 柏林科学院主办了《皇家科学院史和纯文学》[*Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-letters*,几年后它的名称改为《Berolinensia 杂集》(*Miscellance Berolinensia*)].

这些科学院和它们的刊物打开了新的科学交流的窗口;它们和后来的杂志成为发表新的学术研究的公认的工具. 科学院推动了大部分它们所支持的科学家的研究. 例如,Euler 从 1741 年到 1766 年,Lagrange 从 1766 年到 1787 年都得到柏林科学院的支持. 圣彼得堡科学院在几个不同的时期中支持了 Daniel 和 Nicholas Bernoulli,从 1727 年到 1741 年支持了 Euler,并且从 1766 年起再一次支持了他直到 1783 年他逝世为止. 由欧洲政府建立的科学院标志着政府正式进入科学领域和支持科学. 科学的有益性已经得到了承认.

在知识的创造和传播中,现代人认为能起主要作用的机构——大学——这时是不起作用的. 它们是保守的和教条主义的,被各个国家的官方宗教控制着,吸收新的知识非常缓慢. 一般说来,它们只教一点算术、代数和几何. 虽然在 16 世纪时剑桥大学有几个数学家,但是从 1600 年到 1630 年间却一个也没有了. 事实上,17 世纪初叶在英国,数学还不是一门课程. 它被认为是魔术. 1616 年出生的 Wallis 曾谈到他少年时期的公共教育,"我们当时的数学很少被看做是学术性的,而被认为是机械性的——是商人的事情."他进入剑桥大学学习数学,然而自学得到的东西要多得多. 虽然他准备当一名数学教授,但他离开了剑桥,"因为在那里研究已经渐渐止息,而且没有一个专业是为这门课的教师开设的."

数学的教授席位首先是在牛津大学于 1619 年设立的,后来剑桥大学也设立了. 在这之前,只有低级的讲师. 剑桥大学的 Lucas

教授席位是1663年建立的,Barrow是它的第一任. Wallis本人在1649年成为牛津大学的教授并保持这一席位到1702年. 征聘有才能的教授的障碍是他们必须成为牧师,虽然也有例外,比如Newton就是. 不列颠大学一般地[也包括伦敦、格拉斯哥(Glasgow)和爱丁堡(Edinburg)]差不多都有同样的历史:从大约1650年到1750年,它们是颇为积极的,但后来积极性衰退了,直到大约1825年.

17世纪和18世纪的法国的大学在数学方面是不活跃的. 直到18世纪末,在Napoleon建立第一流的技术学校以前,它们没有作出任何贡献. 德国的大学也是这样,在这两个世纪中数学活动是低水平的. 我们在前面已指出,Leibniz是孤立的,他责骂大学的教育. 格丁根大学建立于1731年,但是直到Gauss成为那里的教授以后,才缓慢地上升到略微重要的地位. 瑞士的日内瓦和巴塞尔的大学中心是我们观察的这段时期的例外,他们能够以拥有Bernoulli兄弟,Hermann和其他一些人而感到自豪. 意大利的大学在17世纪是颇为重要的,但在18世纪失掉了地位. 只要注意到Pascal, Fermat, Descartes, Huygens和Leibniz从来没有在任何一所大学里任过教,而Kepler和Galileo虽然任教了一段时期,但是他们生命的大部分时期是做宫廷数学家,人们就可看到,相对说来大学是何等不重要了.

4. 展望18世纪

17世纪中代数、解析几何和微积分的巨大进展;数学深深地渗透到科学之中,而科学给它提供了许多深奥而引人入胜的问题;Newton在天体力学中的惊人成就造成的骚动;以及由学会和刊物提供的情报交流的改善:所有这些,全都指向未来数学的更多的重大发展,并服务于创造未来数学的巨大繁荣.

然而有一些障碍必须克服：对于微积分的可靠性的怀疑，英国数学家和大陆数学家的疏远，现存教育制度的低劣状况，对于数学中专业支持的不稳定，使年轻数学家或想成为数学家的人踌躇不前. 但是数学家的热情几乎是无止境的. 他们已经瞥见了福地，急切地坚决向前推进. 另外，他们已经能够在当时的气氛中工作了，这种气氛比公元前 300 年以来的任何时期都要大大地适合于创造. 古希腊几何不仅对数学的范围横加限制，而且还对可接受的数学刻下了一条阻碍创造的严格准线. 17 世纪的人们已经打破了这两个束缚. 数学的进展几乎要求完全忽视逻辑的顾虑；幸好，数学家们现在敢于相信他们的直观和对自然的洞察力了.

参考书目

Hahn, Roger: *The Anatomy of a Scientific Institution: The Paris Academy of Sciences*, 1666～1803, University of California Press, 1971.

Hall, A. Rupert: *The Scientific Revolution, 1500—1800*, Longmans, Green, 1954, Chap. 7.

Hall, A. Rupert, and Marie Boas: *The Correspondence of Henry Oldenburg*, 4 vols., University of Wisconsin Press, 1968.

Hartley, Sir Harold: *The Royal Society: Its Origins and Founders*, The Royal Society, 1960.

Ornstein, M: *The Role of Scientific Societies in the Seventeenth Century*, University of Chicago Press, 1938.

Purver, Margery: *The Royal Society, Concept and Creation*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1967.

Wolf, Abraham: *A History of Science, Technology and Philosophy in the 16th and 17th Centuries*, 2nd ed., George Allen and Unwin, 1950, Chap. 4.

第 19 章

18 世纪的微积分

> 因此,看来现代的数学家们像从事科学的人们那样,在应用他们的原理方面花费的心血比在了解这些原理方面多得多.
>
> Berkeley 主教

1. 引　　言

17 世纪最伟大的成就是微积分. 由此起源产生了数学的一些主要新分支,如微分方程、无穷级数、微分几何、变分法、复变函数等等. 其中某些学科的萌芽确实在 Newton 和 Leibniz 的工作中就已经出现了. 18 世纪,人们大量地致力于这些分析分支的发展. 但是在这一发展完成之前,首先必须扩展微积分本身. Newton 和 Leibniz 创造了基本的方法,但留下了许多要做的事情:必须清楚地认识或造出许多新的一元函数和二元或多元函数;微分和积分的技巧也必须推广到某些已经存在或别的有待引入的函数;此外还缺少微积分的逻辑基础. 第一个目标是扩展微积分的主要内容,而这正是本章与下一章的主题.

18 世纪,人们的确扩展了微积分,并创立了一些新的分析分支,虽则这个过程中遇到了挫折、错误、不完全和创造过程中的混乱. 数学家们对微积分及随后产生的分析分支作了纯形式的处理. 他们的技巧是很高超的,然而,这些却不是由明确的数学思想指导,而是由直观和物理见解指引的. 这些形式的努力经受了后来的批判性检查的考验,并产生了伟大的思想线索. 数学新领域的征服

有时超过军事上的征服. 它大胆地闯入敌人的领土,攻占要塞. 然后,就必须由更广阔、更彻底、更谨慎的行动来扩大和支持这些入侵,以保卫那些仅仅暂时地、不牢固地控制了的东西.

在评价18世纪思想家们的工作和论点时,记住他们对代数和分析不加区别这一点是有益的. 因为他们没有意识到需要极限概念,又因为他们没有看出使用无穷级数而产生的问题,所以他们天真地认为微积分只是代数的推广.

18世纪数学界的中心人物、占统治地位的理论物理学家,并能与Archimedes, Newton和Gauss为伍的人是Leonhard Euler (1707—1783). Euler出生在巴塞尔(Basel)附近的一个牧师家里,他父亲要他学神学,他进了当地的大学,15岁毕业. 在巴塞尔时,他跟John Bernoulli学数学. 他决心从事数学研究,并在18岁时开始发表文章. 19岁时,由于在船的立桅方面的工作,他获得了法国科学院的奖金. 通过John Bernoulli的两个儿子:Nicholas Bernoulli(1695—1726)和Daniel Bernoulli(1700—1782), Euler在1733年获得俄国圣彼得堡科学院的任命. 起先,他作为Daniel Bernoulli的助手,但很快就接替Bernoulli当了教授. 虽则,在独裁政府的统治下Euler度过了痛苦的几年(1733—1741),但他却做了数量惊人的研究工作,这些工作的成果出现在圣彼得堡科学院发表的文章中. 他还帮助俄国政府解决了许多物理问题. 1741年,应Frederick大帝召见,他去了柏林,并在那里一直留到1766年. 在这期间,他给普鲁士王的侄女Anhalt-Dessau公主授课. 这些讲述数学、天文、物理、哲学及宗教等不同学科的课程,后来以《给一位德国公主的信》(*Letters to a German Princess*)为名发表,至今读起来仍然引起乐趣. Euler还应Frederick大帝的要求研究了保险问题和运河与水工问题. 在这25年里Euler即使身在柏林,却仍给圣彼得堡科学院写了上百篇文章,并对那里的事务提出意见.

1766年,Euler虽则怕俄国严寒的气候会影响微弱的视力(他于1735年一眼失明),却仍然应Catherine女王的邀请去俄国.实际上回俄国后不久,他就双目失明了,因而他生活的最后17年是在全盲中度过的.尽管如此,他在这些年的成果并不亚于以前.Euler有惊人的记忆力,他能背出三角和分析的公式和前一百个质数的前六次幂,至于背诵无数的诗句和全本《伊尼衣德》(*Æneid*),更是不在话下.他的记忆力好得少见,以至对那些有才能的数学家在纸上做起来也很困难的计算,他却能心算出来.

Euler在数学著作方面惊人地多产.他研究的主要数学领域是微积分、微分方程、曲线曲面的解析几何与微分几何、数论、级数及变分法.他将数学用到整个物理领域中去.他创立了分析力学(作为老的几何力学的对立面)及刚体力学学科.他计算了行星轨道中的天体的摄动影响以及阻尼介质中的弹道.他的潮汐理论和船舶航行与设计方面的工作有助于航海.在这个领域中,他的《航海科学》(*Scientia Navalis*, 1749)与《船舶制造和结构全论》(*Théorie compléte de la construction et de la manœuvre de vaisseaux*, 1773)是出色的著作.他研究了梁的弯曲,并计算了柱的安全载荷.在声学中,他研究了声的传播和音乐的和谐与不和谐.他的三卷光学仪器方面的著作对望远镜和显微镜的设计作出了贡献.他是第一个解析地处理光的振动的人,并在考虑了光对以太的弹性和密度的依赖后,推演了运动方程;他还得到了许多光的反射和色散方面的结果.在光学方面,他是18世纪唯一的赞成波动说反对微粒说的物理学家.理想流体运动的基本微分方程也是他得到的;他还将其应用于人体血液的流动.在热学方面,他(与Daniel Bernoulli)把热看做分子振动,他的《论火》(*Essay on Fire*, 1738)获得了奖金.他对化学、地质学、制图学也有兴趣,他还画了一张俄国地图.人们说:应用是Euler研究数学的原因,然而,毫无疑问,他对两者都很爱好.

Euler 写了力学、代数、数学分析、解析几何与微分几何、变分法等方面的课本，这些教材在后来一百年甚至更长的时间内都是标准的著作. 其中与我们本章有关的是：两卷《无穷小分析引论》(*Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748)——第一本沟通微积分与初等分析的介绍；内容更广泛的《微分学原理》(*Institutiones Calculi Differentialis*, 1755)；三卷《积分学原理》(*Institutiones Calculi Integralis*, 1768—1770)，这些都是里程碑式的著作. 所有 Euler 的书都包含某些有高度开创性的东西. 正如我们看到的，他的力学是基于分析方法而不是几何方法. 他作出了变分法的第一个重要处理. 除课本之外，在一生中的大部分年代里，Euler 都以每年约 800 页左右的速率发表高质量的独创性的研究文章. 这些文章的质量可由下面的事实来判断，那就是这些文章所得的奖金几乎成了他的固定收入. 他的某些书和 400 篇研究文章是在他已完全失明后写的. 他的著作集的现代版如果全部出完将有 74 卷.

Euler 同他以前的 Descartes, Newton 及他以后的 Cauchy 不同，他并没有开辟新的数学分支. 但没有一个人像他那样多产，像他那样巧妙地把握数学；也没有一个人能收集和利用代数、几何、分析的手段去产生那么多令人钦佩的结果. 他是顶呱呱的方法发明家，又是一个熟练的巨匠. 人们可以在数学的所有分支中找到他的名字：其中有 Euler 公式、Euler 多项式、Euler 常数、Euler 积分和 Euler 线.

有人会猜想，这样大的活动量可能是牺牲了所有其他兴趣而实现的. 其实不然，Euler 结了婚，并且是 13 个孩子的父亲，他经常关心他的家庭及其福利，他教育儿孙们，给他们做科学游戏，念圣经给他们听，一起消磨黄昏. 他还喜欢在哲学问题上表白自己，但在这里，他却显得很软弱，为此，他常常受到 Voltaire 责备. 有一天他被迫坦白承认他从未研究过任何哲学，并且后悔

他一直相信可以不学而了解它. 但是 Euler 争论哲学的精神仍不衰减,他持续地致力于它们. 他甚至欣赏从 Voltaire 那儿招来的尖刻批评.

由于他的高尚品质,Euler 赢得了广泛的尊敬,从而他在晚年能把那时欧洲所有的数学家都当作他的学生. 1783 年 9 月 7 日在讨论了他那个时代人们的主要话题:Montgolfier 兄弟事件①和天王星的发现之后,就像 J. A. N. C. de Condorcet 的名言说的那样,"他停止了计算,也停止了生命."

2. 函数概念

正如前面已看到的,在 17 世纪已经引入并使用了函数的概念及简单的代数函数与超越函数. 当 Leibniz, James 和 John Bernoulli, L'Hospital, Huygens 及 Pierre Varignon(1654—1722)处理单摆运动、固定两端的悬索的形状、曲线运动、在球上固定罗盘方位的运动(斜驶线)、曲线的渐屈线与渐开线、光在反射与折射中出现的焦散曲线以及一条曲线在另一条曲线上滚动时的路径等问题的时候,已经不仅使用了已知的函数,而且使初等函数达到相当复杂的形式. 这些研究和微积分的一般工作的结果是:初等函数被充分地认识了,并实际已将它们发展成为我们今天所见到的样子. 例如:对数函数,它起源于几何级数与算术级数的项与项之间的关系,而在 17 世纪被当作求 $1/(1+x)$ 的积分所得的级数(第 17 章第 2 节),这时它就在新的基础上被引入了. Wallis, Newton, Leibniz 与 John Bernoulli 对指数函数的研究表明,对数函数是性质相对简单的指数函数的反函数. 1742 年 William Jones(1675—1749)给出了这种样子的关于对数函数的系统介绍(第 13 章第 2 节). Euler 在《引论》一书中定义这两个函数为

① Montgolfier 两兄弟在 1783 年第一次成功地乘上充满热气的气球上了天.

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \log x = \lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1).$$

三角函数的数学也系统化了. Newton 和 Leibniz 给出了这些函数的级数展开式. 两个角的和与差的三角函数 $\sin(x+y)$, $\sin(x-y)$, …的公式的发展应归功于一批人,其中有 John Bernoulli 与 Thomas Fantet de Lagny(1660—1734), de Lagny 1703 年在巴黎科学院《记要》上写了一篇这个题目的文章. 此后 Frédéric-Christian Mayer(生卒日期不明),圣彼得堡科学院的第一批成员,在和差公式的基础上推导了解析三角的一般恒等式①. 最后,Euler 于 1748 年在关于木星和土星运动中的不等式的一篇得奖文章中给出了三角函数的一个十分系统的处理②. 在 Euler 1748 年的《引论》中已经搞清了三角函数的周期性,并引入了角的弧度③.

当注意到圆弧下的面积由 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 给出,而双曲线下的面积由 $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ 给出时,双曲函数的研究便开始了. 由于两者相差一个符号,并且圆弧下面的面积可用三角函数表示(令 $x = a\sin\theta$),而双曲线下的面积又与对数函数有关,那么在三角函数与对数函数之间就应该存在一个含有虚数的关系. 这个想法被许多人发展了(见第 3 节). 最后, J. H. Lambert 全面地研究了双曲函数④.

John Bernoulli 已将函数概念公式化. Euler 在他的《引论》的一开头,就把函数定义为由一个变量与一些常量,通过任何方式形成的解析表达式. 他概括了多项式、幂级数、对数表达式与三角表

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 2,1727.

② *Opera*, (2),25,45～157.

③ *Opera*, (1),9,217～239,305～307.

④ *Hist. de l' Acad. de Berlin*, 24, 1768, 327～354, pub. 1770 = *Opera Math.*, 2,245～269.

达式. 他还定义了多元函数. 随着就有代数函数的概念,在代数函数中只有自变量间的代数运算,而代数运算又可分为两类:只包含四则运算的有理运算与还包括开根的无理运算. 他又引入了超越函数,即三角函数、对数函数、指数函数、变量的无理数次幂函数及某些用积分表达的函数.

Euler 写道,函数间的原则区别在于组成这些函数的变量与常量的组合法不同. 他补充道,例如超越函数与代数函数的区别在于前者重复后者的那些运算无限多次;也就是说,超越函数可用无穷级数给出. Euler 和与他同时代的人们都不认为有必要去考虑无穷尽地应用四则运算而得到的表达式是否有效的问题.

Euler 区分了显函数与隐函数,单值函数与多值函数,把多值函数当成两个变量的高阶方程的根,这高阶方程的系数是一个变量的函数. 这里,他说,如果一个函数是实变量的实值函数(例如 $\sqrt[3]{P}$,其中 P 是一个单值函数),则它大都能包括在单值函数中. 从这些定义(它们不免有矛盾)Euler 转向有理整函数或多项式. Euler断言这样的实系数函数能分解为一阶或二阶实系数因子的积(见第 4 节与第 25 章第 2 节).

至于连续函数,Euler 像 Leibniz 及 18 世纪的其他作者一样,把它当作由解析式规定的函数,他的"连续"一词,实际上是我们所说的"解析"(除个别的如 $y = 1/x$ 的不连续点之外)①. 他还认识到了其他的函数,代表这些函数的曲线被称为"无意识的"或"随意画的".

Euler 的《引论》是第一部首先突出函数概念并把它作为该书二卷内容的基础的著作. 这本书的某些精神可以从 Euler 关于函数的幂级数展开的一些评论中收集到②. 他断言任何函数都能这

---

① 在他的《引论》二卷第 1 章中,Euler 引入了"不连续"或混合函数,它是指在不同定义域,函数需要不同的解析表达式. 但是这概念在此著作中没有起作用.

② *Opera*, (1),8,Chap. 4, p 74.

样展开,但又说:“如果谁怀疑每个函数都能这样展开,那么这个怀疑就将被实际展开了的函数所排除. 然而,为了使现在的研究能推广到最广泛的可能的领域,除 z 的正整数幂外,应允许包含任意指数的项. 于是无可争辩的是每一个函数都能展开成 $Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\cdots$ 的形式,其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \cdots$ 可以是任何数.”Euler 按照他自己和所有他同时代人的经验坚信所有函数都能展成级数. 而事实上,在那时,所有用解析表达式给出的函数的确都可以展成级数.

虽然,在弦振动问题(见第 22 章)中发生了关于函数概念的争论,并促使 Euler 去推广自己关于什么是函数的概念;然而 18 世纪占统治地位的函数概念仍然是:函数是由一个解析表达式(有限的或无限的)所给出的. 例如,Lagrange 在他的《解析函数论》(*Théorie des fouctions analytiques*, 1797)一书中把一元或多元函数定义为自变量在其中可以按任何形式出现并对计算有用的表达式. 在《函数计算教程》(*Leçons sur le calcul des fonctions*, 1806)中,他说:函数代表着要得到未知量的值而对已知量必须要完成的那些不同运算,未知量的值本质上只是计算的最终结果. 换句话说,函数是运算的一个组合.

3. 积分技术与复量

对于即使稍微复杂一些的代数函数和超越函数,基本的积分法——这个方法是 Newton 引入的——还是把函数表成级数,再逐项积分. 数学家们逐步将积分技巧从一种有限的形式发展到另一种有限的形式.

在 18 世纪积分概念的使用是受限止的. Newton 利用了导数与反导数——不定积分,而 Leibniz 则强调微分与微分和. John Bernoulli 大概是追随 Leibniz 的,把积分当作微分的逆来处理,这

样,如 $dy = f'(x)dx$,则 $y = f(x)$. 那就是说,Newton 的反导数被选为积分,但微分却用来代替 Newton 的导数. 按 Bernoulli 的意思,积分计算的目的是从给定变量的微分之间的关系中找出变量本身之间的关系. Euler 强调导数是消失的微分之比,并说积分所关心的是找出函数本身. 只是为了求积分的近似值,他才用和的概念. 事实上,18 世纪的所有数学家,都把积分当作导数或微分 dy 的逆. 他们从来不问一个积分的存在性,当然在 18 世纪所作的大部分应用问题中,积分都能明确地求出来,因而也就不发生积分存在与否的问题.

有几个积分技术发展的例子是值得注意的. 为了计算积分

$$\int \frac{a^2 dx}{a^2 - x^2},$$

John Bernoulli 曾作变量替换[①]

$$x = a\frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2},$$

就把积分化为如下形式:

$$\int \frac{dt}{2at},$$

而这就立即积出一个对数函数来了. John Bernoulli 在 1702 年注意到,并在该年的科学院《记要》上发表了以下事实[②]:

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x}\right),$$

从而立即可把积分求出. 这样,就引入了部分分式的方法. Leibniz 也独立地发现了这一方法,并将它载入 1702 年的《教师学报》[③].

在 John Bernoulli 和 Leibniz 的通信中,部分分式法还用来求积分

① *Acta Erud.*, 1699 = *Opera*, 2,868~870.

② *Opera*, 1,393~400.

③ *Math. Schriften*, 5,350~366.

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

但是,因为 $ax^2 + bx + c$ 的一次因子可能是复的,部分分式法就导致下面这种形式的积分:

$$\int \frac{dx}{cx + d},$$

其中 d 至少是复数. 然而 Bernoulli 和 Leibniz 都仍然用对数法则来积分,因而不免涉及复数的对数. 他们既不顾忌当时复数的混乱,也毫不犹豫地这样作积分. Leibniz 说复数的出现是无害的.

John Bernoulli 反复地运用这些方法. 在 1702 年发表的一篇文章中[①],他指出:正如用替换 $z = b(t-1)/(t+1)$ 将 $a\mathrm{d}z/(b^2 - z^2)$ 变成 $a\mathrm{d}t/2bt$ 那样,用替换 $z = \sqrt{-1}b(t-1)/(t+1)$ 将微分

$$\frac{dz}{b^2 + z^2}$$

变成

$$\frac{dt}{\sqrt{-1}2bt},$$

而后者是一个虚数的对数的微分. 因为原积分也可以导出函数 arctan,所以 Bernoulli 就建立了三角函数和对数函数之间的关系.

可是,这些结果很快引起了关于负数的对数和复数的对数性质的活跃的讨论. Leibniz 于 1712 年的文章[②],以及在 1712—1713 年间他与 John Bernoulli 的通信中都断言负数的对数是不存在的(他说是虚构的),而 Bernoulli 则想法证明它们必定是实的. Leibniz 的论点是:正对数是用于大于 1 的数,而负对数用于 0 到 1 之间的数. 因此,不可能有负数的对数. 此外,假如 -1 有一个对数,那么 $\sqrt{-1}$ 的对数就是它的一半;而 $\sqrt{-1}$ 肯定是没有对数的. Leib

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1702, 289 ff. = *Opera*, 1, 393～400.

② *Acta Erud.*, 1712, 167～169 = *Math. Schriften*, 5, 387～389.

niz 在积分中已引出复数的对数后仍要这样论证真是很令人费解的. Bernoulli 争论说:因为

$$(1)\qquad \frac{d(-x)}{-x}=\frac{dx}{x},$$

所以 $\log(-x)=\log x$;又因为 $\log 1=0$,所以 $\log(-1)=0$. Leibniz 反驳道: $d(\log x)=dx/x$ 只对正的 x 成立. 在 1727—1731 年间,Euler 与 John Bernoulli 在第二轮通信中发生了争论. Bernoulli 坚持他的见解,而 Euler 不同意这个见解,虽则当时 Euler 并未坚持自己的意见.

由于一些有关的今天还很有意义的进展,又因为导出了指数函数和三角函数的关系,使最后搞清什么是复数的对数成为可能. 1714 年 Roger Cotes(1682—1716)发表了一个复数的定理①,用现在的记号来表示,这个定理说的是

$$(2)\qquad \sqrt{-1}\phi=\log_e(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi).$$

1740 年 10 月 18 日,Euler 在一封给 John Bernoulli 的信中说 $y=2\cos x$ 和 $y=e^{\sqrt{-1}x}+e^{-\sqrt{-1}x}$ 都是同一个微分方程的解(这是他由级数解而认识到的),因此它们应相等,1743 年他又发表了②这个结果,即

$$(3)\qquad \cos s=\frac{e^{\sqrt{-1}s}+e^{-\sqrt{-1}s}}{2},\ \sin s=\frac{e^{\sqrt{-1}s}-e^{-\sqrt{-1}s}}{2\sqrt{-1}}.$$

在 1748 年他重新发现了 Cotes 的结果(2),它也可由(3)导出.

正当这个发展出现的时候,Abraham de Moivre(1667—1754)由于撤销了保护卡尔文教徒的南兹敕令而离开法国住到伦敦,这时他至少内应地得到了现在以他命名的公式. 在 1722 年的一篇笔记中,de Moivre 利用了 1707 年③已发表过的结果,他说,代表比为 $1:n$ 的两个角的正矢($\mathrm{Vers}\,\alpha=1-\cos\alpha$)的 x 与 t 之间的关

① *Phil. Trans.*, 29,1714,5~45.

② *Miscellanea Berolinensia*, 7,1743, 172 ~ 192 = *Opera*, (1),14,138~155.

③ *Phil. Trans.* 25,1707,2368~2371.

系可由以下两方程消去 z 得到①:

$$1-2z^n+z^{2n}=-2z^nt$$

与

$$1-2z+z^2=-2zx,$$

在这个结果中隐含着 de Moivre 公式,因为如令 $x=1-\cos\phi$, $t=1-\cos n\phi$,就可导出

$$(\cos\phi\pm\sqrt{-1}\sin\phi)^n=\cos n\phi\pm\sqrt{-1}\sin n\phi. \tag{4}$$

对 de Moivre 来说,n 是一个大于零的整数. 实际上,他从未明显地写出最终结果;最终的公式是 Euler 给出的②,Euler 还把此公式推广到任意实数 n.

1747 年前后,Euler 对指数函数、对数函数和三角函数之间的联系已有了充分的经验,足以得到有关复数的对数的正确结论. 1749 年,在题为《论 Leibniz 先生与 Bernoulli 先生关于负数和虚数的对数之争论》③一文中,Euler 不同意 Leibniz 的反驳论点(Leibniz 的论点是 $d(\log x)=dx/x$ 只对正的 x 成立). 他说,如果 Leibniz 的异议正确,就会扰乱全部分析的基础,即规则和运算的应用可以不管应用的对象性质如何. 他断言 $d(\log x)=dx/x$ 对一切正数和负数 x 都正确,但补充说:Bernoulli 忘记了从前面的式(1)就可以导出 $\log(-x)$ 和 $\log x$ 只差一个常数. 这个常数必须是 $\log(-1)$,因为 $\log(-x)=\log(-1\cdot x)=\log(-1)+\log x$. 因此,Euler 说:Bernoulli 实际上假设了 $\log(-1)=0$,但这是需要证明的. Bernoulli 还作了另一个论证,对此 Euler 也作了回答. 例如 Bernoulli 论证道:因为 $(-a)^2=a^2$,所以 $\log(-a)^2=\log a^2$,因而 $2\log(-a)=2\log a$ 或 $\log(-a)=\log a$. Euler 反驳说,因为 $(a\sqrt{-1})^4=a^4$, 则 $\log a=\log(a\sqrt{-1})=\log a+\log\sqrt{-1}$,所以在这种情况下,可推知 $\log\sqrt{-1}$ 应为 0. 但 Euler 说 Bernoulli 本人

---

① 此处还应要求 $|z|=1$. ——译者注

② *Introductio*, Chap. 8.

③ *Hist. de l' Acad. de Berlin*, 5, 1749, 139～179 pub. 1751 = *Opera*, (1), 17, 195～232.

曾经在另一个场合证明了 $\log\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\pi/2$.

Leibniz 曾这样论证道:因为

$$(5)\qquad \log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

则,对 $x=-2$

$$\log(-1)=-2-\frac{4}{2}-\frac{8}{3}-\cdots$$

由此可见,log(−1)至少不是 0(事实上,Leibniz 曾经说过:log(−1)不存在). Euler 对这个论证的回答是:由

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$

对 $x=-3$,可得

$$-\frac{1}{2}=1+3+9+27+\cdots$$

而对 $x=1$,可得

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots$$

因此,将两式的左右两边分别相加得

$$0=2+2+10+26+\cdots$$

由此,Euler 说:由级数得来的论证不证明任何东西.

在反驳了 Leibniz 和 Bernoulli 之后,Euler 给出了一个按现在的标准看来是错误的论证. 他写道

$$x=e^y=\left(1+\frac{y}{i}\right)^i,$$

其中 i 是一个无穷大的数①. 则

$$x^{1/i}=1+\frac{y}{i},$$

因此

$$y=i(x^{1/i}-1).$$

---

① 在 Euler 的早期著作中,用 *infinitus* 的第一字母 i 表示一个无穷大的量,1777 年后,他用 i 代表 $\sqrt{-1}$.

因为 $x^{1/\infty}$ 是"无穷大次根",它有无穷多个复值,所以 y 也有这些值,而因 $y = \log x$,所以 $\log x$ 也有无穷多个值. 这里 Euler 事实上写道①

$$x = a + b\sqrt{-1} = c(\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi).$$

令 $c = e^C$, 他得到

$$x = e^C(\cos\phi + i\sin\phi) = e^C e^{\sqrt{-1}(\phi \pm 2\lambda\pi)},$$

因而

$$y = \log x = C + (\phi \pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1}, \tag{6}$$

其中 λ 是正整数或零. 这样,Euler 断言:对于正实数而言,对数只有一个实值,其余都是虚值;但对于负实数或虚数而言,对数的一切值都是虚的. 尽管 Euler 对这问题有成功的解答,但他的工作却并未被人们接受. D'Alembert 提出了形而上学的、解析的、几何的论点去证明 $\log(-1) = 0$.

4. 椭圆积分

John Bernoulli 在成功地用部分分式法积出某些有理函数后,在 1702 年的《教师学报》上断言,任何有理函数的积分无需包含除三角函数与对数函数以外的任何其他超越函数. 因为有理函数的分母可以是 x 的一个 n 次多项式,所以 Bernoulli 的断言的正确性就依赖于能否将任何一个实系数多项式表示成实系数的一阶或二阶因子的乘积. Leibniz 在 1702 年的《教师学报》上的文章中以 $x^4 + a^4$ 为例,认为这是不可能的. 他指出

$$\begin{aligned} x^4 + a^4 &= (x^2 - a^2\sqrt{-1})(x^2 + a^2\sqrt{-1}) \\ &= (x + a\sqrt{\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}) \\ &\quad \times (x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}), \end{aligned}$$

---

① $a + b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sqrt{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = c(\cos\phi + i\sin\phi)$.

他又说:这四个因子中的任意两个的乘积都不能给出一个实系数的二次因子.假如他能将$\sqrt{-1}$和$-\sqrt{-1}$的平方根表示成通常的复数,他就会看出他的错误所在.Nicholas Bernoulli(1687—1759)(James Bernoulli 和 John Bernoulli 的侄儿)在1719年的《教师学报》上指出

$$x^4+a^4=(a^2+x^2)^2-2a^2x^2=(a^2+x^2+ax\sqrt{2})(a^2+x^2-ax\sqrt{2});$$

所以函数$1/(x^4+a^4)$能用三角函数和对数函数求积分.

人们也考虑了无理函数的积分.James Bernoulli 和 Leibniz 在这方面曾通过信,因为他们经常遇到这种被积函数.1694年 James Bernoulli 关心弹性问题①,即受力细杆(例如在端点受力)所具有的形状问题.对一组端点条件,Bernoulli 发现曲线的方程由下式给出:

$$\mathrm{d}y=\frac{(x^2+ab)\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4-(x^2+ab)^2}};$$

他不能用初等函数来求这个积分.联系到这项工作,他引入了双纽线,其直角坐标方程是$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,其极坐标方程是$r^2=a^2\cos 2\theta$.James Bernoulli 想求出其弧长.从双纽线的顶点到曲线上任一点的弧长由下式给出:

$$s=\int_0^r\frac{a^2}{\sqrt{a^4-r^4}}\mathrm{d}r,$$

James Bernoulli 猜测这也不能用初等函数积出来.

在17世纪,企图求出椭圆的弧长(它对天文学是很重要的),就导致计算积分

$$s=a\int_0^t\frac{(1-k^2t^2)\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

这里取椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

① *Acta Erud.*, 1694, 262 ~ 276 = *Opera*, 2, 576~600.

被积函数中 $k=(a^2-b^2)/a^2$, $t=x/a$. 求单摆的周期问题导致求积分

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

这种无理被积函数还在求双曲线、三角函数等曲线的弧长时出现.这些积分约在 1700 年就已经闻名了,还有其他包含这种被积函数的积分在整个 18 世纪中都经常出现. 例如 Euler 在他 1744 年关于变分法一书的附录里在有关弹性的权威性处理中得到

$$dy=\frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)dx}{\sqrt{a^4-(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}},$$

其中的常数对我们说来是无关紧要的. Euler 像他的前辈那样用级数的手段来得到物理的结果.

由上面那些例子所组成的一类积分叫椭圆积分,得名于求椭圆的弧长. 18 世纪的人们还不知道这个积分类,何况这种积分都不能用代数函数、圆函数、对数函数和指数函数积出来①.

关于椭圆积分的最初的研究不是大量地针对积分求值,而是针对着把更复杂的一些椭圆积分简化为在椭圆和双曲线求弧长中出现的那些积分. 其方法的根据出自当时占统治地位的几何观点,即认为表示椭圆和双曲线弧长的那些积分似乎是最简单的. 由于看出了微分方程

(7) $$f(x)dx=\pm f(y)dy$$

(这里$\int f(x)dx$ 是一个对数函数或反三角函数)有一个积分解是 x, y 的代数函数,这就展现了一个新的观点,即尽管不能找到 $f(x)dx$本身的代数的积分解,但却能找到两个这样的微分的和或差的代数积分解. John Bernoulli 提出了这样一个问题:除了对数和反三角函数的积分之外,其他的积分是否就不能保持这个性质

① Liouville 证明了这一点(*Jour. de l'Ecole Poly.*, 14,1833,124~193).

了呢①？他在 1698 年发现了一个偶然得到的然而却是最漂亮的结果，那就是立方抛物线（$y=x^3$）的二段弧的差是可积的. 然后，他提出求一些高阶抛物线、椭圆和双曲线弧长的更一般的问题，其中曲线弧的和或差等于一个直线量，他还断言形如 $a^m y^p = b^n x^q$，$m+p=n+q$ 的抛物线就是这样的曲线，把它们相加或相减就等于一条直线. 但是他没有给出证明.

业余数学家 Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano（1682—1766）从 1714 年开始研究这个问题②. 他考虑曲线

$$y=(2/m+2)x^{(m+2)/2}/a^{m/2}\ (m\text{ 为有理数}).$$

对这样的曲线倒不如直接去证明（见图 19.1）

$$\frac{m}{m+2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+(x/a)^m}}=\text{arc }PP_1-(P_1R_1-PR),$$

其中 x_0，x_1 分别是 P 与 P_1 的横坐标，PR 和 P_1R_1 分别是 P，P_1 点处曲线的切线. 同样

$$\frac{m}{m+2}\int_{z_0}^{z_1}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+(z/a)^m}}=\text{arc }QQ_1-(Q_1S_1-QS).$$

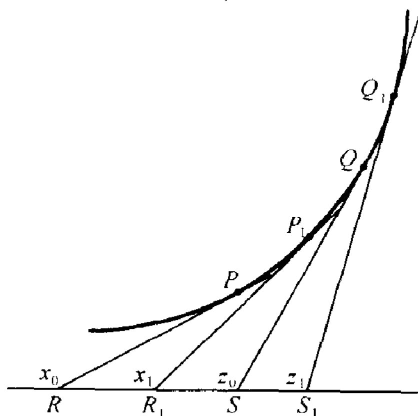


图 19.1

① *Acta Erud.*, Oct. 1698, 462 ff. = *Opera*, 1, 249～253.

② *Giornale dei Letterati d' Italia*, Vols. 19 ff.

因此,如 x 和 z 之间有关系:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+(x/a)^m}}-\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+(z/a)^m}}=0, \tag{8}$$

则两个定积分的差应为 0,这就有

$$\operatorname{arc} QQ_1-\operatorname{arc} PP_1=(Q_1S_1-QS)-(P_1R_1-PR). \tag{9}$$

当 $m=4$ 时(8)的解是

$$\frac{x}{a}\cdot\frac{z}{a}=1. \tag{10}$$

所以对 $m=4$,在曲线 $y=x^3/3a^2$ 上,端点的横坐标值 x, z 满足(10)式的两段弧长之差可用直线段来表示. Fagnano 还对(8)式在 $m=6$ 与 $m=3$ 的情形求出了积分.

Fagnano 进而证明了,在椭圆上如同在抛物线上一样,可以找出无穷多段弧,它们的差可以用代数式表示,虽则单个弧是不能求长的. 于是,在 1716 年他证明了任何两条椭圆弧的差是代数函数. 他有解析式

$$\frac{\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}\mathrm{d}x+\frac{\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}}\mathrm{d}z=0, \tag{11}$$

或更简洁地有

$$X\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}z=0,$$

上面两式中 h, l, f, g, x 与 z 满足条件

$$fhx^2z^2+flx^2+flz^2+gl=0. \tag{12}$$

Fagnano 证明了

$$\int X\mathrm{d}x+\int Z\mathrm{d}z=-\frac{hxz}{\sqrt{-fl}}. \tag{13}$$

上式的几何意义是:如果 $2a$ 是椭圆的短轴 FA 的长(见图 19.2), $CH=x$, $CE=z$, JH 是 H 点的纵坐标,而 GE 是 E 处的纵坐标,则

$$\operatorname{arc} JD+\operatorname{arc} DG=\frac{-hxz}{2a^2}+C. \tag{14}$$

(为了使(14)式与积分一致,令 p 为椭圆的参数(正焦弦),令 $p-2a=h$, $l=2a^3$, $f=-2a$, $g=2a^3$,则 z 为 $a\sqrt{2a^3-2ax^2}/\sqrt{2a^3+hx^2}$.)当 $x=0$,弧 JD 消失了,在(14)式中的代数项也消失了.由(12)式, $z=a$,因而 DG 弧变为 DA 弧,它正是 C 的值.于是可以说

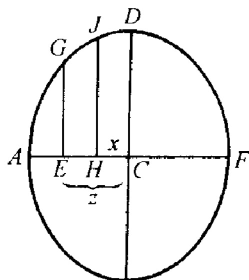


图 19.2

$$\text{arc } JD+\text{arc } GD=\frac{-hxz}{2a^2}+\text{arc } DA,$$

或

$$\text{arc } JD-\text{arc } GA=\frac{-hxz}{2a^2}.$$

由此工作[①]出发的一个结果仍叫 Fagnano 定理,它是在 1716 年得到的,定理说的是:令

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

是以 e 为偏心率的椭圆,并令 $P(x,\ y)$ 与 $P'(x',\ y')$ 是椭圆上两点(见图 19.3),它们的离心角分别为 ϕ 与 ϕ',ϕ 与 ϕ' 满足条件

$$\tan\phi\tan\phi'=\frac{b}{a}. \tag{15}$$

于是定理说

$$\text{arc } BP+\text{arc } BP'-\text{arc } BA=e^2xx'/a. \tag{16}$$

点 P 与 P' 可以重合(当满足(15)式时),若记 P 与 P' 重合的这点为 F(叫 Fagnano 点),他证明了

$$\text{arc } BF-\text{arc } AF=a-b. \tag{17}$$

① *Opera*, 2, 287～292.

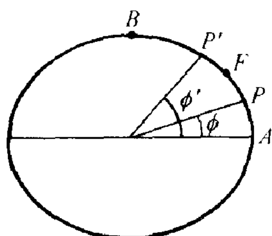


图 19.3

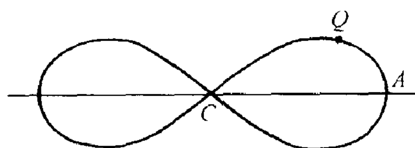


图 19.4

从 1714 年起 Fagnano 还致力于用椭圆和双曲线弧求双纽线弧长.

1717 和 1720 年,Fagnano 求了其他微分组合的积分. 例如他证明了:微分方程

(18) $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

有积分

(19) $$x=-\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}$$

或

(20) $$x^2+y^2+x^2y^2=1.$$

这个结果的一种说法是:表示双纽线(它的 $a=1$)弧长的两个积分之间存在一个代数关系,尽管其中每一个积分分开来看属于一类新的超越函数.

Fagnano 然后进一步建立了许多类似的关系,以得到关于双纽线的特殊结果[①]. 例如,他证明了,若

(21) $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{2dy}{\sqrt{1-y^4}},$$

则

(22) $$\frac{\sqrt{1-y^4}}{y\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}},$$

或解出 x,

① *Giornale dei Letterati d'Italia*, 30,1718,87 ff. = *Opera*, 2,304~313.

$$x = \frac{-1+2y^2+y^4}{1+2y-y^4}. \tag{23}$$

Fagnano由这样的结果指出怎样在双纽线($r^2 = a^2\cos 2\theta$)上找出其四分之一弧段的等分点;就是说,对某个n值,这些分点把图19.4中的弧CQA(双纽线的四分之一)n等分.他还指出,当给定一弧CS时,怎样去找CS的三等分点I.进而,他找出CQA上的点,使它们与C点的联线将CQA与水平轴CA之间的面积分成二、三、五部分;在给出了n等分此面积的弦后,他又找到了平分上述各部分的弦.

因此,Fagnano所作的已经超出了回答Bernoulli的问题,他证明了:代表对数函数和反三角函数的积分所具有的那些值得注意的代数性质,至少也为某些类椭圆积分所具有.

约在1750年,Euler注意了Fagnano在椭圆、双曲线和双纽线方面的工作,并开始了一系列他自己的研究.在《不可求长的曲线弧的比较之研究》①一文中,Euler在重复了Fagnano的某些工作后指出,在已经将双纽线的四分之一部分的面积n等分后,怎样将它$n+1$等分.然后,他指出,他自己和Fagnano的工作提供了积分的某些有用结果,对于方程(18),除了明显的积分(解)$x=y$外,又加上特解

$$x = -\sqrt{(1-y^2)/(1+y^2)}.$$

Euler在他的文章《论解微分方程$\frac{m\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}$》②中以Fagnano的结果为自己的出发点.Fagnano对他所考虑的大部分微分方程所得的积分都是特解,它们是代数函数,然而通解却很可能是超越函数.Euler决定寻找代数形式的通解,他从(18)出发而

---

① Novi Comm. Acad. Sci. Petrop., 6,1756/1757,58～84, pub. 1761 = Opera,(1),20,80～107.

② Novi Comm. Acad. Sci. Petrop., 6,1756/1757,37～57, pub. 1761 = Opera,(1),20,58～79.

希望得到

$$\frac{m\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{n\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}} \tag{24}$$

的通解. 这里 m/n 是有理数,而方程(24)表达了求弧长之比为 $m:n$ 的两段双纽线弧的问题. Euler 说:他通过尝试而相信,当 m/n 是有理数时,(24)有一个可以代数表达的通解.

从 Fagnano 的研究出发,可见特解(19)与(20)满足方程(18). (18)两边的积分是双纽线上的一段弧长,此双纽线的半轴为 1,横坐标为 x. 而解常微分方程(18)相当于求出两段等长的弧. Euler 指出了 $x=y$ 是(18)的另一特解. 通解应该是这样的:指定其任意常数的值,就得到每一个这样的特解. 由这些事实指引, Euler 求得(18)的通解是

$$x^2+y^2+c^2y^2x^2=c^2+2xy\sqrt{1-c^4} \tag{25}$$

或

$$x=\frac{y\sqrt{1-c^4}\pm c\sqrt{1-y^4}}{1+c^2y^2}, \tag{26}$$

其中 c 为任意常数. 当然,给出了(25)式,就不难验证它是(18)式的通解.

在(25)式中隐含的正是通常所谓的这些简单椭圆积分的 Euler 加法定理. 直接求微商就可以得到

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}+\int_0^c\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} \tag{27}$$

(其中 c 是常数),显然它是(18)式的一个通解. 因此,x, y 与 c 之间必有关系(25). 于是,加法定理说:如果(27)式对其中的椭圆积分成立,则积分上限 x 是另外两个积分的任意选择的上限 y 与 c 的代数对称函数,即(26). 我们将看到,加法定理适用于更一般的积分.

利用结果(25)和(27),可以更直接地证明:若

$$(28)\qquad \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = n\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

则 y 是 x 的代数函数. 这个结果叫做椭圆积分 $\int_0^x dx/\sqrt{1-x^4}$ 的 Euler 乘法定理. 由此,就导出方程(28)的通解,要点是:它是关于 x, y 和任意常数 c 的一个代数方程. Euler 指出怎样能得出通解,但没有明显地给出.

在 1756—1757 年的同一篇文章中,以及在同一杂志的卷 7 中①,Euler 着手处理了更一般的椭圆积分. 他说他由尝试法得到了下面的结果. 若微分

$$(29)\qquad \alpha+2\beta(x+y)+\gamma(x^2+y^2)+2\delta xy+2\varepsilon xy(x+y)+\zeta x^2y^2 = 0,$$

则可得下面形式的微分方程

$$(30)\qquad \frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0,$$

其中 X, Y 是两个系数相同的四次多项式,它的四个系数可借助于一个任意常数,用(29)式的五个系数表示出来. 因而(29)是(30)的通解,当(30)被指定为(18)时,(29)就变为(25). Euler 指出,有趣的是:即使 $dx/\sqrt{X}$的积分不能用圆函数或对数函数得到,但方程(30)仍被一个代数关系满足. 他于是将结果推广到

$$(31)\qquad \frac{m\,dx}{\sqrt{X}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{Y}},\ m/n\ 是有理数,$$

其中 X, Y 是具有同系数的四阶多项式. 在 Euler 的《积分学原理》② 中也有这个结果,在那里,Euler 用椭圆、双曲线和双纽线说明了结果的几何意义.

由这些结果,Euler 就能够进而得出现在称为第一类椭圆积分的加法定理. 考虑椭圆积分

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7,1758/1759,3~48, pub. 1761 = *Opera*, (1),20,153~200.

② Vol. 1. Sec. 2, Chap. 6 = *Opera*, (1),11,391~423.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(x)}}, \tag{32}$$

其中 $R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$. 于是加法定理说:方程

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} \tag{33}$$

有一个关于 x, y 的确定的代数方程的解,使得其中的 y 能用 x、相应的 $\sqrt{R(x)}$ 的值、任意常数 x_0 和 y_0 以及相应的 $\sqrt{R(x_0)}$ 和 $\sqrt{R(y_0)}$ 的值有理地表示出来. 又当 x 取任意值 x_0 时,y 取事先规定的任意值 y_0.

这个结果容易导出另一个可能更有启发性的定理. 如果两个形如

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \tag{34}$$

的椭圆积分之和或差等于第三个同样形式的椭圆积分,又如对三个积分根式中的系数及积分下限也全相同,则第三个积分的上限是另两积分的上限、公共的下限及 $\sqrt{R(x)}$ 在公共下限及两个上限处相应值的代数函数.

Euler 继续做下去. 正如 Fagnano 对于两个双纽线弧长之差的处理把 Euler 引向一般的第一类椭圆积分一样,Fagnano 关于两个椭圆弧之差的处理(见公式[11])把 Euler 引到了第二类积分的一个加法定理①. 他对于他的方法不能推广到开根次数高于二次或被开方式子高于四次的情况而表示遗憾. 他还看出他工作中的一个重大缺陷,那就是他未曾用一般的分析方法得到他的代数的通解,因此他的结果没有自然地与微积分的其他部分联系起来.

在椭圆积分方面权威性的工作是由 Adrien-Marie Legendre (1752—1833)作出的,他是军事学校的教授,曾任多届政府委员,后来成了多科工艺学校的学监,直到 1833 年逝世,他一直保持热

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7,1758/1759,3~48, pub. 1761 = *Opera*, (1),20,153~200 与 *Inst. Cal. Integ.*, 1, ¶645 = *Opera*, (1),11,¶645.

情而有规律的工作.他的名字长存于大量的各种各样的定理中,这是由于他解决了许多类型的问题.但是他的工作既无独创性也不像 Lagrange, Laplace 和 Monge 的那样深刻. Legendre 的工作引起许多重要理论的产生,但这只是在他的工作被更强有力的思想接收后才实现的. Legendre 恰恰名列于刚才提到的那三个同时代人物之后.

当1786年 Legendre 着手椭圆积分这个课题之际,Euler 的加法定理是椭圆积分理论的主要结果.40年内 Legendre 是仅有的一个在文献内加进有关椭圆积分的研究结果的人.关于这个课题,他贡献了两篇基本的文章①,然后写了《积分练习》(*Exercices de calcul intégral*, 3 vols, 1811, 1817, 1826),《椭圆函数研究》(*Traité des fonctions elliptiques*, 2 vols., 1825—1826)②,与三篇说明 Abel 与 Jacobi 在1829与1832年的工作的补充材料.像 Fagnano 的工作一样,Euler 的结果是与几何考虑联系在一起的,而 Legendre 则集中在分析方面.

Legendre 在他的《研究》中,主要成果是证明了:一般椭圆积分

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\mathrm{d}x \tag{35}$$

(其中 $P(x)$ 是 x 的任一有理函数,而 $R(x)$ 是通常一般的四次多项式)能化为三种类型:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-l^2x^2}}, \tag{36}$$

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-l^2x^2}}, \tag{37}$$

---

① *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1786, 616～643 与 644～683.

② 在这本书中"function"的用法被误解了.他研究椭圆积分,并时常是变上限的椭圆积分.这些当然是上限的函数.但现在所指的"椭圆函数"是由 Abel 与 Jacobi 在后来引入的.

$$(38)\qquad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-l^2x^2}}.$$

Legendre 把上面三类积分称为第一、二、三型椭圆积分.

他还证明了:经过进一步的变换这三个积分可化为以下三种形式:

$$(39)\qquad F(k,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},\quad 0<k<1,$$

$$(40)\qquad E(k,\phi)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi,\quad 0<k<1,$$

$$(41)\quad \pi(n,k,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{(1+n\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},\quad 0<k<1,$$

其中 n 是一个常数. 在这些形式中,易见从 $\phi=0$ 到 $\phi=\pi/2$ 的积分值与从 $\phi=\pi/2$ 到 $\phi=\pi$ 的积分值相同,积分顺序相反. $\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$ 的记号 $\Delta(k,\phi)$ 也是由 Legendre 引入的.

这些形式也可通过变数替换 $x=\sin\phi$ 转化为 Jacobi 形式:

$$(42)\qquad F(k,x)=\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

$$(43)\qquad E(k,x)=\int_0^{x}\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$(44)\quad \pi(n,k,x)=\int_0^{x}\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

量 k 叫做上面各椭圆积分的模. 如果积分限是 $\phi=\pi/2$ 或 $x=1$,则称此积分是完全的,否则称为不完全的.

Legendre 关于椭圆积分的工作是有许多功绩的. 他从他的前辈的工作中引出许多先前没有的推断,并组织了数学课题;但他没有增加任何基本思想,也没有达到 Abel 与 Jacobi(第 27 章第 6 节)的那种新的洞察力,后两位转化了这些椭圆积分,并从而构思了椭圆函数. Legendre 的确十分谦逊地还可能有点辛酸地开始去认识 Abel 和 Jacobi 的工作,并赞扬他们. 在以他 1825 年的著作的增补篇来阐述他们的新思想时,他清楚地认识到这个材料使他自

已在这方面所做的一切黯然失色.他忽略了他所处的时代的一项最伟大的发现.

5. 进一步的特殊函数

椭圆不定积分是一类新的超越函数.随着18世纪分析方面工作的发展,得到了更多的超越函数,其中最重要的是Γ函数.Γ函数是从插值理论与反微分这两个问题的研究中产生的. James Stirling (1692—1770), Daniel Bernoulli 和 Christian Goldbach (1690—1764)考虑了插值问题.问题提给了Euler,他在1729年10月13日给Goldbach的一封信中宣布了他的解答[①]. 1730年1月8日的第二封信引入了积分问题[②]. 1731年Euler在一篇文章"论级数……"[③]中发表了这两方面的结果.

Euler搞的插值问题是对非整数的n,给出$n!$的意义. Euler注意到

$$(45)\quad n! = \left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^n \frac{k}{k+n}.$$

如果将这无穷乘积中的公因子约去,上面的等式形式上看来是正确的.然而,这个$n!$的分析表达式却不像基本定义$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$那样,它对所有的$n$(除了$n$是负整数外)都有意义. Euler注意到对$n=1/2$,上式右端经过一些改写后,就产生Wallis无穷乘积

$$(46)\qquad \frac{\pi}{2} = \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\left(\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\right)\cdots$$

采用后来Legendre引入的记号$\Gamma(n+1)=n!$,Euler还证明了

---

① Fuss, *Correspondance*, 1,3~7.

② Fuss, *Correspondance*, 1,11~18.

③ *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5,1730/1731,36~57, pub. 1738 = *Opera*, (1),14,1~24.

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$，从而得到了 $\Gamma(3/2)$，$\Gamma(5/2)$等等.

Euler 曾用(45)作为他阶乘概念的推广. 事实上,这个概念今天常用一个等价形式来引进(Euler 也给出了这个形式),即

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m!(m+1)^n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}. \tag{47}$$

但是联系到 Wallis 的结果,就使 Euler 着手处理 Wallis 已考虑过的一个积分,即

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx, \tag{48}$$

其中 e 与 n 对 Euler 说来是任意的. Euler 利用二项式定理将 $(1-x)^n$ 展开来计算这个积分,得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^e(1-x)^n dx &= \frac{1}{e+1}-\frac{n}{1\cdot(e+2)}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2(e+3)}\\ &\quad -\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3(e+4)}+\cdots\end{aligned} \tag{49}$$

对 $n=0,1,2,3,\cdots$ 右边的和相应地为

$$\frac{1}{e+1},\ \frac{1}{(e+1)(e+2)},\ \frac{1\cdot 2}{(e+1)(e+2)(e+3)},\ \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)},\cdots \tag{50}$$

因此,对正整数 n,Euler 发现

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx=\frac{n!}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n+1)}. \tag{51}$$

这时,Euler 找到了一个对任意 n 都成立的 $n!$ 的表达式. 用我们今天不能完全接受的一系列变换得出

$$n!=\int_0^1(-\log x)^n dx. \tag{52}$$

这个积分对几乎任意一个 n 都有意义,叫做 Euler 第二积分,或按后来 Legendre 的叫法,称为伽玛函数,用 $\Gamma(n+1)$ 表示. [Gauss

令 $\pi(n)=\Gamma(n+1)$.]后来,Euler 于 1781 年(1794 年发表)给出了它现在的形式,那是在(52)中令 $t=-\log x$ 而得到的:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx. \tag{53}$$

Legendre 把积分(48)叫做 Euler 第一积分. 这个积分变成 β 函数的标准化形式:

$$B(m,\ n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx. \tag{54}$$

Euler 发现了这两个积分之间的关系①,即

$$B(m,\ n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Legendre 在他的《积分练习》中对 Euler 积分作了深入的研究,并获得了倍量公式:

$$\Gamma(2x)=(2\pi)^{-1/2}2^{2x-(1/2)}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right). \tag{55}$$

Gauss 在他关于超几何函数的著作②中研究了 Γ 函数,并将 Legendre的结果推广成所谓叠乘公式:

$$\Gamma(nx)=(2\pi)^{(1-n)/2}n^{nx-(1/2)}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\times\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right). \tag{56}$$

6. 多元函数微积分

两个和三个变量的函数的微积分在这个世纪的初期就已出现了. 这里我们将只略述一些细节.

虽则,Newton 从 x 与 y 的多项式方程(即 $f(x,\ y)=0$) 导出

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 16,1771,91～139, pub. 1772 = *Opera*, (1),17,316～357.

② *Comm. Soc. Gott.* II, 1813 = *Werke*, 3,123～162,p. 149(部分).

了我们今天由 f 对 x 或 y 取偏导数而得到的表达式，但是，这个工作未曾发表. James Bernoulli 在他关于等周问题的著作中也用了偏导数，同样 Nicholas Bernoulli(1687—1759)在 1720 年《教师学报》的一篇关于正交轨线的文章中也用了偏导数. 然而创造偏导数理论的是 Alexis Fontaine des Bertins(1705—1771), Euler, Clairaut 与 d'Alembert.

通常的导数与偏导数的区别在一开始并未被人们明确地认识，因而对两者都用同样的记号 d 表示. 物理意义要求人们在多个自变量的函数中，考虑只有某一个自变量变化的导数.

Clairaut① 得到了 $dz = p dx + q dy$ 是恰当微分的条件，其中 p, q 是 x, y 的函数. 所谓恰当微分是指它可由一个函数 $z = f(x, y)$ 作微分 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ 而得到. Clairaut 的结果是：$p dx + q dy$ 是恰当微分$\left(\text{即存在一个函数 } f \text{ 使 } \frac{\partial f}{\partial x} = p, \frac{\partial f}{\partial y} = q\right)$当且仅当 $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$.

两个或多个变量的函数的偏导数研究的主要动力来自早期偏微分方程方面的工作. 因而，偏导数的演算是由 Euler 研究流体力学问题的一系列文章提供的. 他在 1734 年的一篇文章中②证明，若 $z = f(x, y)$，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

在 1748 年到 1766 年写的其他文章中，他处理了变量替换、偏导数的反演和函数行列式. D'Alembert 在 1744 与 1745 年的动力学著作中推广了偏导数的演算.

多重积分实际上已含于 Newton 的工作中，他在《原理》中讨

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1739, 425～436 与 1740, 293～323.

② *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 174～193, pub. 1740 = *Opera*, (1), 22, 36～56.

论球与球壳作用于质点上的万有引力时就涉及到. 然而, Newton 用的是几何论述. 在18世纪, Newton 的工作被人以分析形式加以考虑并推广. 这个世纪的上半叶, 重积分出现了并被用来表示 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f(x, y)$ 的解. 例如, 它也用来确定一个薄片作用在一个质点上的万有引力. 这样, 厚度为 δc 的椭圆薄片作用在椭圆中心正上方 c 个单位处一个质点上的引力是积分

$$\delta c \iint \frac{c \mathrm{d} x \mathrm{d} y}{\left(c^2+x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

的常数倍, 其中积分区域是由 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ 围成的椭圆. 这个积分由 Euler 在1738年用累次积分[①]算出. 他先对 y 积分, 然后将新的被积函数展成 x 的无穷级数.

1770年左右, Euler 对由弧围成的有界区域上的二重定积分确实已有了清楚的概念. 他给出了用累次积分计算这种积分的程序[②]. Lagrange 在他关于旋转椭球的引力的著作中[③]用三重积分表示引力. 他在发现用直角坐标来计算很困难后, 转用球坐标. 他引入

$$x=a+r\sin\phi\cos\theta,$$
$$y=b+r\sin\phi\sin\theta,$$
$$z=c+r\cos\phi,$$

其中 a, b, c 是新原点的坐标, θ 是经度角, ϕ 是纬度角, 且 $0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 这个积分变换的实质是用 $r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r$ 代替 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 由此 Lagrange 开始了多重积分变换的课题. 其实 Laplace 也几乎同时作出了球坐标变换[④].

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1738, 102～115, pub. 1747 = *Opera*, (2), 6, 175～188.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 14, 1769, 72～103, pub. 1770 = *Opera*, (1), 17, 289～315.

③ *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773, 121～148, pub. 1775 = *Œuvres*, 3, 619～658.

④ *Mém. des sav. étrangers*, 1772, 536～544, pub. 1776 = *Œuvres*, 8, 369～477.

7. 在微积分中提供严密性的尝试

随着微积分的概念与技巧的扩展，人们努力去补充被遗漏的基础. 在 Newton 和 Leibniz 不成功地企图去解释概念并证明他们的程序是正确的之后，一些微积分方面的书出现了. 它们试图澄清混乱，但实际上却更加混乱.

Newton 探讨微积分的方法比 Leibniz 的方法容易严密化，虽则后者的方法更富于成果，更便于应用. 英国人想，他们如果把 Newton 和 Leibniz 的方法与 Euclid 几何连结起来，就能使两者都保证严密. 但是他们将 Newton 的瞬(moments，即他的不可分增量)和他处理连续变量时用的流数混淆了. 追随 Leibniz 的欧洲大陆上的人们用微分进行计算，并试图把这个概念严密化. 微分有时被当作无穷小量，即非零的但又无任何有限大小的量，有时又被当作零.

Brook Taylor(1685—1731)是 1711 年到 1718 年的皇家学会秘书，在他的《增量法及其逆》(*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, 1715)中，他力图搞清微积分的思想，但他把自己局限于代数函数与代数微分方程. 他以为他总能只与有限增量打交道，但在增量过渡到流数时，他就糊涂了. 正当英国学者试图将微积分和几何或速度的物理概念联结起来的时候，Taylor 的阐述是建立在我们叫做有限差分的基础上的，因为它本质上是算术的，所以得不到许多支持者.

从 Thomas Simpson(1710—1761)的《有关流数的一篇新论文》(*A New Treatise on Fluxions*, 1737)一文中，也可以看到 18 世纪致力于严密性的工作是含糊不清的，也是不成功的. Simpson 在一些预备定义之后，这样定义流数："一个流动的量，按它在任何一个位置或瞬间所产生的速率(从该位置或瞬间起持续不变)，在

一段给定的时间内,所均匀增长的数量称为该流动量在该位置或瞬间的流数."用我们的话说,Simpson是用$(dy/dt)\Delta t$来定义导数.其他一些作者放弃了这种想法.法国数学家Michel Rolle在一个地方告诫说,微积分是巧妙的谬论的汇集.

18世纪仍然表明有对微积分的新攻击.其中最强的攻击来自George Berkeley主教(1685—1753),他害怕机械论和决定论对宗教日益增长的威胁.1734年,他发表了《分析学者,或致一个不信教的数学家.其中审查现代分析的对象、原则与推断是否比之宗教的神秘与信条,构思更为清楚,或推理更为明显》(*The Analyst, Or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. Wherein It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith*)."先除掉你自己眼睛里的障碍,你才能看得清去拨掉你兄弟眼中的灰尘."("不信教的数学家"指Edmond Halley.)①

Berkeley正确地指出了那时数学家们是归纳地而非演绎地推进,他们对自己的每一步既没有给出逻辑,也没有说明理由.Berkeley批判了Newton的许多论点,例如:在《求曲边形的面积》一文中,Newton说他避免了无穷小,他给x以增量o,展开$(x+o)^n$,减去x^n,再除以o,求出x^n的增量与x的增量之比,然后扔掉含o的项,从而得到x^n的流数.Berkeley说Newton首先给x一个增量,然后又让它是零,这违背了背反律,而且所得的流数实际上是0/0.Berkeley还攻击l'Hospital和其他欧洲学者提出的微分法.Berkeley说微分之比应该决定割线而不是决定切线;忽略了高级无穷小才消除了误差.因此"依靠双重错误你得到了虽然不科学却是正确的结果",这是因为错误互相抵偿的缘故.他还挑中二阶微分$d(dx)$作文章,因为$d(dx)$是dx的微分,而dx本身是一个很

① George Berkeley: *The Works*, G. Bell and Sons, 1898, Vol. 3,1~51.

难识别的量. 他说:"在每一门其他科学中,人们用他们的原理证明他们的结论,而不是用结论来证明他们的原理."

至于导数被当作 y 与 x 消失了的增量之比,即 dy 与 dx 之比,Berkeley 说它们"既不是有限量也不是无穷小量,但又不是无."这些变化率只不过是"消失了的量的鬼魂. 当然……我想,能消化得了二阶或三阶流数的人,是不会吞食了神学论点就要呕吐的."他下结论说,流数的原理并不比基督教的更清楚. 他否定现代分析的对象、原理和推理比宗教的神秘和信仰的论点更为构思清楚,推理明显.

James Jurin(1684—1750)对《分析学者》作了回击. 1734 年他发表了《几何学,非不信教的朋友》(*Geometry, No Friend to Infidelity*). 在此文中他坚持认为流数对精通几何的人说来是清楚的. 然后他徒劳地试图解释 Newton 的瞬与流数. 例如 Jurin 将变量的极限定义为"被变量连续地逼近的某确定的量",而且可逼近得比任何给定的差更近. 然而,他又加上一句:"但永不超出它."他将这个定义应用于变量之比(差商). Berkeley 的使人无言以对的回击,名叫《捍卫数学中的自由思想》(*A Defense of Freethinking in Mathematics*, 1735)[①]的文章指出;Jurin 是在捍卫他所不了解的东西. Jurin 作了反击,但并没有把事情搞清楚.

而后,Benjamin Robins(1707—1751)以他的几篇专论和一本书:《论 Isaac Newton 爵士的流数法以及最初比与最终比方法的本质与可靠性》(*A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Method of Fluxions and of Prime and Ultimate Ratics*, 1735)参加争论. Robins 忽视了 Newton 的第一篇文章中的瞬,而强调流数以及最初比和最终比. 例如他这样定义极限:"当一个变量能以任意接近程度逼近一最终的量(虽然永不能绝对等于它),我们定义这个最终的量为极限."他认为流数是一

---

① George Berkeley: *The Works*, G. Bell and Sons, 1898, Vol. 3,53~89.

个正确的想法,而最初比和最终比仅仅是一种解释.尽管他是用变量逼近极限来作解释的,但 Robins 补充说流数法的建立并不求助于极限.他不承认无穷小.

为了回击 Berkeley,Colin Maclaurin(1698—1746)在他的《流数论》(*Treatise of Fluxions*, 1742)中,企图建立微积分的严密性.这是一个值得赞扬的、却并不正确的努力.像 Newton 一样,Maclaurin 喜爱几何,因而他试图根据希腊几何和穷竭法(特别是 Archimedes 的穷竭法)建立流数学说.他希望这样可以避开极限概念.他的本领是熟练地使用几何,所以他常劝别人用几何而忽视分析.

欧洲大陆上的数学家更多地依靠代数表达式的形式演算,而不是几何.这种方法的最重要代表是 Euler,他拒绝把几何作为微积分的基础,并纯粹形式地研究函数,即从它们的代数(分析)表达式来论证.

他拒绝无穷小的概念,这里所谓的无穷小是指非零而又小于任何指定大小的量.在他 1755 年的《原理》中,他论证道[①]:

> 毫无疑问,任何一个量可减小到完全消失得无影无踪的程度.但是,一个无穷小量无非是一个正在消失的量,因而它本身就等于 0.这与无穷小的定义也是协调的,按照无穷小的定义,它应小于任一指定的量;它无疑应当就是无;因为除非它等于 0,否则总能给它指定一个和它相等的量,而这是与假设矛盾的.

由于 Euler 排除了微分,他就必须解释对他说来是 0/0 的 dy/dx 怎么能等于一个确定的数.对此,他像下面这样做:因为对任何数 n,有 $n \cdot 0 = 0$,所以 $n = 0/0$.导数正是确定 0/0 的一个方便的途径.为了证明在有 dx 出现时可以丢掉 $(dx)^2$, Euler 说 $(dx)^2$

① *Opera*, (1),10,69.

在 dx 之前消失，所以 $dx+(dx)^2$ 与 dx 之比应为 1. 他确实承认∞是一个数，例如他认为和 $1+2+3+\cdots$ 是一个数. 他也区分∞的阶. 例如 $a/0=\infty$，而 $a/(dx)^2$ 是二阶无穷大，等等.

Euler 进而得到 $y=x^2$ 的导数. 他给 x 以增量 ω，则 y 的增量就是 $\eta=2x\omega+\omega^2$，而比 η/ω 就是 $2x+\omega$. 然后他说，当较小的 ω 被舍去，这个比值就趋近 $2x$. 然而，他强调说微分 η,ω 是绝对的 0，由它们只能知道它们相互的比值最终化为一个有限值，此外推不出任何其他东西. 这样，Euler 不折不扣地接受了如下的说法：存在这样的量，它们本身是绝对的 0，而它们的比值是有限数. 在《原理》第 3 章中，Euler 说了这个性质的更多"道理"，他在那里鼓励读者说：在导数中并没有隐藏通常想象的那么大的神秘性，而那种神秘性使许多人在心目中怀疑微积分.

作为 Euler 推理的另一个例子，我们看一下他在《原理》(1755)第 180 节中关于 $y=\log x$ 的微分的推导. 用 $x+dx$ 代替 x 得

$$dy=\log(x+dx)-\log x=\log\left(1+\frac{dx}{x}\right).$$

这里，他联想他的《引论》(1748)第一卷第 7 章中的结果：

$$\log_e(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots \tag{57}$$

以 dx/x 代 z 得：

$$dy=\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}-\cdots$$

由于第一项后各项均消失了，我们有

$$d(\log x)=\frac{dx}{x}.$$

我们应该记住 Euler 的书是他那时候的标准课本. Euler 形式化方法(formalistic approach)的真正贡献是把微积分从几何解放出来，而使它建立在算术和代数的基础上. 这一步至少为基于实数系统的微积分的根本论证开辟了道路.

Lagrange 在 1772 年的一篇文章①以及在《解析函数论》②中作了重建微积分基础的最雄心勃勃的尝试. 他的书的小标题暴露了他的无知. 这个小标题是:"包含着微分学的主要定理,不用无穷小,或正在消失的量,或极限与流数等概念,而归结为有限量的代数分析艺术."

Lagrange 批评 Newton 的方法时指出:关于弦与弧的极限比, Newton 认为弦与弧不是在它们消失前或消失后相等,而是当它们消失时相等. 正如 Lagrange 正确地指出的:"此方法有很大不便,即它把所考虑的量在失却其为量的状态下,仍看做是量;因为虽则对两个量,只要它们还保持有限,就总可以适当地设想它们的比,但是,当它们一旦同时都变为无时,它们的比在我们的头脑里就不再有清楚而确切的想法了."他说,Maclaurin 的《流数论》表明要证明流数法是何等困难. 他对 Leibniz 和 Bernoulli 的小零(即无穷小)及 Euler 的绝对零同样不满意,他说:所有这些,"虽然在现实中是对的,但作为一门科学的基础仍不够清楚,因为科学的确实性应基于它自身的证据."

Lagrange 想给微积分提供古人论证的全部严密性,并且他提出要把微积分归结为代数,来做到这一点. 他所指的代数,正如我们前面所提到的,包括作为多项式推广的无穷级数. 事实上,对 Lagrange 来说,函数论只是与函数的导数有关的代数的一部分. Lagrange 特别提倡使用幂级数. 他以适合于他的谦卑态度指出,Newton 没有想到这个方法是很奇怪的.

他当时希望使用这一事实:任何一个函数 $f(x)$ 能表成这样:

$$f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+rh^3+sh^4+\cdots \tag{58}$$

其中系数 $p, q, r, \cdots$ 含 x,但与 h 无关. 然而,他希望在进一步研究之前确认这样的幂级数展开总是可能的. 他说,当然,这可以通过任

---

① *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1772, pub. 1774 = *Œuvres*, 3, 441~476.

② 1797; 2nd ed., 1813 = *Œuvres*, 9.

何多个熟悉的例子来说明. 但他也的确承认有例外的情况. Lagrange 想到的例外情况有:$f(x)$的某些导数可变为无穷,或者函数与导数都变为无穷. 这些例外只发生在一些孤立点上,因此 Lagrange 不把它们计算在内. 他以类似的骑士风度来处理另一个困难. Lagrange 和 Euler 都毫无疑问地接受这样一点:将函数展开成 h 的整数幂或分数幂的级数肯定是可能的,但 Lagrange 希望排除对分数幂的需要,他相信只有在 $f(x)$中含根式时才会出现分数幂,但他又把这种情况当作例外而不去理它,因此他就立即处理(58)式.

Lagrange 用一个有点累赘、但却是纯形式的论据断定:正如能从 $f(x)$得到 p 一样,我们可以从 p 得到 $2q$,并对(58)的其他系数 r, s, …也可得到类似结论. 因此如用 $f'(x)$表示 p, 以 $f''(x)$表示从 $f'(x)$导出的函数(如同从 $f(x)$导出 $f'(x)$那样),则

$$p = f'(x),\ q = \frac{1}{2!}f''(x),\ r = \frac{1}{3!}f'''(x),\ \cdots$$

因此(58)就给出

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

这时,Lagrange 得出这样的结论:最后这个"表达式具有优越性,它清楚地显示出各项之间的相互依赖关系. 特别是,只要知道怎样形成第一个导函数,就可以照样形成级数中的其他导函数."稍后,他又补充道:"只要有了微分学的初步知识,就会明白这些导函数正是 dy/dx, d^2y/dx^2, …"

Lagrange 还指出怎样由 $f(x)$导出 p 或 $f'(x)$. 在那里,他用(58)式,并忽略第二项以后的各项,得 $f(x+h) - f(x) = ph$. 他将两边同除以 h,得出 $p = f'(x)$.

实际上,Lagrange 关于函数可展成幂级数的假定是一个系统性的弱点. 现在知道的关于这种可展性的各种判据都涉及到各阶导数的存在性. 但导数的存在性正是 Lagrange 想要避免的. 他为幂级数

辩护的论据只是使函数能否展开的问题更糊涂. 即使在函数可以展成级数时,也只有能得到第一个导数[即 $f'(x)$]后,才能用 Lagrange 所说的方法,而这里 Lagrange 所作的正是他前人比较粗糙的东西的重复. 最后,实际上并未讨论级数(58)的收敛问题. 他倒的确指出了:当 h 充分小时,保留的最后一项比舍去的各项要大. 他在这本书里还给出了 Taylor 展开余项的 Lagrange 形式(第20章第7节),但是它对上面的展开法不起作用. 尽管有这些弱点,Lagrange 探讨微积分的方法在相当长一段时期中受到很高的赞赏. 后来,它被抛弃了.

Lagrange 相信他已省却了极限概念. 他确实承认[①]微积分可以在极限理论的基础上建立起来,但是他说,这种必须使用的抽象推理与分析精神无关. 尽管他的方法不妥,但他确实像 Euler 那样,为将分析的基础脱离几何与力学作出了贡献;而且在这方面,他的影响是决定性的. 虽则这种分离不是教学法所期望的,因为它阻碍直观的了解,但是它使逻辑的分析必须自立这一点变得很清楚.

近18世纪末,一个数学家、战士和行政管理人员 Lazare N. M. Carnot(1753—1823)写了一本通俗的畅销书《关于无穷小分析的形而上学的思考》(*Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797),在这本书里,他想使微积分精确化. 他试图证明逻辑是以穷竭法为依据的,而处理微积分的全部方法只不过是简化或捷径,把它们建立在穷竭法的基础上,就能够给它们提供逻辑. 累加推敲之后,他像 Berkeley 一样得出这样的结论:微积分的通常论证中的错误是互相抵偿的.

在使微积分严密化的大量努力中,有少数几个是路子对头的,其中最有名的是 d'Alembert 的和再早一点的 Wallis 的工作. D'Alembert 相信 Newton 有正确的想法,而他自己所作的只是解释

① *Œuvres*, 1,325.

Newton 的意思,在著名的《科学、艺术和工艺的百科全书》(*Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts, et des Métiers*, 1751—1780)中,d'Alembert 在"微分"这个条目下写道:"Newton 从未把微分学当作无穷小量的计算,而是作为最初比和最终比的方法,即求出这些比的极限的一种方法."但是 d'Alembert 把微分定义为"无穷小量或者至少小于任何给定值的量."他是相信 Leibniz 的微积分能建立在微分三规则之上的;然而他更喜欢把导数看成极限.在关于极限的使用的研究中,他也像 Euler 那样论证 0/0 可以等于任何量.

他在另一篇论文中说道:"极限,极限论是微积分的真正抽象……它决不是微分学中的无穷小量的一个问题:它独特地是有限量的极限问题.这样,无穷大和无穷小量,它们相互间较大、较小的空谈,对微分学说来是全然无用的."无穷小仅仅是一种说法,用以避免冗长的极限术语的描述.事实上,d'Alembert 给出了极限的正确定义的一个很好的近似:一个变量趋近一个固定量,趋近的程度小于任何给定量,虽则这里他也讲到变量永远达不到极限.但他没有结合并利用他的基本正确思想作出微积分的形式阐述.

他在许多观点上仍然是含糊的,例如他把曲线的切线定义为当割线与曲线的两个交点变成一个的时候割线的极限.这种含糊性,特别是他叙述极限概念时的含糊性,使许多人怀疑一个变量能否达到它的极限.由于没有明白而正确的表达,d'Alembert 告诫学习微积分的学生们:"坚持,你就会有信心."

Sylvestre-François Lacroix(1765—1843)在他的著作《微积分学教程》(*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*)的第二版(1810—1819)中,对两个量的比,当其中每一个都趋近 0 时,能趋近于一个作为极限的确定值这个问题有较明确的思想.他给出了比 $ax/(ax+x^2)$,并指出这个比与 $a/(a+x)$ 相同,而 $a/(a+x)$ 当 x 趋近于 0 时趋近于 1.进而,他指出 1 是当 x 甚至通过负值趋于

0 时的极限. 然而,他也说当分子与分母是 0 时的极限的比值这样的话,甚至还用 0/0 这个记号. 他确实引进用导数表示的函数 $y=f(x)$ 的微分 dy,即 $dy=f'(x)dx$. 因此,若 $y=ax^3$,则 $dy=3ax^2dx$. 他第一次使用"微分系数"这个术语表示导数,于是 $3ax^2$ 就是微分系数.

18 世纪的几乎每一个数学家都对微积分的逻辑作了一些努力,或至少是讲了一些这方面的话,虽则有一两个路子对头,但所有的努力都没有结果. 区别很大的数和无穷大"数"是很困难的. 当时,人们认为这样的结论似乎是很清楚的:对每一个 n 成立的定理,必须对 n 是无穷大也成立. 同样,差商可以被导数代替,有限项的和与积分也是很难区分的. 那时,数学家们在有限同无限情形之间随意通行. 1755 年,Euler 在《原理》中区分了函数的增量与该函数的微分,也区分了和与积分,但这种区分并未立即被大家采用. 18 世纪所有这方面的努力可以用 Voltaire 关于微积分的描述来概括,他把微积分描述为"计算和度量一个其存在性是不可思议的事物的艺术."

在几乎完全缺乏基础的情况下,数学家们怎么可能对各种函数进行演算呢? 除了大大地依靠物理和直观的意义之外,他们思想上的确还有一个模型——较简单的代数函数,如多项式与有理函数等. 他们把他们在这些简单而具体的函数中发现的性质推广到所有的函数上去. 这些性质诸如:连续性、孤立的无穷大和不连续点的存在性,可展成幂级数,以及导数和积分的存在性等等. 在很大程度上,由于研究振动弦,他们被迫将函数概念(像 Euler 那样)推广到任何随意画出的曲线(例如 Euler 的混合函数、不规则函数或不连续函数),这时,他们不能再以较简单的函数为前导了. 而当对数函数必须推广到负数与复数时,他们实际上是在完全没有可靠基础的情况下工作的,这正是为什么那时对这类事情的争论很普遍的原因. 直到 19 世纪前,微积分的严密化一直未完成.

参考书目

Bernoulli, James: *Opera*, 2 vols., 1744, reprinted by Birkhauser, 1968.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, reprinted by Georg Olms, 1968.

Boyer, Carl B.: *The Concepts of the Calculus*, Dover (reprint), 1949, Chap. 4.

Brill, A. & M. Nother: "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer and neuerer Zeit", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 3, 1892/1893, 107～566.

Cajori, Florian: "History of the Exponential and Logarithmic Concepts", *Amer. Math. Monthly*, 20, 1913, 5～14, 35～47, 75～84, 107～117, 148～151, 173～182, 205～210.

Cajori, Florian: *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Open Court, 1919.

Cajori, Florian: "The History of Notations of the Calculus", *Annals of Math.*, (2), 25, 1923, 1～46.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924, Vols. 3 and 4, relevant sections.

Davis, Philip J.: "Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function", *Amer. Math. Monthly*, 66, 1959, 849～869.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, B. G. Teubner and Orell Füssli, 1911—; see references to specific volumes in the chapter.

Fagnano, Giulio Carlo: *Opera matematiche*, 3 vols., Albrighi Segati, 1911.

Fuss, Paul H. von: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, 2 vols., 1843, Johnson Reprint Corp., 1967.

Hofmann, Joseph E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal mathematik", *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 61～171, 1956; also published separately by Institut de Mathématiques, Genève, 1957.

Mittag-Leffler, G.: "An Introduction to the Theory of Elliptic Functions", *Annals of Math.*, (2), 24, 1922—1923, 271～351.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, A. Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, pp. 110～380.

Pierpont, James: "Mathematical Rigor, Past and Present", *Amer. Math. Soc. Bulletin*, 34, 1928, 23～53.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200—1800*, Harvard University Press, 1969, pp. 333～338, 341～351, 374～391.

第 20 章

无穷级数

读读 Euler,读读 Euler,他是我们大家的老师.

P. S. Laplace

1. 引　言

在 18 世纪,甚至到今天,无穷级数一直被认为是微积分的一个不可缺少的部分. 实际上,Newton 研究级数是和他的流数法分不开的,因为对于稍为复杂一些的代数函数和超越函数,只有把它们展成无穷级数并进行逐项微分或积分,他才能处理它们. Leibniz 在他 1684 和 1686 年初期发表的一些文章中,也强调了"一般的或不定的方程". Bernoulli 家族、Euler 以及他们同时代的人,都大量依靠级数的使用. 数学家们只是逐渐地,正如在上一章所指出的那样,学会用有尽的形式(也就是简单的分析表达式)来研究初等函数. 虽然如此,级数仍然是某些函数的唯一表达式,而且是计算初等超越函数的最有效的工具.

随着研究领域的逐渐扩展,数学家们运用无穷级数所取得的成功变得越来越多. 新概念中存在的困难,起码在一段时间里,是没有认识到的. 级数只是无穷多项式,并且也就当作多项式来处理. 此外,正如 Euler 和 Lagrange 所相信的,每个函数都能表为级数,似乎是显然的事.

2. 无穷级数的早期工作

无穷级数在数学中是出现得很早的,出现的形式通常是公比小于 1 的无穷几何级数. Aristotle① 就已认识到这种级数有和. 无穷级数还散见在中世纪后期数学家的著作中,被用来计算变速运动的物体所走过的路程. 曾经研究过一些这类级数的 Oresme,在他的小册子《欧几里得几何问题》(*Quæstiones Super Geometriam Euclidis*,约 1360 年)中,甚至证明了调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

是发散的,他用的正是今天的方法,就是代之以一个每项都较小的级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

并看出后者是发散的,因为我们能够得到要多少就有多少的括号,其中每一个的值都等于 1/2. 然而,人们不应由此断言,Oresme 或一般数学家们,已经开始识别收敛级数与发散级数.

Vieta 在他的《各种各样的解答》(*Varia Responsa*, 1593, *Opera*, 347～435)中给出了一个无穷几何级数的求和公式. 他从 Euclid 的《原本》知道,n 项和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 可用

$$\frac{s_n-a_n}{s_n-a_1}=\frac{a_1}{a_2}$$

给出. 这样,如果 $\frac{a_1}{a_2}>1$,则当 n 变为无穷时 a_n 趋向于 0,所以

$$s_\infty=\frac{a_1^2}{a_1-a_2}.$$

17 世纪中叶,圣文森特的 Gregory 在他的《几何著作》

① *Physica*, Book III, Chap. 6, 206b, 3～33.

(1647)中,证明了 Achilles 追龟的悖论可以用无穷几何级数的求和来解决. 和是有限的这件事表明, Achilles 可以在一个确定的时间与地点追上乌龟. Gregory 第一次明白指出了无穷级数表示一个数,即级数的和. 他称这个数为级数的极限. 他说:"过程的结束就是级数的终点,即使延续到无穷,过程也永远达不到这个终点,但是它能够趋向于它并接近到任何给定的程度". 他还有许多其他的不够准确和清楚的论述,但他对这个课题作出了贡献并影响了很多学生.

Mercator 和 Newton(第 17 章第 2 节)发现了级数

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

人们观察到,在 $x=2$ 时级数的值为无穷,而根据左边,它却应该取 log 3. Wallis 注意到了这个困难,但不能解释它. Newton 得到了许多其他表示代数函数和超越函数的级数. 例如,在 1666 年,为了得到 $\arcsin x$ 的级数,他用了这样的事实(图 20.1),面积 $OBC=\frac{1}{2}\arcsin x$,因此 $\frac{1}{2}\arcsin x=\int_0^x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$. 他把右边展开为级数,逐项积分,并项,得到了结果. 他还得到了 $\arctan x$ 的级数. 在 1669 年的《分析学》中,他给出了 $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$ 和 e^x 的级数. 这些级数中的某些是用从其他级数求逆的办法得到的,即把自变量作为应变量解出来. 他用的方法是粗糙的和归纳的. 虽然如此, Newton 对自己推导出了如此之多的级数还是感到莫大的欣慰.

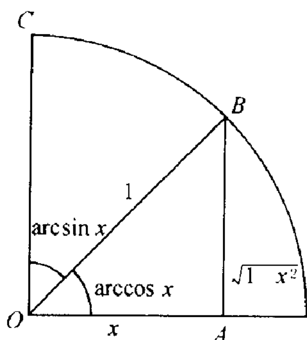


图 20.1

Collins 在 1669 年收到了 Newton 的《分析学》,并于 1670 年 12 月 24 日把级数方面的结果告诉了 James Gregory. Gregory 在 1671 年 2 月 15 日答复说[Turnbull,《通信》(*Correspondence*), 1,

52～58 和 61～64]，他得到了其他一些级数，其中包括

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots$$

他如何推导出这些级数是无从知道的. Leibniz 也在 1673 年大概独立地得到了 $\sin x$、$\cos x$ 和 $\arctan x$ 的级数. 在微积分早期阶段，研究超越函数时用它们的级数来处理是所用方法中最富有成效的，也是 Newton 和 Leibniz 微积分工作的一个重要部分.

这些人和其他使用分数指数与负指数的二项式定理的人，为了得到很多级数，不仅不顾由于运用这些级数而产生的问题，甚至也没有证明二项式定理. 他们认为级数等于展成这个级数的函数是没有问题的.

James Bernoulli 在 1702 年[①]推导出了 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的级数. 用的方法是，他先把 $\sin n\alpha$ 按 $\sin\alpha$ 展开，然后让 α 趋向于 0 而 n 变成无穷，使得 $n\alpha$ 趋向于 x 而同时 $n\sin\alpha$ 即 $\frac{n\alpha\sin\alpha}{\alpha}$ 也趋向于 x. Wallis 在他的《代数》(1693)的拉丁文版中指出，Newton 在 1676 年再次给出了这些级数；Bernoulli 看到了这句话，但未申明 Newton 的优先权；此外，de Moivre 在 1698 年的《哲学汇刊》[②]中已给出了 Newton 结果的证明；虽然 Bernoulli 在其他工作中用过并引证过这个杂志，但他并没有表明他是通过这渠道注意到 Newton 的工作的.

除了用于微积分之外，级数的主要应用之一在于计算一些特殊的量，如 π 和 e，以及对数函数和三角函数. Newton，Leibniz，James Gregory，Cotes，Euler 和其他许多人，都是为了这个目的而对级数感兴趣的. 然而，有些级数收敛得这样慢，对于计算来说几

① *Opera*, 2, 921～929.

② Vol. 20, 190～193.

乎不能使用. 例如,Leibniz 在 1674 年得到了有名的结果①

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

但为了计算 π,即使是达到 Archimedes 已经得到的精确度,也得算 100 000 项. 同样, $\log(1+x)$ 的级数收敛也十分慢,必须取很多项才能达到小数点后几位的精确度. 有各种方法把这个级数变成收敛比较快的级数. 例如,James Gregory(《几何练习》,1668)得到了

$$\frac{1}{2}\log\frac{(1+z)}{(1-z)}=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+\cdots$$

并证明了它在计算对数中更有用. 把一个级数变成另一个收敛比较快的级数的问题,在整个 18 世纪有许多人继续研究过. 有一个这样的变换,是属于 Euler 的,我们将在第 4 节中给出.

级数还有另一应用,是由 Newton 开始的. 给定一个隐函数 $f(x, y)=0$, 人们希望把 y 表为 x 的显函数. 这样的显函数可能有好几个,例如在 $x^2+y^2-1=0$ 这个最简单的情形,显然就是这样,它有两个通过点(1, 0)的解 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. 在这简单的情形里,两个解都能够表示为有尽的分析表达式. 但是,一般说来,y 的每一个表达式都必须表为 x 的无穷级数. 当然,这些级数并不一定是幂级数,特别是,在奇点 ($f_x=f_y=0$) 处的展开式更是这样. Newton 在他的《流数法》中发表了决定这几个级数的形式的一个方法,每一个显函数解就是这些级数之一. 他的方法(其中用到了有名的所谓 Newton 平行四边形)指出,在形如

$$y=a_1x^m+a_2x^{m+n}+a_3x^{m+2n}+\cdots$$

的级数中,如何决定前头几个指数. 然后,这些级数的系数可以用待定系数法定出来. 事实上,Newton 也只是给出了一些特殊的例子,人们只能从中推断他的方法.

---

① *Math. Schriften*, 5, 88~92; 也见 *Acta Erud.*, 1682 = *Math. Schriften*, 5, 118~122.

对每一个级数来说，决定指数的方法是很麻烦的，Taylor，James Stirling 和 Maclaurin 给出了一些法则；Maclaurin 还试图推广和证明这些法则，但未成功. Newton 方法的一个证明由 Gabriel Cramer 和 Abraham G. Kästner（1719—1800）独立地给出.

3. 函数的展开

17 世纪后期和 18 世纪，摆在数学家面前的问题之一是函数表的插值. 为了适应航海、天文学和地理学的进展，要求三角函数、对数函数和航海表的插值有较大的精确度. 插值（这个词是 Wallis 的）的常用方法叫线性插值法，因为它假设了在两个已知值之间的区间中，函数是自变量的线性函数. 然而，问题中的函数往往是非线性的，因而数学家感到需要有一种较好的插值方法.

我们将要叙述的方法，是 Briggs 在他的《对数的算术》（*Arithmetica Logarithmica*，1642）中引进的，不过关键的公式是由 James Gregory 在他 1670 年 11 月 23 日给 Collins 的信（Turnbull，《通信》，1，45～48）中给出，并且 Newton 也独立地给出过. Newton 的工作出现在《原理》第三卷的引理 5 和《微分法》（*Methodus Differentialis*）中，后者虽然出版于 1711 年，但却是 1676 年写成的. 用的方法叫做有限差方法，这是有限差计算的第一个重大的结果.

假设 $f(x)$ 是一个函数，它在 a，$a+c$，$a+2c$，$a+3c$，…，$a+nc$ 上的值已知. 命

$$\Delta f(a) = f(a+c) - f(a),$$

$$\Delta f(a+c) = f(a+2c) - f(a+c),$$

$$\Delta f(a+2c) = f(a+3c) - f(a+2c),$$

……

进一步令

$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a+c) - \Delta f(a),$$
$$\Delta^3 f(a) = \Delta^2 f(a+c) - \Delta^2 f(a),$$
$$\cdots\cdots$$

那么 Gregory-Newton 公式可以叙述为

$$(1) \qquad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{c}\Delta f(a) + \frac{\frac{h}{c}\left(\frac{h}{c}-1\right)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a) + \cdots$$

Newton 粗略地给出了一个证明,而 Gregory 却没有.

为了计算 $f(x)$ 在已知值之间的任一 x 处的值,只需让 h 等于 $x-a$. 这样计算出来的值并不一定是函数的真值;公式计算出来的是 h 的一个多项式的值,这个多项式在特殊点 a, $a+c$, $a+2c$, $\cdots$ 的值和函数的真值相同.

Gregory-Newton 公式还可用来逼近积分. 给定一个函数,譬如说 $g(x)$,要求积分,或者说,要找相应曲线下的面积. 我们可用 $g(x)$ 的值得到 $g(a)$, $g(a+c)$, $g(a+2c)$, $\cdots$ 以及它们的差分和高阶差分;把这些值代到(1)中,那么(1)就给出了一个逼近 $g(x)$ 的多项式. 于是,正如 Newton 所指出的,由于多项式是很容易积分的,就得到了 $g(x)$ 的所求积分的一个逼近.

Gregory 还把(1)应用于函数 $(1+d)^x$. 他知道这个函数在 $x=0, 1, 2, 3, \cdots$ 上的值. 因此 $f(0)=1$, $\Delta f(0)=d$, $\Delta^2 f(0)=d^2$, 等等. 这样,在(1)中,让 $a=0$, $c=1$ 和 $h=x-0$,应用 $f(0)$, $\Delta f(0)$, $\cdots$ 的值,他得到了

$$(2) \qquad (1+d)^x = 1 + dx + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}d^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3 + \cdots$$

这样,对于一般的 x, Gregory 得到了二项式的展开.

Gregory Newton 内插公式由 Brook Taylor 发展成一个把函数展成无穷级数的最有力的方法. 二项式定理,有理函数的长除法

和待定系数法，都是有局限性的方法. Taylor 在他研究有限差计算的第一本出版物《增量法及其逆》(*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, 1715)中，推导出他在 1712 年曾经叙述过的定理，这定理至今仍用他的名字命名. 他顺便称赞了 Newton，却没有提到 Leibniz 1673 年在有限差方面的工作，虽然 Taylor 是知道这些工作的. Taylor 定理在 1670 年就已经为 James Gregory 所知，大概稍后又为 Leibniz 独立地发现过；然而，这两个人都没有发表它. 实际上，John Bernoulli 确曾于 1694 年在《教师学报》上发表了相同的结果；虽然 Taylor 知道这个结果，但并没有引证过它. 他自己的"证明"是不一样的. 他所做的相当于在 Gregory-Newton 公式中让 c 变成 Δx. 这样一来，例如(1)的右边第三项就变成

$$\frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2}. \tag{3}$$

Taylor 下结论说，当 $\Delta x = 0$ 时，这一项就变成 $h^2 f''(a)/2!$，从而整个 Gregory-Newton 公式变成

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2!} + f'''(a)\frac{h^3}{3!} + \cdots \tag{4}$$

当然，Taylor 的方法是不严密的，他也没有考虑收敛问题.

Taylor 的定理在 $a = 0$ 时就是现在所谓的 Maclaurin 定理. Maclaurin 继承 James Gregory 任爱丁堡的教授，在他的《流数论》(1742)中给出了这个特殊情形，并说明这只是 Taylor 的结果的一个特殊情形. 然而，历史上却把它作为一个独立的定理而归功于 Maclaurin. 附带地说，Stirling 在 1717 年对代数函数，以及在他 1730 年的《微分法》(*Methodus Differentialis*)中对一般函数，也给出了这个特殊情形.

Maclaurin 是用待定系数法证明他的结果的. 他进行如下.

令

$$f(z)=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots \tag{5}$$

那么

$$f'(z)=B+2Cz+3Dz^2+\cdots$$

$$f''(z)=2C+6Dz+\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

在每个等式中令 $z=0$，就定出 $A, B, C, \cdots$ 他并没有为收敛问题担心，而直接去应用结果.

4. 级数的妙用

James Bernoulli 和 John Bernoulli 在级数方面做了大量工作. James 在 1689 到 1704 年间，写了五篇论文，他侄子 Nicholas (1695—1726)(John 的儿子)把它们作为 James 的《推想的艺术》(*Ars Conjectandi*, 1713)的附录发表. 这些论文中的大多数是专论使用函数的级数表示的，其目的是求函数的微分和积分，以及求曲线下的面积和曲线的长度. 尽管这些应用是对微积分的重大贡献，但没有什么特别新的思想. 然而，他用来求级数和的某些方法却是值得注意的，因为它们说明了 18 世纪数学思想的特征.

在第一篇论文(1689)中[1]，他从级数

$$N=\frac{a}{c}+\frac{a}{2c}+\frac{a}{3c}+\cdots \tag{6}$$

出发，由此得到

$$N-\frac{a}{c}=\frac{a}{2c}+\frac{a}{3c}+\frac{a}{4c}+\cdots \tag{7}$$

他现在从(6)减去(7)，在这个过程中，(7)的右边的每一项都从位于它上面的那一项减去. 这就得到

$$\frac{a}{c}=\frac{a}{1\cdot 2c}+\frac{a}{2\cdot 3c}+\frac{a}{3\cdot 4c}+\cdots \tag{8}$$

---

[1] *Opera*, 1, 375～402.

这是一个正确的结果，但推导却是错误的，因为原来的级数发散. James 说，这种做法是有问题的，如果不慎重是不能用的.

接着他考虑通常的调和级数，并证明它的和是无穷①. 他考虑这样的项

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}, \tag{9}$$

并说这个和大于 $(n^2-n)\cdot\frac{1}{n^2}$，因为这里有 n^2-n 项，而每一项至少同最后一项一样大；但是

$$(n^2-n)\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{n}.$$

因此，如果在(9)中加上 $\frac{1}{n}$，就有

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

他说，这样我们可以把项一组接一组地归并起来，使得每一组的和大于1. 这样一来，我们能够得到有限多个项，其和要多大就有多大，从而整个级数的和必须是无穷. 由此，他还指出，“最后”一项消失的一个无穷级数，它的和可以是无穷. 这是和他早期的信念，也是和18世纪包括 Lagrange 在内的许多数学家的信念相矛盾的.

在这之前，John Bernoulli 曾给出过调和级数有无穷和的一个不同的“证明”. 它是这样的：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{4}{4\cdot 5}+\cdots \\ &= \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right) \\ &\quad +\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right) \\ &\quad +\left(\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+\cdots\end{aligned} \tag{10}$$

① *Opera*, 1, 392.

现在,应用(8),令其中的 a 和 c 为 1,从(10)我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\\ &=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\\ &\quad+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\\ &=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\end{aligned}$$

如果我们设 $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ 我们就已经证明了 $A=1+A$. 假如 A 为有穷,这结果就会是不可能的.

在接着的四篇论述级数的短文中,James Bernoulli 如此无拘无束地做了许多事,以至使人难以相信他曾认识到必须谨慎地处理无穷级数. 例如,在第二篇短文(1692)中①,他作了如下的讨论:从几何级数的公式我们有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2.$$

两边乘$\frac{1}{3}$,有

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots=\frac{2}{3};$$

原来级数两边乘$\frac{1}{5}$,有 $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots=\frac{2}{5}$,等等. 左边加起来就是整个调和级数,应等于右边的和,即

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots &=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\cdots\\ &=2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right).\end{aligned}$$

因此,奇数项的和等于调和级数和的一半,从而 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$ 也是调和级数的$\frac{1}{2}$. 故

① *Opera*, 1, 517~542.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots$$

在第三篇短文(1696)中[①],他写道

$$\frac{l}{m+n}=\frac{l}{m}\left(1+\frac{n}{m}\right)^{-1}=\frac{l}{m}-\frac{ln}{m^{2}}+\frac{ln^{2}}{m^{3}}-\cdots$$

当 $m=n$ 时,

(11) $$\frac{l}{2m}=\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\cdots$$

他把此式说成是一个不无风趣的悖论.

在他关于级数的第二篇文章中,他把级数的一般项用另外两项之和或差来代替,然后作另外一些可以导致特殊结果的运算.这种替换,对绝对收敛的级数,是可行的,但对条件收敛的级数,就不对了.因此他得到一些错误的结果,这种错误的结果他也说成是悖论.

James 的非常有趣的结果之一是处理自然数 n 次幂倒数的级数,即 $1+\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{4^{n}}+\cdots$. James 证明了,奇数项的和与偶数项的和之比等于 $2^{n}-1$ 比 1.这对 $n\geqslant 2$ 是正确的.然而,James 却毫不犹豫地把它用到 $n=1$ 和 $n=\frac{1}{2}$ 的情形.他发现最后这个结果是自相矛盾的.

在级数方面 James 的另一结果是,级数 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$ 的和是无穷,因为它的每一项都大于调和级数的对应项.在这里他成功地用了比较判别法.

在(11)中,当 l 与 m 为 1 时所产生的级数,即

(12) $$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

引起了极大的讨论与争议.如果把级数写成

(13) $$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

---

① *Opera*, 2, 745~764.

就好像很明显,它的和应该为0.可是,如果把级数写成

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots$$

它的和也好像很明显应该是1.然而,如果我们把级数(12)的和表为S,则$S=1-S$,从而$S=\frac{1}{2}$;事实上这就是(11)中Bernoulli的结果.Guido Grandi (1671—1742)是比萨大学的数学教授,在他的小书《圆和双曲线的求积》(*Quadratura Circuli et Hyperbolae*, 1703)中,用另外的方法得到了第三个结果.他在表达式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots \tag{14}$$

中,令$x=1$,得到

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots$$

Grandi因此主张级数(12)的和是$\frac{1}{2}$.他还表示,由于级数(12)在形式(13)下的和是0,他业已证明,世界能够从空无一物创造出来.

在给Christian Wolf(1678—1754)的、发表在《学报》①上的一封信中,Leibniz也研究过级数(12).他同意Grandi的结果,但认为不用他的论证也能得到这个结果.事实上,Leibniz认为,如果取级数的第一项,前两项的和,前三项的和,前四项的和等等,就得到1, 0, 1, 0, …在这里,取1和0的可能率是相等的,因此必须取算术平均作为和,因为这个算术平均是最有可能取到的值.这个解答为James和John Bernoulli, Daniel Bernoulli以及我们将要看到的,也为Lagrange所接受.Leibniz承认,在他的论证中,形而上学的成分多于数学的成分.但他接着说,在数学中,有比我们通常承

① *Acta Erud. Supplementum*, 5, 1713, 264～270 = *Math. Schriften*, 5, 382～387.

认的更为形而上学的真理. 然而,他受 Grandi 论证的影响可能比他自已意识到的要多得多. 因为,在后来的通信中,当 Wolf 希望把 Leibniz 这种可能率的论证方法推广,从而断言

$$1-2+4-8+16-\cdots=\frac{1}{3},$$

$$1-3+9-27+81-\cdots=\frac{1}{4}$$

时,Leibniz 表示异议. 他指出,有和的级数要有单调下降的项,而(12)至少是带有单调下降的项的级数的极限,这一点由(14)让 a 从小于 1 的值趋向于 1 来看是显然的.

级数方面的真正广阔的工作是 1730 年左右从 Euler 开始的,他对这个课题感到莫大的兴趣,但在他的思想中有很大的混乱. 为了求

$$1-1+1-1+1-\cdots$$

的和,Euler 主张,由于

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{15}$$

当 $x=-1$ 时,

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots \tag{16}$$

因此和是 $\frac{1}{2}$.

又当 $x=-2$ 时,(15)表明

$$\frac{1}{3}=1-2+2^2-2^3+\cdots \tag{17}$$

因此,右边的级数的和是 $\frac{1}{3}$. 作为第三个例子. 由于

$$\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots \tag{18}$$

对 $x=1$ 就得到

$$\frac{1}{4}=1-2+3-4+\cdots$$

再由

$$\frac{1-x}{(1+x)^2}=(1-x)(1+x)^{-2}=1-3x+5x^2-7x^3+\cdots$$

取 $x=1$ 我们就有

$$0=1-3+5-7+\cdots \tag{19}$$

在他的著作中有大量这种推理的例子.

从(18),当 $x=-1$ 时,我们看到

$$\infty=1+2+3+4+5+\cdots \tag{20}$$

这是 Euler 接受了的.进一步,在(15)中,令 $x=2$,我们看到

$$-1=1+2+4+8+\cdots \tag{21}$$

由于(21)的右边应超过(20)的右边,所以 $1+2+4+8+\cdots$ 的和应该超过∞.根据(21),它却是−1. Euler 断言,∞必须是介于正数和负数之间的一种极限,在这点上和0相似.

关于(19),Nicholas Bernoulli(1687—1759)在1734年给 Euler的一封信上说,这个级数 $1-3+5-7+\cdots$ 的和是 $-\infty(-1)^{\infty}$.他说,Euler 的等于0的结果,是一个无法解决的矛盾. Bernoulli 还注意到,在(15)中,当 $x=2$ 时,我们有

$$-1=1+2+4+8+\cdots$$

而在

$$\frac{1}{1-x-x^2}=1+x+2x^2+3x^3+\cdots \tag{22}$$

中取 $x=1$,得到

$$-1=1+1+2+3+4+\cdots$$

这两个不同的级数都给出−1这一事实,也是一个无法解决的矛盾.否则,我们就可以认为这两个级数相等.

在一篇文章中,Euler 确曾指出过,级数只有对那些使它收敛的 x 值才能应用.但是就在这同一篇文章①中,他却断言

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1739, 116～127, pub. 1750 = *Opera*, (1), 14, 350～363.

(23) $$\cdots+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\cdots=0.$$

他的论证是

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+\cdots$$

和

$$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots$$

但两式左边相加为0,而两式右边相加就是级数(23).

在一篇较早的文章中①,Euler从级数

(24) $$y=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

或

(25) $$1-\frac{x}{y}+\frac{x^3}{3!y}-\frac{x^5}{5!y}+\cdots=0$$

出发.把代数的考虑用到(25)上,把它看成一个无穷次的多项式,并用代数方程根与系数关系的定理,Euler证明了②

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots=\frac{\pi^3}{32},$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96},$$

$$\frac{1}{1^5}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\cdots=\frac{5\pi^5}{1\,536},$$

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{960},$$

……

在同一篇文章里,他第一次给出了乘积展开

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 123~134, pub 1740 = *Opera*, (1), 14, 73~86.

② 直到1739年,对于π他一直用符号 p;π是在1706年由William Jones引入的.

$$\sin s = \left(1-\frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{26}$$

他的论据仅仅是：sin s 有零点 $\pm\pi$，$\pm 2\pi$，…(他放弃了 0 这个根)，类似于每个多项式对于每个根都必有一个一次因式一样，因此(26)成立.（在 1743[①] 年，以及在他的《引论》[②]中，为了回答批评，他给出了另外的推导.）他把(26)的右边看成一个多项式，令它等于零，并再次应用根与系数的关系，他导出了

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90},$$

以及分母是更高的偶数幂时的类似和.

在以后的一篇文章[③]中，Euler 得到了他的最优美的成果之一

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2n}}=(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n},$$

其中 B_{2n} 是 Bernoulli 数(看后面). 这与 Bernoulli 数的联系，是 Euler 稍后在他 1755 年的《原理》中才真正建立的[④]. 在 1740 年的文章中，他还给出了当 n 是前面几个小奇数时 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^n}$ 的和，但对于所有的奇数 n，他没有给出一般的表达式.

Euler 还研究过调和级数，即这样的级数，它的项的倒数构成算术级数. 特别地，他表明[⑤]，如何能用对数函数来求原来调和级数的有限多个项的和. 首先，他从

---

① *Opera*, (1), 14, 138～155.

② *Opera*, (1), 8, 168.

③ *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 12, 1740, 53～96, pub. 1750 = *Opera*, (1), 14, 407～462.

④ Part II, Chap. 5, ¶124 = *Opera*, (1), 10, 327.

⑤ *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734～1735, 150～161, pub. 1740 = *Opera*, (1), 14, 87～100.

(27) $$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\cdots$$

出发，于是

$$\frac{1}{x}=\log\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}-\cdots$$

代入 $x=1, 2, 3, \cdots, n$，就给出

$$\frac{1}{1}=\log 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\log\frac{3}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1}{5\cdot 32}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}=\log\frac{4}{3}+\frac{1}{2\cdot 9}-\frac{1}{3\cdot 27}+\frac{1}{4\cdot 81}-\frac{1}{5\cdot 243}+\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n}=\log\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{5n^5}+\cdots$$

相加，并注意到每一个对数项都是两个对数之差，就得到

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$=\log(n+1)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{n^4}\right)-\cdots$$

或

(28) $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\log(n+1)+C,$$

其中 C 表示无穷多个有限算术和的和. Euler 近似地计算过 C 的值（它依赖于 n，但当 n 很大时 n 的值并不怎么影响计算的结果），并得到 0.577 218. 这个 C 就是现在通称的 Euler 常数，用 γ 表示. γ 的一个更精确的表示，今天是如下得到的. 从(28)的两边减去

$\log n$. 而 $\log(n+1)-\log n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$，当 $n\to\infty$ 时它趋向于0. 因此

$$(29)\qquad \gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

附带说一下，对于 Euler 常数，没有发现比(29)更简单的形式了，而对于 π 和 e 我们却有许多不同的表达式. 不仅如此，到今天我们还不知道 γ 是有理数还是无理数.

Euler 在他的《论发散级数》[1]中研究了发散级数

$$(30)\qquad y=x-(1!)x^2+(2!)x^3-(3!)x^4+\cdots$$

形式上，这个级数满足微分方程

$$(31)\qquad x^2y'+y=x.$$

但这个微分方程有积分因子 $x^{-2}e^{-1/x}$，因此

$$(32)\qquad y=e^{1/x}\int_0^x\frac{e^{-1/t}}{t}dt$$

是一个解，还可以用 l'Hospital 法则证明它和 x 一起趋向于0. Euler 把级数(30)看成函数(32)的级数展开，而把(32)作为级数(30)的和. 事实上，令 $x=1$，就得到

$$1-1+2!-3!+4!-\cdots=e\int_0^1\frac{e^{-1/t}}{t}dt.$$

关于级数(30)的值得注意的事实是，它可以用来作函数(32)的数值计算，因为给定一个 x 值，如果我们从某一项开始忽略后面的所有项，那么可以证明，余项的绝对值小于所忽略的第一项的绝对值. 因此，这个级数可以用来作为积分的很好的数值逼近. Euler 使用发散级数的方式显示了它的优点. 这些对发散级数所取得的成就的全部意义，在后来的150年里并没有被人赏识(看第47章).

还要指出 Euler 关于级数积分的另一个有名的结果. James Bernoulli 在《推想的艺术》中，在研究概率的课题时，引入了现在

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1754/1755, 205～237, pub. 1760 = *Opera*, (1), 14, 585～617.

已用得很广的 Bernoulli 数. 他找出了一个求整数的正整数次幂之和的公式,并且不加证明地给出了下面的公式:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}B_2 n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B_4 n^{c-3} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}B_6 n^{c-5} + \cdots \tag{33}$$

这个级数加到 n 的最后一个正幂截止. B_2, B_4, B_6, …是 Bernoulli 数:

$$B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66},\ \cdots \tag{34}$$

Bernoulli 还给出了可以计算这些系数的递推公式.

Euler 的结果,即 Euler Maclaurin 求和公式,是一个推广①. 设 $f(x)$是实变量 x 的一个实值函数. 那么(用现代的记号)这个公式就是

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(0)] + \frac{B_4}{4!}[f'''(n) - f'''(0)] + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_k, \tag{35}$$

其中

$$R_k = \int_0^n f^{(2k+1)}(x)P_{2k+1}(x)\mathrm{d}x. \tag{36}$$

这里 n 与 k 是正整数, P_{2k+1} 是 $2k+1$ 阶 Bernoulli 多项式(它也出现在 Bernoulli 的《推想的艺术》中),由下式给出:

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 68~97, pub. 1738 = *Opera*, (1), 14, 42~72; 和 *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1736, 147~158, pub. 1741 = *Opera*, (1), 14, 124~137.

$$(37)\quad P_k(x)=\frac{x^k}{k!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{B_2}{2!}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}+\cdots+\frac{B_k}{k!},$$

其中 $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_{2k+1}=0$, $k=1,2,\cdots$, 级数

$$(38)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)]$$

对几乎所有在应用中出现的 $f(x)$ 都是发散的. 然而,余项 R_k 小于所忽略的第一项,所以级数(35)给出

$$\sum_{i=0}^{n}f(i)$$

的一个有用的逼近.

Bernoulli 数 B_i 现在常常用后来由 Euler 给出的一个关系来定义①,这就是

$$(39)\quad t(e^t-1)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}B_i\frac{t^i}{i!}.$$

独立于 Euler, Maclaurin② 得到同样的求和公式(35),所用的方法的确实性稍好一些,离我们今天用的方法更近一些. 余项是由 Poisson 首先加上去并加以认真研究的③.

Euler 又引进了④一个至今还为人们所习知和使用的级数变换. 给定一个级数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$, 他把它写成 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. 通过一系列形式的代数步骤,他证明了

$$(40)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}},$$

其中 Δ^n 表示 n 阶有限差分(第 3 节). 这个变换的好处,用现代的说法,就是把一个收敛级数转换成一个收敛比较快的级数. 然而,对惯常并不区别级数的收敛与发散的 Euler 来说,这个变换还可

---

① *Opera*, (1), 14, 407～462.

② *Treatise of Fluxions* 1742, p. 672.

③ *Mém. de l'Acad. des Sci., Inst. France*, 6, 1823, 571～602, pub. 1827.

④ *Inst. Cal. Diff.*, 1755, p. 281.

以把发散级数变成收敛级数. 如果我们把(40)用到

$$1-1+1-1+\cdots \tag{41}$$

(40)的右边便得到$\frac{1}{2}$. 同样,对于级数

$$1-2+2^2-2^3+2^4-\cdots \tag{42}$$

(40)给出

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{4}(-1)+\frac{1}{8}(1)+\frac{1}{16}(-1)\cdots=\frac{1}{3}. \tag{43}$$

自然,这些结果和 Euler 以前得到的相同,以前他用的方法是把级数的和取作导出这个级数的函数的值(看[16]或[17]).

Euler 方法的精神应该是清楚的. 他是一个伟大的巧匠,他指出了一条通向数以千计的、以后可以严密建立起来的结果的途径.

必须提到另外一个著名的级数. James Stirling 在他的《微分法》[①]中给出了一个级数,今天我们把它写成

$$\log n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}+\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n}+\frac{B_4}{3\cdot 4}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots \tag{44}$$

它等价于

$$n!=\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\exp\left[\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots\right]. \tag{45}$$

Stirling 给出了前五个系数,并给出了一个决定后面系数的递推公式. 虽然,$\log n!$ 的级数是发散的,但 Stirling 却只用了级数的前几项,就算出了 $\log_{10}(1\,000!)$ 等于 2 567 加上一个准确到小数点后十位的小数. De Moivre 在 1730 年(《分析杂论》, *Miscellanea*

① 1730, p. 135.

Analytica)给出了一个类似的公式.对很大的 n, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$;这虽然是 de Moivre 给出的,但却叫做 Stirling 逼近.

5. 三角级数

18世纪的数学家还广泛研究了三角级数,特别是在他们的天文学理论中.这种级数在天文学中之所以有用,显然是由于它们是周期函数,而天文现象大都是周期的.这种研究是一个广泛课题的开始,而这课题的全部深刻意义在18世纪还没有被意识到.开始使用三角级数的问题是插值问题,特别是要确定行星在介于观测到的位置之间的位置.这类级数在偏微分方程的早期工作中也曾用到(看第22章),但奇怪的是这两条思路却一直分开,甚至对同时研究两类问题的人也是这样.

三角级数是指形如

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{46}$$

的任一级数,其中 a_n 和 b_n 是常数.如果这样一个级数表示一个函数 $f(x)$,那么对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$,就有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{47}$$

这些系数公式的获得是这理论的主要结果之一,至于这些 a_n 和 b_n 的值,要在什么条件下才确实由上式给出,现在且一概从略.

早在1729年,Euler已经着手研究插值问题.这就是,已知一个函数 $f(x)$ 在 $x = n$ 处的值,其中 n 是正整数,求 $f(x)$ 在其他 x 处的值.在1747年,他把他已经得到的方法用到行星扰动理论中出现的一个函数上,得到了函数的三角级数表示.在1753年[①],他发表了他在1729年发现的方法.

① *Novi Comm. Acad. Sci Petrop.*, 3, 1750/1751, 36~85, pub. 1753 = *Opera*, (1), 14, 463~515.

首先,他处理这样的问题,已知条件是:对每一 n, $f(n)=1$,而要求一个周期解,对于整数 x,它的值为 1. 他的推理很有趣,因为它反映出那个时期的分析学. 他令 $f(x)=y$,用 Taylor 定理写出

$$f(x+1)=y+y'+\frac{1}{2}y''+\frac{1}{6}y'''+\cdots \tag{48}$$

由于 $f(x+1)$ 等于 $f(x)$, y 必须满足无穷阶的线性微分方程

$$y'+\frac{1}{2}y''+\frac{1}{6}y'''+\cdots=0. \tag{49}$$

这时,他运用他在 1743 年(看第 21 章)发表的解有限阶线性常微分方程的方法. 这就是,他建立辅助方程

$$z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots=0. \tag{50}$$

注意到 e 的级数,这方程就是

$$e^z-1=0.$$

然后,他求这个方程的根. 他从方程

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=1$$

出发,这是一个 n 次多项式. 根据 Cotes(1722)的一个定理(这个定理 Euler 在他的《引论》①中也独立地证明过),这个多项式有一次因子 z 和平方因子

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{z}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n}+1,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ <\frac{n}{2}.$$

应用联系 $\sin z$ 和 $\cos 2z$ 的三角恒等式,这些因子等于

$$4\left(1+\frac{z}{n}\right)\sin^2\frac{k\pi}{n}+\frac{z^2}{n^2}.$$

如果我们用 $4\sin^2\dfrac{k\pi}{n}$ (对相应的 k)除每一个因子,(50)的根不受影响,这样平方因子就是

① Vol. 1, Chap. 14.

$$1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{4n^2\sin^2\frac{k\pi}{n}}.$$

当 $n=\infty$ 时，$\frac{z}{n}$ 为 0. 用 $\frac{k\pi}{n}$ 代替 $\sin\frac{k\pi}{n}$，因子就变成

$$1+\frac{z^2}{4k^2\pi^2}.$$

辅助方程(50)的每一个这样的因子都有对应的根 $z=\pm \mathrm{i}2k\pi$，从而有对应于(49)的积分

$$\alpha_k\sin 2k\pi x+A_k\cos 2k\pi x.$$

上面提到的一次因子 z 导致一个积分常数. 由于 $f(0)=1$ 是一个初始条件，Euler 最后得到

$$y=1+\sum_{k=1}^{\infty}\{\alpha_k\sin 2k\pi x+A_k(\cos 2k\pi x-1)\}.$$

系数 α_k 和 A_k，还得根据条件 $f(n)=1$ (对每个 n)而定.

这篇文章还包含一个结果，其形式和现在所谓的任意函数的 Fourier 展开是一样的，即用积分来决定系数. Euler 特别地证明了函数方程

$$f(x)=f(x-1)+X(x)$$

的通解是

$$f(x)=\int_0^x X(\xi)\mathrm{d}\xi+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n\pi x\int_0^x X(\xi)\cos 2n\pi\xi\mathrm{d}\xi$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n\pi x\int_0^x X(\xi)\sin 2n\pi\xi\mathrm{d}\xi.$$

这里，在 1750—1751 年，我们已有了一个展成三角级数的函数. Euler 还主张，他的解是插值问题的最一般的解. 如果真的如此，它一定包含了用三角级数来表示多项式. 但是，我们在第 22 章将要看到，Euler 在关于弦振动和有关问题的论述中否认了这一点.

在 1754 年，d'Alembert[1] 研究了这样的问题，就是把两个行星间距离的倒数，展开为原点到行星的两条射线间的夹角的余弦级数，这里也能够找到 Fourier 级数的系数的定积分表示.

Euler 在另一工作中，以完全不同的形式，得到了函数的三角级数表示[2]. 他从几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n,\ \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

出发，求和，得到

$$\frac{1}{1 - a(\cos x + \mathrm{i}\sin x)}.$$

然后他应用以 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 代替 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的幂的标准公式（相当于 de Moivre 的公式），得到

$$\frac{1}{1 - a(\cos x + \mathrm{i}\sin x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(\cos nx + \mathrm{i}\sin nx).$$

在左边，分子分母同乘以分母的共轭复数，在右边，分出 $n = 0$ 的项并移至左边，分离实部与虚部，他得到

$$\frac{a\cos x - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx,$$

$$\frac{a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx.$$

至此，他的结果并不令人吃惊. 现在他让 $a = \pm 1$，得到，例如

$$(51)\qquad \frac{1}{2} = 1 + \cos x + \cos 2x \pm \cos 3x + \cos 4x \pm \cdots$$

（实际上，这个级数是发散的.）他然后积分，从而得到

$$(52)\qquad \frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots$$

---

① *Recherches sur différens points importans du système du monde*, 1754, Vol. II, p. 66.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1754/1755, 164～204, pub. 1760 = *Opera*, (1), 14, 542～584；对另一方法，也参看 *Opera*, (1), 15, 435～497.

(它对 $0<x<\pi$ 成立,在 $x=0$ 与 π 它等于0)和

$$(53)\qquad \frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots$$

(它在 $-\pi<x<\pi$ 收敛).积分后一个等式,为了定出积分常数,在 $x=0$ 计算函数值,得到

$$(54)\qquad \frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}=-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 4x-\cdots$$

Euler 相信,后面两个级数[它们在 $-\pi<x<\pi$ 是收敛的]对所有的 x 值分别表示了左边的函数.然而,继续微分(51),Euler 推导出了

$$\sin x\pm 2\sin 2x+3\sin 3x\pm\cdots=0,$$
$$\cos x\pm 4\cos 2x+9\cos 3x\pm\cdots=0$$

和其他这类等式. Daniel Bernoulli 也曾给出过(52)、(53)、(54)这样一类表示式,他认为,级数只是在 x 值的某些区间上表示这些函数.

在1757年,由于研究因太阳而引起的摄动,Clairaut① 采取了一个大胆得多的步骤.他说,他将把任何一个函数写成形式

$$(55)\qquad f(x)=A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx.$$

他把问题看做一个插值问题,因此用到函数在 x 为

$$\frac{2\pi}{k},\ \frac{4\pi}{k},\ \frac{6\pi}{k},\ \cdots$$

时的值,经过某种处理以后得到

$$A_0=\frac{1}{k}\sum_{\mu}f\left(\frac{2\mu\pi}{k}\right),$$
$$A_n=\frac{1}{k}\sum_{\mu}f\left(\frac{2\mu\pi}{k}\right)\cos\frac{2\mu n\pi}{k}.$$

---

① *Hist. de l'Acad. des Sci.*, Paris, 1754, 545 ff., pub. 1759.

让 k 变成无穷，Clairaut 就得到了

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x , \tag{56}$$

这是 A_n 的正确公式.

Lagrange 在他对声的传播的研究中[①]，得到了级数(51)，并为它的和是$\frac{1}{2}$进行辩护. 无论 Euler 还是 Lagrange，都没有评论过这样一件惊人的事实，这就是他们已经把一个非周期函数表示成三角级数的形式. 但是稍后，他们在别的地方确实观察到了这个事实. D'Alembert 经常拿 $x^{2/3}$ 作为一个不能展成三角级数的函数的例子. Lagrange 在 1768 年 8 月 15 日的一封信[②]中对他说明，$x^{2/3}$ 真的能够表示成形式

$$x^{2/3} = a + b\cos 2x + c\cos 4x + \cdots$$

D'Alembert 表示反对并给出相反的论证，譬如说两边的微商在 $x=0$ 就不相等. 还有，用 Lagrange 的方法，人们可以把 $\sin x$ 表成余弦级数，但 $\sin x$ 是奇函数，而右边却是偶函数. 这个问题在 18 世纪一直没有解决.

在 1777 年[③]，Euler 在研究天文问题的时候，实际上用三角函数的正交性得到了三角级数的系数，这方法就是我们今天所用的. 就是说，从

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} \tag{57}$$

他推导出

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\cos\frac{k\pi s}{l}\mathrm{d}s.$$

在这篇文章前的一篇文章里，他先用稍微复杂的方式得到这个结

---

① *Misc. Taur.*, 1, 1759 = *Œuvres*, 1, 110.

② *Lagrange, Œuvres*, 13, 116.

③ *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1793, 114～132, pub. 1798 = *Opera*, (1), 16, Part 1, 333～355.

果，后来他发现可以直接得到它，就是把(57)的两边乘以 $\cos\frac{\nu\pi x}{l}$，逐项积分，并应用关系式

$$\int_0^l \cos\frac{\nu\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \nu \neq k, \\ \frac{l}{2} & \text{如果 } \nu = k \neq 0, \\ l & \text{如果 } \nu = k = 0. \end{cases}$$

上面关于三角级数的全部工作，处处都渗透了这样一个矛盾现象：虽然当时正在进行着把所有类型的函数都表示成三角级数，而 Euler，d'Alembert，Lagrange 却始终没有放弃过这样的立场，即认为并非任意的函数都可以用这样的级数表示．这个矛盾的部分解释是：在三角级数被认为是成立的那些地方，总有其他的论据，在某些情况下是物理的论据，似乎能够保证它们的成立．因此，人们就可以随意假设级数，并推导出系数公式．是否任意函数都能用三角级数表示的争论，就成了人们注意的中心了．

6. 连　分　式

我们曾经指出过(第 13 章第 2 节)，用连分式可以得到无理数的逼近．Euler 研究过这个课题．在他论述这个问题的第一篇题为《连分式》的文章[①]中，他得到一组有趣的结果，例如，每一个有理数都能表示为一个有限的连分式．然后他给出了表达式

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots$$

和

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{14+}\cdots$$

前者曾经在 1714 年《哲学年刊》Cotes 的一篇文章中出现过．Euler

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9, 1737, 98～137, pub. 1744 = *Opera*, (1), 14, 187～215.

实质上还证明了 e 和 e^2 是无理数.

连分式的理论基础是由 Euler 在他的《引论》(第 18 章)中奠定的. 在那里,他证明了怎样从一个级数得到这个级数的连分式表示以及反过来怎样做.

Euler 在连分式方面的工作,由 Euler 和 Lagrange 在柏林科学院的一位同事 Johann Heinrich Lambert (1728—1777)用来证明[①]:如果 x 是有理数(不是 0),那么 e^x 和 $\tan x$ 都不能是有理数. 因此,他不仅证明了 e^x 对正整数 x 是无理数,而且证明了所有有理数都有着无理的自然(底为 e)对数. 从关于 $\tan x$ 的结果推出,由于 $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, 所以$\frac{\pi}{4}$和 π 都不能是有理数. Lambert 实际上证明了 $\tan x$ 的连分式展开的收敛性.

Lagrange[②] 用连分式找到了求方程无理根的近似方法,在同一杂志[③]的另一篇文章中,他用连分式的形式给出了微分方程的近似解. 在 1768 年的文章中,Lagrange 证明了 Euler 在 1744 年文章中证明的一个定理的反定理,这个反定理说:二次方程的实根是周期连分式.

7. 收敛与发散问题

今天,我们知道,18 世纪在级数方面的工作大都是形式的,收敛与发散的问题无疑是不太认真对待的. 然而,也不能说它完全被忽视了.

Newton[④], Leibniz, Euler 甚至 Lagrange,都把级数看作多项式的代数的推广. 他们大概没有认识到,由于把求和推广到无穷

---

① *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 1761,265～322, pub. 1768—*Opera*, 2,112～159.

② *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 23, 1767, 311 ～ 352, pub. 1769 = *Œuvres*, 2, 539～578 和 24,1768,111～180,pub. 1770 = *Œuvres*, 2,581～652.

③ 1776 = *Œuvres*, 4,301～334.

④ 参看第 17 章第 3 节 Newton 的引文.

多项，他们已经引进了新的问题．因此，他们完全不准备正视无穷级数强加给他们的问题；可是，工作中产生的明显困难使他们至少偶然地又提出这些问题．最有兴趣的问题是，如何正确地解决悖论，以及那些经常被提到而又经常被忽视的其他困难．

甚至某些17世纪的人就已经观察到了收敛同发散的区别．1668年，Brouncker勋爵在研究 $y=\frac{1}{x}$ 下的面积和 $\log x$ 两者之间的关系时，用与几何级数作比较的方法，证明了 $\log 2$ 和 $\log\frac{5}{4}$ 的级数的收敛性．Newton和James Gregory大量应用级数的数值去计算对数表与其他函数表及积分值，他们已经知道级数的和可以是有穷，也可以是无穷．“收敛”与“发散”的名称，实际上是James Gregory于1668年就用过了，但他并没有发展这些概念．Newton认识到必须考虑收敛性，但他仅仅断言幂级数至少同几何级数一样，对变量的一些小的值是收敛的．他还注明，有些级数对 x 的某些值可能是无穷，因而是无用的，例如 $y=\sqrt{ax-x^2}$ 的级数在 $x=a$ 就是这样．

Leibniz也多少意识到收敛性的重要．他在1713年10月25日给John Bernoulli的信中提到（现在已是一定理）：如果一个级数的项，其符号交替变化，其绝对值单调趋向于零，那么这级数收敛[1]．

Maclaurin在他的《流数论》(1742)中，把级数用作求积分的标准方法．他说：“当一个流量不能真正地用代数项表示时，则它应可表示成一个收敛级数．”他还认为，收敛级数的项必须持续下降并小于任意指定的小量．“在这时，级数开头几项就几乎等于它整个的值了．”在《流数论》中，Maclaurin给出了（独立于Cauchy的发现）无穷级数收敛的积分判别法：$\sum_n \phi(n)$ 收敛，当

[1] *Math. Schriften*, 3,922～923. Leibniz在1714年1月10日致John的一封信中还给出了一个错误的证明 = *Math. Schriften*, 3,926.

且仅当 $\int_a^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$ 有穷，其中 $\phi(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant \infty$ 有穷并且是同号的. Maclaurin 用几何形式给出了这个判别法.

关于收敛性的某些思想，Nicholas Bernoulli（1687—1759）在1712 和 1713 年给 Leibniz 的信中也曾表达过. 在 1713 年 4 月 7 日的信[①]中，Bernoulli 谈到级数

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots$$

当 x 是负数且数值大于 1，而 n 是一个分母为偶数的分数时，是没有和的. 这就是说，级数的（算术的）发散性并不是级数没有和的唯一原因. 例如，对 $x>1$，两个级数

$$(1-x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3+\cdots$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

都是发散的，但第一个级数有一个可取的值，而第二个却有一个虚数值. 人们不能通过对级数的检查来区别这两者，因为余项是丢掉了的. 然而，Nicholas 并没有给出收敛性一个清楚的概念. 在 1713 年 6 月 28 日的答复中，Leibniz[②] 对收敛级数（和我们今天的意义大致一样）用了"收缩"（advergent）这个词，并同意说，非收缩的级数可以是没有值，也可以是无穷大.

无疑，Euler 看到了关于发散级数的某些困难，特别是在用它们进行计算时产生的困难，但他关于收敛与发散的概念仍然是不清楚的. 他确实认识到，收敛级数的项必须变为无穷小. 下面提到的一些通信将间接地告诉我们他的某些看法.

Nicholas Bernoulli（1687—1759）在 1742—1743 年间，在和 Euler 的通信中，曾经向 Euler 的某些思想和工作挑战. 他指出，Euler 在他 1734/1735 年的文章（看第 4 节）中，用

---

① Leibniz: *Math. Schriften*, 3, 980～984.

② *Math. Schriften*, 3, 986.

$$\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots = \left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

确实得到

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

但是没有证明 s 的基本级数的收敛性. 在 1743 年 4 月 6 日的一封信①中, 他说, 他不能想象, Euler 会相信一个发散级数竟能给出某些量或函数的精确值. 他指出, 余项是丢掉了的. 例如, $\frac{1}{1-x}$ 不能等于 $1 + x + x^2 + \cdots$ 因为余项, 也就是 $x^{n+1}/(1-x)$, 是丢掉了的.

在 1743 年的另一封信中, Bernoulli 说, Euler 必须区别有限多项的和与无穷多项的和. 在后一种情形下, 是没有最后项的. 因此, 人们对无穷的多项式不能应用(像 Euler 所作的)有限次多项式的根与系数的关系. 对于一个有无穷多个项的多项式, 人们不能说它的根的和.

Euler 对 Bernoulli 这些信是怎样回答的就不知道了. 在 1745 年 8 月 7 日给 Goldbach 的信②中, Euler 引用了 Bernoulli 的推理, 就是说, 像

$$+1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + \cdots$$

这样的发散级数是没有和的, 但他说这些级数有一个确定的值. 他注明, 我们不应当用"和"这个名称, 因为这是指真正的加法. 他因此叙述了一个一般原理, 这个原理说明所谓一个确定的值究竟指的是什么. 他指出发散级数来自有限的代数表达式, 因此他说, 级数的值就是级数由之而来的代数表达式的值. 在 1754/1755 年的文章(看第 4 节)中, 他补充说:"无论如何, 一个无穷级数可作为某些有尽的表达式的展开而得到, 在数学运算中它可以用作同那些

① Fuss: *Correspondance*, 2, 701 ff.

② Fuss: *Correspondance*, 1, 324.

表达式等价的东西,甚至对那些使级数发散的变量值也是如此."在他 1755 年的《原理》中,他重述了前面的原理:

> 因此,让我们说,任何无穷级数的和是这样一个有限表达式,这级数是通过展开它而产生的.在这个意义下,无穷级数 $1-x+x^2-x^3+\cdots$ 的和将是 $1/(1+x)$,因为只要我们用数代到 x 的位置上去,这个级数就来自分式的展开.如果同意这一点,那么和这个词的新定义,当级数收敛时,同它原来所指是一致的;而就和这个词的本来意义说,发散级数没有和,因此,用这个词也不会产生什么不便.最后,借助于这个定义,我们能够保留发散级数的功用,并对所有反对意见给它们的用处作辩护①.

毫无疑义,Euler 意在把这原理限制在幂级数的范围之内.

Euler 在 1743 年写给 Nicholas Bernoulli 的信中说,他过去对于发散级数的使用是十分怀疑的,但用他关于和的定义,却从来没有出过差错②.对于这一点,Bernoulli 答复说,两个不同的函数的展开可能给出同一级数,如果真是这样,和就不是唯一的了③.为此,Euler 在给 Goldbach 的信(1745 年 8 月 7 日)中写道:"Bernoulli 提不出例子,我也不相信同样的级数能够来自两个完全不同的代数表达式.由此可毫无疑问地推出,任何级数,不管是收敛的还是发散的,都有一个确定的和或值."

这场争论还有一个很有意思的余波.Euler 依据的是他自己的论点,就是像

$$1-1+1-1+1-\cdots \tag{58}$$

这样的级数的和,可以取级数所由之而来的那个函数的值.因为上

---

① Paragraphs 108~111.

② *Opera Posthuma*, 1, 536.

③ April 6, 1743; Fuss: *Correspondance*, 2, 701 ff.

面这个级数是从 $\frac{1}{1+x}$ 当 $x=1$ 时来的，所以有值 1/2. 然而 Jean-Charles (François) Callet(1744—1799)在一篇没有发表的致 Lagrange 的便笺(Lagrange 赞成把它发表在巴黎科学院的《记要》上，但还是没有发表出来)中，在将近 40 年以后指出

$$(59)\qquad \frac{1+x+\cdots+x^{m-1}}{1+x+\cdots+x^{n-1}}=\frac{1-x^m}{1-x^n}$$
$$=1-x^m+x^n-x^{n+m}+x^{2n}-\cdots$$

对 $x=1$ (且 $m<n$)，由于左边是 m/n，故右边的和也必须是 m/n，其中 m 和 n 可由我们自由选取.

Lagrange[①] 考虑了 Callet 的不同意见后，认为它是不正确的. 他用 Leibniz 的可能率论证说：假定 $m=3$ 和 $n=5$，那么(59)右边的完整的级数是

$$1+0+0-x^3+0+x^5+0+0-x^8+0+x^{10}+0+\cdots.$$

现在，如果对 $x=1$，取前一项，前两项，前三项……的和，那么每五个这样的部分和就有三个等于 1，两个等于 0. 因此，最大可能的值(平均值)是 3/5；而这是级数(59)当 $m=3$ 与 $n=5$ 时的值. 顺便说明，Poisson 没有提到 Lagrange，而把 Lagrange 的推理重做了一遍[②].

Euler 说过，在求发散级数的和时，演算必须十分小心. 他还给出了发散级数同半收敛级数的区别. 半收敛级数就是像(58)这样的级数，把它加起来，当项数越来越多但又没有变成无穷时，它的值是摆动的. 毫无疑问，他认识到了收敛级数和发散级数的区别. 有一次(1747)，当他用无穷级数去计算地球(作为一个扁球)对北极处一质点的吸引力时，他说，级数"激烈地"收敛.

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Inst. France*, 3, 1796, 1～11. pub. 1799；这篇文章在 *Œuvres* 中没有.

② *Jour. de l'Ecole Poly.*, 12, 1823, 404～509. 如果坚持用完全幂级数，那么 Lagrange 的推理更有意义些，它可以用 Frobenius 的求和定义(第 47 章第 4 节)严密化.

Lagrange 也多少意识到收敛与发散的区别. 在他早期的著作中,对这方面的确是不清楚的. 他在一篇文章①中说,一个级数将表示一个数,如果它收敛到它的尽头,即如果它的第 n 项趋向于 0 的话. 后来,将近 18 世纪末,当他研究 Taylor 级数时,他给出了我们今天所谓的 Taylor 定理②,这就是

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+R_n,$$

其中

$$R_n=f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

而 θ 的值在 0 与 1 之间. 这个 R_n 的表达式就是有名的余项的 Lagrange 形式. Lagrange 说,Taylor 的(无穷的)级数,不考虑余项是一定不能用的. 然而,他并没有研究收敛性的概念,或者余项的值与无穷级数收敛性的关系. 他想,我们只需考虑级数的有限多项,使得所剩的余项很小就够了. 收敛性后来由 Cauchy 加以研究. 他强调 Taylor 定理是首要的,并且强调这样的事实:为了得到收敛的级数展开,余项必须趋向于 0.

D'Alembert 也区别过收敛与发散的级数. 在《百科全书》"级数"那一条中,他说:"当级数越来越趋向某有限量,从而级数的项(即组成级数的量)继续减小,就称它为收敛级数,而如果继续到无穷,它最后就变成等于这有限量. 例如 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ 组成一个级数,它一直趋向于 1,而当级数继续到无穷时,它最后变成等于 1."在 1768 年,d'Alembert 对使用不收敛的级数表示了怀疑,他说:"至于说到我,我承认,所有基于不收敛级数的推理,在我

① *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 24, 1770 = *Œuvres*, 3,5~73,特别是 p. 61.

② *Théorie des fonctions*, 2nd. ed., 1813, Chap. 6 = *Œuvres*, 9,69~85. 微分中值定理 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ 属于 Lagrange(1797). 后来它被用来推导 Taylor 定理,就像在近代书中那样.

看来,都是十分可疑的,即使它的结果能用其他方法表明是真的,也是这样."①鉴于 John Bernoulli 和 Euler 对级数的有效运用,像 d'Alembert 这样的怀疑,在 18 世纪并没有受到注意. D'Alembert 在同一册书中给出级数 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ 绝对收敛的一个检验法,这就是,如果对所有大于固定数 r 的 n,有 $|u_{n+1}/u_n| < \rho$,其中 ρ 和 n 无关且小于 1,则级数绝对收敛②.

Edward Waring (1734—1798),剑桥大学的 Lucas 数学教授,在级数方面有过先进的观点.他讲过,级数

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

当 $n > 1$ 时收敛,当 $n < 1$ 时发散.他还给出(1776)一个有名的关于级数收敛与发散的判别法,即现在认为是属于 Cauchy 的比值判别法:取级数的第 $n+1$ 项与第 n 项作比,如果当 $n \to \infty$ 时它的极限小于 1,则级数收敛;如果极限大于 1,则级数发散;当极限是 1 时得不到任何结论.

虽然 Lacroix 在他的有影响的《微积分学教程》(*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*)的 1797 年版中,关于级数说了许多荒谬的话,但在第二版中,他却小心得多了.在谈到

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \cdots$$

时,他说,我们一定要把级数说成是函数的一个**发展**,因为级数并不永远取它所属的函数的值③.他说,级数仅仅对于 $|x| < |a|$ 才给出函数的值.他保留了 Euler 曾经表示过的一个思想,即无穷级数还是对所有的 x 与函数连结起来的;在涉及级数的任何解析研究中,我们应正确地认为,我们是在处理函数.因此,如果我们发现了级数的某些性质,那么我们可以相信,这些性质对函数也成立.

---

① *Opuscules mathématiques* 5, 1768, 183.

② 171～182.

③ 1810～1819, 3 vols.; Vol. 1, p. 4.

为了理解这个断言的正确性,只须注意到,许多级数都满足刻画函数特征的方程.例如,对 $y = a/(a - x)$,我们有

$$a - (a - x)y = 0.$$

但如果谁在这最后的方程中用级数来代替 y,他就会看到,级数也是满足这方程的. Lacroix 接下去说,人们知道,对于任何其他的例子,结果都是一样的.他还指出了大量的在今天教材中仍然保留着的例子.

平心而论,18 世纪无穷级数方面的工作中,形式的观点是占统治地位的.总的说来,数学家甚至憎恨任何限制,例如憎恨有必要去考虑一下收敛性的问题.他们的工作产生了很有用的结果,而他们也就满足于得到实用上的支持.他们确已超越了他们所能给出正确理由的界限,但他们在运用发散级数时至少还是小心的.我们将要看到,坚持只能使用收敛级数的主张,是经历大半个 19 世纪才取得成功的.但是,18 世纪的人们最后还是得到了谅解;他们预见到的关于无穷级数的两个很有生命力的思想,后来得到了承认.第一个是发散级数可以用来给函数作数值逼近;第二个是级数可以在解析运算中代表函数,即使这个级数是发散的也行.

参考书目

Bernoulli, James: *Ars Conjectandi*, 1713, reprinted by Culture et Civilisation, 1968.

Bernoulli, James: *Opera*, 2 vols., 1744, reprinted by Birkhaüser, 1968.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, reprinted by Georg Olms, 1968.

Burkhardt, H.: "Trigonometrische Reihen und Integrale bis etwa 1850", *Encyk. der math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1914～1915, 2, Part 1, pp. 825～1354.

Burkhardt, H.: "Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen", *Jahres. der Deut. Math. Verein.*, Vol. 10, 1908, pp. 1～1804.

Burkhardt, H.: "Uber den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit 1750～1860", *Math. Ann.*, 70, 1911, 189～206.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898, Vol. 3, Chaps. 85, 86, 97, 109, 110.

Dehn, M., and E. D. Hellinger: "Certain Mathematical Achievements of James Gregory", *Amer. Math. Monthly*, 50, 1943, 149~163.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, (1), Vols. 10, 14, and 16 (2 parts) B. G. Teubner and Orell Füssli, 1913, 1924, 1933 and 1935.

Fuss, Paul Heinrich von: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, 2 vols., 1843, Johnson Reprint Corp., 1967.

Hofmann, Joseph E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-mathematik", *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 1956, 61~171; also published separately by Institut de Mathématiques, Genève, 1957.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, A. Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, pp. 206~243.

Reiff, R. A.: *Geschichte der unendlichen Reihen*, H. Lauppsche Buchhandlung, 1889; Martin Sändig (reprint), 1969.

Schneider, Ivo: "Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667~1754)", *Archive for History of Exact Sciences*, 5, 1968, 177~317.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, pp. 85~90, 95~98.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200—1800*, Harvard University Press, 1969, pp. 111~115, 316~324, 328~333, 338~341, 369~374.

Turnbull, H. W.: *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, Royal Society of Edinburgh, 1939.

Turnbull, H. W.: *The Correspondence of Issac Newton*, Cambridge University Press, 1959, Vol. 1.

第 21 章

18 世纪的常微分方程

一个不亲自检查桥梁每一部分的坚固性就不过桥的旅行者，是不可能走远的；甚至在数学中，有些事情亦须冒险.

Horace Lamb

1. 主　题

数学家谋求用微积分解决越来越多的物理问题，他们很快发现不得不对付一类新的问题. 他们做的比他们有意识去探求的还多. 比较简单的问题引导到可以用初等函数计算的积分，而某些比较困难的问题则引出不能如此表达的积分，如椭圆积分就是实例(第 19 章第 4 节). 这两类问题都属于微积分范围. 然而，解决更为复杂的问题，就需要专门的技术，这样，微分方程这门学科就应时兴起了.

有几类物理问题促进了微分方程的研究，其中一类就是现在通常称为弹性理论这一领域中的问题. 一个物体如果在外力作用下产生变形，而当外力移去时就恢复原状，我们就说它是弹性的. 最有实际意义的问题是考虑垂直梁和水平梁在外加载荷下所成的形状. 中世纪宏伟教堂的建筑师们用经验处理的这些问题，到 17 世纪由 Galileo, Edme Mariotte (1620? —1684), Robert Hooke (1635—1703)和 Wren 这样一些人做了数学的探讨. 梁的性态是 Galileo 在《关于两门新科学的对话》中所研究的两门科学之一. Hooke 对弹簧的研究引导他发现了定律：一个被伸长或被缩短的弹簧的恢复力，正比于它伸长或缩短的相对长度. 18 世纪的人们

用更多的数学武装了头脑,他们关于弹性的工作,是从钻研这样一些问题开始的,如:一根悬挂在两固定点的非弹性柔软细绳所取的形状;一根悬挂在一固定点并使之振动的弦或链的形状;一根固定在两端的弹性振动弦所取的形状;一根两端固定的杆子在外加载荷下的形状,或在振动时的形状.

摆的问题不断激发着数学家的兴趣. 圆周摆的精确微分方程 $d^2\theta/dt^2+(g/l)\sin\theta=0$ 向研究工作挑战了,甚至用 θ 代替 $\sin\theta$ 所得到的近似方程在分析上也是未曾研究过的. 而且圆周摆的周期与运动的振幅不是严格无关的,这样就要求寻找一条曲线,使得摆锤沿这条曲线摆动的周期与振幅严格无关. Huygens 引进了摆线,在几何上解决了这个问题;但是分析的解还没有形成.

摆的问题密切联系着18世纪的另外两项比较重要的研究:地球的形状和引力的平方反比定律的验证. 因为摆的近似周期 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 依赖于重力加速度 g,所以用摆的周期可以测量地球表面不同地点的重力. 只要沿着一条经线,依次测量出相当于纬度改变1°的长度,再利用某一理论和相应的 g 值,就可确定地球的形状. 事实上,Newton 根据观察到的摆周期随地球表面不同地点的变化,推断出:地球在赤道上是鼓起的.

在 Newton 用理论推断出地球的赤道半径比极半径超过1/230(这个值的百分之三十是大过头的)之后,欧洲的科学家们急欲加以核实. 方法之一是测量赤道附近和极点附近纬度1°所跨经线的长度. 如果地球是扁的,那么后一长度要比前一长度长一些.

Jacques Cassini (1677—1756)及其家庭中的一些成员作了这样的测量,而且在1720年给出了相反的结果. 他们发现两极之间的直径比赤道的直径大了1/95. 为了澄清这个问题,法国科学院在1730年派遣了两个探险队,一队在数学家 Pierre L. M. de Maupertuis 的领导下去拉普兰(Lapland),另一队去秘鲁. Mau-

pertuis 分遣队里有一名是数学家 Alexis-Claude Clairaut. 他们的测量证实了地球在两极是扁平的；Voltaire 欢呼 Maupertuis 是"两极和 Cassini 们的压平者". 其实，Maupertuis 的值是 1/178，比不上 Newton 的精确. 地球的形状问题仍旧是一个重大的课题，而且在一个很长的时期内没有弄清楚，这形状是否是一个扁的球面，或一个扁长的球面，或一般的椭球面，或别的什么旋转面.

如果已经知道了地球的形状，那么与此有关的问题，即引力定律的验证，就可进行了. 知道了地球的形状，就能确定把一物体保持在旋转着的地球表面上或表面附近所需的向心力. 于是，在知道了地球表面上的重力加速度 g 之后，我们就可查对由向心加速度和 g 所提供的全部重力是否确实符合平方反比定律. 有些人怀疑这个定律，Clairaut 就是其中一个，他有一个时期曾经相信引力的形式应该是 $F = A/r^2 + B/r^3$. 引力定律和地球的形状，这两个问题有着更深刻的内在联系，这是因为如果把地球看成旋转的平衡流体，那么平衡的条件就牵涉到流体质点之间的相互吸引力.

主导着这一世纪的物理研究领域是天文学. Newton 已经解决了所谓的二体问题，即：在太阳的引力作用下，一个单一的行星的运动，考虑时把两个物体都理想化成质点. 他也曾经提出了一些办法去研究比较重要的三体问题：月球在太阳和地球引力作用下的性态. 然而，这正是研究行星及其卫星在太阳引力和所有别的星体的相互吸引下的运动的开端. Newton 在《原理》中的工作，虽然实际上构造了微分方程的解，但是还有待于翻译成分析的形式. 而这个工作是在 18 世纪逐步完成的. 那个优秀的法国数学家和物理学家 Pierre Varignon 在进行把动力学从几何学的束缚下解放出来的探索中，顺便开始了这个工作. Newton 也确实用过分析的形式解决了某些微分方程，例如他在 1671 年的《流数法》中(第 17 章第 3 节)和 1676 年的《专论》(*Tractatus*)中，都讲到了微分方程 $d^ny/dx^n = f(x)$ 的解在 x 的一个 $n-1$ 次多项式的范围内是任意

的.在《原理》第二版命题34的注解中,他只讲了什么样形状的旋转曲面在流体中运动时受到的阻力最小;而在1694年给David Gregory的一封信中,他说明了他是怎样得到他的结果的,并且在说明中用了微分方程.

在天文学的问题中,月球的运动受到最大的注意,这是由于确定船只在大海中的经度的一般方法(第16章第4节),同17世纪所介绍的别的方法一样,都有赖于知道月球每时每刻相对于一标准位置(它在该世纪的后期定为英国的格林尼治)的方位.为了决定误差不超过1′的格林尼治时间,就需要知道误差不超过角度15″的月球的方位;甚至这样的误差也可能导致船只的定位有30公里的偏差.但是在Newton的时候,通用的月球位置表远没有达到这样的精度.对月球的运动理论产生兴趣的另一个原因是:它可以用来预报日蚀和月蚀,这反过来对整个天文学理论是一种检验.

常微分方程的主题产生于刚才谈到的一些问题.数学发展了,偏微分方程的课题也引导出常微分方程进一步的工作.现在叫做微分几何与变分法的这两个分支就是这样.在这一章内,我们将讨论那些直接引导到常微分方程(即只包含一个自变量的导数的方程)的基本的早期著作.

2. 一阶常微分方程

像微积分在17世纪后期与18世纪前期的著作一样,常微分方程最早的著作出现在数学家们彼此的通信中(其中有许多已失传了),或者出现在那些常常重登书信中建立的或说明的结果的刊物中.某人宣布一个结果往往引起另一个人的申辩,说他更早做了完全相同的工作.由于存在着激烈的竞争,这种申辩不一定是真实的.有些证明只有概述,而且弄不清作者掌握的详情;同样,在信上写着的一般解法也仅仅是特例的说明.由于这

些理由,我们即使不考虑整个严密性的问题,也很难指出谁是首先得到这些结果的人.

Huygens 在 1693 年的《教师学报》①中明确说到了微分方程,而 Leibniz 在同年的《教师学报》的另一篇文章中称微分方程为特征三角形的边的函数②. 我们通常首先学到的关于常微分方程的观点,即由给定的函数及其导数中消去任意常数后得到微分方程,大约直到 1740 年才出现,并且是由 Alexis Fontaine des Bertins 提出来的.

James Bernoulli 是用微积分求常微分方程问题分析解的先驱者之一. 在 1690 年 5 月③, 他发表了他关于等时问题的解答, 虽然 Leibniz 已经给出了这问题的一个分析解. 这个问题是: 求一条曲线, 使得一个摆沿着它作一次完全的振动, 都取相等的时间, 不管摆所经历的弧长的大小. 这微分方程, 用 Bernoulli 的记号写出, 就是

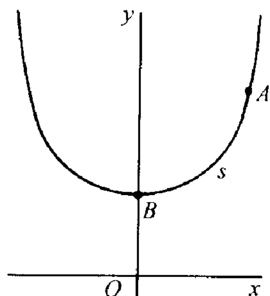


图 21.1

$$dy\sqrt{b^2y-a^3}=dx\sqrt{a^3}.$$

Bernoulli 由微分等式得出结论:两端的积分(这个词第一次被使用)必须相等,并且给出了解答

$$\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y-a^3}=x\sqrt{a^3},$$

这曲线自然是摆线.

James Bernoulli 在 1690 年的同一篇文章中提出了一个问题:一根柔软而不能伸长的弦自由悬挂于两固定点,求这弦所形成的曲线. Leibniz 称此曲线为悬链线. 这个问题早在 15 世纪,Leonar-

① *Œuvres*, 10,512~514.

② *Math. Schriften*, 5, 306.

③ *Acta Erud.*, 1690, 217 ~ 219 = *Opera*, 1, 421~424.

do da Vinci 已经考虑过. Galileo 猜想这条曲线是抛物线. Huygens 证实,这是不对的,并且主要用物理的推论证明:如果弦的重量以及加在弦上的总载荷按水平方向计算是均匀的,那么曲线是抛物线. 而对于实在的悬链线,则沿曲线方向的重量是均匀的.

在 1691 年 6 月份的《学报》中, Leibniz, Huygens 和 John Bernoulli 都发表了各自的解答. Huygens 的解答是几何的,而且是不清楚的. John Bernoulli[①] 用微积分的方法给出一个解答. 在他的 1691 年的微积分教本中有完整的阐述,这就是现代在微积分与力学中所采用的那个讲法,它建立在微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{c} \tag{1}$$

的基础上,其中 s 是由 B 到任意点 A(图 21.1)之间的弧长,而 c 依赖于弦在单位长度内的重量. 从这个微分方程推导出我们现在写成 $y=c\cosh\frac{x}{c}$ 的解. Leibniz 用微积分的方法也得到这个结果.

John Bernoulli 能够解决悬链线问题,而他的哥哥 James 提出这个难题却不能解决,所以他感到莫大的骄傲. 他在 1718 年 9 月 29 日给 Pierre Rémond de Montmort (1678—1719)的一封信中夸耀自己[②]:

> 我的哥哥的努力没有成功;至于我,比较幸运,因为我找到了彻底解决问题的技巧(我说这一点是毫不夸张的,为什么我要隐瞒真情呢?)并且把它转化为抛物线的求长法. 千真万确的是,我为了钻研这个问题牺牲了通宵的休息. 在那些日子里,对于我当时轻轻的年纪和业务而言,这是够呛的. 但是,第二天早晨我满怀喜悦,跑到我哥哥

---

① *Acta Erud.*, 1691, 274～276 = *Opera*, 1, 48～51.

② Johann Bernoulli, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Birkhäuser Verlag, 1955, 97～98.

那里. 他深居不出，为了解开这个 Gordian 的绳结仍在苦苦地奋斗呢. 像 Galileo 一样，他老是想象悬链线是一根抛物线. 我对他说，停止！停止！再不要折腾你自己去证明悬链线与抛物线的等同性了，因为那是完全错误的. 抛物线对悬链线的构造的确有用，但是这两种曲线是如此的不同：一个是代数的，另一个是超越的……然而，你使我不胜惊讶，说我的哥哥曾找到了解决这个问题的方法……我问你，难道你真的会想象，如果我的哥哥已经解决了这个疑难的问题，他对我会这样谦虚，一如他不是一个解决者，而让我与 Huygens 和 Leibniz 一道独享首创者的光荣吗？

在 1691 与 1692 年间，James 与 John 还解决了悬挂着的变密度非弹性软绳、等厚度的弹性绳、以及在每一点上的作用力都指向一固定中心的细绳所成形状的问题. John 还解决了逆问题：已知一悬挂着的非弹性细绳所成形状的曲线方程，求绳子密度相对于弧长的变化规律. 在力学的教科书中，通常见到的就是 John 的解答. James 在 1691 年的《学报》中发表了一个证明：一根给定的绳子悬挂在两固定点，它能取的所有形状中，以悬链线的重心为最低.

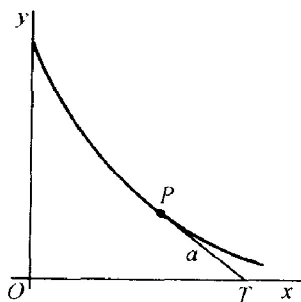


图 21.2

在 1691 年的《学报》中，James Bernoulli 推导出跟踪曲线的方程，在图 21.2 的曲线中，对于曲线上任一点 P，PT/OT 是常数. James 首先推出 $dy/ds = y/a$，这里 s 是弧长. 从这个方程他推得

$$\int y\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}y\sqrt{a^2 - y^2} \tag{2}$$

与

$$\int y^2 dx - -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-y^2)^3}\ , \tag{3}$$

作为曲线的特征积分.(方程(2)可以积分成

$$x+\sqrt{a^2-y^2} = a\log[(a+\sqrt{a^2-y^2})/y].)$$

Leibniz 想到了常微分方程的变量分离法,并且于1691年函告 Huygens. 这样他就解决了形如 $y dx/dy = f(x)g(y)$ 的方程,只要把它写成 $dx/f(x) = g(y)dy/y$,就能在两边进行积分. 他并没有建立一般的方法. 他(1691年)还把一阶齐次方程 $y' = f(y/x)$ 化成积分:他令 $y = vx$,并代入方程,就使变量可以分离. 所有这些概念——变量分离与齐次方程的求解,John Bernoulli 在1694年的《教师学报》中作了更加完整的说明. 其后,Leibniz 在1694年证明如何把线性一阶常微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 化成积分. 他的方法使用了应变量的变换. 一般说来,Leibniz 只解了一阶的常微分方程.

James Bernoulli 后来在1695年的《学报》中①提出了求解现在叫做 Bernoulli 方程:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n \tag{4}$$

的问题. Leibniz 在1696年证明②:利用变量替换 $z = y^{1-n}$,可以把方程化成线性方程(y 和 y'的一次方程). John Bernoulli 给出了另一种解法. James 在1696年的《学报》中本质上用变量分离法把它解出.

Leibniz 和 John Bernoulli 在1694年引进了找等交曲线或曲线族的问题,即:找一曲线或曲线族使得与一已知曲线族相交于给定的角度. John Bernoulli 称等交曲线为轨线,并且在 Huygens 的光学工作基础上指出,因为光线与光的波前是正交的,所以等交轨线的问题在求光线通过非均匀介质时的路径是重要的. 这个问题

① Page 553.

② *Acta Erud.*, 1696,145.

一直到 1697 年都没有公开，那时 John 把它作为向 James 提出的一个挑战. James 只解决了一些特殊的实例. John 导出了一特殊曲线族的正交轨线的微分方程，并且在 1698 年[①]解出了它. 后来 Leibniz 找到一曲线族的正交轨线：考虑 $y^2 = 2bx$，其中 b 是曲线族参数(他引进的一个名词). 从这个方程推出 $y\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = b$. Leibniz 再令 $b = -y\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$，代入 $y^2 = 2bx$，就得到轨线的微分方程 $y^2 = -2xy\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$，它的解为 $a^2 - x^2 = y^2/2$. 虽然他只解出了一些特例，但他却料想到一般的问题与解法.

正交轨线的问题一直处于沉寂状态，直到 1715 年，Leibniz 向英国数学家，主要对准 Newton，提出挑战：找出求一已知曲线族的正交轨线的一般方法. Newton 在造币厂，白天劳累之后，用睡觉前的时间解出了这个问题，他的解答发表在 1716 年的《哲学汇刊》上[②]. Newton 还指明了如何求与一已知曲线族相交成定角的曲线，或相交的角是按照给定的规律随族中曲线变化的曲线. 虽然 Newton 用了二阶常微分方程，但他的方法与现代所用方法没有太大的不同.

关于这个问题的更进一步的工作是由 Nicholas Bernoulli (1695—1726)在 1716 年完成的. James Bernoulli 的学生 Jacob Hermann (1678—1733)在 1717 年的《学报》中给出了一个规则：若 $F(x, y, c) = 0$ 是一已知曲线族，则 $y' = -F'_x/F'_y$，其中 F'_x 与 F'_y 为 F 的偏微商，从而正交轨线的斜率[③]就是 F'_y/F'_x. 于是，Hermann 说，$F(x, y, c) = 0$ 的正交轨线的常微分方程为

$$F'_y\mathrm{d}x = F'_x\mathrm{d}y. \tag{5}$$

他从(5)解出 c，把它代入原来的方程 $F(x, y, c) = 0$，并且解出最后得到的微分方程. 这个方法实际上是 Leibniz 的，只不过 Her-

① *Opera*, 1,266.

② *Phil. Trans.*, 29,1716,399～400.

③ *Acta Erud.*, 1717,349 ff. 也见 John Bernoulli, *Opera*, 2,275～279.

mann 阐述得更为明确而已. 现在更习惯于找出 $F=0$ 所满足的真的微分方程,这方程不含 c;在这个方程中再用 $-1/y'$ 代替 y',这样就得到正交轨线的微分方程.

John Bernoulli 向英国人提出了另外一些轨线的难题,他特别讨厌的是 Newton. 由于英国人与大陆的伙伴已经不和,所以挑战是冷酷的并带有敌意.

John Bernoulli 后来解决了一个抛射体在阻力正比于速度任何次幂的介质中运动的问题,这里的微分方程是

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-kv^{n}=mg\ . \tag{6}$$

那时也认识了一阶恰当方程,即方程 $M(x,\ y)\mathrm{d}x+N(x,\ y)\mathrm{d}y=0$ 中的 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y$ 是某个函数 $z=f(x,\ y)$ 的恰当微分. Clairaut——他关于地球形状的著作是很有名的——已经在 1739 年与 1740 年(第 19 章第 6 节)的论文中给出方程是恰当的条件:$\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$. 这个条件也由 Euler 独立地在 1734—1735 年写的一篇论文中给出[1]. 假如方程是恰当的,那么,如 Clairaut 和 Euler 所指出的那样,它是可以积分的.

当一个一阶方程不是恰当时,往往可以将方程乘上一个叫做积分因子的量,使它化成恰当的. 虽然积分因子在一阶常微分方程的特殊问题中早已采用了,但是领会到这个概念提供了一个方法的却是 Euler(在 1734/1735 年的论文中),他确立了可采用积分因子的方程类属. 他还证明:如果知道了任何一阶常微分方程的两个积分因子,那么令它们的比等于常数,就是微分方程的一个积分. Clairaut 在他 1739 年的文章中独立地引进了积分因子的概念,而且在 1740 年的论文中加上了理论. 求解一阶方程的所有初等方法到 1740 年都已清楚了.

---

[1] *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734-1735, 174～193, pub. 1740 = *Opera*, (1), 22, 36～56.

3. 奇　　解

奇解不能通过给积分常数以一个确定值的方法从通解得到；这就是说，它不是特解. 这是 Brook Taylor 在他的《增量法》[1]中求解一阶二次方程时观察到的. Leibniz 在 1694 年已经看到：一个解族的包络也是一个解. Clairaut 和 Euler 对奇解作了更加完整的探讨.

Clairaut 在 1734 年的著作[2]中处理了现在以他的名字命名的方程

$$y = xy' + f(y'). \tag{7}$$

令 p 表示 y'，则

$$y = xp + f(p). \tag{8}$$

对 x 求微商，Clairaut 得到

$$p = p + \{x + f'(p)\}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ 和 } x + f'(p) = 0. \tag{9}$$

方程 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$ 导致 $y' = c$，再由原方程我们有

$$y = cx + f(c). \tag{10}$$

这就是通解，而且它是一个直线族. 第二个因子，$x + f'(p) = 0$，可以与原方程一起用来消去 p，这就给出了一个新的解，它就是奇解. 为了弄清它是通解的包络，我们利用(10)，并且关于 c 求微商，这样就有

$$x + f'(c) = 0. \tag{11}$$

从(10)与(11)之间消去 c 得到的曲线就是包络. 但是，这两个方程

---

① 1715, p. 26.

② *Hist. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1734, 196～215.

恰好与上面给出奇解的两个方程一样. 奇解是一包络这一事实还是不甚了然的,但是奇解不包括在通解中,Clairaut 却是清楚的.

Clairaut 与 Euler 已经给出方法,从微分方程本身求出奇解,即从 $f(x, y, y') = 0$ 与 $\partial f/\partial y' = 0$ 消去 y'. 这一点以及奇解不包括在通解中的事实,困住了 Euler. 他在 1768 年的《原理》中[①],给出了一个从特殊积分鉴别奇解的判别法,此法在未知通解的情况下,也可以应用. D'Alembert[②] 加强了这个判别法. 后来 Laplace[③] 把奇解(他称作特殊解)的概念推广到高阶方程和三个变量的方程.

Lagrange[④] 对奇解与通解的联系作了系统的研究. 他给出一般的方法,用明确而漂亮的手法从通解消去常数而得到奇解,这超过了 Laplace 的贡献. 设已知通解 $V(x, y, \alpha) = 0$,Lagrange 的方法是求出 $dy/d\alpha$,并令它等于 0,再从这个方程与 $V = 0$ 消去 α. 同样的程序也适用于 $dx/d\alpha = 0$. 他还扩大了 Clairaut 与 Euler 从微分方程求奇解的知识. 最后,Lagrange 给出奇解是积分曲线族的包络的几何解释. 在奇解的理论中,有些特殊的困难他是没有认识到的. 例如,他没有了解到:别的奇异曲线,但不是奇解,也可以从 $f(x, y, y') = 0$ 与 $\partial f/\partial y' = 0$ 消去 y'得到,或者说,一个奇解可以包括一支特解. 奇解的完整理论是在 19 世纪发展起来的,而且由 Cayley 和 Darboux 在 1872 年才把它搞成现代的形式.

4. 二阶方程与 Riccati 方程

二阶常微分方程早在 1691 年就在物理问题中出现了. James

---

① Vol. 1, pp. 393 ff.

② *Hist. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1769,85 ff., pub. 1772.

③ *Hist. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1772, Part 1, 344 ff., pub. 1775 = *Œuvres* 8,325 ~ 366.

④ *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1774, pub. 1776 = *Œuvres*, 4,5~108.

Bernoulli 研究了船帆在风力下的形状问题,即膜盖问题,而且引出一个二阶方程 $d^2x/ds^2 = (dy/ds)^3$,这里 s 为弧长. John Bernoulli 在他的 1691 年的微积分教科书中处理了这个问题,并且证明:它与悬链线问题在数学上是相同的. 二阶方程后来在确定两端固定的弹性振动弦(例如,小提琴的弦)的形状问题中也出现了. Taylor 在研究这个问题时是在研究一个古老的主题. 由 Pythagoras 的信徒开端的数学和乐声的整个主题为中世纪的人们所继承,并且传到了 17 世纪. Benedetti, Beeckman, Mersenne, Descartes, Huygens 和 Galileo 在这方面都是杰出的,虽然没有什么新的数学成果值得在此一提. 一根弦可以按许多模式,即二分之一、三分之一等模式振动;一根分成 k 部分振动的弦所产生的音是第 k 谐音或第 $k-1$ 泛音(基音为第一谐音). 这些知识大部分是通过 Joseph Sauveur(1653—1716)的实验工作到 1700 年在英国就已熟知了.

Brook Taylor① 导出了一根伸张的振动弦的基频. 他解出了方程 $a^2\ddot{x} = \dot{s}y\dot{y}$, 这里 $\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$,而微商是对时间取的,并且给出了 $y = A\sin(x/a)$ 作为弦在任何时刻的形状,这里 $a = l/\pi$, l 是弦的长度. Taylor 关于基频的结果(按照现代的记号)是

$$\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}},$$

其中 T 为弦的张力, $\sigma = m/g$, m 是单位长度的质量,而 g 为重力加速度.

John Bernoulli 在努力研究弦振动问题时,在 1727 年给他的儿子 Daniel 的一封信中和一篇论文中②,考虑了一根无重量的弹性弦,在弦上等间隔地放置着 n 个等质量的质点. 当放置 1, 2, …, 6 个质点时,他推出了质点系的基频. (质点系还存在着别的

① *Phil. Trans.*, 28,1713,26～32,pub. 1714;亦见 *Phil. Trans. Abridged*,6,1809,7～12,14～17.

② *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3,1728,13～28, pub. 1732=*Opera*, 3,198～210.

振动频率.)John 认为在每个质点上的力是它的位移的 $-K$ 倍,而且用分析方法解出了简谐运动方程 $d^2x/dt^2 = -Kx$.然后他过渡到连续弦,从而证明,在任何时刻弦的形状必定是正弦曲线(与Taylor一样),他又算出了基频.这里他解出了 $d^2y/dx^2 = -ky$.John Bernoulli 和 Taylor 两人都没有研究过弹性振动体更高阶的振动模式.

在1728年Euler开始考虑二阶方程.他对这方面的兴趣部分地是由他的力学工作引起的.例如,他已经对摆在有阻尼介质中的运动进行研究,这就引到二阶的微分方程.他为普鲁士国王研究了空气阻力对投射体的影响.这里他接受并改进了英国人Benjamin Robins的工作,搞了一个德文的译本(1745).这个德文本又翻译成英文与法文,并且为炮兵学所应用.

Euler还考虑了一类二阶方程①,他利用变量替换把它们化到一阶方程.例如,他考虑了方程

(12) $$ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} d^2 y,$$

或它的微商形式

(13) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-2}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ax^m}{y^n}.$$

Euler通过方程

(14) $$y = e^{v}t(v),\ x = e^{\alpha v}$$

引进新的变量 t 与 v,这里 α 是待定的常数.方程(14)可以看成 x 与 y 关于 v 的参数方程,这样就可计算 dy/dx 与 d^2y/dx^2,而且代入(13)后就得到 t 作为 v 的函数的一个二阶方程.Euler然后固定 α,从而消去指数因子,这样 v 就不再明显地出现了.再作变换 $z = dv/dt$,就把二阶方程化到一阶的了.

因为这个方法只适用于一类二阶方程,所以其细节就不值得

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3,1727,124~137, pub. 1732 = *Opera*,(1),22,1~14.

再去深究. 但是这部分工作是有历史意义的,因为它开始了二阶方程的系统研究,而且因为 Euler 在这里引进了指数函数,我们将看到,它在求解二阶与高阶方程时将起特别重要的作用.

Daniel Bernoulli,在 1733 年离开圣彼得堡之前,完成了一篇论文,《关于用柔软细绳联结起来的一些物体以及垂直悬挂的链线的振动定理》[①]. 他开始研究的是上端固定的悬链线,没有重量,但带着等间隔的重荷. 当链线振动时,他发现:质点系相对于通过悬挂点的垂线作不同模式的(小)振动. 这些模式中的每一个都有各自的特征频率[②]. 对于长度为 l 的均匀的振动悬链线,他给出了:从最低点算起相距 x 处的位移 y(图 21.3)满足方程



图 21.3

$$\alpha \frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right)+y=0, \tag{15}$$

它的解是一个无穷级数,用现代的记号可表成

$$y = AJ_0\left(2\sqrt{\frac{x}{\alpha}}\right), \tag{16}$$

其中 J_0 是零阶 Bessel 函数(第一类)[③]. 而且,α 满足

$$J_0\left(2\sqrt{\frac{l}{\alpha}}\right)=0, \tag{17}$$

这里 l 是悬链的长度. 他断定(17)有无穷多个根,而且这些根变得越来越小,最后趋向于 0. 他得到了这种 α 的最大值. 对应于每一个 α,就有一个振动的模式和一个特征频率.

他当时说,"从这个理论推导出符合于 Taylor 和我父亲建立的音乐弦理论将是不困难的……实验表明:在音乐弦中存在着类

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 108～122, pub. 1738.

② 在 n 个质点的情形,每个质点都有它自己的运动,这些运动由 n 个正弦项组成,每个正弦项有一个特征频率. 整个系统有 n 个不同的带一个特征频率的主要模式. 到底出现哪一些主要模式,要视初始条件而定.

③ $J_n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k}}{k!(k+n)!}$ (n 是正整数或 0).

似于振动链的交点(节点).”确实,这里 Bernoulli 在认识弦振动的谐音或高阶模式方面超过了 Taylor 和他的父亲.

他的关于悬链线的论文还讨论了非均匀厚度的振动链,那里他引进了微分方程

$$\alpha\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}\right)+y\frac{dg(x)}{dx}=0, \tag{18}$$

其中 $g(x)$ 是链线的重量分布. 对于 $g(x)=(x/l)^2$,他给出了一个级数解,用现代的记号可以把它写成

$$y=2A\left(\frac{2x}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}J_1\left(2\sqrt{\frac{2x}{\alpha}}\right), \tag{19}$$

其中

$$J_1\left(2\sqrt{\frac{2l}{\alpha}}\right)=0,$$

J_1 是第一类的一阶 Bessel 函数.

在 Daniel Bernoulli 的解答中有两点失误:第一,不提位移是时间的函数,这样一来,他的工作在数学上就停留在常微分方程的范围;第二,不提他认识到的那些实在的简单运动模式(泛音)可以叠加成更复杂的运动.

在完成了一本以乐声为主题的著作《建立在确切的谐振原理基础上的音乐理论的新颖研究》(*Tentamen Novae Theoriae Musicae ex Certissimis Harmoniae Principiis Dilucide Expositae*,写于1731年,出版于1739年①)之后,Euler 在一篇论文《关于带有任意多个重量的柔软细绳的振动》中紧跟 Daniel Bernoulli 的工作②,Euler 的结果与 Bernoulli 的结果是极为相似的,只不过 Euler的数学更为清楚. 对于连续链的一种形式,即重力正比于 x^n 的特殊情形,Euler 求解方程

---

① *Opera*, (3),1,197～427.

② *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8,1736,30～47,pub. 1741 = *Opera*,(2),10,35～49.

$$\frac{x}{n+1}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{\alpha}=0.$$

他推得级数解,用现代的记号就是①

$$y=Aq^{-\frac{n}{2}}\mathrm{I}_n(2\sqrt{q}),\ q=-\frac{(n+1)x}{\alpha},$$

这里 n 是一般的. 这样 Euler 就引进了任意实指标的 Bessel 函数. 他还求出了用积分表示的解

$$y=A\frac{\int_0^1(1-t^2)^{(2n-1)/2}\cosh\left(2t\sqrt{\frac{(n+1)x}{\alpha}}\right)\mathrm{d}t}{\int_0^1(1-\tau^2)^{(2n-1)/2}\mathrm{d}\tau}.$$

这恐怕是二阶微分方程的解用积分来表示的最早情形.

Euler 在 1739 年的一篇论文②中研究了谐振子的微分方程 $\ddot{x}+kx=0$ 以及谐振子的强迫振动方程

$$M\ddot{x}+Kx=F\sin\omega_a t\ . \tag{20}$$

他用积分法得到了解,而且发现(实际上是重新发现,因为别人早已发现过了)共振现象;就是说,如果 ω 是振子的自然频率$\sqrt{K/M}$(它在 $F=0$ 时得出),则当 ω_a/ω 趋于 1 时,强迫振动的振幅无限变大.

在试图建立声在空气中传播的模型时,Euler 在他的论文《关于脉动波通过弹性介质的传播》③中考虑了 n 个质量为 M 的质点系,设它们放置在一水平线 PQ 上,并且用相同的弹簧(无重量)连结起来. 设讨论的运动是纵向的,即运动沿着 PQ 进行. 对于第 k 个质点,他得到

---

① 对于一般的 ν(包括复数),

$$\mathrm{I}_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\nu+2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}.$$

函数 $\mathrm{I}_\nu(z)$叫做修正 Bessel 函数.

② *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 11,1739,128~149,pub. 1750 = *Opera*,(2),10,78~97.

③ *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 1, 1747/1748, 67~105, pub. 1750 = *Opera*,(2),10,98~131.

$$M\ddot{x}_k = K(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}),\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

这里 K 是弹簧常数,而 x_k 是第 k 个质点的位移. 对每个质点,他求出精确的特征频率以及一般解

$$(21)\qquad x_k = \sum_{r=1}^{n} A_r \sin\frac{rk\pi}{n+1}\cos\left(2\sqrt{\frac{K}{M}}t\ \frac{\sin r\cdot\pi/2}{n+1}\right),$$

这里 $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 从而,他不仅求得了每个质点个别的模式,而且还求出了作为简谐振动模式叠加而成的质量的一般运动. 可能出现的特定模式依赖于初始条件,就是说,依赖于各质点如何进入运动. 所有这些结果也可用受荷弦的横向运动(垂直于 PQ)来解释.

某些已经研究过的方程,例如 Bernoulli 方程,是非线性的,即方程中出现变量 y, y'和 y''(如果它出现的话)的二次或更高次的项. 在这种一阶方程中,有几个具有特殊的重要性,因为它们与线性二阶方程密切相关. 在常微分方程的早期历史中,非线性的 Riccati 方程

$$(22)\qquad \frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$$

博得了极大的注意.

Riccati 方程是由研究声学的威尼斯的 Jacopo Francesco Riccati 伯爵(1676—1754)引进的,它受到重视是因为可用来帮助求解二阶常微分方程. 他考虑了曲率半径只依赖于纵坐标的曲线而得到[①]

$$x^m\frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2y}{dp^2} + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2$$

(Riccati 写成 $x^m d^2x = d^2y + (dy)^2$),这里必须理解,x 与 y 是依赖于 p 的. 作变量替换后,Riccati 得到一阶方程

$$x^m\frac{dq}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{q},$$

---

① *Acta Erud.*, 1724, 66～73.

然后他假定 q 是 x 的幂函数，例如 x^n，从而化成形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{u^2}{x^n}=nx^{m-n-1}. \tag{23}$$

于是他说明，对于特殊的 n，如何用常微分方程的分离变量法求解(23). 后来，Bernoulli 们确定了 n 的另外一些值，使得相应的(23)可用分离变量法求解.

Riccati 工作之所以值得重视，不仅由于他处理了二阶微分方程，而且由于他有了把二阶方程化到一阶方程的想法. 用这种或那种手段降低常微分方程的阶，这种想法将是处理高阶常微分方程的主要方法.

Euler 在 1760 年[①]考虑了 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z^2=ax^n, \tag{24}$$

而且证明：若已知一特殊积分 v，则变换

$$z=v+u^{-1}$$

把方程化成线性的. 而且，若已知两个特殊积分，则求解原方程的问题就可化为求积分的问题.

D'Alembert[②] 最先考虑 Riccati 方程的一般形式(22)，而且对这种形式采用了"Riccati 方程"这一名称. 他由

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-\lambda^2x\pi^2S}{2aLe} \tag{25}$$

开始，令

$$S=\exp\left[\int p\,\mathrm{d}x\right],\quad p=f(x), \tag{26}$$

由此他得到形如(22)的 p(作为 x 的函数)的方程.

5. 高阶方程

1734 年 12 月，Daniel Bernoulli 给当时在圣彼得堡的 Euler

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1760/1761, 3～63, pub. 1763 = *Opera*, (1), 22, 334～394, 与 9, 1762/1763, 154～169, pub. 1764 = *Opera*, (1), 22, 403～420.

② *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 19, 1763, 242 ff., pub. 1770.

写信说,他已经解决了一端固定在墙上而另一端自由的弹性横梁(钢的或木的一维物体)的横向位移问题. Bernoulli 得到微分方程

$$(27)\qquad K^4\frac{d^4y}{dx^4}=y,$$

其中 K 是常数,x 是横梁上距自由端的距离,y 是在 x 点的相对于横梁未弯曲位置的垂直位移. Euler 在 1735 年 6 月前的一封回信中说道,他也已发现了这个方程,而对这个方程,除了用级数外无法积分. 他确实得到了四个独立的级数解. 这些级数代表圆函数和指数函数,但是 Euler 在当时没有了解到这一点.

四年以后,Euler 在给 John Bernoulli 的信(1739 年 9 月 15 日)中指出,他的解可以表示成

$$(28)\quad y=A\left[\left(\cos\frac{x}{K}+\cosh\frac{x}{K}\right)-\frac{1}{b}\left(\sin\frac{x}{K}+\sinh\frac{x}{K}\right)\right],$$

其中 b 由条件"当 $x=l$ 时, $y=0$"来确定,从而

$$b=\left(\sin\frac{l}{K}+\sinh\frac{l}{K}\right)\Big/\left(\cos\frac{l}{K}+\cosh\frac{l}{K}\right).$$

弹性问题促使 Euler 考虑求解常系数一般线性方程的数学问题,他在 1739 年 9 月 15 日给 John Bernoulli 的信中说,他已经取得成功. Bernoulli 回信说,他在 1700 年就已考虑了这样的方程,甚至是变系数的方程. 实际上他只考虑过一个特殊的三阶方程,并且证明如何把它化为一个二阶方程.

Euler 在他出版的著作中考虑了方程①

$$(29)\qquad 0=Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\cdots+L\frac{d^ny}{dx^n},$$

其中系数是常数. 这方程由于与 y 及其微商无关的项等于 0,所以叫做齐次的. 他指出,通解必定包含 n 个任意常数,而且是由 n 个

① *Misc. Berolin.*, 7,1743,193～242 = *Opera*, (1),22,108～149.

特解分别乘以任意常数后相加而成的. 然后他作替换

$$y = \exp\left[\int r\mathrm{d}x\right],$$

r 是常数,从而得到 r 的方程

$$A + Br + Cr^2 + \cdots + Lr^n = 0,$$

它叫做特征方程或指标方程或辅助方程. 当 q 是这个方程的一个实的单根时,则

$$a \cdot \exp\left[\int q\mathrm{d}x\right]$$

是原微分方程的一个解. 在特征方程有重根 q 时,Euler 令 $y = \mathrm{e}^{qx}u(x)$,代入微分方程,他求得

$$y = \mathrm{e}^{qx}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \kappa x^{k-1}) \tag{30}$$

是包含 k 个任意常数的解,这里 k 是特征方程的根 q 的重数. 他还讨论了共轭复根和复重根的情形. 这样,Euler 完整地解决了常系数线性齐次方程.

稍后他讨论了非齐次的 n 阶线性常微分方程①. 他的方法是对方程乘以 $\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x$,在两边积分,再去确定 α,从而把方程的阶降低. 例如,考虑

$$C\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Ay = X(x), \tag{31}$$

他乘以 $\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x$,得到

$$\int\left[\mathrm{e}^{\alpha x}C\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{e}^{\alpha x}B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{\alpha x}Ay\right]\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\alpha x}X(x)\mathrm{d}x.$$

但是左端必定是

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\left(A'y + B'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

的形式,其中 A' 与 B' 是适当的常数. 对它进行微分,并与原方程进行比较,他得到

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3,1750/1751,3~35, pub. 1753=*Opera*, (1),22,181~213.

(32) $$B' = C,\ A' = B - \alpha C,\ A' = \frac{A}{\alpha},$$

因此,由后两个方程得

(33) $$A - B\alpha + C\alpha^2 = 0.$$

于是可求出 α, A', B',而原方程化为

(34) $$A'y + B'\frac{dy}{dx} = e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X(x)dx.$$

这个方程的一个积分因子是 $e^{\beta x}dx$,这里 $\beta = A'/B'$,因此由(32)他得到 $\alpha\beta = A/C$ 与 $\alpha + \beta = B/C$,再由(33)推出,α 与 β 是方程(33)的两个根.

这个方法应用于 n 阶常系数的常微分方程,像上述例子一样,可以逐步把方程的阶降低. Euler 还仔细讨论了 α 满足的方程有重根和复根的情形.

Lagrange 在研究了常系数常微分方程之后,对变系数的方程也迈出了一步①. 这样就引出了如我们将看到的伴随方程的概念. Lagrange 从下列方程出发:

(35) $$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots = T,$$

这里 L, M, N, ⋯和 T 都是 t 的函数. 为了简单起见,我们将限于二阶方程. Lagrange 用 zdt 乘其两端,其中 $z(t)$尚未确定,再分部积分,从而:

$$\int Mzy'dt = Mzy - \int (Mz)'ydt,$$

$$\int Nzy''dt = Nzy' - (Nz)'y + \int (Nz)''ydt.$$

于是原方程变成

$$y[Mz - (Nz)'] + y'(Nz) + \int [Lz - (Mz)' + (Nz)'']ydt = \int Tzdt.$$

① *Misc. Taur.*, 3,1762/1765, 179 ~ 186 = *Œuvres*, 1, 471 ~ 478.

积分号下的方括号，令其等于0，可以看成 z 的一个常微分方程. 如果由它可以求出 $z(t)$，那么留下的方程是一个比原方程低一阶的 y 的常微分方程. 这个关于 z 的新方程，叫做原方程的伴随方程，这个名字是由 Lazarus Fuchs 在 1873 年取的，Lagrange 并未给它取名.

为了处理 z 的方程(伴随方程)，Lagrange 用同样的方法去降阶. 他用 $w(t)dt$ 乘两端，重复上述步骤，得到 w 的一个方程，降低了 z 的方程的阶. w 的方程除了右端等于 0 外又回到了原来的方程(35). 因此 Lagrange 发现了一个定理：原来非齐次常微分方程的伴随方程的伴随方程，就是原来方程对应的齐次方程. Euler 在 1778 年本质上做了相同的事. 他曾经看到过 Lagrange 的工作，但显然是忘记了.

在对变系数齐次线性常微分方程的进一步的工作中，Lagrange①把 Euler 对常系数线性微分方程得到的某些结果推广到这些方程. Lagrange 发现，齐次方程的通解是由一些独立的特解分别乘以任意常数后相加而成的，而且在知道了 n 阶齐次方程的 m 个特解后，可以把方程降低 m 阶.

6. 级 数 法

我们曾经顺便提到，某些微分方程是用无穷级数去解的. 这个方法的重要性甚至到现在还值得对这一课题作一些特别的评注. 自从 1700 年以来，级数解用得如此广泛，以至现在我们不得不限于少量的例子.

我们知道，Newton 利用了级数去积分稍为复杂一点的函数，其中甚至只牵涉到求曲线下的面积问题. 他也用级数去求解一阶方程. 例如，求解

---

① *Misc. Taur.*, 3, 1762/1765, 190 ~ 199 = *Œuvres*, 1, 481 ~ 490.

(36) $$\dot{y} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2 y,$$

Newton 假定

(37) $$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

于是

(38) $$\dot{y} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \cdots$$

把(37)与(38)代入(36),并使 x 的同次幂的系数相等,就得到

$$A_1 = 2 - 2A_0,\ 2A_2 = 3 - 2A_1,\ 3A_3 = 1 + A_0 - 2A_2,\ \cdots$$

于是,除了 A_0 以外,我们确定了所有的 A_i. 那时已经注意到 A_0 是不定的,因而有无穷多个解. 但是,直到 1750 年左右,对任意常数的意义还不是完全了解的. Leibniz 用无穷级数解某些初等的微分方程①,也用了上述的未定系数法.

大约在 1750 年以后,Euler 把级数方法提到了重要的位置,用来求解那些不能以紧凑形式积分的微分方程. 虽然他求解的是特殊的微分方程,而且其细节往往是复杂的,但是他的方法就是我们现在采用的方法. 他假定解的形式为

$$y = x^\lambda (A + Bx + Cx^2 + \cdots),$$

把 y 与它的微商代入微分方程,利用所得级数中 x 的各次幂的系数必须等于 0 这个条件,就确定出 λ 与系数 A, B, C, …这样,对他在振动薄膜的著作中出现的常微分方程②(第 22 章第 3 节),即

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u = 0,$$

现在叫做 Bessel 方程,Euler 是用一个无穷级数求解的. 他给出的解

$$u(r) = r^\beta \left\{1 - \frac{1}{1\cdot(\beta+1)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^4\right.$$

---

① *Acta Erud.*, 1693 = *Math. Schriften*, 5, 285~288.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1764, 243~260, pub. 1766 = *Opera*, (2), 10, 344~359.

$$-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{6}+\cdots\Big\},$$

除了一个只依赖于β的因子外,就是我们现在所写的 $J_\beta(r)$. 在有关这些函数的进一步的著作中,他证明,对于半奇整数的β,相应的级数化成初等函数. 他而且注意到,对于实的β,$u(r)$有无穷多个零点,他还给出了$u(r)$的积分表示. 最后,对于$\beta=0$与$\beta=1$,他给出了微分方程第二个线性独立的级数解.

Euler 在《积分学原理》[①]中研究了超几何方程

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-aby=0, \tag{39}$$

并且给出了级数解

$$y=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots \tag{40}$$

在 1778 年写的关于这个题目的重要论文[②]中,他再一次给出了上述形式的方程(39)和级数解(40). 他曾经写了另外几篇论文,讨论了他称之为超几何级数的级数,但这名字原先是由 Wallis 用来称呼别的级数的. "超几何"一词是 Gauss 的朋友和老师 Johann Friedrich Pfaff(1765—1825)提出的,用来形容微分方程(39)和级数(40). 级数(40)中的 y 现在用记号 $F(a, b, c; z)$来表示. 我们用它表示 Euler 得到的有名的关系式

$$F(-n, b, c; z)=(1-z)^{c+n-b}F(c+n, c-b, c; z),$$

(41)

$$F(-n, b, c; z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^n\mathrm{d}t$$

$$(\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0).$$

---

① Vol. 2, 1769, Chaps. 8～11.

② *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, 12, 1794, 58～70, pub. 1801 = *Opera*, (1), 16_2, 41～55.

7. 微分方程组

在弹性理论的研究中，直到现在涉及到的一些微分方程是颇为简单的，因为数学家使用了相当粗略的物理原理，而且仍在为掌握更好的原理而奋斗着. 然而，在天文学领域中，物理原理，主要是 Newton 的运动定律和引力定律，是很清楚的，其数学问题也深刻得多. 在研究两个或多个物体在相互吸引作用下的运动时，基本的数学问题是求解常微分方程组，虽然这个问题往往化成求解单独一个方程的问题.

除了个别情况外，有关方程组方面的著作主要是讨论天文学的问题. 列出微分方程的基础是牛顿的第二运动定律，$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$，这里 $\boldsymbol{f}$ 是吸引力. 这是一个向量形式的定律，它表示：$\boldsymbol{f}$ 的每个分量在该分量的方向上产生一个加速度. Euler 在 1750 年的一篇论文①中给出 Newton 第二定律的分析形式：

$$f_x=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ f_y=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ f_z=m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}. \tag{42}$$

这里他用了固定的直角坐标系. 他还指出，对于点状的物体，即质量可以看成集中于一点的物体，m 是总质量；而对于分布质量的物体，m 是 $\mathrm{d}M$.

我们将简略地考虑一下微分方程的建立. 假定一个质量为 M 的物体固定于原点，另一个质量为 m 的运动体位于 (x, y, z). 于是，沿坐标轴方向的引力分量(图 21.4)为

$$f_x=-\frac{GMmx}{r^3},\ f_y=-\frac{GMmy}{r^3},\ f_z=-\frac{GMmz}{r^3},$$

其中 G 是引力常数，而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

容易证明，运动物体保持在一个平面内，这样方程组(42)化为

① *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 6, 1750, 185～217, pub. 1752 = *Opera*, (2), 5, 81～108.

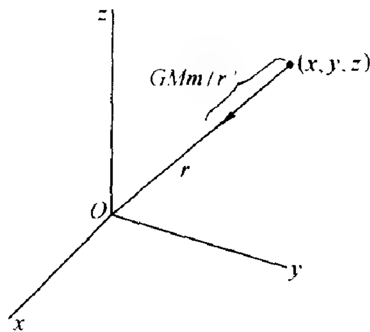


图 21.4

(43) $$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kx}{r^3},\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{ky}{r^3},$$

而 $k=GM$. 在极坐标中,这些方程变成

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{k}{r^2},$$

(44) $$r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0.$$

一个物体在另一个固定物体的引力下运动的情况,两个微分方程可以合成一个只含 x 和 y 或 r 和 θ 的微分方程,这是由于,例如第二个极坐标方程可以积分成 $r^2\frac{d\theta}{dt}=C$,再把$\frac{d\theta}{dt}$的值代入第一个方程. 由此可以弄清楚,运动物体的轨迹是一条以第一个固定物体为焦点的圆锥曲线.

如果两个物体在互相吸引下一起运动,那么微分方程就稍有不同了. 令 m_1 与 m_2 是两个具有球对称质量的球形物体的质量,而且 $m_1+m_2=M$. 选取一个固定坐标系(取两物体的质量中心为原点),并且令(x_1, y_1, z_1)是一个物体的坐标,而(x_2, y_2, z_2)是另一个物体的坐标;设 r 是距离

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

于是描述它们运动的方程组就是

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-km_1m_2\frac{(x_1-x_2)}{r^3},$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -km_1 m_2 \frac{(y_1 - y_2)}{r^3},$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -km_1 m_2 \frac{(z_1 - z_2)}{r^3},$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -km_1 m_2 \frac{(x_2 - x_1)}{r^3},$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -km_1 m_2 \frac{(y_2 - y_1)}{r^3},$$

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = -km_1 m_2 \frac{(z_2 - z_1)}{r^3}.$$

这是六个二阶方程的方程组,它的解要求有12个积分,而每个积分都有一个任意常数.这些常数是由每个物体的初始位置的三个坐标和初始速度的三个分量来确定的.方程可以解出,而且它的解表明:每个物体都是按(以两个物体的质量中心为焦点的)圆锥曲线运动的.

实际上,这个在引力相互吸引下两个球体的运动问题,是由Newton在《原理》(卷Ⅰ第11节)中用几何方法解决的.然而,分析方面的工作暂时还没有动手进行.在力学方面,法国人追随了Descartes的系统,一直到Voltaire在1727年访问伦敦之后,才宣扬Newton的体系.甚至在剑桥(Newton的母校)还继续用Descartes的信徒Jacques Rohault(1620—1675)的教科书教授自然哲学.另外,17世纪后半期最著名的数学家——Huygens, Leibniz和John Bernoulli——是反对引力的观念及其应用的.用分析方法研究行星运动是由Daniel Bernoulli着手进行的,他由于1734年关于二体问题的一篇论文而得到了法国科学院的奖金.Euler在他的书《行星和彗星的运动理论》(*Theoria Motuum Planetarum et Cometarum*)①中就完全用分析方法了.

设有n个物体,每个都是球形的,而且质量分布是球对称的(密度为半径的函数),那么它们之间的吸引一如它们的质量集中

① 1744 = *Opera*, (2),28,105～251.

在各自的质量中心一样. 令 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 表示质量,(x_i, y_i, z_i) 表示第 i 个质量相对于固定坐标系的可变坐标,令 r_{ij} 为从 m_i 到 m_j 的距离. 于是作用在 m_1 上的力沿 x 方向的分量为

$$-\frac{k}{r_{12}^3}m_1m_2(x_1-x_2),\ -\frac{k}{r_{13}^3}m_1m_3(x_1-x_3),\ \cdots,$$

$$-\frac{k}{r_{1n}^3}m_1m_n(x_1-x_n),$$

对于沿 y 方向与 z 方向的分量,有类似的表达式. 每个物体上都有这种力的分量作用着.

于是,第 i 个物体的运动方程是

$$(45)\qquad \begin{aligned} m_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2} &= -km_i\sum_{j=1}^n m_j\frac{(x_i-x_j)}{r_{ij}^3},\\ m_i\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2} &= -km_i\sum_{j=1}^n m_j\frac{(y_i-y_j)}{r_{ij}^3},\\ m_i\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2} &= -km_i\sum_{j=1}^n m_j\frac{(z_i-z_j)}{r_{ij}^3}, \end{aligned}$$

$j\neq i$; $i=1, 2, \cdots, n$. 共有 $3n$ 个二阶方程. 原点可以取在 n 个物体的质量中心或其中的一个物体上,例如在太阳上. 共有 $6n$ 个积分,其中 10 个可以相当容易地找到,这 10 个积分就是我们在一般问题中所知道的仅有的积分.

n 体问题,实际上甚至三体问题,是不能精确解出的. 因此对这个问题的研究已经选择了两个一般的方向. 第一个方向是探索人们可以导出什么样的、至少可以阐明运动的定理. 第二个方向是找近似解,在某个可以利用初始资料的时刻以后的一个时期内,这种近似解可能是有用的,这就是大家知道的摄动法.

第一种类型的研究,对 n 体质量中心的运动,产生了几个定理,由 Newton 在他的《原理》中给出. 例如,n 体质量中心在一直线上作匀速运动. 上面提到的 10 个积分,它们是所谓运动守恒律的推论,也算是第一种类型的定理. 这些积分,Euler 是知道的. 对

于三体问题的一些特殊情形,还有某些精确的结果,这些结果应归功于天体力学大师之一,Joseph-Louis Lagrange.

Lagrange(1736—1813)是法国和意大利血统的人.在少年时,他对数学没有好印象,但是还在学校的时候,他读了Halley写的关于Newton微积分的功劳的一篇短文,而变得热爱这门学科了.在19岁的时候,他就成为他的故乡都灵的皇家炮兵学校的数学教授.他很快对数学做出大量的贡献,甚至在早年时,他已被公认为那个时代的最大数学家之一.虽然Lagrange的工作涉及许多数学分支——数论、代数方程论、微积分、微分方程和变分法——与许多物理分支,但是他的主要兴趣是把引力定律应用于行星运动.他在1775年说过,"算术研究是最叫我伤脑筋的,而且恐怕是最少价值的."Archimedes是Lagrange崇拜的偶像.

Lagrange最有名的著作,他的《分析力学》(*Mécanique analytique*, 1788;第二版,1811—1815;他死后又出一版,1853)扩大并完善了Newton关于力学的工作.Lagrange有一次曾经发牢骚说,Newton是一个最侥幸的人,因为只有一个宇宙而Newton已经发现了它的数学规律.然而,Lagrange在使世界了解Newton理论的完美性方面也有功绩.虽然他的《分析力学》是一本科学经典,并且对常微分方程的理论与应用也很重要,但是Lagrange却难于找到一个出版者.

在三体问题中得到的一些特殊精确解,是Lagrange在1772年一篇得奖论文《论三体问题》(*Essai sur le problème des trois corps*)①中给出的.这些解中,有一个是说,这些物体能够作这样的运动,使得它们的轨道是同时描出的三个相似椭圆,而且以三物体的质量中心为共同的焦点.另一个是,假定三个物体从一个等边三角形的三个顶点开始运动,那么它们就好像粘住在这个三角形上运动着,而这个三角形本身围绕着三物体的质量中心转动.第三

① *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 9, 1772 — *Œuvres*, 6,229~331.

个是,假定三物体是从一直线上的初始位置投入运动的,那么在适当的初始条件下,它们将继续固定在这一直线上,而这条直线在一平面上围绕物体的质量中心转动.对于 Lagrange 来说,这三种情况是没有物理实在性的,然而那个等边三角形的情况在 1906 年被发现适用于太阳、木星和一个名叫 Achilles 的小游星.

关于 n 体问题的第二类问题,如已经指出的,是从事于近似解或摄动理论的研究.两个球形的物体,在它们的引力相互作用下,是沿圆锥曲线运动的,称这种运动为非摄动的.对这种运动的任何偏离,不管是位置的还是速度的,都称为被摄动的运动.如果两个球体所处的介质对运动具有阻力,或者如果两个物体不再是球形的,比如说是扁球形的,或者如果除这两个物体外还牵涉到更多的物体,那么这些物体的轨道将不再是圆锥曲线了.在应用望远镜以前,摄动现象是不引人注目的.在 18 世纪,计算摄动成为一大数学问题,而 Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange 以及 Laplace 都作出了贡献.在这个领域中,Laplace 的著作是最杰出的.

Pierre-Simon de Laplace(1749—1827)出生于诺曼底(Normandy)的博蒙(Beaumont)镇,他的父母家境还算不错. Laplace 在 16 岁那年就进了开恩大学,学习数学,当时他很有可能成为一个牧师.他在开恩度过了 5 年,那时他在开恩写了一篇关于有限差分的论文.在完成他的学业后,Laplace 带着几封介绍信到巴黎去找 d'Alembert,遭到 d'Alembert 的回绝.后来 Laplace 向 d'Alembert 写了一封信,阐述了力学的一般原理,这回,引起了 d'Alembert 的重视而召见他,并给他取得巴黎军事学校数学教授的职位.

Laplace 还在青年时代就发表了丰硕的成果.巴黎科学院在他 1773 年入选后不久所写的一份报告书中指出,还没有一个如此年轻的人就在这样多方面和困难的主题上,提出如此多的论文.在

1783年,他接替了军事考试委员 Bezout,而且考试了 Napoleon. 在革命期间,他是度量衡委员会的委员,但是后来与 Lavoisier 还有其他人由于不是好的共和人士而被开除了. Laplace 就隐居在巴黎附近的一个小城市梅龙,在那里他写了他有名的通俗的《宇宙系浅说》(*Exposition du système du monde*, 1796). 革命后,他是师范学院的教授,当时 Lagrange 也在那里教书. Laplace 在政府的几个委员会里工作,后来历任内政部长、议会委员和议会大臣. Laplace 虽然由 Napoleon 封为伯爵,但是他在1814年投票反对 Napoleon,而依附了 Louis 十八. Louis 封他为法兰西的侯爵与贵族.

在参与政治活动的这些年月里,他继续从事科研工作. 在1799年与1825年期间,出版了他的五卷本《天体力学》(*Mécanique céleste*). 在这部著作中,Laplace 给出了太阳系力学问题的"完全的"分析解. 他尽可能少用观察资料.《天体力学》把 Newton, Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange 以及 Laplace 自己的结果和发现,统一成一个整体. 这部杰作是如此的完全,以至他的最接近的后继者不能再添加什么了. 恐怕唯一的缺点是,Laplace 经常不交代他的结果的来源,给人的印象好像都是他自己的.

1812年,他出版了《概率的分析理论》(*Théorie analytique des probabilités*). 第二版(1814)的序言是一篇通俗的短文,题为《关于概率的哲学浅说》(*Essai philosophique sur les probabilités*),其中有一段著名的议论,大意是说,世界的未来是完全由它的过去决定的,而且只要掌握了这个世界在任一给定时刻的状态的数学信息,就能预报未来.

Laplace 在数学物理中有许多重要的发现,其中有一些我们将在以后几章中谈到. 事实上,凡是有助于解释世界的任何事情,他都感兴趣. 他研究过流体动力学、声波的传播和潮汐. 在化学方面,

他的关于物质液态的著作是经典的．他的关于在毛细管中使水上升的表面张力的研究和在液体中内聚力的研究，都是重要的．Laplace 与 Lavoisier 设计了一个测量热量的冰块量热计(1784)，测定了许多物质的比热，对他们来说，热仍旧是一种特殊的物质．不过，Laplace 的大半生致力于天体力学的研究，他在 1827 年逝世．据说他的遗言是，“我们知道的，是很微小的；我们不知道的，是无限的”——可是 de Morgan 说，那遗言是“人们了解的只是幻象”．

Laplace 与 Lagrange 有经常的联系，但是他们的个性与工作都是不相同的．Laplace 的虚荣心，使他不能充分肯定他认为是他对手的工作；事实上，他利用了 Lagrange 的许多概念而不作声明．通常在一同谈到 Lagrange 和 Laplace 时，总是要对 Laplace 的个人品德进行批评．Lagrange 是数学家，他写作时很精心，写得很清楚，很优美．Laplace 创造了许多新的数学方法，它们后来发展成为数学的分支．但是，他从来不关心数学，除非它有助于研究自然．当他在物理学的研究中碰到一个数学问题时，他解决得几乎是很随便的，并且仅仅说，“容易看出……”，从不耐心解释他是如何得出结果的．可是，他也承认，要重新建立他自己的结果是不容易的．美国数学家与天文学家 Nathaniel Bowditch(1773—1838)翻译了《天体力学》五卷本的四卷以及附加的说明．他说，只要一碰见“容易看出……”这句话，我就知道总得花几个小时的苦功夫去填补这个空白．的确，Laplace 对数学是不耐烦的，而爱好应用．他对纯粹数学不感兴趣，至于他在这方面的贡献乃是他在自然哲学中的伟大著作的副产品．数学是一种手段，而不是目的，是人们为了解决科学问题而必须精通的一种工具．

在与本章主题有关的范围内，Laplace 的工作是处理行星运动问题的近似解．用近似方法得到有用解的可能性在于下列原因．太阳系是由太阳主宰的，太阳占整个系统总质量的

99.87%.这就是说,由于行星相互之间的摄动力是微小的,所以行星的轨道近乎椭圆.然而,木星占行星总质量的70%.又地球的卫星相当接近于地球,这样它们就互相影响,因此必须考虑摄动.

三体问题,特别是太阳、地球和月球,在18世纪研究得最多,一部分原因是由于它是二体问题之后接着要考虑的一步,另一部分原因是由于航海需要对月球运动有精确的认识.在太阳、地球和月球的实例中,可以利用某些有利的事实,即太阳与其余两个星球离得较远,从而可以认为它对地球和月球之间的相对运动只产生微小的影响.在太阳和两个行星的实例中,通常认为一个行星摄动了另一个行星绕太阳的运动.如果其中一个行星是微小的,那么它对另一个行星的引力效应可以忽略,但是必须考虑大行星对小行星的引力效应.三体问题的这些特例叫做受限制的三体问题.

三体问题的摄动理论最先应用于月球的运动,这是Newton在《原理》的第三卷中用几何方法作出的.Euler与Clairaut试图求得一般三体问题的精确解而抱怨困难,因而只得用近似方法.这里Clairaut用微分方程的级数解作出了第一个实在的进展(1747).然后他及时地把他的结果应用到Halley彗星的运动.在1531年、1607年和1682年曾经观察到这颗彗星,他预计在1759年彗星将出现在它绕地球的轨道的近地点上.Clairaut计算了由木星和土星的引力所产生的摄动,并且在1758年11月14日在巴黎科学院宣读的一篇论文中预报,1759年4月13日彗星将出现在近地点.他附带说明,精确的时间不能肯定,但不出一个月的范围,这是因为木星和土星的质量还知道得不很精确,而且还有别的行星所引起的微小摄动.在3月13日,彗星到达了它的近地点.

为了计算摄动,产生了所谓的元素变值法或参数变值法——

或积分常数变值法，这是一个最有效的方法. 我们将只限于讨论它的数学原理，所以不考虑完整的物理背景.

数学上，三体问题的参数变值法可追溯到 Newton 的《原理》. 在研究月球绕地球运动而得到椭圆轨道后，Newton 考虑了月球轨道的变值，算出太阳对它的影响. John Bernoulli 在 1697 年的《教师学报》① 上用这个方法去解个别情况下的非齐次方程，而 Euler 在 1739 年用它来研究二阶方程 $y''+k^2y=X(x)$. Euler 在 1748 年的一篇论文②中最先用它去研究行星运动的摄动，这篇论文研究了木星和土星的相互摄动，获得了法国科学院的奖金. 对这个方法，Laplace 写了许多论文③. 这个方法是由 Lagrange 在两篇论文中④充分发展的.

单个常微分方程的参数变值法由 Lagrange 应用到 n 阶方程

$$Py+Qy'+Ry''+\cdots+Vy^{(n)}=X,$$

其中 $X, P, Q, R, \cdots, V$ 是 x 的函数. 为了简单起见，我们将假定方程是二阶的.

在 $X=0$ 的情况，Lagrange 已知通解是

$$y=ap(x)+bq(x)\,, \tag{46}$$

其中 a 与 b 是积分常数，而 p 与 q 是齐次方程的特殊积分. 接着，Lagrange 说，让我们把 a 与 b 看作 x 的函数. 因而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ap'+bq'+pa'+qb'\,. \tag{47}$$

Lagrange 令

$$pa'+qb'=0\,; \tag{48}$$

---

① Page 113.

② *Opera*, (2), 25, 45～157.

③ 例如见 *Hist. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1772, Part 1, 651 ff., pub. 1775 = *Œuvres*, 8, 361～366, 和 *Hist. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1777, 373 ff., pub. 1780 = *Œuvres*, 9, 357～380.

④ *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 5, 1774, 201 ff., 和 6, 1775, 190 ff. = *Œuvres*, 4, 5～108 和 151～251.

就是说,他让 y'中由 a 与 b 的变值而引起的那一部分等于0. 由(47),根据(48),有

$$(49)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=ap''+bq''+a'p'+b'q'.$$

如果方程高于二阶,Lagrange 再令 $p'a'+q'b'=0$,并且求出 d^3y/dx^3. 由于在我们这个情形,方程是二阶的,他就保留了(49)中的全部项.

他接着把(46)、(47)和(49)给出的 y, dy/dx 和 d^2y/dx^2 的表达式代入原方程. 由于(46)是齐次方程的解,而(48)扔掉了由 a 与 b 的变化而引起的那些项,所以在代入后留下

$$(50)\qquad p'a'+q'b'=\frac{X}{R}.$$

这个方程与方程(48)组成了关于未知函数 a'与b'的代数方程组. 从这方程组可以解出 a'和 b',用已知函数 p, q, p', q', X 与 R 表示. 然后可用积分求得 a 与 b,或者至少可以化成积分. 以这些 a 与 b 代入(46),就得到原来的非齐次方程的一个解. 这个解与齐次方程的解一起组成非齐次方程的通解.

Lagrange 以更一般的形式处理了参数变值法[①],而且指出,这个方法可以应用于许多物理问题. 在1808年的一篇论文中,他把这个方法应用到由三个二阶方程组成的方程组. 技巧上自然更复杂了,但是基本思想还是把相应的齐次方程的六个积分常数看成是变化的,并确定它们,使表达式满足非齐次方程组.

Lagrange 与 Laplace,在他们正在发展参数变值法期间以及其后,写了一些解答太阳系基本问题的读物. Laplace 在他的无与伦比的著作《天体力学》中,总结了他们工作成果的概况:

> 在这本著作的第一部分,我们给出了物体平衡与运动的一般原理. 这些原理对天体运动的应用,通过几何的[分

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Inst. France*, 1808, 267 ff. = *Œuvres*, 6, 713~768.

> 析的]论证,不必作任何假设,就导出万有引力定律,而重力的作用与抛射物运动则是这个定律的特例.然后我们考虑了服从于这个伟大自然定律的体系,用奇妙的分析,得到了它们的运动和图形的一般表达式,以及覆盖在它们表面上的流体振动的一般表达式.从这些表达式,我们推断出所有大家知道的潮汐现象;纬度的变化与地球表面的引力;岁差;月球的引力作用;以及土星环的形状与转动.我们还指出这些环永远停留在土星赤道平面上的理由.而且从同一个引力理论,我们还推出行星运动的主要方程,特别是木星和土星的方程,木星与土星最大的均差有一个 900 年以上的周期①.

Laplace 总结说:大自然安排的天体布局,"永远根据同一原理,这些原理在地球上如此奇妙地适合于个体的生存和物种的永存."

一方面求解微分方程的数学方法有了改进,一方面关于行星的新的物理事实有所发现,整个 19 与 20 世纪,在 Laplace 提到过的各种课题方面,特别是关于 n 体问题和太阳系的稳定性方面,人们为了求得更好的结果而作出了努力.

8. 总　结

如我们已经看到的,为了解决最初只不过涉及到一些积分的物理问题,逐渐引导到一个新的数学分支的出现,即常微分方程的建立.到 18 世纪中期,微分方程的课题成为一门独立的学科,而这种方程的求解成为它本身的一个目标.

对解的理解与寻求,在本质上逐渐起了变化.最初,数学家用初等函数找解,接着他们满足于用一个没有积出的积分来表示解.

① Vol. 3 序言.

在用初等函数及其积分来寻找解的巨大努力失败之后，数学家就变得满足于用无穷级数求解了.

把解表成积出形式的难题没有被遗忘掉，但数学家们不是企图用这种方式去解物理问题中出现的特殊微分方程，而是去寻找那些可以用有限个初等函数表示其解的微分方程. 可以用这种方式积分的大量微分方程找到了. D'Alembert(1767)研究过这一问题，并把椭圆积分列入了可以接受的解答中. 对这问题的一个典型研究方法是由 Euler(1769)和其他一些人做出的，这是从解可以表成积出形式的微分方程出发，然后从这些已知方程导出其他的方程. 另外一种研究是寻找级数解可以只含有限多个项的条件.

在 Marie Jean Antoine-Nicolas Caritat de Condorcet(1743—1794)著的《积分计算》(*Du calcul intégral*, 1765)中，一个有趣而没有结果的篇章是，他企图把求解常微分方程所用的许多孤立的方法与技巧搞出一个条理. 他把这种运算列成微分、消去和替换，并想把所有的方法都划归到这些规范运算. 这个工作是失败了. 与这个计划类似的是，Euler 证明：凡是可用变量分离法的地方都可用积分因子，但是反之不然. 他还证明：对于高阶微分方程，变量分离法将是不可行的. 至于寻找替换，他发现没有一般原则①，而且它与直接求解微分方程的难度相同. 但是，变换可以降低微分方程的阶. Euler 用这个概念去解 n 阶非齐次线性常微分方程，甚至在齐次的情况，他想适当地选取 p，使得每个 $\exp\int p dx$ 给出常微分方程的一阶因子. 降阶法也是 Riccati 的方案. 还有许多其他的方法，包括 Lagrange 的未定乘子法. 最早以为 Lagrange 方法是普遍适用的，但是结果并非如此.

探索常微分方程的一般积分方法大概到 1775 年终止. 许多新的著作仍旧是研究常微分方程的，特别是那些从求解偏微分方程

---

① *Institutiones Calculi Integralis*, 1, 290.

中得出的常微分方程. 但是,除了我们这里已提到过的那些方法以外,一百年上下没有发现别的重大的新方法;直到 19 世纪末才引进了算子方法和 Laplace 变换. 事实上,人们对于一般的求解方法的兴趣减退了,因为得到了一些适合于应用的这种或那种形式的方法. 求解常微分方程的广泛的综合的原则仍付阙如. 总的说来,这门学科还是各种类型的孤立技巧的汇编.

参考书目

Bernoulli, James: *Opera*, 2 vols., 1744, reprinted by Birkhaüser, 1968.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, reprinted by Georg Olms, 1968.

Berry, Arthur: *A Short History of Astronomy*, Dover (reprint), 1961, Chaps. 9～11.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924, Vol. 3, Chaps. 100 and 118, Vol. 4, Sec. 27.

Delambre, J. B. J.: *Histoire de l'astronomie moderne*, 2 vols., 1821, Johnson Reprint Corp., 1966.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, Orell Füssli, Series 1, Vols. 22 and 23, 1936 and 1938; Series 2, Vols. 10 and 11, Part 1, 1947 and 1957.

Hofmann, J. E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal mathematik", *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 61～171. Published separately by Institut de Mathématiques, Geneva, 1957.

Lagrange, Joseph Louis: *Œuvres de Lagrange*, Gauthier-Villars, 1868～1873, relevant papers in Vols. 2, 3, 4, and 6.

Lagrange, Joseph Louis: *Mécanique analytique*, 1788; 4th ed., Gauthier Villars, 1889. The fourth edition is an unchanged reproduction of the third edition of 1853.

Lalande, J. de: *Traité d'astronomie*, 3 vols., 1792, Johnson Reprint Corp., 1964.

Laplace, Pierre-Simon: *Œuvres complètes*, Gauthier Villars, 1891～1904, relevant papers in Vols. 8, 11 and 13.

Laplace, Pierre-Simon: *Traité de mécanique céleste*, 5 vols., 1799～1825. Also in *Œuvres complètes*, Vols. 1～5, Gauthier-Villars, 1878～1882. English trans. of

Vols. 1～4 by Nathaniel Bowditch, 1829～1839, Chelsea (reprint), 1966.

Laplace, Pierre Simon: *Exposition du système du monde*, 1st ed., 1796, 6th ed. in *Œuvres complètes*, Gauthier Villars, 1884, Vol. 6.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, 1802, Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, 163～200; Vol. 4, 1～125.

Todhunter, I.: *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth*, 1873, Dover (reprint), 1962.

Truesdell, Clifford E.: *Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia, Vol. X et XI Seriei Secundae*, in Euler, *Opera Omnia*, (2), 11, Part 2, Orell Füssli, 1960.

第 22 章

18 世纪的偏微分方程

数学分析与自然界本身同样的广阔.

Joseph Fourier

1. 引　　言

跟常微分方程的情况一样,数学家们并不是自觉地创立偏微分方程学科的.他们不断地探索那些引导出前一学科的同样的物理问题;当他们更好地掌握了构成这些现象基础的物理原理时,他们就确切阐明了现在包含在偏微分方程中的这些物理现象的数学表述.例如,由于曾经把振动弦的位移分别作为时间的函数以及作为从一个端点到弦上一点的距离的函数来进行研究,于是把位移作为这两个变量的函数来研究并试图了解所有可能的运动就导致了一个偏微分方程.这一研究的自然继续,即考察弦发出的声音在空气中的传播,导出了又一些偏微分方程.在研究了这种声音之后,数学家们处理了各种形状的号角、管风琴、铃、鼓和其他乐器发出的声音.

用物理的术语来说,空气是一种流体,不过恰好是可压缩的.液体实际上是不可压缩的流体.这类流体的运动规律,特别地,还有能在这两者中传播的波变成了一个广阔的研究领域,现在构成了流体动力学这门学科.这个领域同样也提出了偏微分方程.

整个 18 世纪,数学家们继续致力于不同形状的物体,尤其是椭球体所产生的万有引力问题的研究.虽然基本上这是一个三重

积分的问题,但是 Laplace 以我们即将考察的一种方式把它变成了偏微分方程的问题.

2. 波动方程

虽然特殊的偏微分方程早在1734年就出现在 Euler 的著作[①]中,并于1743年出现在 d'Alembert 的《论动力学》(*Traité de dynamique*)中,但其中并无值得注意的东西. 关于偏微分方程的第一次真正的成功来自对以小提琴弦为典型的弦振动问题的重新进攻. 为使偏微分方程易于处理,加上了振动很小的近似. Jean Le Rond d'Alembert(1717—1783)在1746年的论文[②]《张紧的弦振动时形成的曲线的研究》中说,他提议证明无穷多种与正弦曲线不同的曲线是振动的模式.

我们也许记得在上一章中首次接触弦振动时,弦被当成"小珠的弦",即弦被看成由 n 个离散的、相等的和等间隔的、彼此间用没有重量的柔软的弹性绳相连接的重物构成. 为了处理连续的弦,重物的数目允许变成无穷多个,同时每一个的大小和质量都减小,使得当"珠子"个数增加时总质量趋近连续弦的质量. 在取极限时存在着数学上的困难,不过这种细微的地方被忽视了.

John Bernoulli 在1727年(第21章第4节)处理了离散质量的情况. 如果弦的长度是 l,位于 $0 \leqslant x \leqslant l$,又如果第 k 个质量的横坐标是 x_k, $k = 1, 2, \cdots, n$(在 $x = l$ 处的第 n 个质量是不动的),那么

$$x_k = k\frac{l}{n},\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

通过分析第 k 个质量上的力,Bernoulli 已经证明,如果 y_k 是第 k

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 184～200, pub. 1740 = *Opera*, (1), 22, 57～75.

② *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 3, 1747, 214～219 和 200～249, pub. 1749.

个质量的位移,则

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = \left(\frac{na}{l}\right)^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}),\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$$

其中 $a^2 = lT/M$,T 是弦中的张力(弦振动时它被当作常数),M 是总质量. D'Alembert 用 $y(t,\ x)$代替 y_k,用 Δx 代替 l/n. 于是

$$\frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{y(t,\ x+\Delta x) - 2y(t,\ x) + y(t,\ x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right].$$

然后他注意到当 n 变成无穷时 Δx 趋于 0,方括号内的表达式就变成$\partial^2 y/\partial x^2$. 因此

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial t^2} = a^2\ \frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial x^2}\ ,$$

其中 a^2 现在是 T/σ,σ 是单位长度的质量. 这样一来,现在称为一维的波动方程就第一次出现了.

因为弦固定在端点 $x=0$ 和 $x=l$,所以解必须满足边界条件

$$(2)\qquad y(t,\ 0) = 0,\ y(t,\ l) = 0\ .$$

当 $t=0$ 时,弦被拉到某形状 $y=f(x)$ 然后放开,这意味着每一质点出发时初速为 0. 这些初始条件在数学上被表示为

$$(3)\qquad y(0,\ x) = f(x),\ \left.\frac{\partial y(t,\ x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\ ,$$

它们也必须被解所满足.

这个问题被 d'Alembert 以现代教科书中还经常引用的非常巧妙的方法解出来了. 为了节省篇幅,我们将不引全部细节. 他首先证明

$$(4)\qquad y(t,\ x) = \frac{1}{2}\phi(at+x) + \frac{1}{2}\psi(at-x)\ ,$$

其中 ϕ 和 ψ 暂时还是未知函数.

至此 d'Alembert 已推出偏微分方程(1)的每个解都是 $(at+x)$ 的函数与 $(at-x)$ 的函数之和. 将(4)直接代入(1),容易证明逆命题成立. 当然 d'Alembert 还必须满足边界条件和初始条件.

把条件 $y(t,0)=0$ 用于(4),对一切 t 有

(5) $$\frac{1}{2}\phi(at)+\frac{1}{2}\psi(at)=0.$$

因为对任一 x, $ax+t=t'$ 总对某一 t' 成立,我们可以说对任何 x 及 t 都有

(6) $$\phi(x+at)=-\psi(x+at).$$

从(4)看出条件 $y(t,l)=0$ 变成

(7) $$\frac{1}{2}\phi(at+l)=\frac{1}{2}\phi(at-l);$$

而由于上式对 t 恒等,这就证实了 ϕ 一定是关于 $at+x$ 的以 $2l$ 为周期的周期函数.

由(4)及 $\phi=-\psi$,条件

(8) $$\left.\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

产生出

(9) $$\phi'(x)=\phi'(-x).$$

积分后变成

(10) $$\phi(x)=-\phi(-x),$$

所以 ϕ 是 x 的奇函数. 如果现在在(4)中用 $\phi=-\psi$ 确定出 $y(0,x)$,并且用(10),我们就有

(11) $$y(0,x)=\phi(x),$$

而因初始条件是 $y(0,x)=f(x)$,我们便有

(12) $$\phi(x)=f(x),当 0\leqslant x\leqslant l 时.$$

总结起来就有

(13) $$y(t,x)=\frac{1}{2}\phi(at+x)-\frac{1}{2}\phi(at-x),$$

其中 ϕ 适合上述周期性和奇性的条件. 此外,如果初始状态是 $y(0,x)=f(x)$,则(12)必然在 0 到 l 之间成立. 这样,对给定的 $f(x)$ 应该恰有一个解. D'Alembert 当时认为函数是由代数和微积

分的步骤构成的解析表达式. 因此,如果两个这样的函数在 x 的一个区间上相等,它们必然对一切 x 相等. 因为在 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上 $\phi(x) = f(x)$,而 ϕ 又具有奇性和周期性,所以 $f(x)$ 必定适合同一组条件. 最后,因为 $y(t, x)$ 要满足微分方程,它必须是二次可微. 但 $y(0, x) = f(x)$,所以 $f(x)$ 也必须是二次可微的.

在看到 d'Alembert 1746 年论文的几个月内,Euler 写了他自己的论文《论弦的振动》,提出于 1748 年 5 月 16 日①. 虽然在解法上他沿用了 d'Alembert 的方法,但这时,在允许什么函数可以作为初始曲线,因而也可以作为偏微分方程的解上,Euler 却有着全然不同的想法. 甚至在讨论弦振动问题之前,事实上在 1734 年的一个工作中,他就允许了由不同的熟知曲线的部分所构成的,甚至是随手画出的曲线所构成的函数. 例如(图 22.1),在区间 (a, c) 中由抛物线的弧,在区间 (c, b) 中由三次曲线的弧组成的曲线在这种概念下构成了一条曲线或一个函数. Euler 称这样的曲线是不连续的,虽然按照现代术语,它们是有间断的导数的连续函数. 他在 1748 年的教科书《引论》中,还在坚持 18 世纪的标准概念:函数必须用单一的解析表达式给出. 可是,看来弦振动问题的物理学是促使他把他的函数新概念公开出来的使人非相信不可的理由. 他接受了在 $-l \leqslant x \leqslant l$ 中用公式 $\phi(x)$ 定义的任何函数,并认为在 $(-l, l)$ 外 $\phi(x+2l) = \phi(x)$ 就是曲线的定义. 在后来的一篇论文②中,他走得更远了,他说对任意的 ϕ 和 ψ,

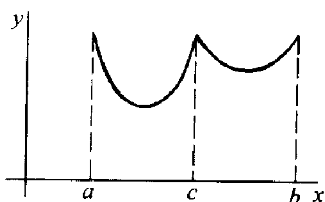


图 22.1

$$y = \phi(ct + x) + \psi(ct - x) \tag{14}$$

---

① *Nova Acta Erud.*, 1749, 512 ~ 527 = *Opera*, (2), 10, 50~62; 也还有法文的, *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 4, 1748, 69 ~ 85 = *Opera*, (2), 10, 63~77.

② *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 9, 1753, 196 ~ 222, pub. 1755 = *Opera*, (2), 10, 232~254.

都是方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{15}$$

的解. 这可由代入微分方程推得. 但是,无论初始曲线是由某一方程表示的,还是它是用不能以一个方程表示的任一方式描绘出来的,都同样是符合要求的. 只有初始曲线在 $0\leqslant x<l$ 内的部分才与弦振动有关系. 这部分之外的延伸无需考虑. 所以,该曲线的不同部分并不按任一种连续性法则(单个的解析表达式)彼此连接,它们只被说成是连在一起的. 由于这个原因,整条曲线不可能包含在一个方程内,除非曲线碰巧是某个正弦函数.

1755 年 Euler 给函数下了一个新定义:"如果某些量这样地依赖于另一些量:当后者变化时前者经受变化,就称前者为后者的函数."在另一篇文章①中他又说:"不连续"函数的各部分彼此不属于对方,在函数的整个范围中也不能用一个方程来确定. 此外,在 $0\leqslant x\leqslant l$ 内给定初始形状后,在 $-l\leqslant x\leqslant 0$ 中用反序重复它(使它是奇的),并且设想在每一长为 $2l$ 的区间内不断重复这段曲线直到无穷远. 那么,如果该曲线 $[y=f(x)]$ 被用来表示初值函数,经过时间 t 后,对应于振动的弦上横坐标 x 的纵坐标将是(参阅公式[13]和[12])

$$y=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct). \tag{16}$$

Euler 在他的 1749 年的基本论文中指出:振动弦的一切可能的运动,无论弦的形状怎样,关于时间都是周期的,也就是说,该周期(通常)是我们现在所谓的基本周期. 他也认识到周期为基本周期的一半、三分之一等等的单个的模式能够作为振动的图像出现. 他给出这样的特解为

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1765, 67~102, pub. 1767 = *Opera*, (1), 23, 74~91.

$$y(t, x) = \sum A_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} \tag{17}$$

如果初始形状是

$$y(0, x) = \sum A_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{18}$$

的话. 但是,他没有说明是对有限多个项还是对无穷多个项求和. 然而他还是有了模式的叠加的思想. 所以,Euler 与 d'Alembert 的主要分歧点是,他允许一切种类的初始曲线,因此,也就允许非解析解,而 d'Alembert 只接受解析的初始曲线和解析解.

Euler 在引进他的"不连续"函数时,他意识到了他已经向前迈进了一大步. 1763 年 12 月 20 日他写信给 d'Alembert 说:"考虑这类不服从连续性[解析性]法则的函数,为我们开辟了一个全新的分析领域."①

Daniel Bernoulli 以全然不同的形式给出弦振动问题的解,这个工作激起了另一场关于可允许的解的争论. Daniel Bernoulli (1700—1782)是 John Bernoulli 的儿子,1725 年到 1733 年是圣彼得堡的数学教授,后来,在巴塞尔又相继是医学、形而上学和自然哲学的教授. 他的主要工作是在流体动力学和弹性力学方面. 在前一领域,他的关于潮汐流动的一篇论文赢得了奖金;他还打算把流体流动的理论应用到人类血管的血液流动上. 他是一个熟练的实验家并通过实验在 1760 年前发现了静电荷的引力定律. 这个定律通常被归于 Charles Coulomb. Bernoulli 的《流体动力学》(*Hydrodynamica*, 1738)是这个领域的第一本主要的教科书,书中包括曾在许多研究论文中出现过的课题. 其中一章是热的力学理论(反对热是一种物质),并给出了气体理论中的许多结果.

在前一章引用过的 1732/1733 年的论文中,Bernoulli 明确地说明振动的弦能有较高的振动模式. 在后来一篇关于有载荷的垂

---

① *Opera*, (2), 11, sec. 1, 2.

直柔软弦上重物的合成振荡的论文[1]中,他作了如下的说明:

> 类似地,绷紧的乐器弦能够以很多方式,甚至按理论上讲能以无穷多种方式,发生等时振动……此外,在每一种模式中它发生较高的或较低的音调.当弦振动产生一个单拱的时候发生了第一个和最自然的模式,于是,弦产生最慢的振动,发出它的所有可能的音调中的最低音,对于其他一切音来说这是基音.下一个模式要求弦产生两个拱,位于(弦的静止位置的)两边,于是振动加快一倍,这时弦发出基音的高八度音.

然后他描述了更高的模式.但是,他没有给出数学的说明,不过,他有数学的思想好像是明显的.

在一篇关于杆的振动以及振动杆发出的声音的论文[2]中,Bernoulli 不仅给出杆振动的各个模式,而且还明确地说明两类声音(基音和高次谐音)能够同时存在.这是小谐振共存的第一次陈述.Bernoulli 基于对杆及声音怎样能发生作用的物理的理解,而不是从数学上证明两个模式的和是一个解.

当他见到 d'Alembert 1746 年的第一篇论文和 Euler 1749 年关于弦振动的文章后,他赶忙发表了他已有了多年的想法[3].在任性地挖苦 d'Alembert 和 Euler 工作的抽象性之后,他再次断言振动弦的许多模式能够同时存在(于是这条弦响应所有这些模式的和或叠加),并且声称这就是 Euler 和 d'Alembert 所说明的全部内容.随后说到一个要点:他坚持全体可能的初始曲线可表成

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{19}$$

因为有足够的常数 a_n 使级数适合任一曲线.所以,他断定全体后

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 12,1740,97~108, pub. 1750.

② *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 13,1741/1743,167~196, pub. 1751.

③ *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 9,1753,147~172 和 173~195, pub. 1755.

继运动应是

$$(20) \qquad y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}.$$

这样一来,每一个对应于任一初始曲线的运动不外乎是正弦周期模式的和,并且这一组合有着基音的频率.然而,他未给出数学论据以支持他的论点;他依靠物理.在1753年的文章中Bernoulli说:

> 我的结论是:一切能发声的物体都含有对应于无穷多种规则振动的无穷多种声音……但是,这许多声音并不是d'Alembert先生和Euler先生所说的……每一种类型[由某初始曲线产生的每一基本模式]乘以无穷多个倍数在每一区间上与无穷多条曲线相一致,使得每一点发生这些振动的,在同一瞬间也获得这些振动,而按照Taylor先生的理论,两节点间的每一区间内所应取得的形状都是极度拉长的相似旋轮线[正弦函数].
>
> 那么我们要指出,弦AB不可能产生仅仅与第一图像[基音]或第二[第二谐音]或第三等等直到无穷的谐音相一致的振动,但它能够产生在一切可能组合中的这些振动的一个组合,而且,d'Alembert和Euler给出的一切新曲线都不过是Taylor振动的组合而已.

在这最后一段话里Bernoulli把Taylor从未展示过的知识归到Taylor身上了.然而,撇开这一点,Bernoulli的论点是极为重要的.

Euler马上反对Bernoulli的后一断言.事实上,Euler 1753年提交给柏林科学院(上面已经引用过)的文章就是部分地对Bernoulli两篇文章的一个回答.Euler强调了波动方程作为处理弦振动问题的出发点的重要性,他赞赏Bernoulli关于许多模式能够同

时存在使得在一个运动中弦能发出许多谐音的认识，但是，跟 d'Alembert 一样，他否认所有可能的运动能用(20)表出. 他承认形如

$$f(x)=\frac{c\sin(ax/l)}{1-a\cos(ax/l)},\quad |a|<1, \tag{21}$$

的初始曲线能用形如(19)的一个级数来表示. 如果每一个函数能被表成无穷三角级数，那么 Bernoulli 的论点就会得到证实，但是，Euler 认为这是不可能的. 他说：正弦函数的和总是一个奇的周期函数，但是在他的解(见[16])

$$y(t,x)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct) \tag{22}$$

里，f 是任意的(在 Euler 的意义下是不连续的)，因而肯定是不能被表成正弦函数的和的. 他说，实际上，f 能够是伸展到无穷远的 x 范围的弧的组合，并且是奇的和周期的；还因为它是不连续的(在 Euler 的意义下)，所以它不能表作正弦曲线的和. 他断言他自己的解无论从哪方面来看都没有限制. 实际上，初始曲线不需要能用一个方程(单独一个解析表达式)表出来.

正是在这种情况下，Euler 也针对 Maclaurin 级数说，这是不能表示任何一个任意函数的，所以，无穷正弦级数也不可能这样. 他所承认的一切就是 Bernoulli 的三角级数表示特解，而他(Euler)本人确实在他自己的1749年的文章中就已经得到过这样的解(见公式[17]和[18]).

D'Alembert 在《百科全书》第7卷(1757)他写的关于"基音"的条目中也抨击 Bernoulli. 他不相信一切奇的周期函数能表成形如(19)的级数，因为这个级数是二次可微的，而全体奇的周期函数并不需要是这样. 然而，即使当初始曲线是足够多次可微的时候——并且 d'Alembert 在他的1746年的文章中确实要求了它是二次可微的——它也并不需要能表成 Bernoulli 的形式. 基于同样

的理由，d'Alembert 也反对 Euler 的不连续曲线. 实际上，d'Alembert 要求初始曲线 $y = f(x)$ 必须二次可微是正确的，因为从在 x 的某一个或几个值上没有二阶导数的 $f(x)$ 得出的解，在这些奇点处必须满足一些特殊的条件.

Bernoulli 没有从他的看法后退. 他在 1758 年的一封信①中照旧说：他有无穷多个系数 a_n 可供处置，从而适当地选择它们就能使级数(19)与任何函数 $f(x)$ 在无穷多个点上相一致. 在任何情况下他坚持(20)是最一般的解. D'Alembert, Euler 和 Bernoulli 间的辩论持续近十年之久而未获一致. 问题的实质在于能够用正弦级数，或更一般地，用 Fourier 级数表示的函数类的宽窄.

1759 年，年轻的尚不知名的 Lagrange 参加了争论. 在他论述声音的性质与传播的论文②中，他给出了这个课题的一些成果，然后把他的方法用到弦振动上. 他进行得好像他抓住了一个新问题，而只不过重复了 Euler 和 Daniel Bernoulli 在前面已经做过的很多工作. Lagrange 也是从负载着有限个相等的、等间隔的质量的弦出发，然后过渡到无穷多个质量的极限. 虽然他批评 Euler 的方法要把结果限制为连续(解析)曲线，但 Lagrange 说他将证明 Euler的结论——任一初始曲线能够合用——是正确的. 我们将立即说到 Lagrange 对连续弦的结论. 他已得到

$$(23)\qquad y(x,\ t) = \frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\sum_{q=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\mathrm{d}x\left[Y_q\cos\frac{c\pi rt}{l} + \frac{l}{r\pi c}V_q\sin\frac{c\pi rt}{l}\right].$$

这里 Y_q 和 V_q 是第 q 个质量的初位移和初速度. 然后他用 $Y(x)$ 和 $V(x)$ 分别代替 Y_q 和 V_q. Lagrange 把量

$$(24)\qquad \sum_{q=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}Y(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad \sum_{q=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}V(x)\mathrm{d}x$$

---

① *Jour. des Sçavans*, March 1758, 157～166.

② *Misc. Taur.*, 1_3, 1759, i～x, 1～112 = *Œuvres*, 1, 39～148.

看做是积分,并且他把积分运算取在和号 $\sum_{r=1}^{\infty}$ 之外. 由这些步骤得到

$$(25)\quad y(x,\ t) = \left(\frac{2}{l}\int_0^l Y(x)\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)\sin\frac{r\pi x}{l}\cos\frac{r\pi ct}{l} + \left(\frac{2}{\pi c}\int_0^l V(x)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\frac{r\pi x}{l}\mathrm{d}x\right) \times \sin\frac{r\pi x}{l}\sin\frac{r\pi ct}{l}.$$

这里和号和积分号的交换不仅引导出发散级数,而且毁掉了 Lagrange 有可能认出

$$(26)\qquad \int_0^l Y(x)\sin\frac{r\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

是 Fourier 系数的任何一点机会. 经过其他冗长的、困难而又可疑的步骤之后,Lagrange 得到了 Euler 和 d'Alembert 的结果

$$(27)\qquad y = \phi(ct + x) + \psi(ct - x).$$

他断定上述推导使得这位伟大的几何学家(Euler)的理论

> 毫无疑问,是建立在直接而清楚的原理之上的,这些原理决不依靠 d'Alembert 先生所要求的连续性[解析性]法则;此外,这就是怎么会发生以下情况的原因:当物体数目……有限时,曾经支持和证明了 Bernoulli 先生关于等时振动的复合的理论的同一个公式,当物体数目变成无穷多时……却向我们表明了它是不充分的. 事实上,从一种情况过渡到另一种情况下这一公式经历的变化是:使得那些组成整个系统的绝对运动的简单运动大部分互相抵消了,而留下的那些简单运动又被歪曲和改变得完全不可认识了. 令人气恼的是这样巧妙的理论在主要情况下竟被证实是谬误的,而所有出现在自然界中的小的相互运动可能都与这种情况互相关联.

几乎全是无意义的话.

Lagrange 在他的解无需对初始曲线 $Y(x)$ 和初速度 $V(x)$ 施加限制这一争论中,他的主要根据是:他没有对它们进行微分,但是,如果人们要把他所作的推导严密化,施加限制就是必要的了.

Euler 和 d'Alembert 批评 Lagrange 的工作,但是实际上并未击中要害;他们却偏偏挑中了 Euler 称之为"奇妙的计算"的细节. Lagrange 试图回答这些批评. 双方的答辩和反驳太广泛了,不能在这里叙述,尽管有很多确实揭示了那时的思想. 例如,Lagrange 当 $m=\infty$ 时用 $\frac{\pi}{m}$ 代替 $\sin\frac{\pi}{m}$,并用 $\frac{\nu\pi}{2m}$ 代替 $\sin\frac{\nu\pi}{2m}$. D'Alembert 允许前一个但不允许后一个,因为所涉及的 ν 值与 m 是可比的. D'Alembert 还对形如

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots$$

的级数可能是发散的提出异议,而 Lagrange 用作答复的是当时很普通的论点,即级数的值就是这级数所由之而来的函数的值.

虽然 Euler 确实批评了 Lagrange 的数学细节,但他在 1759 年 10 月 23 日的信[①]中对 Lagrange 的文章作了全面的答复,他赞扬了 Lagrange 的数学技巧,并且说这使得争论避免了任何诡辩,还说每个人现在必须认识到不规则的以及(按 Euler 的意义下)不连续的函数在这类问题中的用处.

1759 年 10 月 2 日,Euler 给 Lagrange 写道:"我高兴地读到你赞成我的解……而 d'Alembert 却百般挑剔试图暗中败坏它,唯一的原因在于他自己没能得到它. 他曾吓唬说要发表一篇有分量的反驳;是否他真正这样作了我不知道. 他想他能够用他的雄辩来欺骗半通者. 我怀疑他是否严肃,要不也许他是完全被自私蒙住了眼睛."[②]

---

① Lagrange, *Œuvres*, 14,164～170.

② *Œuvres*, 14,162～164.

在 1760/1761 年 Lagrange 试图回答 d'Alembert 和 Bernoulli 在信件来往中提出的批评，他给出了弦振动问题的一个不同的解①. 这次他直接从波动方程 ($c=1$) 出发，利用乘上一个未知函数以及另外的一些步骤把偏微分方程归结为解两个常微分方程. 然后，又通过更多的不全是正确的步骤，Lagrange 得到解

$$y(t,\ x)=\frac{1}{2}f(x+t)+\frac{1}{2}f(x-t)-\frac{1}{2}\int_0^{x+t}g\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{x-t}g\mathrm{d}x,$$

这里 $f(x)=y(0,\ x)$ 和 $g(x)=\partial y/\partial t$ (当 $t=0$ 时)是给定的初始条件. 如同 Lagrange 所证明的，这与 d'Alembert 的结果是一致的. 但是后来，没有引用他自己的工作，他试图使他的读者相信，他对初始曲线没有用到任何连续性(解析性)法则. 确实的，他对初始函数没有使用任何直接的微分运算. 但是，也就是在这篇文章中，为了严密地证明他的极限过程，就不能回避关于初始函数的连续性和可微性的假设.

激烈的争论贯穿了 18 世纪的整个 60 年代和 70 年代，甚至 Laplace 也在 1779 年参加到这场吵闹中来了②，并且站在 d'Alembert 一边. 在 1768 年开始出现的题名为《短文集》(*Opuscules*)的小丛书中，d'Alembert 继续这场辩论. 他反驳 Euler，理由是 Euler 允许太一般的初始曲线，又反驳 Daniel Bernoulli，理由是他(d'Alembert)的解不能表成正弦曲线的和，因此 Bernoulli 的解不够一般. 三角函数的无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 可以被作得适合于任一初始曲线，因为它有无穷多个 a_n 可供确定，这种想法(Daniel Bernoulli 有这样的主张)被 Euler 作为办不到的事情而拒不接受. 他还提出这样的问题：当初始时刻只有弦的一部分被扰动时，一个三角级数怎样能表示这样的初始曲线. Euler, d'Alembert 和 La-

---

① *Misc. Taur.*, 2_2, 1760/1761, 11～172, pub. 1762 = *Œuvres*, 1, 151～316.

② *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1779, 207～309, pub. 1782 = *Œuvres*, 10, 1～89.

grange 始终否认三角级数能够表示任一解析函数，更不用说更加任意的函数了.

每个人提出的许多论据大体上是不正确的；而其结果，在 18 世纪内，也是没有说服力的. 用三角级数来表示一个任意函数这一重要问题，直到 Fourier 着手研究之前一直没有得到解决. Euler, d'Alembert 和 Lagrange 虽然到了发现 Fourier 级数的意义的门槛边沿，但是却没有鉴别出摆在他们面前的是什么东西. 用当时的知识来判断，所有这三个人和 Bernoulli 在他们的主要的争论中都是正确的. D'Alembert，循着 Leibniz 时期建立的传统，坚持函数必须是解析的，因而认为任何在这种意义上不能解的问题就是不可解的. 他在给出 $y(t, x)$关于 x 必须是周期的论证方面也是正确的. 但是，他没有认识到：在某区间上，例如说，在 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上，给定了一个任意的函数，那么就可以对整数 n，在每一区间 $[nl, (n+1)l]$ 内重复这个函数使它成为周期的. 当然，这类周期函数有可能不能用一个(闭)公式来表示. Euler 和 Lagrange(至少在他们的时代)相信不是所有的“不连续”函数都能表成 Fourier 级数，这是合理的. 然而也同样正确的是，他们相信(可是他们没有证明)初始曲线能够是非常一般的函数. 它既不必是解析的，也不必是周期的. Bernoulli 确实在物理基础上采取了正确的立场，但他不能用数学来支持它.

在函数的三角级数表示问题上的争论的一个非常奇怪的特点是：所有卷入的人都知道非周期函数(在一个区间内)能够被表成三角级数. 第 20 章(第 5 节)的引证就说明，Clairaut, Euler, Daniel Bernoulli 和其他一些人实际上获得了这样的表达式，他们的很多文章也有求三角级数系数的公式. 事实上所有这些工作在 1759 年都出版了，在这一年 Lagrange 提出了他的关于振动弦的基本论文. 所以，他本来是可以推出任一函数都有三角展开式，并能够以确定的形式指出系数公式的，但是他没有能这样做，仅仅是

在 1773 年,当激烈的争论已经过去,Daniel Bernoulli 确实才注意到一个三角级数的和在不同区间内可表示不同的代数表达式. 为什么所有这些结果都没有影响关于弦振动的辩论呢? 可以从几方面来解释. 很多关于用三角级数表示非常一般的函数的结果是在天文学的论文中,因此 Daniel Bernoulli 可能没有读到它们,以至不能指出它们来捍卫他的立场. Euler 和 d'Alembert 他们必然是知道 Clairaut 1757 年的工作的(第 20 章第 5 节),但是也许不喜欢研究它,因为该文驳斥了他们自己的论点. 而且 Clairaut 所做的这个天文学上的工作很快就被废弃和忘却了. 另一方面,尽管 Euler 用了三角级数——如像在他的内插理论中——表示多项式表达式,但他并不接受十分任意的函数都能够这样表示的一般事实;当他用到这种级数表示式时,它们的存在性是用别的方法保证的.

另一个问题是,具有解析系数(例如常系数)的偏微分方程为什么能有非解析解,这个问题也没有真正弄清楚. 在常微分方程的情形,如果系数解析,解必然也是解析的. 但是,对偏微分方程这就不对了. 虽然,Euler 正确地指出具有角点的解是允许的(并且他坚持这一点),但是偏微分方程的解中可允许的奇性的确定则是很久以后的事了.

3. 波动方程的推广

正当弦振动问题的论战还在进行的时候,对乐器的兴趣引起了进一步的工作,不仅有物理结构的振动方面的,而且还有与声音在空气中传播有关的水力学问题方面的. 从数学上来说,这些问题都牵涉到波动方程的推广.

在 1762 年 Euler 着手研究粗细可变弦的振动问题,他曾受到一个音乐审美学主要问题的推动. Jean-Philippe Rameau(1683—

1764)在 1726 年阐明乐音的和谐乃是由于下述事实:任一声音的音调的成分是基音的音调的泛音;也就是说,它们的频率是基音频率的整数倍. 但是,Euler 在他的《音乐理论的新颖研究》(1739)① 中主张只是在合适的乐器里才有基调的和谐的泛音. 于是他力图证明变粗细的或有不均匀密度 $\sigma(x)$ 及张力 T 的弦发出不和谐的泛音.

现在偏微分方程变成

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{28}$$

而其中 c 是 x 的函数. 第一个重要的结果是由 Euler 在《粗细不匀弦的振动》一文②中得到的. Euler 断言求其通解超过了分析的能力,他得到当给定质量分布为

$$\sigma=\frac{\sigma_0}{\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^4}$$

的特殊情况时的一个解,其中 σ_0 和 α 是常数. 那么

$$y=\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\left[\phi\left(\frac{x}{1+\frac{x}{\alpha}}+c_0t\right)+\psi\left(\frac{x}{1+\frac{x}{\alpha}}-c_0t\right)\right],$$

这里 $c_0=\sqrt{T/\sigma_0}$. 模式或谐音的频率由

$$\nu_k=\frac{k}{2l}\left(1+\frac{l}{\alpha}\right)\sqrt{T/\sigma_0},\ k=1,2,3,\cdots$$

给出,所以,相继两个频率的比值和粗细均匀的弦振动的相继两个频率的比是相同的,但是基音的频率不再与长度成反比例.

在 1762/1763 年的这篇文章中,Euler 还考察由不同的粗细 m, n 分别长 a, b 的两段弦连接而成的弦的振动. 他推导了各个模式的各个频率 ω 的方程. 这些都终于被证明是

---

① *Opera*, (3),1,197~427.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9,1762/1763,246~304, pub. 1764 = *Opera*, (2),10,293~343.

$$(29)\qquad m\tan\frac{\omega a}{m}+n\tan\frac{\omega b}{n}=0$$

的解,而且他在特殊情况下解得了 ω.(29)的解称为该问题的特征值或本征值.我们将会看到,这些值在偏微分方程理论中有根本的重要性.从(29)显然可见特征频率不是基频的整数倍.

然而,Euler 在另一篇关于粗细可变的弦振动问题的文章[1]中再次研究这个问题,他从(28)出发,证明了存在函数 $c(x)$,对它说来较高音调的频率不是基频的整倍数.

D'Alembert 也研究了变粗细弦[2].这里他用了他早些时候对常密度弦引进的一种重要解法.前些时候在试图解弦振动问题时 d'Alembert 引进了分离变量的思想,这是现在解偏微分方程的一种基本方法[3].为解方程

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2},$$

d'Alembert 令

$$y=h(t)g(x),$$

代入微分方程,得到

$$(30)\qquad \frac{1}{a^2}\frac{h''(t)}{h(t)}=\frac{g''(x)}{g(x)}.$$

然后,像我们现在所做的一样,他论证由于 g''/g 当 t 变化时不变,它必是常数,类似的论证也适用于 h''/h,这个表达式也必须是常数.这两个常数相等,并记之为 A.这样他得到两个分离的常微分方程

$$h''(t)-a^2Ah(t)=0,$$

$$(31)\qquad g''(x)-Ag(x)=0.$$

因为 a 和 A 是常数,上述每个方程都容易求解,d'Alembert 得到

① *Misc. Taur.*, 3,1762/1765,25~59, pub. 1766 = *Opera*, (2),10,397~425.

② *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 19,1763,242 ff., pub. 1770.

③ *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 6,1750,335~360, pub. 1752.

$y(t, x) = h(t)g(x) = [Me^{a\sqrt{A}t} + Ne^{-a\sqrt{A}t}] \cdot [Pe^{\sqrt{A}x} + Qe^{-\sqrt{A}x}]$.
端点条件 $y(t, 0) = 0$ 和 $y(t, l) = 0$ 使 d'Alembert 断定 $g(x)$ 必然形如 $k\sin Rx$，而 $h(t)$ 也必有同样的形式，因为 $y(t, x)$ 对 t 必是周期的. 他把问题就搁在那里了. Daniel Bernoulli 在 1732 年处理一端吊起的链的振动时曾经用了分离变量的思想，但是，d'Alembert 更为明确，尽管他没有完成这种解法.

D'Alembert 在他的 1763 年的文章中，把波动方程写成

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

并寻找形状为

$$u = \zeta(x)\cos\lambda\pi t$$

的解. 对 ζ 他得到方程

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{\lambda^2\pi^2\zeta}{X(x)}. \tag{32}$$

现在 d'Alembert 必须确定 ζ，使得在弦的两端，ζ 是 0. 经过详细的分析，他证明存在 λ 的一些值，对这样的值，ζ 满足这些条件. 可是，在这里他确实没有洞察到存在着无穷多个 λ 的值. 这类研究的重要性在于，它是常微分方程边值或特征值问题方向上的另一个步骤.

连续水平重绳的横振动受到 Euler 的研究. 在《弦自身重力对弦运动的效应修正》①一文中，他得到微分方程

$$\frac{1}{c^2}y_{tt} = \frac{g}{c^2} + y_{xx}.$$

对于 c 为常数及在端点 $x = 0$、$x = l$ 处固定的情形，Euler 求得

$$y = -\frac{(1/2)gx(x-l)}{c^2} + \phi(ct + x) + \psi(ct - x).$$

这样一来，除去产生了一个对称抛物线图像

---

① *Acta Acad. Sci. Petrop.*, 1, 1781, 178~190, pub. 1784 = *Opera*, (2), 11, 324~334，但注明日期是从 1774 年开始.

$$y=-\frac{(1/2)gx(x-l)}{c^2}$$

的振动之外,结果与“无重量”的弦(即重量被忽略的)一样.

马上我们就要看到,Euler 在鼓振动的文章中(也可见第21章第4、6节)引进了全部第一类 Bessel 函数,而且在这篇发表于1781年的文章中他注意到用 Bessel 函数的级数表示任一运动是可能的[尽管他不同意 Daniel Bernoulli(在弦振动问题中)关于任一函数能表成三角函数级数的主张].

直到18世纪末,别的很多人还在发表关于振动弦和悬链的文章,前面提到过的文章仅仅是这类文章的代表.作者们继续持不同意见,互相纠正,并在这样做的时候犯种种错误,其中包括与他们自己以前讲过的甚至证明过的相矛盾的东西.他们是在不严密的论证的基础上,并且常常在恰恰是个人的偏爱和执信的基础上作出断言、论点和反驳的.他们为了证明他们的论点而引用的文章并没有证明他们所主张的东西.他们还求助于使用挖苦、讽刺、漫骂和自吹自擂等办法,与这些攻击混杂在一起的是为了求宠,特别是为了求宠于 d'Alembert(因为他对普鲁士的 Frederich Ⅱ 有相当大的影响,又是柏林科学院的领导)而表现出的表面上的一致.

迄今为止讲到的二阶偏微分方程只包含一个空间变量和时间.18世纪也没有超出这个范围太远.Euler 在1759年的一篇文章[①]中研究了矩形鼓的振动,这就考虑了二维物体.对于鼓表面的垂直位移 z,Euler 得到方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{33}$$

其中 x 和 y 代表鼓上任一点的坐标,c 由质量和张力确定.Euler 试用

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1764, 243~260, pub. 1766 = *Opera*, (2), 10, 344~359.

$$z = v(x, y)\sin(\omega t + \alpha)$$

求解,并发现

$$0 = \frac{\omega^2 v}{c^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

这个方程有形如

$$v = \sin\left(\frac{\beta x}{a} + B\right)\sin\left(\frac{\gamma y}{b} + C\right)$$

的正弦形解,这里

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2}.$$

鼓的尺寸是 a 和 b,所以 $0 \leqslant x \leqslant a$ 和 $0 \leqslant y \leqslant b$. 当初速为 0 时,$B$ 和 C 可取为 0. 如果边界固定,则 $\beta = m\pi$ 和 $\gamma = n\pi$,其中 m、n 是整数. 于是由于 $\omega = 2\pi\nu$(此处 ν 是每秒频率),他立即得到频率是

$$\nu = \frac{1}{2}c\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

然后,他考虑圆形鼓,把(33)变换成极坐标(一个具有高度独创性的步骤),得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}. \tag{34}$$

他用形式

$$z = u(r)\sin(\omega t + A)\sin(\beta\phi + B) \tag{35}$$

试解,因此 $u(r)$ 满足

$$u'' + \frac{1}{r}u' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u = 0. \tag{36}$$

这里出现了通用形式的 Bessel 方程(参阅第 21 章第 6 节). 接着,Euler 计算一个幂级数解

$$u\left(\frac{\omega}{c}r\right) = r^\beta\left\{1 - \frac{1}{1(\beta+1)}\left(\frac{\omega}{c}\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{\omega}{c}\frac{r}{2}\right)^4 + \cdots\right\},$$

这可以用我们现在的记号写成

$$u\left(\frac{\omega}{c}r\right)=\left(\frac{c}{\omega}\right)^{\beta}2^{\beta}\Gamma(\beta+1)\mathrm{J}_{\beta}\left(\frac{\omega}{c}r\right).$$

因为边缘 $r=a$ 必须保持固定,所以

$$\mathrm{J}_{\beta}\left(\frac{\omega}{c}a\right)=0. \tag{37}$$

因为 z 必须关于 ϕ 以 2π 为周期,从(35)可推知 β 是一整数. Euler 断言,对一固定的 β 存在无穷多个根 ω,所以可发出无穷多种单音. 然而,他没有算出这些根来. 他确曾试图寻求(36)的第二个解,但是失败了. Poisson① 独立地得到了膜振动理论,通常把这完全归于他.

Euler, Lagrange 和其他人都对声音在空气中的传播进行了研究. Euler 从 20 岁(1727)起经常写关于声音这一主题的文章,并把这一领域建成数学物理的一个分支. 这门学科中他最好的工作是 1750 年代关于水力学的一些重要论文. 空气是可压缩的流体,因而声音的传播理论是流体力学的一部分(因为空气也是弹性介质,它也是弹性力学的一部分). 然而,为了处理声音的传播,他对水力学的一般方程组作了合理的简化.

三篇很好的决定性的论文 1759 年在柏林科学院宣读了,第一篇《论声的传播》②中,Euler 考虑声音在一维空间中的传播,经过一些近似,相当于考虑小振幅的波动之后他导出一维波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=2gh\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

其中 y 是波在点 x 和时间 t 的振幅,g 是重力加速度,h 是与压强和密度有关的常数. 这个方程,Euler 当然知道它和弦振动方程是一样的,因而在解这个方程时他没有在数学上做出什么新东西.

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, (2),8,1829,357~570.

② *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 15,1759,185~209, pub. 1766 = *Opera*, (3), 1,428~451.

在第二篇文章①中，Euler 给出了二维传播方程，形如

$$(38)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + c^2\frac{\partial^2 y}{\partial X\partial Y},\\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} + c^2\frac{\partial^2 x}{\partial X\partial Y},\end{aligned}$$

其中 x 和 y 分别是波在 X 方向和 Y 方向的振幅，或位移的分量，而 $c=\sqrt{2gh}$. 他给出平面波解

$$x = \alpha\phi(\alpha X + \beta Y + c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t),$$

$$y = \beta\phi(\alpha X + \beta Y + c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t),$$

这里 ϕ 是任意函数，而 α, β 是任意常数. 然后令

$$(39)\qquad v = \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y}$$

(v 称为位移的散度)，他就得到二维波动方程

$$(40)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}.$$

他还指出，为了得到问题的最一般的解以便适合某些初始条件，也就是说，v 或 x, y 在 $t=0$ 的值，必须把解叠加起来.

然后，Euler 还展示他怎样得到其解称为圆柱波的微分方程，圆柱波的得名是因为波的传播像一个扩展开去的圆柱面. 他令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 并引入 $v=f(Z, t)$ ，这里 f 是任意的. 再令 $x=vX$ 和 $y=vY$ ，他从(40)得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{3}{Z}\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2}.$$

在同一篇文章中，他还用类似的方式得到三维波动方程

$$(41)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2},$$

这里 v 仍然是位移(x, y, z)的散度. 利用刚才对柱面波指出的那种变换，Euler 给出平面波解和球面波解. 球面波的基本方程是

---

① *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 15, 1759, 210～240, pub. 1766 = *Opera*, (3), 1, 452～483.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=\frac{4}{V}\frac{\partial s}{\partial V}+\frac{\partial^2 s}{\partial V^2},\ V=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

关于球面波和柱面波的上述很多结果,也曾由 Lagrange 在 1759 年末独立地作出. 他们每个人都把自己的结果通知对方. 虽然 Lagrange 的工作中有很多细节与 Euler 的不同,但没有什么数学上的要点值得在此叙述.

研究声波在空气中的传播只是为了研究那些利用空气运动发声的乐器的一个步骤. 这种研究是由 Daniel Bernoulli 在 1739 年开创的. Bernoulli, Euler 和 Lagrange 写了许许多多涉及到由种类繁多到难以置信的这类乐器所发出的音调的论文. 1762 年 Daniel Bernoulli 在一个出版物①中证明,在圆柱形管(风琴管)的开口一端不能发生空气的压缩,在封闭的一端空气质点一定处于静止状态. 他由此得出结论:两端封闭的或两端开口的管子,与长度减半一端开口一端封闭的管子有相同的基本模式. 他还发现了风琴管泛音的频率是基音频率奇数倍的定理. 在同一篇文章中, Bernoulli 还研究了圆柱形以外的管,特别是锥形管,对此他得到单个音调(模式)的表示式,而且认识到这些式子仅仅对无穷长的锥成立,而对截下一段的锥不成立. 他还证明了(无穷长)锥形管的泛音与基音是和谐的. Bernoulli 用实验来证实了他的很多理论上的结果.

Euler 也研究了圆柱形管和非圆柱图形的旋转面②,考察了开口端和封口端的反射. 这些人致力于了解长笛,管风琴,双曲面形的、锥形的和圆柱形的各类喇叭,小号,军号和别的管乐器.

总之,关于解三四个变量的偏微分方程的这些努力受到了限制,主要因为,与分别表成 x 和 t 的简单的三角级数相反,现在解要表成包含多个变量的级数. 但是,数学家们对出现在这类更复杂

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1762,431～485, pub. 1764.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 16, 1771, 281～425, pub. 1772 = *Opera*, (2),13,262～369.

的级数中的函数，以及确定系数的方法却知道得太少了，这样的方法很快得到了发展.

值得提到的是，Euler 在考虑铃的声音时，以及在重新考虑杆振动的某些问题时，引出了四阶偏微分方程. 不过，他不能对此做很多的事，事实上，这个世纪其余时间内在这方面也没有什么进展.

4. 位 势 理 论

偏微分方程这门学科的发展受到另一类物理研究的推进. 18 世纪的主要问题之一是确定一个物体对另一物体作用的万有引力的大小，最重要的情况是：太阳对一个行星，地球对它外部或内部的一个质点，地球对另一连续质量的引力. 当两个物体的质量比起其大小来差得非常远时，它们是可以当作质点处理的；但是在别的情况下，特别是在地球吸引一个质点时，就必须考虑地球的大小. 很显然，如果要计算地球的质量分布对一质点或对另一质量分布的万有引力，就必须知道地球的形状. 虽然，它的精确形状仍是一个研究的课题(第 21 章第 1 节)，但在 1700 年左右就已经清楚地知道它一定是某种形状的椭球体，也许是一个扁球体(一椭圆绕其短轴旋转形成的椭球体). 在计算实心扁球体对一个外部质点和一个内部质点所作用的引力时，都不能把扁球体质量看做集中在中心.

Maclaurin 在 1740 年关于潮汐的获奖论文和他的《流数论》(*Treatise of Fluxions*, 1742)中证明了，对以等角速度转动的密度均匀的流体，扁球形是一种平衡形状. 后来，Maclaurin 综合地证明了：给定两个共焦的均匀旋转椭球体，它们对外部同一质点的吸引力，当这个质点位于旋转轴的延长线上或位于赤道平面内时，与两物体的体积成比例. 一些别的受局限的结果在 19 世纪中也由

James Ivory(1765—1842)和 Michel Chasles 用几何方法建立.

Newton, Maclaurin 和其他人用于万有引力问题的几何方法仅仅对于特殊的物体和特殊位置上的被吸引质量才是有效的. 这种方法很快就让位给分析方法了,在 Clairaut 的文章中,特别是在他的名著《关于地球形状的理论》(*Théorie de la figure de la terre*, 1743)中,首次发现了这种方法,在该书中他同时考虑了地球的形状和万有引力两者.

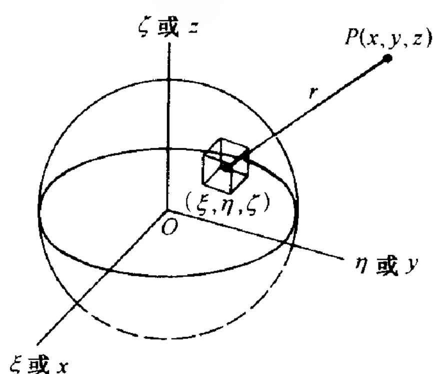


图 22.2

让我们先看一下关于分析上确切阐述的一些事实. 一个连续体对一个被看作质点的单位质量 P 所作用的万有引力是对构成该物体的全体小质量所作用的力的总和. 如果物体的小体积元 $d\xi d\eta d\zeta$(图 22.2)如此之小,以至可看作集中在点(ξ, η, ζ)的一个质点,此外,如果 P 的坐标是(x, y, z),那么,密度为 ρ 的小质量对单位质点的引力是从 P 指向小质量的一个向量,按牛顿万有引力定律,这向量的分量是(第 21 章第 7 节)

$$-k\rho\frac{x-\xi}{r^3}d\xi d\eta d\zeta, \quad -k\rho\frac{y-\eta}{r^3}d\xi d\eta d\zeta, \quad -k\rho\frac{z-\zeta}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,$$

其中 k 是牛顿定律中的常数,并且

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

当然 ρ 可以是 ξ, η, ζ 的函数,或者,在均匀物体的情况下是一个常数.

整个物体对 P 处单位质量的引力分量是

$$f_x=-k\iiint\rho\frac{x-\xi}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,$$

$$(42) \qquad f_y=-k\iiint\rho\frac{y-\eta}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,$$

$$f_z = -k\iiint \rho \frac{z-\zeta}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

其中积分展布在整个吸引体上. 这些积分是有限的,当 P 在吸引体内部时也是正确的.

为了代替分别处理力的每个分量,可引入一个函数 $V(x, y, z)$,它对 x, y, z 的偏导数分别是力的三个分量. 这个函数就是

$$V(x, y, z) = \iiint \frac{\rho}{r} d\xi d\eta d\zeta. \tag{43}$$

在积分号下对包含在 r 内的 x, y, z 求微分可得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{k} f_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{k} f_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{k} f_z,$$

这些方程当 P 在吸引体内部时也成立. 函数 V 称为势函数. 当包含三个分量 f_x, f_y 和 f_z 的问题能化归为对 V 的问题时,这样用一个函数代替三个函数来作是很有好处的.

如果知道物体内部的质量分布,亦即 ρ 是 ξ, η, ζ 的已知函数,如果又知道物体的精确形状,有时就能通过实际计算积分值来算出 V. 可是,对大多数形状的物体,这个三重积分是不能用简单函数积出来的. 此外,我们也不知道地球或其他物体内部的真实的质量分布. 因此,V 必须用其他方法来确定. 关于 V 的主要事实是:对吸引体外部的点 (x, y, z),它满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{44}$$

注意其中 ρ 不出现. 这个微分方程称为位势方程,也叫做 Laplace 方程.

从势函数能够导出力的想法,甚至"势函数"这个术语本身,都由 Daniel Bernoulli 在《流体动力学》(1738)中用过. 位势方程本身首次出现在 Euler 1752 年编写的重要论文《流体运动原理》①中.

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1756/1757, 271～311, pub. 1761 = *Opera*, (2), 12, 133～168.

在处理流体内任一点的速度分量 u, v 和 w 时，Euler 曾证明 $u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z$ 必定是一个恰当微分. 他引进函数 S，使得 $\mathrm{d}S = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z$，于是

$$u = \frac{\partial S}{\partial x},\ v = \frac{\partial S}{\partial y},\ w = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

但是不可压缩流体的运动遵从所谓连续性定律，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{45}$$

这在数学上表达了运动过程中既没有物质被消灭也没有物质产生这个事实. 于是由此推得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0.$$

怎样一般地解这个方程呢，Euler 说，不知道. 所以，他仅仅考察 S 是 x, y, z 的多项式的特殊情况. 函数 S 后来(1868)被 Helmholtz 称为速度势. Lagrange 在 1762 年发表的一篇文章中①重新得到了所有这些量，这是从 Euler 那里接受过来而未正式申明的，虽然他确实改善了思路和表达的条理.

在我们能够研究为了求解代表万有引力的位势方程而做的工作之前，我们必须回顾一下那些通过积分(42)或它在别的坐标系中的等价公式来直接计算吸引力数值的那些努力.

Legendre 在写于 1782 年而发表于 1785 年的题为《球状体吸引力的研究》②的论文中，对旋转体的引力感兴趣，证明了定理：如果旋转体对位于轴的延长线上每一外点的引力已知，则它对每一外部点的引力也就知道了. 他先通过

$$P(r,\theta,0) = \iiint \frac{(r - r')\cos\gamma}{(r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2)^{3/2}} r'^2 \sin\theta' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\phi' \mathrm{d}r' \tag{46}$$

表示沿矢径 r 方向的吸引力的分量，这里(图 22.3) r 是被吸引点

---

① *Misc. Taur.*, 2₂, 1760/1761, 196～298, pub. 1762 = *Œuvres*, 1, 365～468.

② *Mém. des sav. étrangers*, 10, 1785, 411～434.

的矢径，r'是吸引物体上的任一点的矢径，γ是这两个矢径在物体中心处的夹角. 因为物体是绕 z 轴旋转生成的图形，故外点的 ϕ 坐标可取作 0. 然后，他把被积函数按 $\frac{r'}{r}$ 的方幂展开. 为了作到这一点，他把分母写成

$$r^3\left[1-\left(2\frac{r'}{r}\cos\gamma-\frac{r'^2}{r^2}\right)\right]^{3/2},$$

再把方括号内的量移到分子上去，

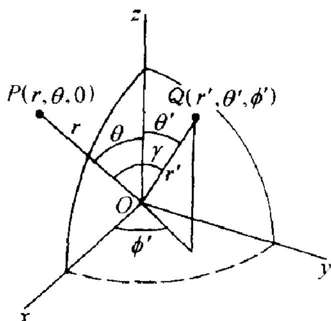


图 22.3

然后用二项式定理来展开，把圆括号内的量作为二项式的第二项. 除开体积元之外，Legendre 得到被积表达式是级数

$$\frac{1}{r^2}\left\{1+3P_2(\cos\gamma)\frac{r'^2}{r^2}+5P_4(\cos\gamma)\frac{r'^4}{r^4}\right.$$
$$\left.+7P_6(\cos\gamma)\frac{r'^6}{r^6}+\cdots\right\},$$

其中系数 P_2，P_4，$\cdots$ 都是 $\cos\gamma$ 的有理整函数. 这些函数就是现在我们所谓的 Legendre 多项式，或 Laplace 系数，或带调和函数. Legendre 给出了这些函数的形式，从而可以推得一般的 P_n，即

$$(47)\ P_n(x)=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{n!}\cdot\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\right.$$
$$\left.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}+\cdots\right].$$

他于是就能对 r' 求积分而得到

$$\frac{2}{r^2}\iint\left\{\frac{R^3}{3}+\frac{3}{5}P_2(\cos\gamma)\frac{R^5}{r^2}\right.$$
$$\left.+\frac{5}{7}P_4(\cos\gamma)\frac{R^7}{r^4}+\cdots\right\}\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi',$$

此处 $R=f(\theta')$ 是 r' 在给定的 θ' 处的值(它不依赖于 ϕ'). 他于是

又需对 ϕ' 求积. 为此他利用①

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\phi'.$$

在建立了辅助的结果

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{P}_{2n}(\cos\gamma)\mathrm{d}\phi' = \mathrm{P}_{2n}(\cos\theta)\mathrm{P}_{2n}(\cos\theta')$$

之后，他终于得到了

$$P(r,\theta,0) = \frac{3M}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-3}{2n-1}\mathrm{P}_{2n}(\cos\theta)\frac{\alpha_n}{r^{2n}},$$

其中

$$\alpha_n = \frac{4\pi}{3M}\int_0^{\pi/2} R^{2n+3}\mathrm{P}_{2n}(\cos\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'.$$

积分值依赖于子午线 $R = f(\theta')$ 的形状.

然后，Legendre 从上面的结果并在同 Laplace 通信的基础上得到了关于这个问题的势函数的表达式，并从势推出垂直于矢径的引力分量.

在 1784 年写的第二篇文章②中，Legendre 推导出函数 P_{2n} 的一些性质. 例如，对每一个关于 x^2 的次数低于 n 的 x^2 的有理整函数都有

$$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{P}_{2n}(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{48}$$

如果 n 是任一正整数，则

$$\int_0^1 x^n\mathrm{P}_{2m}(x)\mathrm{d}x = \frac{n(n-2)\cdots(n-2m+2)}{(n+1)(n+3)\cdots(n+2m+1)}. \tag{49}$$

如果 m 和 n 是正整数，则

---

① 这个表达式推导如下：由于球坐标到直角坐标的变换方程是 $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$，P 的直角坐标是 $(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$，$Q$ 的直角坐标是 $(r'\sin\theta'\cos\phi', r'\sin\theta'\sin\phi', r'\cos\theta')$. 于是我们可用距离公式表示 PQ，但按余弦定理 $\overline{PQ}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma$. 让 PQ 的两个表达式相等就给出上述 $\cos\gamma$ 的表达式.

② *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1784, 370～389, pub. 1787.

$$(50)\qquad \int_0^1 P_{2n}(x)P_{2m}(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & 当\ m \gtrless n. \\ \dfrac{1}{4m+1}, & 当\ m = n. \end{cases}$$

他还证明了每个 P_{2n} 的零点都是实数,彼此不相同,关于 0 对称,且绝对值小于 1. 还有当 $0 < x < 1$ 时, $P_{2n}(x) < 1$.

然后,借助正交条件(50),他用级数逐项积分法证明了:一个给定的 x^2 的函数能用唯一的方式表成函数 $P_{2n}(x)$ 的级数.

最后,运用他的多项式的这些和其他一些性质,Legendre 回到了万有引力的主要问题上,并用位势的表达式(43)及旋转流体质量的平衡条件,他得到该质量的、表成他的多项式的级数形式的子午线方程. 他相信这个方程包括了关于旋转球体的一切可能的平衡形态.

现在 Laplace 登场了. 他写了几篇关于旋转体引力的论文(1772 年,发表于 1776 年;1773 年,发表于 1776 年;1775 年,发表于 1778 年),文中他用的是力的分量而不是势函数. 受到 Legendre写于 1782 年发表于 1785 年那篇论文的激发,Laplace 写了著名的值得注意的第四篇文章《球状体和行星状物体的引力理论》①. 文中没有提到 Legendre,Laplace 研究的是与 Legendre 的旋转图形不同的任意球状体的引力问题,所谓球状体(其表面),Laplace 是指用 r, θ, ϕ 的一个方程给出的任一曲面.

他从下述定理出发:任意物体作用在它外部一点的引力的势 V,若用球坐标 r, θ, ϕ 表示并取 $\mu = \cos\theta$ 时,必定满足位势方程

$$(51)\qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} = 0.$$

Laplace 在这里没有说明他是怎样得到这个方程的. 在后来的一篇论文②中他给出直角坐标形式(44). 完全可以肯定,他是先得到直

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1782, 113～196, pub. 1785 = *Œuvres*, 10, 339～419.

② *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1787, 249～267, pub. 1789 = *Œuvres*, 11, 275～292.

角坐标形式然后再从它推出球坐标形式的.事实上,两种形式已经由 Euler 和 Lagrange 给出了,但是 Laplace 没有提到他们.他可能不知道他们的工作,虽然这是可疑的.

在1782年的文章中,Laplace 令

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{U_0}{r} + \frac{U_1}{r^2} + \frac{U_2}{r^3} + \cdots \tag{52}$$

这里 $U_n = U_n(\theta, \phi)$,他将它代入(51),则单个的 U_n 满足①

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial U}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} + n(n+1)U = 0. \tag{53}$$

借助 Legendre 的 P_{2n},他就能证明

$$U_n(\theta, \phi) = \iiint r'^{n+2}\mathrm{P}_{2n}(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'))\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'\,dr'. \tag{54}$$

接着 Laplace 利用这个结果与(52)来计算与一球有小差异的球状体的势.他把球状体的表面方程写成

$$r = a(1+\alpha y), \tag{55}$$

这里 α 很小,而 y 是在球状体上 θ' 和 ϕ' 的函数. Laplace 假定 $y(\theta, \phi)$ 能展成函数项级数

$$y = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \cdots \tag{56}$$

其中 Y_n 是 θ, ϕ 的函数,满足微分方程(53).这里他得到的结果首先是

$$\mathrm{Y}_n = \frac{2n+1}{4\pi\alpha a^{n+1}}U_n. \tag{57}$$

于是,这些 Y_n 可用到(52)中,展开式(56)还可改写成

---

① 如果我们忽略中项(ϕ 不出现),这样得到的常微分方程就是现在所谓的 Legendre微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + n(n+1)z = 0.$$

$\mathrm{P}_n(x)$满足这个方程.另一方面,U_n(和[57]中的 Y_n)作为两个变量 $\mu=\cos\theta$ 和 ϕ 的函数满足(53).这 U_n 和 Y_n,德国人称为球函数,而 Lord Kelvin 称为球调和或球面调和函数.

$$(58)\quad y(\mu,\phi)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\times \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_n(\mu',\phi')P_n(\mu,\phi,\mu',\phi')d\mu' d\phi',$$

其中 $\mu'=\cos\theta'$. 这时,用 y 的值,他就有了一个关于(55)中的 r 的表达式,而利用这个结果和(54)中的 U_n,他就得了(52)中的 V.

Laplace 在这里并没有考虑把 θ,ϕ 的任一函数展开成 Y_n 的级数的一般问题. 他在这里所作的和后来的文章中,深信这样的表示式是可能的并且是唯一的. 他只处理 μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi$ 和 $\sqrt{1-\mu^2}\sin\phi$ 的有理整函数;因而他对于一般结果的需要是有限制的. 他证明了基本的正交性质

$$(59)\quad \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}U_n(\mu,\phi)U_m(\mu,\phi)d\mu d\phi=0,\quad 当\ m\neq n.$$

但是,在他的《天体力学》第二卷里,他证明 θ 和 ϕ 的任意函数能展开成 U_n(或 Y_n)的级数,并且证明(59)蕴涵着展开式的唯一性.

Laplace 还写了关于球状体的引力和地球形状的几篇别的论文(例如,1783 年,发表于 1786 年;1787 年,发表于 1789 年);在这些文章中用了球函数展开式. 在最后的那篇文章中,Laplace 给出了直角坐标形式的位势方程,但他作了一个错误的结论,他假设这个方程当被吸引的质点位于物体内部时也成立. 这个错误由 Poisson 加以更正(第 28 章第 4 节).

18 世纪 80 年代 Legendre 继续进行他的研究. 在写于 1790 年的第四篇论文[①]中,他对奇数 n 引进了 $P_n(x)$. (47)给出的 $P_n(x)$的表达式对一切 n 都是正确的,Legendre 证明了对任何正整数 m 和 n,成立

$$(60)\quad \int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & 当\ m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & 当\ m=n.\end{cases}$$

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1789, 372~454, pub. 1793.

后来,他也引进了球函数. 就是说,他令 Y_n 是 $(1-2zt+z^2)^{-1/2}$ 展开式中 z^n 的系数,这里 $t=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$. 然后令 $\mu=\cos\theta$, $\mu'=\cos\theta'$ 和 $\psi=\phi-\phi'$,他就证得

$$\begin{aligned}Y_n(t) = {} & P_n(\mu)P_n(\mu')+\frac{2}{n(n+1)}\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\frac{dP_n(\mu')}{d\mu'}\\ & \times\sin\theta\sin\theta'\cos\psi+\frac{2}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\frac{d^2P_n(\mu)}{d\mu^2}\\ & \times\frac{d^2P_n(\mu')}{d\mu'^2}\sin^2\theta\sin^2\theta'\cos 2\psi+\cdots\end{aligned}$$

更高的项包含 P_n 的更高阶导数. 这个方程等价于

$$\begin{aligned}& P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'))\\ & =\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi'),\end{aligned}$$

其中 m 是上标而不是指数. $P_n^m(x)$ 满足

$$(61)\quad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n^m(x)}{dx}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x)=0$$

并且 $P_n^m(x)$ 与

$$(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$$

只差一个常数因子. 这样引进的 $P_n^m(x)$ 现在称为连带 Legendre 多项式. 然后,Legendre 证明了

(62)

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}U_n(\mu',\phi')P_n(\mu,\phi,\mu',\phi')d\mu'd\phi'=\frac{4\pi}{2n+1}U_n(\mu,\phi)$$

和

$$(63)\qquad \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\{P_n(\mu)\}^2d\mu d\phi=\frac{4\pi}{2n+1}.$$

这篇文章中用到了 $P_n(x)$ 满足 Legendre 微分方程的事实.

还有许多包含着 Legendre 多项式和球调和函数的别的特殊结果,是由 Legendre, Laplace 和其他人得到的. 一个基本结果是

1816 年[①]得到的 Olinde Rodrigues(1794—1851)公式

$$(64)\qquad \mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}.$$

Laplace 解球状体引力位势方程方面的工作是这个课题上浩瀚的工作的开始. 他和 Legendre 在关于 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_n(x)$、连带 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_n^m(x)$及球(球面)调和 $\mathrm{Y}_n(\mu, \phi)$方面的工作同等重要,因为更加任意的函数都能表示成 P_n,P_n^m 和 Y_n 的无穷级数. 这一系列函数类似于三角函数,对后者 Daniel Bernoulli 曾断言它们能用来表示任意函数. 至于函数类的选择则要依赖于被解的微分方程以及初值和边界条件. 当然,对这些函数以前曾经完成了很多工作,过去又作过很多工作,才使得它们在解偏微分方程中更为有用.

5. 一阶偏微分方程

直到 Lagrange 的时代,在一阶偏微分方程方面还很少系统的研究. 二阶方程首先受到注意,因为物理问题直接引导出它们. 只有很少几种特殊的一阶方程被解出来,但是这些方程或者是容易被积分出来的,或者是通过技巧被积分出来的. 只有一个例外,就是形如

$$(65)\qquad P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$$

的今天通常称为全微分方程的这种方程,这里 P, Q, R 是 x, y, z 的函数. 这类方程,如果能积分的话,就把 z 定义成 x 和 y 的函数. Clairaut 1739 年在他关于地球形状的研究[②]中遇到了这样的方程. 如果(65)左端的表达式是一个恰当微分,就是说,如果存在函数 $u(x, y, z) = C$ 使得

---

① *Corresp. sur l'Ecole Poly.*, 3,1816,361~385.

② *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1739,425~436.

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{66}$$

那么,Clairaut 指出

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{67}$$

Clairaut 讲明怎样用一种现代教科书中仍在使用着的方法求解(65). 如果 P, Q, R 是流体运动的速度分量,则(65)就是一恰当微分方程,这个事实,使人们对方程(65)发生了兴趣.

如果(65)不是恰当微分方程,那么 Clairaut 也说明了有可能求得积分因子,即这样一个函数 $\mu(x, y, z)$,当用它去乘(65)后,新的左端便是一恰当微分. Clairaut① 和后来 d'Alembert[《论流体运动的平衡》(*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, 1744)]都给出了(65)可积分的一个必要条件(借助于积分因子). 这个条件(同时也是充分的)是

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{68}$$

一般的两个自变量的一阶偏微分方程形如

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{69}$$

这里 $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$. 如果方程关于 p, q 是线性的,则称之为线性偏微分方程,否则,称为非线性的. 最重要的理论是 Lagrange 贡献的.

为了了解 Lagrange 的工作,首先必须记住他的至今仍旧通用的术语. 他把一阶非线性方程的解分类如下. 任一包含两个任意常数的解 $V(x, y, z, a, b) = 0$ 是**完全解或完全积分**. 令 $b = \phi(a)$,这里 ϕ 是任意的,我们就得到一个单参数解族. 当 $\phi(a)$ 任意时,该族的包络称为**通积分**. 当一个确定的 $\phi(a)$ 被使用时,这个包络是通积分的一个**特殊情况**. 完全积分中的所有解的包络称为**奇解**(**奇积分**). 不久我们将看到这些解在几何上是怎么回事. 完全积分不

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1740, 293~323.

是唯一的,因为能够有许多不相同的完全积分,它们之间通过简单的改变任意常数是不能相互得到的. 但是,从任一完全积分,通过特殊情况和奇解,能够得到由另一完全积分给出的所有的解.

在我们将要简短地讲到的 1772 年和 1779 年的两篇重要文章之间,Lagrange 在 1774 年写了一篇讨论一阶偏微分方程的完全解、通解和奇解之间的关系的论文. 从 $V(x, y, z, a, \phi(a)) = 0$ 及 $\partial V/\partial a = 0$ (其中 $\phi(a)$任意)中消去 a 就得到通积分①. (对于一个特殊的 $\phi(a)$,我们得到一个特解.)从 $V(x, y, z, a, b) = 0$, $\partial V/\partial a = 0$ 和 $\partial V/\partial b = 0$ 中消去 a 和 b 就得到奇解.

Lagrange 首次给出非线性一阶方程的一般理论. 在 1772 年的文章②中,他考察了两个自变量 x, y 及一个应变量 z 的一般一阶方程. 这里他改进并推广了 Euler 早些时候做的工作. 他把方程(69)看做是这样的形式,其中 q 是 x, y, z 和 p 的函数,即

(70) $$q - Q(x, y, z, p) = 0,$$

并且试图确定 p 作为 x, y, z 的一个函数 P,从而使得两个方程

(71) $$q - Q(x, y, z, p) = 0 \text{ 和 } p - P(x, y, z) = 0$$

有单重无穷多个公共积分曲面,或者,像 Lagrange 从分析上阐明它那样,使得表达式

(72) $$dz - p dx - q dy$$

乘以适当因子 $M(x, y, z)$就变成 $N(x, y, z) = 0$ 的恰当微分 dN. 为此必须有

$$\frac{\partial N}{\partial z} = M, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -Mp, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = -Mq.$$

对于这些方程,可积条件(67)蕴涵

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial (Mp)}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial (Mq)}{\partial z}, \quad \frac{\partial (Mp)}{\partial y} = \frac{\partial (Mq)}{\partial x}.$$

---

① 对任意的 ϕ,实际上实现 a 的消去一般是不可能的. 通积分是一个相当于特解族的概念.

② *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1772 = *Œuvres*, 3, 549～575.

如果把这三个方程中的前两个所给出的$\partial M/\partial x$ 和$\partial M/\partial y$ 的值代入最后一个,就得到

$$(73)\qquad \frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial z}+q\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

这就是使(72)可积的条件(68),而(68),正如 Lagrange 所评注的,是一个早就知道的条件. 在(73)中 q 能取为 x, y, z 和 p 的给定函数 Q,因而这方程显然变成

$$(74)\qquad -Q_p\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+(Q-pQ_p)\frac{\partial p}{\partial z}-Q_x-pQ_z=0.$$

现在,Lagrange 的计划便是寻找这个一阶方程的解 $p=P$,它关于 p 的导数是线性的,其解包含一个任意常数 α. 得到它以后,他再积分两个方程

$$(75)\qquad q-Q(x,\ y,\ z,\ p)=0,\ p-P(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0,$$

这表示$\partial z/\partial x$ 和$\partial z/\partial y$ 是 x, y, z 的函数,就求得了原方程(70)的一族∞^2 个积分曲面;也就是说,他求得了完全解. 那么,至此,Lagrange 是用解线性方程(74)的问题来代替解非线性方程(70)的问题.

1779 年 Lagrange 给出了他的解线性一阶偏微分方程的方法①. 他考虑至今仍称为 Lagrange 方程的线性方程

$$(76)\qquad Pp+Qq=R,$$

其中 P, Q, R 是 x, y, z 的函数. 这个方程称为非齐次的,因为有 R 这项出现. 这个方程与三个自变量的齐次方程

$$(77)\qquad P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

紧密相连. Lagrange 容易地证明了:如果 $u(x,\ y,\ z)=c$ 是(76)的一个解,那么 $f=u(x,\ y,\ z)$ 就是(77)的一个解,反之亦然. 因此解(76)的问题等价于解(77). 而方程(77)又转而联系着常微分方程组

---

① *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1779 = *Œuvres*, 4,585~634.

$$(78)\qquad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P} \text{ 和 } \frac{dz}{dx}=\frac{R}{P}.$$

事实上,如果 $f=u(x, y, z)$ 和 $f=v(x, y, z)$ 是(77)的两个独立的解,那么 $u=c_1$ 和 $v=c_2$ 就是(78)的一个解,反之亦然.因此,如果我们能求得(78)的解 $u=c_1$ 和 $v=c_2$,$f=u$ 和 $f=v$ 就将是(77)的解,并且 $u=c$ 和 $v=c$ 将是(76)的解.此外,容易证明:当 ϕ 是 u, v 的任意函数时,$f=\phi(u, v)$ 也满足(77).于是 $\phi(u, v)=c$,或因 ϕ 是任意的,$\phi(u, v)=0$ 就是(76)的通解.Lagrange 在 1779 年给出了上述纲要,并在 1785 年①给出了证明.或许值得顺便指出,Euler 也晓得(77)的解能被化成(78)的解.

如果把线性方程方面的这一工作与 1772 年在非线性方程方面的工作联系起来,就会看到 Lagrange 已经成功地把一个关于 x, y, z 的任意一阶方程化成为一组联立常微分方程.他没有明显地陈述这个结果,但这是可以从上面的工作直接推出来的.奇怪的是,在 1785 年他解一个特殊的一阶偏微分方程时却说它不可能用这个方法,看来他忘掉了他较早(1772)的工作!

后来,据推测 Paul Charpit(死于 1784)在 1784 年把非线性方程和线性方程的方法结合起来,将任一 $f(x, y, z, p, q)=0$ 化归为一个常微分方程组.在 1798 年 Lacroix 说:Charpit 在 1784 年提出了一篇文章(未出版),其中他把一阶偏微分方程化归到常微分方程组.Jacobi 发现了 Lacroix 的惊人的说法,表示希望发表 Charpit 的工作.但是,这件事一直没有办到,以至我们不知道 Lacroix 的说法是不是正确的.事实上,是 Lagrange 做了完整的工作,而 Charpit 可能并未增加什么内容.现代教科书中给出的方法——称为 Lagrange, Lagrange-Charpit 或 Charpit 方法,是 Lagrange 在 1772 年和 1779 年文章中提出的思想的融和.这个方法说明为解一般的一阶偏微分方程 $f(x, y, z, p, q)=0$,就必须

① *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1785 = *Œuvres*, 5,543~562.

解常微分方程组($f=0$ 的特征方程)

$$
(79)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=f_p,\ \frac{dy}{dt}=f_q,\ \frac{dz}{dt}=pf_p+qf_q,\\ &\frac{dp}{dt}=-f_x-f_zp,\ \frac{dq}{dt}=-f_y-f_zq. \end{aligned}
$$

如果求得(79)的任何一个积分,比如说 $u(x, y, z, p, q)=A$,就可得到解. 把这些方程和 $f=0$ 联立,解出 p, q 并代入 $dz=pdx+qdy$ (见公式[72]),最后,用对(65)用过的方法就可求积分.

Lagrange 的方法常常称为 Cauchy 的特征方法,因为把 Lagrange 和 Charpit 对两个自变量的方程过渡到(79)的方法推广到 n 个变量时出现了困难,而这一困难是由 Cauchy 在 1819 年①克服的.

6. Monge 和特征理论

Lagrange 纯粹是从分析上来进行工作的. Gaspard Monge (1746—1818)引进了几何语言. 对偏微分方程,他的工作虽不如 Euler, Lagrange 和 Legendre 那么重大,但是他开创了用几何来解释分析研究的运动,并且因此引进了许多富有成果的想法. 他说明:如同包含曲线的问题引导出常微分方程一样,包含曲面的问题就引导出偏微分方程. 更一般地,对于 Monge 来说,几何和分析是同一个课题,而对该世纪别的数学家来说,这两个分支是分离的,仅有一些接触点. Monge 在 1770 年开始他的研究,但直到很久以后也没有发表他的成果.

在非线性一阶方程学科中首要的是:Monge 不仅引进几何解释,而且还强调一个新概念:特征曲线②. 他关于特征的思想以及

① *Bull. de la Société Philomathique*, 1819,10~21;也可见 *Exercices d'analyse et de phys. math.*, 2, 238 ~ 272 = *Œuvres*, (2),12,272~309.

② *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1784,85~117,118~192, pub. 1787.

积分作为包络的思想没有被他的同时代人所理解,还被称为形而上学的原理,但是,在后来的研究中特征理论却变成了一种非常重要的主题.在他的讲义和随后的著名的出版物《关于把分析应用于几何的活页论文》(*Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*, 1795)中,Monge 把他的思想发展得更加完整.这思想最好用他自己的例子来说明.

考虑半径是常数 R,中心在 x-y 平面上无论何处的双参数球面族.这个族的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2. \tag{80}$$

这个方程是非线性一阶偏微分方程

$$z^2(p^2+q^2+1)=R^2 \tag{81}$$

的完全积分,因为(80)包含两个任意常数 a 和 b,并且显然满足(81).令 $b=\phi(a)$ 来引进任一子球面族,这是中心在 x-y 平面上的曲线 $y=\phi(x)$ 上的球面族.这个单参数球面族的包络(管状曲面)也是(81)的一个解.这个特解可从

$$(x-a)^2+(y-\phi(a))^2+z^2=R^2 \tag{82}$$

及(82)对 a 的偏导数,即

$$(x-a)+(y-\phi(a))\phi'(a)=0 \tag{83}$$

两式中消去 a 得到.对每一特别选定的 a,方程(82)和(83)表示两张特定的曲面,因此,联立考察两曲面就表示一条曲线,称为特征曲线.这条曲线也是该子族中两"相邻"曲面的交线.特征曲线的集合填满包络;也就是,包络与子族中每一成员沿一条特征线相切触.通积分是特征曲线集合生成的每一曲面(单参数族的包络)的总体.(80)的全体解的包络,也就是,奇解 $z=\pm R$,可从(80)与(80)分别对 a, b 的偏导数中消去 a 和 b 而得到.

特征曲线也以另一种方式表现出来.考察两个球面子族,它们各自的包络沿任一球面相切.我们可称这样的包络是相邻包络.两相邻包络的交线是球面上的特征曲线,它与通过考虑各子族的相

邻成员得到的特征曲线是相同的. 任一球面可属于包络完全不同的无穷多个相异的子球面族,所以在同一球面上将有不同的特征曲线. 所有这些特征曲线都是垂直平面中的大圆.

Monge 建立了特征曲线的微分方程的分析形式,它相当于方程(79)确定(69)的特征曲线这一事实. (Monge 利用全微分方程表示特征曲线的方程.)

Monge 还引进了(1784)特征锥的概念. 在空间任一点(x, y, z)(图 22.4)可考虑一平面,它的法线有方向数 $p, q, -1$. 对一固定的(x, y, z),满足

(84)　$F(x, y, z, p, q)=0$

的 p 和 q 的集合确定一全部通过(x, y, z)的单参数平面族. 这个平面集是一个顶点在(x, y, z)的锥的包络. 这就是(x, y, z)的特征锥或 Monge 锥.

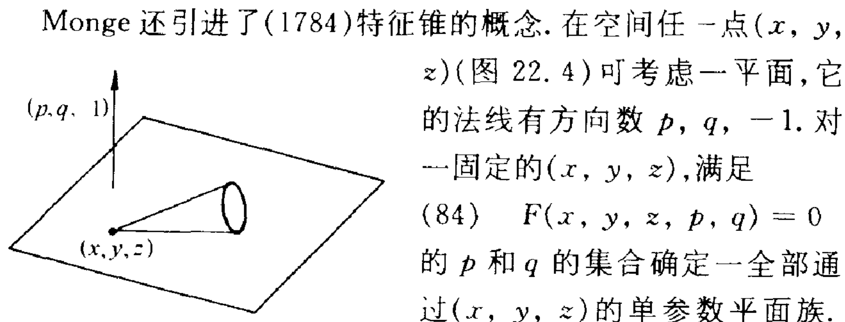


图 22.4

如果我们现在来考察方程为 $z=g(x, y)$ 的曲面 S,则它在每一(x, y, z)有一个切平面. 这样一张曲面是 $F=0$ 的积分曲面的必要充分条件是:在每点(x, y, z)上,F 的切平面是(x, y, z)处 Monge 锥的切平面. 积分曲面 S 上的曲线 C 称为特征曲线,如果 C 上每点的切线是 Monge 锥在该点的母线. 这些特征曲线与 Monge 把(80)看成完全积分推得的是同样的,并且也是联立方程(79)的解. Monge 还在 1802 年的收编在他的《分析在几何中的应用》(*Application de l'analyse à la géométrie*①, 1807)中的一篇文章中指出:每一积分曲面都是特征曲线的轨迹,并且仅有一条特征曲线通过这一积分曲面的每一点.

特征曲线的重要性在于:如果取一空间曲线 $x(t), y(t), z(t)$(对 t 值的某一区间)不是特征曲线,那么恰好存在 $F=0$ 的一个

① 这是他的 *Feuilles d'analyse* 第二版的书名.

积分曲面通过该曲线;即,恰好存在一个 $z=g(x, y)$ 使得 $z(t)=g(x(t), y(t))$ (对 t 值的范围). 另一方面,如同 Monge 在 1806 年讲义中指出的:对每一特征曲线都能有无穷多个积分曲面通过它. 此外,通过该曲线的无穷多个积分曲面都沿这条曲线彼此相切.

7. Monge 和非线性二阶方程

除了我们已经回顾过的二阶线性方程外,18 世纪的数学家们还有需要考虑更一般的两个自变量的线性二阶方程,甚至非线性方程. 例如,他们研究了线性方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz+G=0,$$

这里 $A, B, \cdots, G$ 是 x 和 y 的函数. 这个方程通常写成

$$Ar+Bs+Ct+Dp+Eq+Fz+G=0, \tag{85}$$

这里字母 r, s, t, p 和 q 有显然的意义. Laplace 在 1773① 年证明假如 $B^2-4AC\neq 0$,方程(85)就能经过变量替换化成如下形式:

$$s+ap+bq+cz+g=0, \tag{86}$$

这里 a, b, c 和 g 是 x 和 y 的函数. 然后他用无穷级数来解这个方程.

Monge 在他的《关于把分析应用于几何的活页论文》中,考察了非线性方程

$$Rr+Ss+Tt=V, \tag{87}$$

其中 R, S, T 和 V 是 x, y, z, p 和 q 的函数,因而,方程关于二阶导数 r, s 和 t 是线性的. 在 Lagrange 关于极小曲面(即由给定的空间曲线界住的面积最小的曲面)的工作中出现了这类方程,在那里具体的微分方程是 $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$ (也可见

---

① *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1773, pub. 1777 = *Œuvres*, 9,5~68.

第 24 章第 4 节). 虽然 Monge 对方程(87)曾经作了一些研究,但在现在的文章(1795)中,他才能够用我们将要扼要介绍的方法漂亮地解出它.

利用下面这些直接的事实:

(88) $$dz = p\,dx + q\,dy,$$

(89) $$dp = r\,dx + s\,dy,$$

(90) $$dq = s\,dx + t\,dy,$$

并从(87)、(89)及(90)中消去 r 和 t,他得到方程

(91) $$s(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2) - (R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy) = 0.$$

然后,他的论证是:每当可以联立地求解

(92) $$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0$$

和

(93) $$R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0$$

时,则(91)将被满足,从而(87)也将被满足.

方程(92)等价于两个一阶方程

(94) $dy - W_1(x, y, z, p, q)dx = 0$ 和 $dy - W_2(x, y, z, p, q)dx = 0$.

方程(88),(93)与(94)的任一个一起,组成五个变量 x, y, z, p 和 q 的三个全微分方程的方程组. 这三个方程能解时,就可求得两个解

$$u_1(x, y, z, p, q) = C_1 \text{ 和 } u_2(x, y, z, p, q) = C_2,$$

于是

(95) $$u_1 = \phi(u_2)$$

是一个一阶偏微分方程,其中 ϕ 是任意的. 方程(95)称为中间积分. 它的通解是(87)的解. 如果(94)的另一方程能与(88)和(93)一起用,我们就得到另一函数

(96) $$u_3 = \phi(u_4).$$

在这种情形(95)和(96)能联立地解出 p 和 q,把这些值代入(88),

那么,这个全微分方程就能解出来.这至少是一个一般的格式,虽然还有很多细节我们未及详述. Monge 关于极小曲面方程的积分法是他为之自豪的成就之一.

对于方程(87), Monge 也引进了特征理论.特征的全微分方程是(92),即

$$R\mathrm{d}y^2 - S\mathrm{d}x\mathrm{d}y + T\mathrm{d}x^2 = 0.$$

早在他的1784年的工作①中就出现了这个方程,它在积分曲面的每一点上定义该点的两个特征方向.积分曲面的每一点都有两条特征曲线通过,沿其中每一条都有两个相邻的积分曲面彼此相切.

8. 一阶偏微分方程组

18世纪在流体动力学和水力学研究中首次提出了偏微分方程组.诸如:设计船身以减少它在水中运动的阻力,以及潮汐、河水的流动,从喷口射出的水流,水对船舷的压力的计算等实际问题推动了对不可压缩流体,例如水的研究工作.对可压缩流体,特别是空气的研究工作,是为了要分析空气在船帆上的作用,设计风车叶片和了解声音的传播.我们早些时候研究过的声音传播方面的工作,在历史上是把水力学上的研究特殊化,使之适用于小振幅波动的一个应用.

Euler 在1752年一篇题为《流体运动原理》②的文章中处理了不可压缩流体,之后,他在1755年一篇题为《流体运动的一般原理》③的文章中,推广了前一个工作.这里他给出了至今仍然著名

① *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1784, 118~192, pub. 1787.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1756/1757, 271~311, pub. 1761 = *Opera*, (2), 12, 133~168.

③ *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 11, 1755, 274~315, pub. 1757 = *Opera*, (2), 12, 54~91.

的关于理想(无粘性)可压缩和不可压缩流体的流体流的方程. 流体被认为是连续的,其质点是数学上的点. 他考察了受到压力为 p,密度为 ρ 以及单位质量上分量为 P, Q, R 的外力作用的流体小体积上的作用力.

Euler 创立的流体动力学的两种方法之一,文献中称之为空间描写,其中流体速度的分量 u, v 和 w 在流体中每一点由

$$u=u(x,\ y,\ z,\ t),\ v=v(x,\ y,\ z,\ t),\ w=w(x,\ y,\ z,\ t) \tag{97}$$

给出. 这里

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

在时间 $\mathrm{d}t$,质点$(x,\ y,\ z)$在 x 方向走过距离 $u\mathrm{d}t$,在 y 方向走过距离 $v\mathrm{d}t$,在 z 方向走过 $w\mathrm{d}t$. 于是在 $\mathrm{d}u$ 的表示式中的实际变化量 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}z$ 就由这些量给出,因而

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}u\,\mathrm{d}t+\frac{\partial u}{\partial y}v\,\mathrm{d}t+\frac{\partial u}{\partial z}w\,\mathrm{d}t+\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{98}$$

对 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ 也有相应的表达式. 这些量给出现在称为$(x,\ y,\ z)$处的速度变化的对流率,或对流加速度. 计算$(x,\ y,\ z)$处质点上的作用力,并应用牛顿第二定律,Euler 得到微分方程组

$$\begin{aligned} P-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\\ Q-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\\ R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{99}$$

Euler 还推广了 d'Alembert 的连续性微分方程(45),并且得到关于可压缩流的方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0. \tag{100}$$

这里有四个方程和五个未知函数,但是压力 p 作为密度的函数——状态方程——必须指定.

在 1755 年的文章中 Euler 说:"如果我们不能洞察关于流体运动完全的知识的话,那么归结其原因,不在于力学,或不在于已知的运动原理不够充分,这里是分析本身抛弃了我们,因为流体运动的全部理论正好被化归成分析公式的解."不幸的是,要很好地处理这些方程,分析仍嫌无能为力. 于是,他动手讨论某些特殊的解法. 在这个题目上他还写了一些别的文章,处理船受到的阻力和船的推力. Euler 的方程并不是水力学的最终的方程. Euler 忽略了的粘性是 70 年后由 Navier 和 Stokes 引进的(第 28 章第 7 节).

Lagrange 也从事流体运动的研究. 在他的《分析力学》第一版中,包括一些这类的研究,他给出了 Euler 的基本方程并推广了它们. 这里,他把荣誉归于 d'Alembert,而没有归于 Euler. 他也说流体运动方程用分析来处理是太困难了,能严密计算的只是无穷小运动的情况.

在偏微分方程组领域中,在 18 世纪里水力学方程是这门学科数学研究的主要启发. 实际上,18 世纪在方程组的解方面成就甚少.

9. 这一门数学学科的产生

直到 1765 年偏微分方程只在解决物理问题中出现. 贡献给偏微分方程的纯数学研究的第一篇论文是 Euler 的:《方程

$$\left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}t^2}\right)=aa\left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2}\right)+\frac{b}{x}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$$

的积分法研究》.[1]稍后 Euler 在他的《积分学原理》[2]第三卷中发

---

[1] *Misc. Taur.*, 3_2, 1762/1765, 60～91, pub. 1766 = *Opera*, (1), 23, 47～73.

[2] 1770 = *Opera*, (1), 13.

表了这个题目的一篇论文.

在 d'Alembert 1747 年弦振动的工作以前,偏微分方程是作为条件方程为人所知的,并且只是求特解. 在这个工作和 d'Alembert 关于风的一般成因的书(1746)以后,数学家才认识到特解和通解之间的区别. 但是,一旦意识到了这个差别,他们似乎相信通解更为重要. Laplace 在 1799 年《天体力学》第一卷中还抱怨说球坐标的位势方程不能用一般形式求积分. 在这个世纪里没有意识到下述事实:Euler 和 d'Alembert 对振动弦得到的那种通解并不像满足初值和边界条件的特解那么有用.

数学家们确实认识到了偏微分方程并没有包含什么新的运算技巧,它与常微分方程不同之处只在于,在解中可以出现任意函数. 他们期望把偏微分方程化为常微分方程去确定这些任意函数. Laplace(1773)和 Lagrange(1784)明确地说,他们认为一个偏微分方程被化成常微分方程问题时,这个偏微分方程就已被积分出来了. 另一种方法,如像 Daniel Bernoulli 对波动方程及 Laplace 对位势方程那样,用的是寻求特殊函数的级数展开式.

18 世纪在偏微分方程研究中的主要成就是揭示了它们对于弹性力学、水力学和万有引力问题的重要性. 除了 Lagrange 在一阶方程方面的工作外,普遍的方法没有发展起来,人们也没有意识到特殊函数展开法的潜力. 人们的努力方向是求解物理问题中提出的特殊方程. 偏微分方程解的理论还有待形成,这门学科整个说来还处在它的幼年时代.

参考书目

Burkhardt, H.: "Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 10,1908,1～1804.

Burkhardt, H., and W. Franz Meyer: "Potentialtheorie", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, 2, A7b, 464～503.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924; Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 3, 858～878, Vol. 4, 873～1047.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, Orell Füssli, (1), Vols. 13(1914) and 23(1938); (2), Vols. 10, 11, 12, and 13(1947～1955).

Lagrange, Joseph-Louis: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1868～1870, relevant papers in Vols. 1, 3, 4, 5.

Laplace, Pierre-Simon: *Œuvres complètes*, Gauthier Villars, 1893～1894, relevant papers in Vols. 9 and 10.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques* (1802), Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, pp. 342～352.

Langer, Rudolph E.: "Fourier Series: The Genesis and Evolution of a Theory", *Amer. Math. Monthly*, 54, No. 7, Part 2, 1947.

Taton, René: *L'Œuvre scientifique de Monge*, Presses Universitaires de France, 1951.

Todhunter, Isaac: *A History of the Mathematical Theorise of Attraction and the Figure of the Earth* (1873), Dover (reprint), 1962.

Truesdell, Clifford E.: *Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia Vol. X et XI Seriei Secundae*, in Euler, *Opera Omnia*, (2), 11, Part 2, Orell Füssli, 1960.

Truesdell, Clifford E.: *Editor's Introduction* in Euler, *Opera Omnia*, (2), Vol. 12, Orell Füssli, 1954.

Truesdell, Clifford E.: *Editor's Introduction* in Euler, *Opera Omnia*, (2), Vol. 13, Orell Füssli, 1956.

第 23 章

18 世纪的解析几何和微分几何

> 几何看来有时候要领先于分析,但事实上,几何的先行于分析,只不过像一个仆人走在主人的前面一样,是为主人开路的.
>
> James Joseph Sylvester

1. 引 言

物理问题的探索不可避免地要导致去寻求关于曲线和曲面的更多的知识,因为运动物体经过的路径都是曲线,而物体本身则是由曲面界住的三维体.早已热衷于坐标几何的方法和微积分的力量的数学家们曾经用这两个主要工具研究过几何问题.在已经建立起来的坐标几何领域以及由于把微积分应用到几何问题中去而创立的新领域——微分几何方面,在 18 世纪得到了令人难忘的结果.

2. 基本解析几何

18 世纪广泛地探讨了二维解析几何.初等平面解析几何的改善是容易总结的.Newton 和 James Bernoulli 对于特殊的曲线从本质上说已经引进并使用了所谓的极坐标系(第 15 章第 5 节),而 Jacob Hermann 则在 1729 年不仅正式宣布了极坐标的普遍可用,而且自由地应用极坐标去研究曲线.他还给出了从直角坐标到极坐标的变换公式.确切地讲,Hermann 把 p, $\cos\theta$, $\sin\theta$ 当作变量

来使用,而且用 z, n 和 m 来表示 p, $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$. Euler 扩充了极坐标的使用范围而且明确地使用三角函数的记号, Euler 那个时候的极坐标系实际上就是现代的极坐标系.

虽然一些 17 世纪的数学家——例如 Jan de Witt(1625—1672)在他的《曲线初步》(*Elementa Curvarum Linearum*, 1659)中——确曾把 x 和 y 的某些二次方程化为标准型, James Stirling 在他的《牛顿的三次曲线》(*Lineae Tertii Ordinis Neutonianae*, 1717)中则把 x 和 y 的一般的二次方程化为几种标准型.

在 Euler 的《引论》(*Introductio*, 1748)中,他引进了曲线的参数表示,那里 x 和 y 是用第三个变量表示出来的. 在这本著名的教科书中 Euler 系统地讨论了平面坐标几何.

就我们所知道的,在 Fermat, Descartes 和 La Hire 的著作中能找到关于三维坐标几何细微的迹象. 但真正的发展是 18 世纪的工作. 尽管某些早期的工作,例如 Pitot 的和 Clairaut 的工作,是和微分几何的发展有联系的,但我们在这里将只讨论真正的坐标几何.

第一件工作是改善 La Hire 关于三维坐标系的建议. John Bernoulli 在 1715 年给 Leibniz 的一封信中引进了我们现在通用的三个坐标平面. 通过 Antoine Parent(1666—1716), John Bernoulli, Clairaut 和 Jacob Hermann 的贡献(为了节省篇幅,这里不作详细介绍),弄清了曲面能用三个坐标变量的一个方程表示出来这个观念. Clairaut 在他的《关于双重曲率曲线的研究》(*Recherche sur les courbes à double courbure*, 1731 年)一书中不仅给出了一些曲面的方程,而且弄清楚了描述一条空间曲线需要两个曲面方程. 他还看出过一条曲线的两个曲面方程的某种组合,例如,两个方程相加,给出过这条曲线的另一曲面的方程. 利用这个事实,他说明怎样能够得到这些空间曲线的投影的方程,也就是求垂直于投影平面的柱面的方程.

二次曲面,例如球面、柱面、抛物面、双叶双曲面和椭球面,当然在 1700 年前就已经从几何上知道了;事实上,这些曲面中的某些已出现在 Archimedes 的著作中. Clairaut 在他 1731 年的书中给出了这些曲面中某几个的方程. 他还说明了 x, y 和 z 的齐次方程(各项的次数都相同)表示顶点在原点的一个锥面. 对于这个结果,Jacob Hermann 在 1732 年的一篇论文中[①]加上一条,即方程 $x^2+y^2=f(z)$ 是绕 z 轴的一个旋转曲面. Clairaut 和 Hermann 首先都关心地球的形状,在他们那个时代,人们都相信地球是某种形状的椭球.

尽管 Euler 对曲面方程已经做过一些早期工作,但是系统地致力于三维坐标几何,还是在他的《引论》(1748 年)第二卷第 5 章的附录[②]中. 他介绍了许多早已做过的工作,然后研究了一般的三个变量的二次方程

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz=l. \tag{1}$$

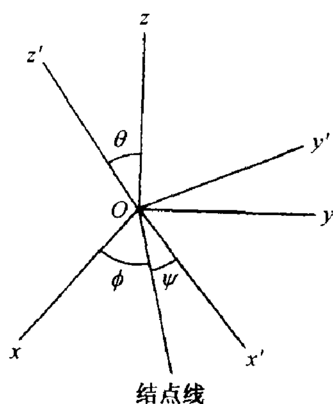


图 23.1

他企图通过坐标变换把这个方程化成这样的形式,使(1)所表示的二次曲面的主轴正好是坐标轴. 他引进了从 xyz-坐标系到 $x'y'z'$-坐标系的变换,其方程是用角 ϕ, ψ 和 θ 表示出来的(图 23.1). 角 ϕ 是 x-y 平面上从 x 轴到结点线(即 x'-y'平面和 x-y 平面的交线)间的夹角,角 ψ 是 x'-y'平面上 x'轴和结点线间的夹角,角 θ 就是图中所示 z 和 z'的夹角. 因此包括平移在内的变换方程是

$$x=x_0+x'(\cos\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\psi\sin\phi)$$
$$-y'(\cos\psi\sin\phi+\cos\theta\sin\psi\sin\phi)+z'\sin\theta\sin\phi,$$

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6,1732/1733,36~67,pub. 1738.

② *Opera*,(1),9.

$$(2)\quad y = y_0 + x'(\sin\psi\cos\phi + \cos\theta\cos\psi\sin\phi) - y'(\sin\psi\sin\phi - \cos\theta\cos\psi\sin\phi) - z'\sin\theta\sin\phi,$$
$$z = z_0 + x'\sin\theta\sin\phi + y'\sin\theta\cos\phi + z'\cos\theta.$$

Euler 就用这个变换把(1)化成标准形,而且得到了六种曲面:锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶双曲面、双曲抛物面(这是他发现的)以及抛物柱面. 和 Descartes 一样,Euler 主张按方程的次数来进行分类是正确的原则;Euler 的理由是,次数是线性变换下的不变量.

在对坐标轴变换问题继续进行工作之后,Euler 写了另一篇论文①,文中研究了把 $x^2+y^2+z^2$ 变到 $x'^2+y'^2+z'^2$ 的变换. 在这篇文章中 Euler——稍后一点 Lagrange 在一篇关于球体引力的论文中②——给出了轴的旋转的对称形式的变换,即齐次线性正交变换

$$x = \lambda x' + \mu y' + \nu z',$$
$$y = \lambda' x' + \mu' y' + \nu' z',$$
$$z = \lambda'' x' + \mu'' y' + \nu'' z',$$

其中

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1,\quad \lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'' = 0,$$
$$\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 = 1,\quad \lambda\nu + \lambda'\nu' + \lambda''\nu'' = 0,$$
$$\nu^2 + \nu'^2 + \nu''^2 = 1,\quad \mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'' = 0.$$

这些带撇和不带撇的 λ, μ, ν,用现代的术语来说,当然就是方向余弦.

Gaspard Monge 的写作包含大量的三维解析几何的内容. 他在 1802 年和他的学生 Jean-Nicolas-Pierre Hachette (1769—1834)一起写的一篇论文《代数在几何中的应用》(Application de

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 15,1770,75~106, pub. 1771 = *Opera*, (1),6,287~315.

② *Nouv. Mém. de l' Acad. de Berlin*, 1773,85~120 = *Œuvres*, 3,619~658.

l'algèbre à la géométrie)中可以找到他对解析几何本身的突出贡献①. 作者们证明二次曲面的每一个平面截口是一条二次曲线，还证明了平行截面截得的是相似的二次曲线而且其放法也是相似的. 这些结果可与 Archimedes 的几何定理相比. 作者还证明了单叶双曲面和双曲抛物面是直纹曲面，即它们都能用一根直线按两种不同的方式运动而得到，或者说，它们是由两组直线族构成的. 关于单叶双曲面的结果，Christopher Wren 大约在 1669 年就知道了. 他说单叶双曲面的图形能够通过一条直线绕另一条和它不在同一平面上的直线旋转而得到. 由于 Euler, Lagrange 和 Monge 的工作，解析几何变成了一个独立的而且充满活力的数学分支.

3. 高次平面曲线

至此所述解析几何还是专门讲述一次和二次曲线、曲面的. 当然研究高次方程表示的曲线是自然的. 事实上 Descartes 早就讨论过一些高次方程及其所代表的曲线. 次数高于 2 的曲线的研究变成众所周知的高次平面曲线理论，尽管它是坐标几何的组成部分. 18 世纪所研究的曲线都是代数曲线，即它们的方程由 $f(x, y) = 0$ 给出，其中 f 是 x 和 y 的多项式. 曲线的次数或阶数就是项的最高次数.

Newton 第一个对高次平面曲线进行了广泛的研究. Descartes 按照曲线方程的次数来对曲线进行分类的计划深深地打动了 Newton，于是 Newton 用适合于各该次曲线的方法系统地研究了各次曲线，他从研究三次曲线着手. 这个工作出现在他的《三次曲线例举》(Enumeratio Linearum Tertii Ordinis)中，这是作为他的 *Opticks*(《光学》)英文版的附录在 1704 年出版的，但实际上大

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 11 cahier, 1802, 143～169.

约在 1676 年就做出来了. 虽然在 La Hire 和 Wallis 的著作中使用了负 x 值和负 y 值,但 Newton 不仅用了两个坐标轴和负 x 负 y 值,而且还在所有四个象限中作图.

Newton 证明了怎样能够把一般的三次方程

(3) $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+jy+k=0$

所代表的一切曲线通过坐标轴的变换化为下列四种形式之一:

(a) $xy^2+ey=ax^3+bx^2+cx+d$,

(b) $xy=ax^3+bx^2+cx+d$,

(c) $y^2=ax^3+bx^2+cx+d$,

(d) $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Newton 把第三类曲线叫做发散抛物线(diverging parabolas),它包括图 23.2 所示的五种曲线. 这五种曲线是根据等式右边三次式的根的性质来区分的:全部是相异实根;两个根是复根;都是实根但有两个相等而且重根大于或小于单根;三个根都相等. Newton 断言,先从一点出发对这五种曲线之一作射影,然后取射影的交线就能分别得到每一个三次曲线.

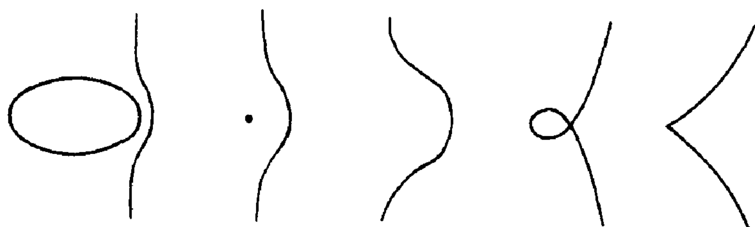


图 23.2

Newton 对他在《例举》中的许多断言都没有给出证明. James Stirling 在他的《三次曲线》中证明了或用别的方法重新证明了 Newton 的大多数断言,但是没有证明射影定理,射影定理是 Clairaut① 和 François Nicole(1683—1758)② 证明的. 其实 New-

① *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1731, 490~493, pub. 1733.

② *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1731, 494~510, pub. 1733.

ton 识别了 72 种三次曲线，Stirling 加上了 4 种，修道院院长 Jean-Paul de Gua de Malves，在他 1740 年题为《利用 Descartes 的分析而不借助于微积分去进行发现……》(*Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différential* …)的小书里又加上了 2 种.

Newton 关于三次曲线的工作激发了关于高次平面曲线的许多其他研究工作. 按照这个或那个原则对三次和四次曲线进行分类的课题继续使 18 和 19 世纪的数学家们感兴趣. 随着分类方法的不同所找到的分类数目也不同.

从 Newton 的 5 种三次曲线的图形显然可见，高次方程所代表的曲线呈现着许多在一次和二次曲线中没有发现过的特性. 称为奇点的初等特性是拐点和多重点. 在继续讲下去以前，我们先来看一下这些奇点是什么样子的.

拐点在微积分里是熟悉的. 在曲线上一点处，若有两条或多条可以重合的切线，这样的点就叫做多重点. 在这样的点上曲线有两个或多个分支相交. 如果有两条分支曲线交于多重点，这种点就叫做二重点. 如果三条分支曲线交于多重点，则这种点叫做三重点，如此等等.

如果我们把一条代数曲线的方程取作

$$f(x,\ y)=0,$$

f 为 x，y 的一个多项式，我们总可以通过一个平移把常数项消去. 如果消去了常数项，又如果 f 中有一次项，记作 a_1x+b_1y，那么 $a_1x+b_1y=0$ 给出了曲线在原点处的切线方程. 这时原点不是多重点. 如果曲线没有一次项，又如果 $a_2x^2+b_2xy+c_2y^2$ 是二次项，那么就会出现几种情形. 方程 $a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=0$ 可以代表两条不同的直线. 这两条直线与曲线在原点相切(这是可以证明的)，而因为有两条不同的切线，所以原点就是一个二重点，这个点叫做结点(node). 例如双纽线(图 23.3)的方程是

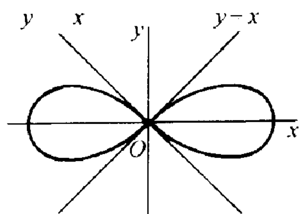


图 23.3 双纽线

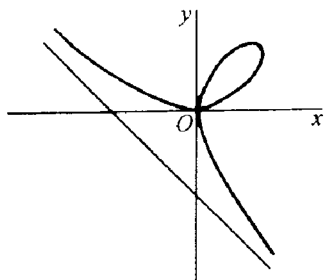


图 23.4 Descartes 叶形线

(4) $$a^2(y^2-x^2)+(y^2+x^2)^2=0,$$

而由二次项得到 $y^2-x^2=0$，于是 $y=x$ 和 $y=-x$ 是切线的方程. 类似地，Descartes 叶形线的方程是(图 23.4)

(5) $$x^3+y^3-3axy,$$

切于原点的切线由 $x=0$ 和 $y=0$ 给出，原点是一个结点.

当两条切线重合时，这一条直线看做是二重切线，而曲线的两个分支就在相切的点上互相接触，这种点叫尖点(cusp).（有时把尖点包括在二重点中.）例如半立方抛物线(图 23.5)

(6) $$ay^2=x^3$$

在原点有一个尖点，而两条重合的切线的方程是 $y^2=0$. 对于曲线 $(y-x^2)^2=x^5$（图 23.6），原点是一个尖点. 这里曲线的两个分支都位于二重切线 $y=0$ 的同一侧. De Gua 在他的《利用 Descartes 的分析》中曾试图证明不会出现这种类型的尖点，但是 Euler① 给

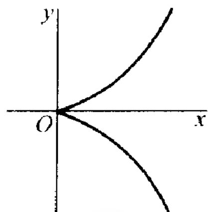


图 23.5 半立方抛物线

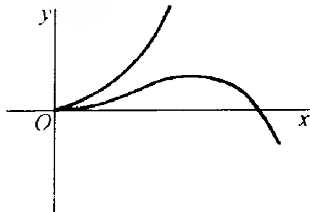


图 23.6

① *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 5, 1749, 203~221, pub. 1751 = *Opera*, (1), 27, 236~252.

出了有这种尖点的许多例子. 尖点也叫做平稳点或逆行点,因为一个沿着曲线移动的点,在尖点处继续其运动之前一定要停顿一下.

当两条切线是虚的时候,二重点叫做共轭点. 共轭点的坐标满足曲线的方程,但是这个点和曲线的其余部分隔离开来. 例如曲线 $y^2 = x^2(2x-1)$ (图 23.7)在原点有一个共轭点. 这里二重切线的方程是 $y^2 = \quad x^2$,而切线都是虚线.

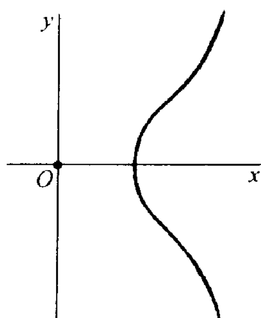


图 23.7

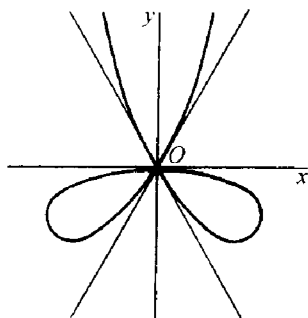


图 23.8

曲线 $ay^3 - 3ax^2y = x^4$ (图 23.8)在原点有一个三重点. 这三条切线的方程是

$$ay^3 - 3ax^2y = 0,$$

或 $y = 0$ 和 $y = \pm\sqrt{3}x$.

曲线 $ay^4 - ax^2y^2 = x^5$ (图 23.9)在原点有一个四重点. 在这里原点是结点和尖点的结合. 切线是 $y = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$.

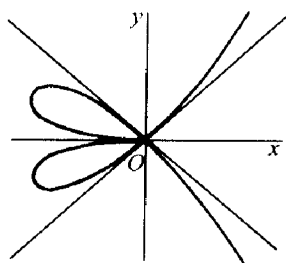


图 23.9

三次(阶)曲线可以有一个二重点(它可以是尖点),但没有别的多重点. 当然存在没有二重点的三次曲线.

回到纯粹的历史角度来看,Leibniz 及其后继者研究了曲线上许多这种样子特别的或奇异的点. 至于出现这种点的解析条件——诸如在拐

点处 $\dot{y}=0$,在二重点处 $\dot{y}$ 不确定——甚至微积分的奠基者们都已经知道.

Clairaut 在上面引用过的 1731 年的书中假设了一条三次曲线不能有多于三个的实拐点,但至少必有一个实拐点. De Gua 在《利用》中证明了,如果一条三次曲线有三个实拐点,则通过两个拐点的连线一定过第三个拐点. 人们常常把这个定理归功于 Maclaurin. De Gua 也研究了二重点,而且给出了二重点的条件,即如果 $f(x, y)=0$ 是曲线的方程,则在二重点处 f_x 和 f_y 一定等于 0. k 重点由所有直到 $(k-1)$ 阶导数都等于零来表征. 他证明了奇点是尖点、普通点和拐点的混合点. 此外,De Gua 论述了曲线的中点,曲线延伸到无穷的分支的形式,以及这种分支的性质.

Maclaurin 在他 19 岁时写的《有机的几何学》(*Geometria Organica*, 1720)中证明了,一条 n 次不可约曲线的二重点的最多个数是 $(n-1)(n-2)/2$. 为此他把一个 k 重点当作 $\frac{k(k-1)}{2}$ 个二重点. 他还给出了各类更高重数多重点的个数的上界. 然后他引进了代数曲线亏数(deficiency,后来叫做 genus)的概念,即二重点的最大可能的个数减去实际二重点的个数. 亏数为 0 或具有最大可能二重点个数的曲线受到了很大的注意. 这些曲线也叫做有理曲线或单行(unicursal)曲线. 几何上,一条单行曲线可以由一个动点的连续运动描出(但是可以通过无穷远点). 例如圆锥曲线,包括双曲线,都是单行曲线.

Newton 在他的《流数法》中,给出了在一个多重点上,确定曲线各分支的级数表示的方法,通常叫做 Newton 图或 Newton 平行四边形(第 20 章第 2 节). De Gua 在《利用》中用一个代数三角形(triangle algébrique)来代替 Newton 平行四边形. 因此,如果原点是奇点,则对于小的 x,代数曲线的方程就分解成形如 $y^m - Ax^n$ 的因子,其中 m 是正整数而 n 是整数. n 是正整数的那些因

子给出了曲线的分支. Euler 注意到(1749)de Gua 忽略了虚的分支.

Gabriel Cramer(1704—1752)在他的《代数曲线的解析引论》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1750)中,为了确定曲线的每个分支的级数表达式,特别是确定延伸到无穷远的分支的级数表达式,他还解决了当 y 和 x 之间的关系是由隐函数即 $f(x, y) = 0$ 给出时,y 用 x 来展开口问题. 他把 y 展成 x 的升幂级数或降幂级数. 和 de Gua 一样,他也用三角形来代替 Newton 的平行四边形,他也和别的作者一样忽略了曲线的虚分支.

对于曲线在一个多重点上的各分支,由于求得了它们的级数展开而产生的结论,在更晚一些时候由 Victor Puiseux(1820—1883)[1]推得,因而通常叫做 Puiseux 定理:代数平面曲线上一点 (x_0, y_0) 的全邻域能表为有限个展开

$$(7)\qquad y - y_0 = a_1(x - x_0)^{q_1/q_0} + a_2(x - x_0)^{q_2/q_0} + \cdots$$

这些展开在 x_0 的某个区间内收敛而且所有的 q_i 没有公因子. 每一个展开给出的那些点就叫做这条代数曲线的一个分支.

曲线和直线的交点,以及两条曲线的交点,是另一个受到很大注意的课题. Stirling 在他 1717 年写的《三次曲线》中证明了,(x 和 y 的)n 次代数曲线由该曲线的 $n(n+3)/2$ 个点所决定,因为这种曲线有 $n(n+3)/2$ 个本质系数. 他还断言,任两平行线切割一条给定的曲线,它们的交点(实的或虚的)个数相同,而且他证明了,延伸到无穷远的曲线的分支个数是偶数. Maclaurin 的《有机的几何学》创立了高次平面曲线交的理论. 他的工作推广了由特殊情形所得到的结果,而且在此基础上得出结论:m 次方程和 n 次方程交于 mn 个点.

1748 年 Euler 和 Cramer 企图证明这个结果,但都没有给出

---

[1] *Jour. de Math.*, 13, 1850, 365~480.

正确的证明. Euler① 依靠一种类比的论证;认识到他的这种论证是不完全的,他说人们应该把这种方法用到特殊的例子上去. Cramer 在他的 1750 年的书中的"证明"完全依靠例子,这种证明无疑是不能接受的. 两个人都考虑了具有虚坐标的交点和无穷远的公共点,而且注意到,仅当两种类型的点都包括在内而且两条曲线没有 $ax+by$ 那样的公因子时,交点个数才能达到 mn. 然而,两个人都没能确定若干类型交点的特有的相重数. 1764 年 Etienne Bezout(1730—1783)对这个定理给出了一个较好的证明,但是在计算无穷远点和多重点的相重数方面,证明也是不完全的. 真正计算相重数的问题是由 Georges-Henri Halphen(1844—1889)在 1873 年解决的②.

Cramer 在他 1750 年的书中重新研究了 Maclaurin 在他的《几何》中已经注意到的一个涉及两条曲线的交点个数的悖论. 一条 n 次曲线由 $n(n+3)/2$ 个点决定. 两条 n 次曲线相交于 n^2 个点. 如果现在 n 是 3,则由第一句话,这条曲线应该由九个点决定. 但是由于两条三次曲线相交于九个点,这九个点不能唯一地决定一条三次曲线. 当 $n=4$ 时产生了类似的悖论. Cramer 关于这个悖论(现在被看作是他的)的解释是:确定 n^2 个交点的 n^2 个方程不是独立的. 通过一条给定三次曲线上八个固定点的所有三次曲线都一定通过该曲线上第九个固定点,即第九个点是依赖于头八个点的. Euler 在 1748 年给出了同样的解释③.

1756 年 Matthieu B. Goudin (1734—1817)和 Achille-Pierre Dionis du Séjour (1734—1794)写成了《代数曲线论》(*Traité des courbes algébriques*). 该书的新特点是:一条 n 阶(次)曲线在一给

---

① *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 4, 1748, 234～248 = *Opera*, (1), 26, 46～59.

② *Bull. Soc. Math. de France*, 1, 1873, 130～148; 2, 1873, 34～52; 3, 1875, 76～92 = *Œuvres*, 1, 98～157, 171～193, 337～357.

③ *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 4, 1748, 219～233, pub. 1750 = *Opera*, (1), 26, 33～45.

定方向不可能有多于 $n(n-1)$ 条的切线,其渐近线也不能多于 n 条. 就像 Maclaurin 已经指出过的那样,他们指出一条渐近线与曲线相交,交点不能多于 $n-2$ 个.

18 世纪关于高次平面曲线成果的两本最好的简明而广泛的著述,是 Euler 的《引论》第二卷(1748)和 Cramer 的《代数曲线论》(*Lignés courbes algébriques*). 后一本书有统一的观点,出色地作了详细的阐述,并包括许多好的例题. 这本书经常被引用,以至把原来并非 Cramer 的结果也当作是 Cramer 的了.

4. 微分几何的开端

当解析几何正在发展的时候,微分几何也就开始了,而且这两门学科的发展常常是交织在一起的. 18 世纪后期对代数曲线理论的兴趣衰落了,但是就几何而言,微分几何变得更加重要了. 微分几何是研究曲线和曲面逐点变化的那些性质的,因此只有用微积分的技巧才能掌握. "微分几何"这个术语是 Luigi Bianchi(1856—1928)在 1894 年第一次使用的.

微分几何在很大程度上是微积分本身的问题的自然产物. 曲线的法线、拐点和曲率的研究实际上就是平面曲线的微分几何. 但是,17 世纪后期和 18 世纪早期的许多新问题,关于平面和空间曲线的曲率、曲线族的包络、曲面上的测地线、光线及光的波阵面的研究、沿着曲线以及曲面施加约束的运动的动力学问题,尤其是地图绘制方面的知识都导致关于曲线和曲面的问题,显然所有这一切必须应用微积分.

尽管分析的论证优于图形,但 18 世纪甚至 19 世纪前期的微分几何的研究家都把几何论证和分析论证结合在一起使用. 分析仍是粗糙的. 自变量的无穷小(infinitesimal)或微分(differential)被认为是一个极小的常数. 应变量的增量及其微分之间没有作出

实质的区别. 考虑了高阶微分,但认为它们都是小量而且可以自由地略掉. 如果曲线上相邻两点间的距离充分小,数学家们就说它们是曲线上的相邻点或说是曲线上靠近的点,好像两个相邻点之间再也没有别的点似的;因此曲线的切线是连接曲线上一点及其相邻点的连线.

5. 平面曲线

微积分对曲线研究的第一个应用是处理平面曲线. Christian Huygens 引进了后来用微积分处理的几个概念,他用的是纯几何方法. 他对光线研究和摆钟设计的兴趣推动了他在这方面的工作. 1673 年,在他的《钟表的振动》(*Horologium Oscillatorium*)第三章中他引进了平面曲线 C 的渐伸线. 设想一条绳子从 P_1 点往右绕在 C 上(见图 23.10). 端点 P_1 固定在 C 上,绳的另一端不绕在 C 上但使绳子保持绷紧. 自由端的轨迹 C' 是 C 的一条渐伸线. Huygens 证明了,在绳子的自由端,绳子垂直于轨迹 C'. 绳的每一点也描出一条渐伸线,例如 C'' 也是一条渐伸线. 但 Huygens 证明了各条渐伸线不能互相接触. 由于绳子在它刚要离开 C 的点处与 C 相切,由此可见曲线切线族的每一个正交轨道是曲线的一条渐伸线.

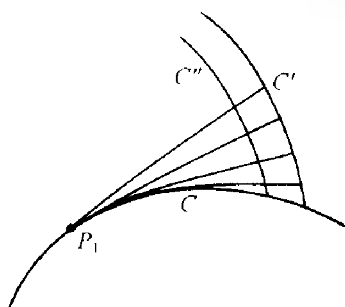


图 23.10

然后 Huygens 讨论了平面曲线的渐屈线. 设在曲线上 P 点处给了一条固定的法线,当一条相邻的法线移向这固定的法线时,这两条法线的交点在固定法线上达到一个极限位置,它就叫做曲线在 P 点的曲率中心. Huygens 证明了,曲线上的点沿固定法线到这极限位置的距离(用现代的记号)是

$$\frac{[1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2]^{3/2}}{\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2}.$$

这个长度是曲线在 P 点的曲率半径. 连接每一法线上的曲率中心的轨迹叫做原曲线的渐屈线. 因此,前面所说的曲线 C 就是它的任一渐伸线的渐屈线. 在这部著作中 Huygens 证明了摆线的渐屈线还是摆线,或者更确切地说,图 23.11 中下方摆线的左半部分的渐屈线是上方摆线的右半部分. Euler 在 1764 年解析地证明了这个定理[①]. 对于 Huygens 的摆钟工作来说,摆线的重要意义就在于:沿着摆线弧摆动的摆锤,不论其振幅是大是小,作一次完全摆动所用的时间是完全相同的. 由于这个缘故,摆线又叫做等时曲线.

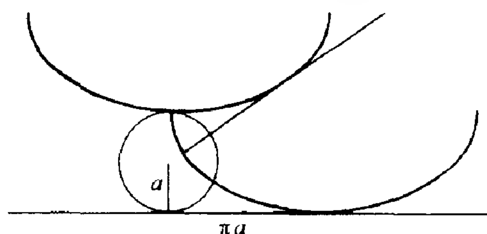


图 23.11

Newton 在他的《解析几何》(*Geometria Analytica*)中(虽然该书的大部分大约写于 1671 年,但出版于 1736 年)也引进了曲率中心,作为 P 点的法线及其邻点法线的交点的极限点. 然后 Newton 说,圆心在曲率中心、半径等于曲率半径的圆是在 P 点与曲线最密接的圆;就是说,在曲线和最密接圆之间,不会有别的圆在 P 点和曲线相切. 这个最密接的圆叫做密切圆,Leibniz 在 1686 年的一篇文章[②]中已经用了"密切"这个术语. 密切圆的曲率是其半径的倒数而且是曲线在 P 点的曲率. Newton 也给出了曲率的公式,并计算了一些曲线,包括摆线在内的曲率. 他注意到曲线在拐点处的曲率为零. 这些结果都是重复 Huygens 的结果,但可能是 Newton 想表明他能用解析方法来建立这些结果.

1691 年 John Bernoulli 着手研究平面曲线的课题,并得到了

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1764, 179~198, pub. 1766 = *Opera*, (1), 27, 384~400.

② *Acta Erud.*, 1686, 289 ~ 292 = *Math. Schriften*, 7, 326~329.

关于包络的一些新结果. Tschirnhausen 在 1682 年曾引进过光线族的焦散(caustic),即光线族的包络. 在 1692 年的《教师学报》中, Bernoulli 得到了某些焦散的方程,例如当一束平行光线投射到球面镜上时,从球面镜上反射出来的光线的焦散的方程①. 然后他解决了 Fatio de Duillier 向他提出的问题,即要找出一族抛物线的包络,这族抛物线是一门大炮以相同的初速度但以不同的仰角发射的炮弹的路径. Bernoulli 证明了,这包络是一条以炮位为焦点的抛物线. 这个结果是 Torricelli 曾经从几何上证实了的. 在 1692 年和 1694 年的《教师学报》上②, Leibniz 给出了求一族曲线的包络的普遍方法. 设曲线族(用我们的记号)是由 $f(x, y, \alpha)=0$ 给出,其中 α 是曲线族的参数,这个方法要求在 $f=0$ 和 $\partial f/\partial\alpha=0$ 间消去 α. L'Hospital 的教科书《无穷小分析》(*L'Analyse des infiniment petits*, 1696),帮助完成并传播了平面曲线的理论.

6. 空间曲线

Clairaut 开创了空间曲线的理论——三维微分几何的第一个重大发展. Alexis-Claude Clairaut(1713—1765)是早熟的. 早在 12 岁时他就写了一本关于曲线的很好的书. 1731 年他发表了《关于双重曲率曲线的研究》(*Recherche sur les courbes à double courbure*),该书写于 1729 年,那时他只有 16 岁. 在该书中他论述了曲面和空间曲线的解析学(第 2 节). Clairaut 的另一篇论文使他在 17 岁这样前所未有的年龄被选进了法国科学院. 1743 年他出版了他关于地球形状的经典著作. 这里他以比 Newton 或 Maclaurin 更完全的形式论述了旋转体的形状,例如当地球在其各部分相互间

---

① *Opera*, 1, 52~59.

② Page 311;也见 *Math. Schriften*, 2, 166; 3, 967, 969.

的万有引力作用下所取的形状.他还在三体问题方面进行过工作,主要是研究月球的运动(第21章第7节)而且写了几篇关于这个问题的论文,其中有一篇得到了彼得堡科学院1750年的奖金.1763年他发表了《关于月球的理论》(*Théorie de la lune*).Clairaut具有伟人的魅力而且是巴黎社会中的一个知名人物.

在他1731年的著作中,他解析地论述了空间中曲线的基本问题.他把空间曲线叫做"双曲率曲线",因为他信奉Descartes,考虑了空间曲线在两个垂直平面上的投影.于是空间曲线就分享了两条平面曲线的曲率.几何上他把一条空间曲线看作是两个曲面的交线;分析上每个曲面的方程表为一个三变量的方程(第2节).然后Clairaut研究了双曲率曲线的切线.他领悟到一条空间曲线在一个垂直于切线的平面上可以有无穷多条法线.空间曲线弧长的表达式以及某些曲面面积的求积公式也是属于他的.

虽然Clairaut在空间曲线的理论方面迈出了几步,但是在1750年前后在空间曲线理论或曲面理论方面所做的工作是微不足道的.这一点反映在Euler1748年的《引论》中,该书介绍了平面和空间图形的微分几何.平面部分相当完全,但空间部分是不够的.

空间曲线微分几何发展中的第二个重大步骤是由Euler采取的.Euler在力学中应用了曲线和曲面,推动了他在微分几何方面的许多工作.他29岁时写的《力学》(*Mechanica*,1736)①是对力学分析基础的一个重大贡献.在他的《固体或刚体的运动理论》(*Theoria Motus Corporum Solidorum seu Rigidorum*,1765)②中,他给出了关于这个课题的另一种处理.在该书中他导出了通常所用的沿一条平面曲线运动的质点的加速度的径向和法向分量的极坐标公式,即

① *Opera*,(2),1和2.
② *Opera*,(2),3和4.

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

他在 1774 年开始在空间曲线理论方面进行写作. 对扭曲橡皮带所取形状的研究很像是推动 Euler 去研究空间曲线理论的一个特殊问题,这个问题是:开始是直的橡皮带,在两端压力作用下扭弯成一条扭曲的曲线,求这曲线所取的形状. 为了处理这个问题,他在 1774 年引进了一些新的概念①. 然后他在 1775 年提出的一篇论文②中给出了关于扭曲线理论的完整论述.

Euler 用参数方程 $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ 表示空间曲线,其中 s 是弧长,他和 18 世纪的其他作者一样用球面三角来进行分析. 从参数方程他得到

$$dx = p\,ds,\ dy = q\,ds,\ dz = r\,ds,$$

其中 p, q 和 r 都是逐点变化的方向余弦,当然要 $p^2 + q^2 + r^2 = 1$. 量 ds,即自变量的微分,他是作为一个常量看待的.

为了研究曲线的性质,他引进了球面指标线. 围绕曲线的任一点 (x, y, z), Euler 画了一个半径为 1 的球. 可以把球面指标线定义为单位球上那样一些点的轨迹,从中心 O 射向这些点的位置向量,就等于 (x, y, z) 点的单位切向量和 (x, y, z) 的邻近点的单位切向量. 比如图 23.12 中的两个半径就表示曲线在 (x, y, z) 点的单位切向量和其一个邻近点的单位切向量. 设 ds' 是曲线上相距 ds 的两点的两个相邻切线间的弧或角. Euler 关于该曲线的曲率半径的定义便是

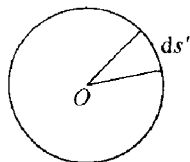


图 23.12

$$\frac{ds'}{ds}.$$

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 19, 1774, 340~370, pub. 1775 = *Opera*, (2), 11, 158~179.

② *Acta Acad. Sci. Petrop.*, 1, 1782, 19~57, pub. 1786 = *Opera*, (1), 28, 348~381.

然后他推导了曲率半径的一个解析表达式：

$$(8)\quad \rho=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2}}\left[=\frac{1}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\right].$$

通过 ds' 和中心 O 的平面就是 Euler 的关于曲线在 (x, y, z) 点的密切平面的定义. John Bernoulli——他引进了密切平面这个术语——认为密切平面是由三个“重叠”的点决定的. Euler 给出的密切平面的方程是

$$x(rdq-qdr)+y(pdr-rdp)+z(qdp-pdq)=t,$$

其中 t 是由曲线与密切平面的交点 (x, y, z) 确定的. 这个方程等价于现今我们用向量记号写的方程

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=0,$$

其中 $\boldsymbol{r}(s)$ 是曲线与密切平面的交点关于空间某点的位置向量，而 $\boldsymbol{R}$ 是密切平面上任一点的位置向量. $\boldsymbol{r}$ 的向量形式由

$$x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}+z(s)\boldsymbol{k}$$

给出，而 $\boldsymbol{R}$ 的形式为 $X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，其中 (X, Y, Z) 是 $\boldsymbol{R}$ 的坐标.

Clairaut 曾经引进了空间曲线有两个曲率的想法. 其中的一个曲率由 Euler 以刚才叙述过的方式加以标准化. 另一个曲率，现在叫“挠率”，几何上表示一条曲线从 (x, y, z) 点处的一个平面离开的速率，是由工程师和数学家 Michel-Ange Lancret (1774—1807) 用分析方法求出它的显式表示的. Lancret 是 Monge 的学生而且按 Monge 的精神进行研究工作. 他在曲线的任一点处选出了三个主方向[①]. 第一个主方向是切线方向. “逐次的”切线位于密切平面内. 位于密切平面内的法线是主法线，第二个主方向是主法线方向. 垂直于密切平面的法线是次法线，次法线方向是第三个主方向. 挠率是次法线方向关于弧长的变化率. Lancret 用了逐次密切平面的拐度 (flexion) 或逐次次法线之类的术语.

---

① *Mém. divers Savans*, 1, 1806, 416～454.

Lancret 用

$$x = \phi(z),\ y = \psi(z)$$

表示一条曲线,并把 $d\mu$ 叫做逐次法平面之间的夹角,而把 $d\nu$ 叫做逐次密切平面之间的夹角. 于是用近代的记号来写便有

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{\rho},\ \frac{d\nu}{ds} = \frac{1}{\tau},$$

其中 ρ 是曲率半径,而 τ 是挠率半径.

Cauchy 在他著名的《无穷小计算在几何上的应用教程》(*Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*, 1826)中改进了概念的陈述而且澄清了空间曲线理论中的许多问题①. 他抛弃了常量无穷小 ds,并且纠正了存在于增量和微分间的混乱. 他指出,当人们写下

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

时,就应该理解为

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Cauchy 喜欢把曲面写成 $w(x, y, z) = 0$ 来代替不对称的形式 $z = f(x, y)$,他把通过点(ξ, η, ζ)的直线方程写作

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma},$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 是直线的方向余弦,不过 Cauchy 更常用方向数来代替方向余弦.

Cauchy 发展的曲线的几何理论实际上是现代的. 他在证明中摆脱了球面三角学,但他也把弧长取作自变量. 他得到了任一点处切线的方向余弦

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds} \text{ 或 } x'(s), y'(s), z'(s).$$

证明了主法线的方向数是

① *Œuvres*, (2), 5.

$$\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2} \quad 或 \quad x''(s),\ y''(s),\ z''(s),$$

而且曲线的曲率 k 是

$$k=\frac{1}{\rho}=\sqrt{(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2}.$$

然后他证明了,如果切线的方向余弦是 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$,则

$$(9)\quad \begin{aligned} x''&=\frac{d(\cos\alpha)}{ds}=\frac{\cos\lambda}{\rho},\quad y''=\frac{d(\cos\beta)}{ds}=\frac{\cos\mu}{\rho},\\ z''&=\frac{d(\cos\gamma)}{ds}=\frac{\cos\nu}{\rho},\end{aligned}$$

其中 ρ 是已经介绍过的曲率半径,而 $\cos\lambda$, $\cos\mu$ 和 $\cos\nu$ 是一条法线的方向余弦,这条法线他取为主法线. 其次他证明了

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\omega}{ds},$$

其中 ω 是相邻切线间的夹角.

他把切线和主法线决定的平面作为密切平面. 这个平面的法线是次法线,而次法线的方向余弦 $\cos L$, $\cos M$ 和 $\cos N$ 由下列公式给出:

$$\frac{\cos L}{dyd^2z-dzd^2y}=\frac{\cos M}{dzd^2x-dxd^2z}=\frac{\cos N}{dxd^2y-dyd^2x}.$$

然后他能证明

$$(10)\quad \frac{d\cos L}{ds}=\frac{\cos\lambda}{\tau},\quad \frac{d\cos M}{ds}=\frac{\cos\mu}{\tau},\quad \frac{d\cos N}{ds}=\frac{\cos\nu}{\tau},$$

其中 $\frac{1}{\tau}$ 是挠率,并证明挠率等于 $d\Omega/ds$,这里 Ω 是密切平面间的夹角.

公式(9)和(10)是三个著名的 Serret-Frénet 公式中的两个,第三个公式是

$$\frac{d\cos\lambda}{ds}=-\frac{\cos\alpha}{\rho}-\frac{\cos L}{\tau},$$

$$\text{(11)}\qquad \frac{\mathrm{d}\cos\mu}{\mathrm{d}s}=-\frac{\cos\beta}{\rho}-\frac{\cos M}{\tau},$$
$$\frac{\mathrm{d}\cos\nu}{\mathrm{d}s}=-\frac{\cos\gamma}{\rho}-\frac{\cos N}{\tau},$$

其中 $1/\tau$ 是挠率而 $1/\rho$ 是曲率. 公式(9), (10)和(11)分别给出了切线、次法线和法线的方向余弦的导数,它们是由 Joseph Alfred Serret (1819—1885)在 1851 年[①]和 Fréderic Jean Frénet (1816—1900)在 1852 年[②]发表的. 曲率和挠率的意义在于它们是空间曲线的两个根本的性质. 作为曲线弧长的函数的曲率和挠率给定之后,除了曲线在空间的摆法外,曲线就完全被决定了. 这个定理在 Serret-Frénet 公式的基础上是容易证明的.

7. 曲面的理论

和空间曲线的理论一样,曲面理论也经历了一个漫长的开端. 曲面理论是从曲面(主要是地球)上的测地线的研究开始的. 在 1697 年的《博学者杂志》(*Journal des Sçavans*)中,John Bernoulli 提出了在一凸曲面上求两点间最短弧的问题[③]. 他在 1698 年写信给 Leibniz 指出,测地线上任何一点处的密切平面(密切圆平面)在该点垂直于曲面. 1698 年 James Bernoulli 解决了柱面、锥面和旋转曲面上的测地线问题. 尽管在 1728 年 John Bernoulli[④] 用 James 的方法取得了某种成功并且求得了另外几类曲面的测地线,但 James 的方法是有局限性的方法.

1728 年 Euler[⑤] 给出了曲面上测地线的微分方程. Euler 用的

---

① *Jour. de Math.*, 16, 1851, 193~207.

② *Jour. de Math.*, 17, 1852, 437~447.

③ *Opera*, 1, 204~205.

④ *Opera*, 4, 108~128.

⑤ *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3, 1728, 110~124, pub. 1732 = *Opera*, (1), 25, 1~12.

是他在变分法中引进的方法(见第 24 章第 2 节),1732 年 Jacob Hermann[①] 也求出了一些特殊曲面上的测地线.

Clairaut 在他 1733 年和 1739 年[②]关于地球形状的著作中更充分地讨论了旋转曲面上的测地线. 他在 1733 年的论文中证明了,对于任何旋转曲面来说,测地线和穿过这测地线的任何子午线(任何位置的母曲线)的夹角的正弦同交点到旋转轴的垂直距离成反比. 在另一篇论文[③]中,他还证明了一个漂亮的定理,即在旋转曲面的任何一点 M 处,如果一平面通过 M 点且垂直于曲面和过 M 点的子午面,则这平面与曲面的交线在 M 点的曲率半径等于法线在 M 点和旋转轴之间的长度. Clairaut 用的是分析的方法,但他和他的大多数前辈一样,他没有使用现在与变分法联系在一起的那些思想.

1760 年 Euler 在他的《关于曲面上曲线的研究》(*Recherches sur la courbure des surfaces*)[④]中建立了曲面的理论. 这本著作是 Euler 对微分几何最重要的贡献,而且是微分几何发展史中的一个里程碑. 他把曲面表为 $z = f(x, y)$ 而且引进了现代的标准符号

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

然后他说,"我从决定曲面的任何平面截线的曲率半径开始,然后把这种做法应用到曲面在任一给定点处的垂直截线上去,最后我在这些截线的相互倾斜程度方面比较它们的曲率半径,这种倾斜程度就使我们能够建立曲面曲率的真正概念."

他首先对曲面的任何平面截线的曲率半径得到一个相当复杂

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 36～67.

② *Hist. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1733, 186～194, pub. 1735 和 1739, 83～96, pub. 1741.

③ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1735, 117～122, pub. 1738.

④ *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 16, 1760, 119～143, pub. 1767 = *Opera*, (1), 28, 1～22.

的表达式.然后把这个结果用到法向截面(包含曲面的一条法线的平面)上去,将所得的结果特殊化.对于法截线,曲率半径的一般表达式稍稍简化了一点.其次他把垂直于 x-y 平面的法向截面定义为主法向截面.("主"的这种用法今天是不用了.)设法向截面和主法向截面的夹角为 ϕ,则法截线的曲率半径的公式为

$$\frac{1}{L+M\cos 2\phi+N\sin 2\phi}, \tag{12}$$

其中 L, M 和 N 是 x 和 y 的函数.为了得到过曲面上一点的所有法截线的最大和最小曲率(或者,当(12)中分母的形式是不定时,为了得到两个最大曲率),他令分母关于 ϕ 的导数等于零而且(在两种情形都)得到 $\tan 2\phi = N/M$.存在两个相差 90°的根,所以有两个互相垂直的法平面.我们把这两个平面上相应的曲率叫做主曲率 κ_1 和 κ_2.

从 Euler 的结果推得,任何一个和主曲率所在法截面之一成 α 角的法截面,其上截线的曲率 κ 为

$$\kappa=\kappa_1\cos^2\alpha+\kappa_2\sin^2\alpha. \tag{13}$$

这个结果叫做 Euler 定理.

Monge 的学生、Jean-Baptiste-Marie-Charles Meusnier de La Place (1754—1793),在 1776 年以更加精细的方式得到同样的结果,他和 Lavoisier 一起还在流体静力学和化学方面进行工作.然后 Meusnier① 处理了非法截线的曲率,Euler 对此曾经得到过一个非常复杂的表达式. Meusnier 的结果,也叫 Meusnier 定理,说,曲面在 P 点的平面截线的曲率是通过在 P 点的同一切线的法截线的曲率除以原平面和 P 点的切平面之夹角的正弦.由此得到一个漂亮的结果,即如果考虑通过曲面上同一条切线 MM' 的平面族,这些平面截曲面所得各截线的曲率中心就都位于一个圆上,这个圆所在的平面垂直于 MM',它的直径就是法截线的曲率半径.

---

① *Mém. divers Savans*, 10, 1785, 477～485.

然后 Meusnier 证明了这样一个定理：两个主曲率处处相等的曲面只有平面和球面. 他的论文异常简单而且内容丰富，这有助于使 18 世纪所达到的许多结果直观化.

曲面论的一个主要方面是由于绘制地图的需要而发展起来的，这就是研究可展曲面，即可以将其平摊在平面上而不产生畸变的曲面. 因为球面不能切开来这样摊平，于是问题就要求寻找一张形状与球面接近而又能不发生畸变地铺开的曲面. Euler 是研究这个问题的第一个人. 这个工作包含在他的《论表面可以展平的立体》(De Solidis Quorum Superficiem in Planum Explicare Licet)① 中. 在 18 世纪，曲面被认为是固体的边界，这就是为什么 Euler 要说立体的表面可以展平在一张平面上的原因. 在这篇论文中他引进了曲面的参数表示，即

$$x = x(t, u), \ y = y(t, u), \ z = z(t, u),$$

并且寻求：要使曲面可以展开在平面上，这些函数必须满足什么样的条件. 他的方法是把 t 和 u 表为平面上的直角坐标，然后形成一个小的直角三角形 (t, u)，$(t + dt, u)$，$(t, u + du)$. 因为曲面是可展的，所以这个三角形一定和曲面上的一个小三角形全等. 如果用 l，m 和 n 表示 x，y 和 z 关于 t 的偏导数，用 λ，μ，ν 表示 x，y 和 z 关于 u 的偏导数，那么在曲面上相应的三角形是 (x, y, z)，$(x + l dt, y + m dt, z + n dt)$ 和 $(x + \lambda du, y + \mu du, z + \nu du)$. 从两个三角形的全等 Euler 推导出

$$(14) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1, \ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \ l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

这些就是可展性的分析的必要充分条件. 这个条件等价于要求曲面上的线元素与平面上的线元素相等. 分析上，决定一个曲面是否可展的问题就是寻求曲面的一个参数表示 $x(t, u)$，$y(t, u)$ 和 $z(t, u)$，使得它们的偏导数满足条件(14).

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 16, 1771, 3～34, pub. 1772 = *Opera*, (1), 28, 161～186.

然后 Euler 研究了空间曲线和可展曲面之间的关系并且证明了,任何空间曲线的切线族填满或构成一可展曲面.他试图证明每个可展曲面都是直纹面,就是说,由直线移动而生成的曲面,并且逆定理也对,但是没有成功.事实上,逆定理是不对的.

Gaspard Monge 独立地研讨了可展曲面的课题.在 Monge 那里几何和分析是相辅相成的.他把同一个问题的几何方面和分析方面统括起来并且说明既从几何上又从分析上进行思考的好处.在 18 世纪,尽管有 Euler 和 Clairaut 的解析几何和微分几何,但是因为分析支配着这一世纪,所以 Monge 的双重观点的效果是把几何置于至少和分析同等的基础上,从而鼓舞了纯粹几何的复活.Monge 是继 Desargues 之后在综合几何方面第一个真正的革新者.

Monge 在画法几何(这原先是为建筑学服务的)、解析几何、微分几何、常微分方程和偏微分方程方面范围广阔的工作赢得了 Lagrange 的钦佩和羡慕.Lagrange 在听了 Monge 的一次讲演后对他说:"我亲爱的同事,你刚才提出了许多第一流的成果,要是我能够做出来就好了."Monge 对物理学、化学、冶金学(锻造问题)和机械学都作了许多贡献.在化学方面他和 Lavoisier 一起工作.Monge 看到了工业发展对科学的需求,而且提倡把工业化作为改善生活的一个途径.也许是因为他懂得出身卑贱的苦难,所以他热衷于活跃的社会事务.正因为这个原因,他支持法国革命并在革命以后的政府中担任海军部长和公众健康委员会的委员.他设计过武器装备,还用技术思想来指导政府职员.由于他对 Bonaparte 的钦佩,使他成为 Bonaparte 反革命措施的一个追随者.

Monge 帮助组织了多科工艺学校,在那里作为一个教授建立了一个几何学派.他是一个伟大的教师而且是一支鼓舞 19 世纪数学活动的力量.他的生气勃勃内容丰富的讲演激起了学生们的积极性,在他们中间至少有 12 人是 19 世纪早期最著名的人物.

Monge 在三维微分几何方面开创的结果远远超过 Euler. 他 1771 年的论文《关于曲率半径以及重曲率曲线的各种拐点的论文》(Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure), 发表得很晚①, 之后是他的《关于把分析应用于几何的活页论文》(*Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*, 1795, 第二版 1801).《活页论文》中微分几何的分量和解析几何及偏微分方程的分量一样多. 这篇论文, 在讲演笔记的基础上, 把一些老的结果加以系统化并作了扩充, 提出了有某种重要性的一些新结果, 并把曲线和曲面的各种性质翻译成偏微分方程的语言. 在寻求分析思想和几何思想的对应关系时, Monge 认识到一族具有共同几何性质或用同一种生成方法定义的曲面应满足一个偏微分方程(参看第 22 章第 6 节).

Monge 的第一个重要工作, 即关于双重曲率曲线的可展曲面的论文, 研究了空间曲线及与之相联系的曲面. 那时 Monge 并不知道 Euler 关于可展曲面的工作. 他把空间曲线或者作为两曲面的交线, 或者用它们在两个互相垂直的平面上的投影来处理, 即由 $y=\phi(x)$ 和 $z=\psi(x)$ 给出. 在任一寻常点处, 有无穷多条法线(垂直于切线)位于同一平面——法平面上. 在这个法平面上有一条线, 他称之为(极)轴. 就是该法平面和相邻法平面交线的极限位置. 当沿着曲线移动时, 诸法平面的包络是一可展曲面, 叫做配极可展曲面. 诸法平面的轴也扫过这曲面. 从 P 点到 P 点处法平面的轴的垂线就是主法线, 而垂足 Q 就是曲率中心.

为了求得配极可展曲面的方程, 他求出了法平面的方程, 并从这一方程及其对 x 的偏导数之间消去 x. 他还给出了求任何单参数平面族的包络的一个法则, 这个法则我们现在还在使用. 这个法则同样适用于单参数曲面族, 用我们的记号这个法则就是: 取

① *Mém. divers Savans*, 10, 1785, 511～550.

$F(x, y, z, \alpha) = 0$ 为单参数平面族. 为了求得这族平面和"一个无限靠近的曲面"相交在什么地方,他求 $\partial F/\partial\alpha = 0$. 这两曲面的交线叫特征线,在 $F = 0$ 和 $\partial F/\partial\alpha = 0$ 间消去 α 就求得包络的方程. 他应用这种方法去研究其他的可展曲面,他把每一张这样的可展曲面都看成是一个单参数平面族的包络.

Monge 还研究了可展曲面的脊线(arête de rebroussement),这是由生成曲面的一组直线形成的. 任意两条相邻直线的交是一个点,而这种点的轨迹就是脊线 Γ. 于是与 Γ 相切的直线都是母线或者说 Γ 是生成直线族的包络. 脊线把可展曲面分成两叶,就像平面曲线上的尖点把曲线分成两部分一样. Monge 得到了脊线的方程. 在空间曲线的配极可展曲面的情形,脊线就是原空间曲线的曲率中心的轨迹.

1775 年 Monge 向科学院提交了另一篇关于曲面,特别是关于在影子和半阴影(shadows and penumbras)理论中碰到的可展曲面的论文①. 用了可展曲面能摊平在平面上而不发生畸变这一定义,他直观地论述了可展曲面是直纹面(但是反之不真),在这直纹面上两条相邻直线是共点的或是平行的,而且论述了任何可展曲面等价于由空间曲线的切线生成的曲面. 正是在 1775 年的这篇文章中,他给出了可展曲面的一个一般表示. 它们的方程总有这样的形式:

$$z = x[F(q) - qF'(q)] + f(q) - qf'(q),$$

其中 $q = \partial z/\partial y$,而且,除了垂直于 x-y 平面的柱面外,这种曲面满足的偏微分方程总是

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0.$$

然后 Monge 研究了直纹面并且给出了直纹面的一个一般表示. 他还给出了直纹面满足的三阶偏微分方程,并且对它们进行了

① *Mém. divers Savans*, 9, 1780, 382～440.

积分. 然后他证明了可展曲面是一种特殊的直纹面.

在 1776 年《关于开挖和回填的理论的论文》(*Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*)[①] 中, Monge 研究了在城堡的建筑中出现的问题,这个问题涉及到把土或其他材料从一个地方输送到另一个地方,并且要寻找一种最有效的办法来做这件事,即输送的材料乘上输送的距离应该达到极小. 对于曲面的微分几何而言,这个工作只有一部分是重要的;事实上,这个实际问题的结果并不太现实. 而正如 Monge 所说,他发表这篇论文是为了发表论文中的几何结果. 文中他从处理依赖于两个参数的一族直线或线汇这个课题着手. 然后遵循 Euler 和 Meusnier 的工作,他考虑了曲面 S 的法线族,它们也构成一个线汇. 特别考虑了沿一条曲率线的法线,曲率线是曲面上这样一条曲线,在该曲线的每一点上有一个主曲率. 在曲率线的这些点上的曲面法线构成一个可展曲面,叫做法可展曲面. 类似地,沿垂直于第一条曲率线的曲面法线也构成一个可展曲面. 因为在曲面上有两族曲率线,所以有两族可展曲面,一族中的可展曲面与另一族中的可展曲面相互正交. 事实上,任意两个这样的可展曲面的交线上的点都在一曲面法线上. 在每一条法线上有两点,它们到曲面的距离等于两个主曲率的大小. 每一个由主曲率之一确定的点集,在垂直于曲率线的法线上的那个点集,位于由那个法线族构成的可展曲面的脊线上,所以法线和那条脊线相切. 一族可展曲面

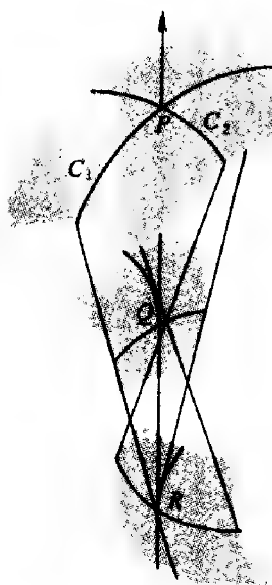


图 23.13

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1781, 666～704, pub. 1784.

的全部脊线组成一曲面，叫做中心曲面. 于是有两张这样的中心曲面(图 23.13). 每族可展曲面的包络叫做焦曲面.

Monge 关于曲面族，满足非线性和线性一阶、二阶甚至三阶偏微分方程的曲面族的研究工作的进一步细节对于偏微分方程课题来说意义更大.

Monge 往往喜欢通过对许多具体的曲线和曲面的充分论述来阐明他的思想. 他的思想的推广和运用是由 19 世纪的数学家们去实现的. Monge 总是面向实际，他以一个怎样能把他的理论应用到建筑上去的设想，特别是用于大会议厅的建造的设想来结束他的《活页论文》.

对曲面论的一些别的方面的贡献是由 Monge 的一个学生 Charles Dupin (1784—1873)做出的. Dupin 作为一个造船工程师毕业于多科工艺学校，他和 Monge 一样，经常把几何的应用记在心里. 他的教科书《几何学的发展》(*Développements de géométrie*, 1813)加了一个副标题"在船舰的稳定性、开挖和回填、防御工事、光学等方面的应用"，在其他著作中值得注意的是他的《几何学和力学的应用》(*Applications de géométrie et de mécanique*, 1822)，他做出了许多在几何和力学上的应用. 我们将要叙述的头几个结果是在 1813 年的书中.

Dupin 的贡献之一叫做 Dupin 指标线，它总结并澄清了 Euler 和 Meusnier 先前的结果. 给定了曲面在一点 M 的切平面，他在切平面的每一个方向上从 M 开始画出一线段，它的长等于曲面在该方向的法截线的曲率半径的平方根. 这些线段的端点的轨迹是一条圆锥曲线——指标线，它给出曲面在 M 周围的形式的一个二阶近似(因为它几乎相似于这曲面被 M 附近的一个平行于 M 点处切平面的平面所截出的截线). 曲面在一点的曲率线，即曲面上通过 M 点的具有极(最大或最小)曲率的曲线，是在 M 点以指标线

的轴线作为切线的曲线.

在三维直角坐标系中,坐标面是三族平面 $x=$ const., $y=$ const.和 $z=$ const.假定有三族曲面,每一族都由 x, y 和 z 的一个方程给出.如果一族中的每一曲面都和另两族的曲面正交,那么这三族曲面就叫做正交的. Dupin 在这方面的最突出的结果,写在他的《几何学的发展》中,就是如下的定理:三族正交曲面相互交截于每个曲面的曲率线(有最大或最小法曲率的曲线).

Dupin 还推广 Monge 关于线汇的结果.如果线汇——双参数族——与一族曲面正交,就像在光学中,线是光线而曲面是波前,那么这线汇就叫做正交的.法国物理学家 Etienne-Louis Malus (1775—1812)显然利用了 Monge 的结果——虽然他没有引证这些结果——证明了[①]从一点(一个同心集)发出的法向线汇在曲面上反射或折射后(按照折射定律)仍然是一个法向线汇. 1816 年[②] Dupin 证明了,这一定理对于任何法向线汇经任意多次反射后仍然成立.后来 Lambert A. J. Quetelet(1796—1874)证明了法向线汇经任意多次折射后仍为法向线汇[③].线汇和线丛,由 Malus 引进的依赖于三个参数的曲面族,是 19 世纪许多数学家从事研究的课题.

8. 映射问题

18 世纪的微分几何很多是受大地测量和地图绘制问题推动的.但是绘制地图的问题包含着推动数学进展的特殊考虑和困难,主要是出现在许多数学学科中的保角变换或保角映射的发展中的困难.地图的绘制当然要比微分几何早得多,而映射的数学方法甚

---

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, Cahier 14, 1808, 1～44, 84～129.

② *Annales de Chimie et de Physique*, 5, 1817, 85～88.也在他的 1822 年的 *Applications* 中, 195～197.

③ *Correspondance mathématique et physique*, 1, 1825, 117～149.

至还要早. 在这些映射方法中，球极平面射影和别的方法起源于 Ptolemy(第 7 章第 5 节)，而 Mercator 射影要追溯到 16 世纪(第 12 章第 2 节). 早在 18 世纪之前人们可能已从直观上清楚不能把球面如实地映射到平面上，就是说，不能把球面映射到平面上而保持原来的长度. 假如这样做是可能的话，那么所有的几何性质都会保持着. 只有可展曲面才能这样映射，而这种曲面，18 世纪的工作揭示了它们就是柱面(不必是圆柱面)、锥面以及任何由空间曲线的切线生成的曲面. 因球面到平面的映射不能保持全部几何性质，所以注意力便直接集中到保持角度的映射上去了.

在保持角度的映射中，如果在一个曲面上有两条曲线，交角为 α，而在另一曲面上，对应的两曲线的交角也是 α，并设还保持角度的方向，那么这映射就叫做保角的. 球极平面射影和 Mercator 射影都是保角的. 保角性并不意味着两个对应的有限图形是相似的，因为角度的相等是在一点处成立的性质.

J. H. Lambert 在理论制图学方面开创了一个新纪元. 他是第一个以充分的一般性研究球面到平面的保角映射的人；而且在 1772 年的书——《关于设计地图和天图的注记和附记》(*Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land und Himmelscharten*)中，他得到了这种映射的公式. Euler 在这方面也作出了许多贡献，而且事实上画了一幅俄国地图. Euler 在 1768 年提交圣彼得堡科学院的一篇论文中①，利用复变函数，设计了一种从一个平面到另一平面的保角映射的表示方法. 但是他没有利用这种方法. 后来，在 1775 年提出的两篇论文中②，他证明了球面不可能全等地映入平面. 这里他再一次用了复变函数而且讨论了相当一般的保角表示. 他也给出了 Mercator 射影和球极平面射影的

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 14, 1769, 104～128, pub. 1770 = *Opera*, (1), 28, 99～119.

② *Acta Acad. Sci. Petrop.*, 1, 1777, 107～132 和 133～142, pub. 1778 = *Opera*, (1), 28, 248～275 和 276～287.

完整的分析.1779年Lagrange[1]得到了地球表面的一部分映到一平面区域并且把纬圆和经圆都变为圆弧的全部保角变换.

在映射问题,特别是在保角映射方面的进一步发展,还有待于微分几何和复变函数论的发展.

参考书目

Ball, W. W. Rouse: "On Newton's Classification of Cubic Curves", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 22,1890,104～143.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, reprint by Georg Olms, 1968.

Berzolari, Luigi: "Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903～1915, Ⅲ, C4,313～455.

Boyer, Carl B.: *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, 1956, Chaps. 6～8.

Boyer, Carl B.: A History of Mathematics, John Wiley and Sons, 1968, Chaps. 20 and 21.

Brill, A., and Max Noether: "Die Entwicklung der Theorie der algebmischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 3, 1892/1893,107～156.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924; Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 3, 18～35, 748～829; Vol. 4,375～388.

Chasles, M.: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), 3rd ed., Gauthier-Villars, 1889, pp. 142～252.

Coolidge, Julian L.: "The Beginnings of Analytic Geometry in Three Dimensions", *Amer. Math. Monthly*, 55,1948,76～86.

Coolidge, Julian L.: A History of Geometrical Methods, Dover (reprint), 1963, pp. 134～140,318～346.

---

① *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*,1779,161～210,pub. 1781 = *Œuvres*, 4,637～692.

Coolidge, Julian L.: *The Mathematics of Great Amateurs*. Dover (reprint), 1963, Chap. 12.

Coolidge, Julian L.: *A History of Conic Sections and Quadric Surfaces*, Dover (reprint), 1968.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, Orell Füssli, Series 1, Vol. 6(1921), Vols. 26～29 (1953～1956); Series 2, Vols. 3 and 4(1948～1950), Vol. 9(1968).

Huygens, Christian: *Horologium Oscillatorium* (1673), reprint by Dawsons, 1966; also in Huygens, *Œuvres Compètes*, 18,27～438.

Hofmann, Jos. E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik", *L'Enseignement Mathématique*, (2),2,61～171,1956; published separately by Institut de Mathématiques, Geneva, 1957.

Kötter, Ernst: "Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 5, Part Ⅱ, 1896,1～486; also as a book, B. G. Teubner, 1901.

Lagrange, Joseph Louis: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1867～1869, Vol. 1,3～20; Vol. 3,619～692.

Lambert, J. H.: *Aumerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land-und Himmels charten* (1772), Ostwald's Klassiker No. 54, Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1896.

Loria, Gino: *Spezielle algebraische und tranzendente ebenen Kurven, Theorie und Geschichte*, 2 vols., 2nd ed., B. G. Teubner, 1910～1911.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques* (1802), Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, pp. 63～102.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200—1800*, Harvard University Press, 1969, pp. 168～178,180～183,263～269,413～419.

Taton, René: *L'Œuvre scientifique de Monge*, Presses Universitaires de France, 1951, Chap. 4.

Whiteside, Derek T.: "Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century", *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 1961, 179～388. See pp. 202～205 and 270～311.

Whiteside, Derek T.: *The Mathematical Works of Isaac Newton*, Johnson Reprint Corp., 1967, Vol. 2, 137～161. This contains Newton's *Enumeratio* in English.

第 24 章

18 世纪的变分法

> 因为宇宙的结构是最完善的而且是最明智的上帝的创造，因此，如果在宇宙里没有某种极大或极小的法则，那就根本不会发生任何事情.
>
> Leonhard Euler

1. 最初的问题

如同在级数和微分方程的领域里一样，变分法的早期工作几乎不能和微积分本身区分开来. 但是在 1727 年 Newton 逝世之后几年内，很清楚，一个全新的具有自己的特征问题和方法论的数学分支已经产生了. 这个新学科，对于数学和科学来说，其重要性几乎可以和微分方程相比，它为整个数学物理提供了一个最重要的原理.

为了获得变分法本质的某些初步概念，让我们来研究一下把数学家们引入变分法的那些问题. 历史上第一个重要问题是由 Newton 提出并解决的. Newton 在他的《原理》第二册中，研究了物体在水中的运动；然后在第三版的命题 34 的附注中，他研究了在轴向以常速度运动而使运动阻力最小的旋转曲面必须具有的形状. Newton 假定物体表面任何一点上的流体阻力和垂直于物体表面的速度分量成正比. 在《原理》中他只给出了所要曲面形状的几何特征，但是在他 1694 年大概是写给 David Gregory 的一封信中给出了他的解法.

写成现代的形式，Newton 的问题就是要选择适当的函数

$y(x)$,使得积分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y(x)[y'(x)]^3}{1+[y'(x)]^2} \mathrm{d}x$$

取最小值,这里 $y(x)$表示绕 x 轴旋转生成曲面的曲线(图 24.1). 这个问题(以及一般说来变分法问题的)的特点在于它提出了一个积分,它的值依赖于被积函数中出现的未知函数,而且要确定这个未知函数使积分达到极大或极小.

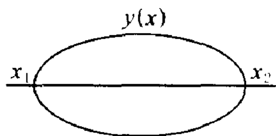


图 24.1

尽管 Newton 在解法中采用了引进子午线弧 $y(x)$的部分形状的改变这个想法——这几乎就是变分法的本质方法所包含的一切,但是 Newton 的方法不是变分法的典型技巧,所以这里不去深入研究. 重要的也许是:适合要求的 $y(x)$的参数方程是

$$x = \frac{c}{p}(1+p^2)^2,\ y = a + c\left(-\log p + p^2 + \frac{3}{4}p^4\right),$$

其中 p 是参数. 关于这个工作,Newton 说:"我想可以把这个命题用到船舶的建造中去."这种性质的问题不仅在船舶设计中而且在潜水艇和飞机的设计中都已经变得很重要了.

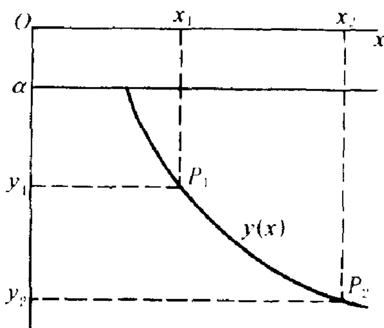


图 24.2

在 1696 年 6 月号的《教师学报》[1]上,作为向其他数学家的挑战,John Bernoulli 提出了现在著名的最速降线问题. 这个问题是求从一给定点到不是在它垂直下方的另一点的一条曲线,使得一质点沿这曲线从给定点下滑所用时间最短. 在 P_1 处的初速度 v_1 是给定的(图 24.2),摩擦和空气阻力都忽略. 用现代的方式

[1] Page 269 = Opera, 1, 161.

来表达,这个问题就是要使表示下降时间的积分 J 取极小值,其中

$$J = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)-\alpha}}\mathrm{d}x.$$

这里 g 是重力加速度而 $\alpha = y_1 - v_1^2/2g$. 这里仍然是选择被积函数中的 $y(x)$ 使得 J 取最小值. Galileo(1630 年和 1638 年)曾系统地表述而错误地解决过这个问题,他给出的答案是圆弧. 正确的答案是联结 P_1 和第二点 P_2 的上凹的唯一的旋轮线,母圆滚动的直线 l 必须在给定的下落初始点的上方正好在 $y=\alpha$ 的高度上. 于是有且只有一条旋轮线通过这两点.

Newton, Leibniz, L'Hospital, John Bernoulli 和他的哥哥 James 求得了正确的解答. 所有这些解法都发表在 1697 年 5 月号的《教师学报》上. Bernoulli 兄弟的解法值得进一步解释. John 的方法①是看出了最速下降路径是和光线在具有适当选择过的变折射率 $n(x, y) = c/\sqrt{y-\alpha}$ 的介质中所取的路径相同的. 在不同介质交界面处的折射定律(Snell 定律)是已知的,所以 John 把介质分成有限个数的层,从一层到另一层折射率有明显的变化,然后让层数趋于无穷. James 的方法②麻烦得多而且更为几何化. 但是 James 的方法也更一般化,而且是在变分方法的方向上迈出的一个较大的步伐.

通过 Huygens 和其他人关于钟摆问题的工作(第 23 章第 5 节),旋轮线(cycloid)已经是众所周知的了. 当 Bernoulli 兄弟发现旋轮线也是最速降线问题的解时他们感到惊奇. John Bernoulli 说③:"我们的确佩服 Huygens,因为他第一个发现一个重质点不论起点怎样,总以相同的时间描出一条旋轮线. 但是当我说正是这同一条旋轮线——Huygens 的等时曲线——就是我们正在寻求

---

① *Acta Erud.*, 1697, 206 ~ 211 = *Opera*, 1, 187~193.

② *Acta Erud.*, 1697, 211 ~ 217 = *Opera*, 2, 768~778.

③ *Opera*, 1, 187~193.

的最速降线的时候,你们将感到惊奇."

另一类重要的问题是要求测地线,即曲面上两点间长度最短的路径.如果曲面是平面,那么涉及的积分是

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx,$$

而且答案当然是一段直线.18世纪最使人感兴趣的测地线问题与地球表面上的最短路径有关,虽然数学家们相信地球表面是某种形状的椭球面,而且很像一个旋转椭球面,但是人们并不知道地球表面的确切形状.早先提到的(第23章第7节)关于测地线的早期工作没有用到变分法,但是特殊的方法显然不足以解决一般的测地线问题.

在分析上,到现在为止提出的问题都属于形式

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx,$$

而且要寻求从(x_1, y_1)到(x_2, y_2)的$y(x)$,使J达到极大或极小.另一类问题,称为等周问题,在17世纪末也进入到变分法的历史中来了.这类问题的先驱——在给定周长的所有封闭平面曲线中求一条曲线,使得它所围的面积最大,——可以追溯到希腊以前的时代.有一个故事说:古代Tyre的Phoenician城的公主Dido离开自己的家园定居在北非的地中海沿岸.在那里她指望得到一些土地,并且同意付给一笔固定的金额来换取用一张公牛皮能围起来的土地.精明的Dido把公牛皮切成非常细的条,把条和条的端点结起来再去围出一个面积,其周长正好等于这些牛皮条的总长.而且她选的土地都是靠海的,所以沿海岸不用牛皮条.根据传奇所载,Dido决定牛皮的总长应围成一个半圆——围出最大面积的正确形状.

除了Zenodorus的工作以外(第5章第7节),直到17世纪末,对等周问题实际上没有做什么工作.在1697年5月的《教师学

报》①中,James Bernoulli 提出了一个包含几种情形的相当复杂的等周问题,向他弟弟挑战并使其弟弟为难. 对于完满的解,James 甚至愿给 John 一笔 50 个金币的奖金. John 给出了几种解法,其中之一是在 1701 年得到的②,但都是错误的. James 给出了一个正确的答案③. 兄弟俩为各自解法的正确性而争论着. 事实上,就像在最速降线中的情形一样,James 的方法是朝着不久就要形成的一般技巧前进的一个重大步骤. 1718 年 John④ 大大地改进了他哥哥的解法.

分析地说,基本的等周问题是这样提出的. 容许曲线用参数表示为

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

又因为它们都是闭曲线,故 $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$. 而且曲线都不能自交. 于是等周问题就是要求确定 $x(t)$ 和 $y(t)$,使得弧长

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t$$

等于给定的常数而且使面积积分

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (xy' - x'y)\,\mathrm{d}t$$

取极大值. 这种等周问题有两个新的特征. 一是利用了参数表示,但这不是主要的. 另一是出现了 L 必须等于常数这样一个辅助条件.

James 在 1697 年 5 月号的《学报》上提出了另一类问题:决定曲线的形状,使得一个质点从给定点 P_1 以给定的初速度 v_1 沿这曲线滑向一条直线 l 的任一点(图 24.3)时所花的滑动时间最小.

---

① Page 214.

② *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1706, 235 = *Opera*, 1, 424.

③ *Acta Erud.*, 1701, 213 ff. = *Opera*, 2, 897～920.

④ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1718, 100 ff. = *Opera*, 2, 235～269.

这个问题和前面的问题不同之处在于容许曲线不是从固定点伸向另一固定点,而是从一固定点到某条直线. 由 James 在 1698 年的《学报》上给出的这个问题的答案(尽管 John 在 1697 年就有了这个解,但他没有发表)是一条与直线 l 正交的旋轮线弧. 后来这个问题被推广为 l 是任意给定的曲线,给定点 P_1 改成给定的另一曲线,从而问题就是要决定从一条给定曲线上的某一点到另一条给定曲线上某点的一条路径,使质点沿这条路径滑动所需的时间最少. 这类问题叫做"具有变动端点的问题".

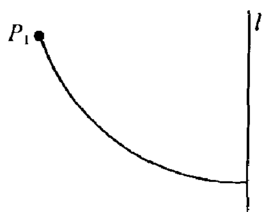


图 24.3

2. Euler 的早期工作

1728 年 John Bernoulli 向 Euler 提议利用测地线的密切平面与曲面正交(第 23 章第 7 节)这个性质来得到曲面上的测地线的问题. 这个问题使 Euler 开始从事变分法的研究. 1728 年他解决了这个问题①. 1734 年 Euler 推广了最速降线问题,使得极小化的量不是时间而是别的量,并且考虑了阻尼介质②.

然后 Euler 着手寻找关于这种问题的更一般的方法. 他的方法是 James Bernoulli 的方法的简化,用有限和代替问题中的积分,用差商代替被积函数中的导数,这样就把积分作成由弧 $y(x)$ 的有限个坐标构成的一个函数. 然后 Euler 变动一个或几个任意选择的坐标,并计算积分中的变差. 通过令积分的变差等于零并用一个粗糙的极限过程来变换所得到的差分方程,他就得到了极小化弧所必须满足的微分方程.

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3,1728,110~124,pub. 1732=*Opera*,(1),25,1~12.

② *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7,1734/1735,135~149,pub. 1740 = *Opera*, (1),25,41~53.

把上述方法应用到如下形式的积分:

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\mathrm{d}x, \tag{1}$$

Euler 成功地证明了使 J 取极大或极小值的函数 $y(x)$ 必须满足常微分方程

$$f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{y'})=0. \tag{2}$$

这里的记号必须按如下意义去理解. 就 f_y 和 $f_{y'}$ 来说,被积函数 $f(x, y, y')$ 是自变量 x, y 和 y' 的函数. 但是 $\mathrm{d}f_{y'}/\mathrm{d}x$ 必须理解为 $f_{y'}$ 关于 x 的导数,其中 $f_{y'}$ 通过 x, y 和 y' 依赖于 x. 就是说,Euler 的微分方程等价于

$$f_y-f_{y'x}-f_{y'y}y'-f_{y'y'}y''=0. \tag{3}$$

因为 f 是已知的,这个方程是关于 $y(x)$ 的二阶常微分方程,一般说来还是非线性的. Euler 在 1736 年①发表的这个有名的方程迄今仍是变分法的基本微分方程. 后面我们将会更清楚地看到,它是极大化或极小化函数必须满足的必要条件.

然后 Euler 解决了包含特殊边界条件(如在等周问题中那样)的更难的问题,但是他的方法仍然是去解微分方程(3),以便先求得可能的极大化或极小化弧,然后从(2)或(3)的通解中的常数个数去决定他能应用什么边界条件. 他解决的这些问题之一是由 Daniel Bernoulli 1742 年的一封信而引起他的注意的. Bernoulli 建议去找一根在两端受到压力作用的弹性杆的形状,假定杆经弯曲后所取曲线的沿线曲率的平方,即 $\int_0^L \mathrm{d}s/R^2$, 达到极小,其中 s 是弧长,R 是曲率半径. 这个条件相当于假定存贮在弯曲后的杆中的势能是最小的.

当极大化或极小化积分中的被积函数比(1)的被积函数更复

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1736, 159～190, pub. 1741 = *Opera*, (1), 25, 54～80.

杂时,微分方程(3)不是正常的微分方程. 在 1736 年到 1744 年间, Euler 改进了他的方法,对大量的问题求得了类似于(3)的微分方程. 这些成果发表在 1744 年的一本书《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》(*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*)①中. Euler 在这本书中的工作是繁琐的,因为他用了几何考虑,逐次差商与级数,还把导数变成差商,积分变成有限和. 换句话说,他在最有效地利用微积分方面是失败了. 但是 Euler 以应用极为广泛的简单而又漂亮的公式结束他的书,而且,他处理了大量的例子,来证明他的方法的方便和一般性. 其中一个例子是处理极小旋转曲面. 这问题是:决定位于(x_0, y_0)和(x_1, y_1)间的平面曲线 $y = f(x)$, 使得它绕 x 轴旋转所生成的曲面面积为最小. 要求最小值的积分是

$$A = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{4}$$

Euler 证明了函数 $f(x)$必须是悬链线的一个弧段,这样生成的曲面叫悬链面. 在 Euler 1744 年书的一个附录中,Euler 还给出了上面说过的弹性杆问题的一个确定的解. 他不仅推导出杆的形状取椭圆积分的形式,而且还给出了不同类型端点条件的解. 这本书立即给他带来了声誉,把他看作是当时活着的最伟大的数学家.

随着 Euler 这本书的出版,变分法作为一个新的数学分支诞生了. 但是广泛使用的是几何的论证,把几何和分析结合起来的论证不仅是复杂的,而且几乎不能提供一个系统的一般方法. Euler 是充分意识到这种限制的.

3. 最小作用原理

正当变分问题的解取得进展的时候,物理学给这一课题的工

---

① *Opera*, (1), 24.

作直接提供了一个新的推动力.同时代的发展是最小作用原理.为了说明这个原理的基础,我们必须往回追溯一下.Euclid 在他的《反射光学》(*Catoptrica*)(第 7 章第 7 节)中已经证明,光线从 P 点到镜面然后到 Q 点所取的路径是使 $\angle 1=\angle 2$(图 24.4).后来亚历山大城的 Heron 证明了光线实际取的路径 PRQ 比任何一个能够想象的路径,譬如 $PR'Q$,都要短.因为光线取最短的路径,如果在直线 RR' 上方的介质是均匀的,那么光线就以常速行进,从而取花时间最少的路径.Heron 把这个最短路径和最少时间原理应用到了凹和凸的球面镜的反射问题上去.

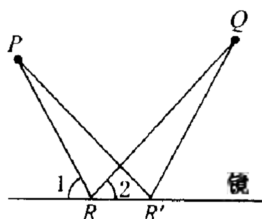


图 24.4

根据这种反射现象,还根据哲学、神学和审美的原则,在希腊时代以后的哲学家和科学家们提出了一种学说,就是大自然以最短捷的可能途径行动,或者如 Olympiodorus(公元 6 世纪)在他的《反射光学》中所说的:"自然不做任何多余的事或者任何不必要的工作."Leonardo da Vinci 说,自然是经济的,并且自然的经济是定量的,而 Robert Grosseteste 相信,自然总是以数学上最短和最好可能的方式行动.在中世纪时代,自然是以这一方式行动的观点是普遍地为人们所接受的.

17 世纪的科学家至少是容易接受这种观念的,但是,作为科学家,他们企图把这种观念和支持这种观念的现象联系起来.Fermat 知道反射时光线取需时间最少的路径,而且相信自然确实是简单而又经济地行动的,在 1657 年和 1662 年的信件中①,他确认了他的最小时间原理,这个原理说,光线永远取花时间最少的路径行进.他曾经怀疑过光的折射定律的正确性(第 15 章第 4 节),但当他在 1661 年②发现他能够从他的原理导出光的折射定律时,他

① *Œuvres*, 2,354～359,457～463.

② *Œuvres*, 2,457～463.

不但解除了对折射定律的怀疑，而且更加确信他的原理是正确的了.

Fermat 的原理在数学上有几种等价的陈述形式. 按照折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2},$$

其中 v_1 是光在第一介质中的速度，v_2 是光在第二介质中的速度. 常用 n 表示 v_1 对 v_2 之比，叫做第二种介质相对于第一种介质的折射率；如果第一种介质是真空，则 n 叫做非真空介质的绝对折射率. 如果 c 表示光在真空中的速度，那么绝对折射率 $n=c/v$，其中 v 是光在介质中的速度. 如果介质的特性是逐点变化的，则 n 和 v 都是 x，y 和 z 的函数. 因此光线沿着曲线 $x(\sigma)$，$y(\sigma)$，$z(\sigma)$ 从点 P_1 行进到 P_2 所需要的时间为

$$(5)\qquad J=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{ds}{v}=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{n}{c}ds=\frac{1}{c}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}n(x,\ y,\ z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,d\sigma,$$

其中 σ_1 是 σ 在 P_1 的值而 σ_2 是 σ 在 P_2 的值. 因此 Fermat 原理说：光线从 P_1 行进到 P_2 所取的实际路径是使 J 取极小的曲线①.

大约在 18 世纪初期，数学家们已经有了几个给人印象深刻的例子，说明自然的确试图使某些重要的量极大或极小化. 最初曾经反对过 Fermat 原理的 Huygens 证明了，光线在具有变折射率的介质中传播时 Fermat 原理也是成立的. 甚至 Newton 的第一运动定律（该定律说直线或最短距离的运动是物体的自然运动）也表明自然界的欲望是要求经济化. 这些例子暗示着可能存在某种更一般的原理.

当 Pierre-Louis Morean de Maupertuis(1698—1759)于 1744

---

① 有一些例子，例如光线从凹面镜的反射，这时光线所取路径需要极大的时间. 这个事实为 Fermat 所知，并由 William R. Hamilton 明确叙述过.

年在光的理论方面进行工作时，他在一篇题为《直到现在看起来还是不能并存的不同法则的协调性》(Accord des différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles)①的著述中提出了他的著名的最小作用原理. 他从 Fermat 原理出发，但是由于那时候对光速究竟是像 Descartes 和 Newton 所相信的那样和折射率成正比，还是像 Fermat 所相信的那样和折射率成反比，有不同意见，所以 Maupertuis 放弃了最小时间. 事实上他不相信最小时间总是正确的.

Maupertuis 说，作用是质量、速度和所经距离的乘积的积分，自然界中的任何改变都是要使作用最小. Maupertuis 多少有点糊涂，因为他没有规定 m, v 和 s 的乘积是在什么时间区间上取的，又因为他在光学和某些力学问题的每个应用中对作用赋予不同的意义.

尽管 Maupertuis 有一些物理方面的例子支持他的原理，但是他提倡这个原理还是出于宗教的原因. 物质行为的各种规律必须具有上帝创造的完美性；而最小作用原理看起来好像满足这个准则，因为这个原理表明自然界是经济的. Maupertuis 宣称他的原理是自然界的普遍规律和上帝存在的第一个科学证明. Euler 在 1740 和 1744 年间曾在这一课题方面同 Maupertuis 通过信，同意 Maupertuis 的观点：上帝一定已经按照某种这样的基本原理构造了宇宙，而这种原理的存在就证实了上帝的安排.

Euler 在他 1744 年的书的第二个附录中把最小作用原理作为一个精确的动力学定理作了详细的阐述. 他只限于讨论单个质点沿平面曲线的运动. 此外，他假定速度依赖于位置，或者用现代的术语来说，力可以从位势导出. 然而 Maupertuis 写为

$$mvs = \min.,$$

而 Euler 则写作

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1744.

$$\partial\int v\mathrm{d}s = 0,$$

意思是对于路径改变的积分，它的变化率必须为零. 因为 $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$, Euler 还写下

$$\partial\int v^2\mathrm{d}t = 0.$$

这里，Euler 即使应用他的变分法技巧正确地把这个原理用于特殊问题，但是恰恰在积分的变化率是什么意思的问题上他是模糊的. 至少 Euler 证明了对于沿着平面曲线的运动，Maupertuis 的作用是最小的.

在相信一切自然现象都是为了使某个函数达到极大或极小，因而基本的物理原理应该表达某个函数被极大化或极小化这一点上，Euler 比 Maupertuis 走得更远. 特别是在研究物体在力的推动下的运动的动力学中这种原理应该是正确的. Euler 离开真理并不太远.

4. Lagrange 的方法论

Euler 的工作引起了 Lagrange 的注意. Lagrange 自己在 1755 年还只 19 岁的时候就开始关心变分法的问题. 他放弃了 Bernoulli 兄弟和 Euler 的几何-分析的论证，引进了纯分析的方法. 1755 年他得到了一个一般的方法，对于范围很广的一类问题，这方法是系统而统一的，他为这方法工作了若干年. 他关于这一课题的著名出版物是《论确定不定积分公式的极大和极小的一个新方法》(Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies)①. 在 1755 年 8 月给 Euler 的一封信中 Lagrange 讲了这个方法，他称之为变分方法

① *Misc. Taur.*, 2,1760/1761,173～195,pub. 1762 = *Œuvres*, 1,333～362.

(the method of variation),但是 Euler 在 1756 年提交给柏林科学院的一篇论文①中把这种方法命名为变分法(the calculus of variation).

我们来解释一下变分法基本问题的 Lagrange 方法,问题就是使积分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{6}$$

极大或极小化,其中 $y(x)$ 是待定的. Lagrange 的一个改革是引进通过端点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的新曲线而不是去改变极大或极小化曲线的个别的坐标. Lagrange 把这些新的曲线表为形式 $y(x)+\delta y(x)$ (图 24.5), δ 是 Lagrange 引进的一个特殊符号,用来表示整个曲线 $y(x)$ 的变分.

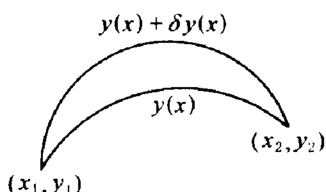


图 24.5

在(6)的被积函数中引进了一条新的曲线当然就改变了 J 的值. 因此 J 的增量,记为 ΔJ,是

$$\Delta J=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x, y+\delta y, y'+\delta y')-f(x, y, y')\}\mathrm{d}x.$$

现在 Lagrange 把 f 看作是三个自变量的函数,但因 x 是不变的,所以对一个双变量函数应用 Taylor 定理就能把被积函数展开. 展开式给出 δy 和 $\delta y'$ 的一次项,这些增量的二次项,等等. 于是 Lagrange 写下

$$\Delta J=\delta J+\frac{1}{2}\delta^2 J+\frac{1}{3!}\delta^3 J+\cdots \tag{7}$$

其中 δJ 表示 δy 和 $\delta y'$ 的一次项的积分,$\delta^2 J$ 表示二次项的积分,等等. 这样就有

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}(f_y\delta y+f_{y'}\delta y')\mathrm{d}x,$$

---

① 变分计算初步(Elementa Calculi Variationum), *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10,1764,51～93,pub. 1766 = *Opera*, (1),25,141～176.

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} \{f_{yy}(\delta y)^2 + 2f_{yy'}(\delta y)(\delta y') + f_{y'y'}(\delta y')^2\} \mathrm{d}x.$$

δJ 叫做 J 的一次变分，$\delta^2 J$ 叫 J 的二次变分，等等.

Lagrange 接着论证道，因为 δJ 中包含小的变分 δy 和 $\delta y'$ 的一阶项，所以 δJ 的值控制了(7)的右端，从而当 δJ 是正或负时，ΔJ 将是正或负的. 但是在 J 的极大值或极小值处，和单变量函数 $f(x)$ 通常的极大或极小的情形一样，ΔJ 必须有相同的符号，所以对于极大化函数 $y(x)$，δJ 一定等于 0. 此外，Lagrange 说

$$\delta y' = \frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}, \tag{8}$$

即运算 d 和 δ 的次序可以交换. 这是正确的，虽然对于 Lagrange 的同辈人来说理由是不清楚的，后来 Euler 阐明了理由. [容易看出这是正确的，因为如果我们把 $y+\delta y$ 写作 $y+n(x)$，其中 $n(x)$ 是 $y(x)$ 的变分，那么 $\delta y = y + n(x) - y = n(x)$，而且 $\delta y' = y' + n'(x) - y' = n'(x)$，但 $n'(x) = \frac{\mathrm{d}n(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}$.] 利用(8)，Lagrange 把一次变分写成

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[f_y \delta y + f_{y'} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\right] \mathrm{d}x.$$

对第二项分部积分并且利用 δy 在 x_1 和 x_2 处必须等于 0 这一事实，就得到

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(f_y \delta y - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}\right) \delta y\right) \mathrm{d}x. \tag{9}$$

现在对一切变分 δy，δJ 都必须为 0. 因此 Lagrange 下结论说：δy 的系数必须为 0①，或即

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{y'}) = 0. \tag{10}$$

---

① 在 Lagrange 的工作之后的一百年里，δy 的系数必须等于 0 这件事实一直为这方面的每一位作者直观地接受或者错误地证明过. 甚至 Cauchy 的证明也是不充分的. 第一个正确的证明是由 Pierre Frédéric Sarrus (1789—1861) 给出的 (*Mém. divers Savans*, (2), 10, 1848, 1～128). 这个结果就是现在众所周知的变分法基本引理.

这样,Lagrange 达到了 Euler 曾经得到的 $y(x)$的同一个常微分方程. Lagrange 推导(10)的方法(除去他用了微分外),甚至他的记号,至今还在使用. 当然,(10)是关于 $y(x)$的必要条件而不是充分条件.

Lagrange 在 1760/1761 年的这篇论文中还第一次推导出具有变动端点问题的极小化曲线必须满足的端点条件. 他还找到了在极小化曲线和固定曲线或曲面的交点处必须成立的横截性条件,比较曲线的端点容许在这些固定的曲线或曲面上变动(图 24.6).

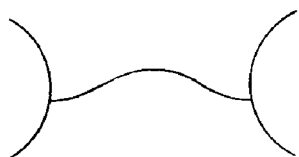


图 24.6

虽然关于形式(6)的极大或极小化积分还有很多东西要说,但是就历史而言,Lagrange 采取的第二步是在他 1760/1761 年这篇论文和以后的一篇论文[1]中所研究的导致重积分的问题. 需要极大化或极小化的积分具有形式

$$J=\iint f(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ , \tag{11}$$

其中 z 是 x, y 的函数, $p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$. 积分展布在 x-y 平面的某个区域上. 于是问题就是要求使 J 的值达到极大或极小的函数 $z(x,\ y)$. 在这类重积分的许多问题中最重要的一个是在边界以某种方式固定的所有曲面中求面积最小的曲面. 譬如可以假定在空间给出两条不自交的闭曲线,然后求由这两条曲线界住的面积最小的曲面. 作为极小曲面问题的一个特殊情形,这两条曲线可以是平行于 y-z 平面而中心在 x 轴上的

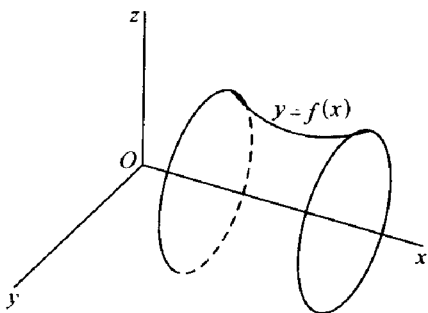


图 24.7

[1] *Misc. Taur.*, 4, 1766/1769 = *Œuvres*, 2, 37~63.

圆周(图 24.7). 那么可能的极小曲面一定是由这两个圆周界住的旋转曲面,而问题就是求使面积最小的旋转曲面. 这后一个问题,正如上文已指出的,是早已由 Euler 在 1744 年解决了的. 但是旋转曲面的这一特殊情形,可以采用适合于积分(11)的理论来处理.

Lagrange 按照他对较简单的积分(6)曾经用过的类似方法,得到了使(11)取极小的函数 $z(x, y)$ 必须满足的微分方程. 如果采用通常的记号

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \ \frac{\partial z}{\partial y} = q, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

那么方程是

$$Rr + Ss + Tt = U, \tag{12}$$

其中 R, S, T 和 U 都是 x, y, z, p 和 q 的函数. 这个非线性二阶偏微分方程,称为 Monge 方程,是不容易求解的,这种形式的方程曾经是 Euler 以前时代的研究课题(第 22 章第 7 节).

在极小曲面问题的情形中,积分(11)变成

$$\iint (1 + p^2 + q^2)^{1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{13}$$

而且,对于这类特殊问题,偏微分方程(12)变成

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0. \tag{14}$$

这个方程是由 Lagrange 在他 1760/1761 年的论文中给出的(虽然不完全是这种形式)而且是极小曲面理论的一个主要的分析结果. 几何上,如 Meusnier 在 1785 年的一篇论文①中指出的,这个偏微分方程表示如下事实:在极小化曲面的任一点上,主曲率半径是相等而反向的,或说平均曲率(即主曲率的平均值)为零.

Lagrange 在后来(1770 年)的一篇论文②中还研究了被积函数中有高阶导数的单重和多重积分. 这个课题自 Lagrange 时代之后得到很好的发展,现在是变分法的标准内容. 但是,因为它的原

① *Mém. divers Savans*, 10, 1785, 477～485.

② *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1770 = *Œuvres*, 3, 157～186.

理和已经讨论过的原理没有什么差别,所以这里就不深入讨论了. Lagrange 关于变分法的论文的内容编进了他的《分析力学》中.

变分法并没有很好地为 Lagrange 和 Euler 的同辈人理解. Euler 在许多著作中阐明了 Lagrange 的方法,并用这个方法重新证明了几个老的结果. 虽然他认识到变分法是一个新的分支,或者如他所说,是用新的运算符 δ 进行符号化了的新的技巧,但他像 Lagrange 一样,试图在普通微积分的基础上建立变分法的逻辑. Euler 的思想①是引进一个参数 t,使得变分问题中的曲线族随着 t 而变化,即对于某个区间中的每个 t,应该有一条曲线 $y_t(x)$. 然后 Euler 就说 $\mathrm{d}y = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$, $\delta y = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)\mathrm{d}t$. 因此变分 δy 表成了关于 t 的偏微商. 然后他用这个关于 t 的微商的新概念确切陈述了变分法的技巧. 当然他最终得到的结果和早先得到的结果是相同的.

Euler 继续研究具有极大或极小性质的空间曲线(1779 年)②,而且研究了在三维空间中有外力(在通常的问题中是重力)作用时或存在阻尼介质时最速降线问题的推广(1780 年)③.

5. Lagrange 和最小作用

Lagrange 把变分法用到了动力学上. 他从 Euler 那里接过**最小作用原理**,成了第一个用具体形式把这个原理表示出来的人,这种具体形式就是对于单个质点而言,质量、速度和两个固定点之间的距离的乘积的积分是一个极大值或极小值的原理;即对于这个

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 16,1771,35～70,pub. 1772 = *Opera*, (1),25,208～235.

② *Mém. de l'Acad. des Sci. de St. Peters.*, 4,1811,18～42,pub. 1813 = *Opera*,(1),25,293～313.

③ *Mém. de l'Acad. des Sci. de St. Peters.*, 8,1817/1818,17～45,pub. 1822 = *Opera*,(1),25,314～342.

质点所取的实际路径而言，$\int mv\mathrm{d}s$ 必须是极大或者极小. 换句话说，因为 $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$，那么 $\int mv^2\mathrm{d}t$ 必须是极大或极小. 量 mv^2[今天的 $\frac{1}{2}mv^2$]叫做动能；在 Lagrange 时代叫做活力. Lagrange 还断言，对于质点组而言这个原理也是正确的，甚至对广义质量也是对的，虽然他对于广义质量的情形并不清楚.

利用最小作用原理和变分法的方法，Lagrange 得到了他的著名的运动方程. 我们来考虑动能是 x，y 和 z 的函数的情形. 于是，对于单个质点，动能 T 是

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{15}$$

Lagrange 还假定使物体运动的作用力都可从一个依赖于 x，y 和 z 的势函数 V 推导出来. 于是附加的一个条件是 $T+V = \text{const.}$，即总能量是不变的. Lagrange 的作用是

$$\int_{t_0}^{t_1} T\mathrm{d}t, \tag{16}$$

他的最小作用原理说的是，这个作用必须是一个极小值或极大值，也就是

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\mathrm{d}t = 0. \tag{17}$$

在一个极小化或极大化的作用中，即使运动是在空间的两个固定点间和两个确定的时刻 t_0 和 t_1 之间发生，空间和时间变量也一定是变化的.

把变分法的方法用到作用积分上，Lagrange 导出了与 Euler 方程(2)类似的方程，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

以及关于 y 和 x 的两个相应的方程，这些方程都等价于 Newton 第二运动定律.

Lagrange 进一步引进了现在所谓的广义坐标. 就是说, 可以用极坐标或者用实际上为了确定质点(或广义质量)位置所必需的任何坐标组 q_1, q_2, q_3 来代替直角坐标. 于是

$$x = x(q_1, q_2, q_3),$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3),$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3),$$

其中 q_i 都是 t 的函数, 用新的坐标来表示, T 就成为 q_i 和 q_i 的函数, 而 V 成为 q_i 的函数, 于是方程(18)变成

$$(19) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \ i = 1, 2, 3.$$

这是关于 q_i 的三个二阶常微分方程的联立方程组. 它们都是作用积分的 Euler(特征)方程. 如果确定运动物体的位置需用 n 个坐标, 例如两个质点需用 6 个坐标, 那么方程组(19)就有 n 个方程①.

这些广义坐标不一定要有几何或物理意义. 今天这些坐标都看做是构形空间的坐标, 从而 $q_i(t)$ 就是构形空间中一条路径的方程. 因此 Lagrange 已经认识到变分原理, 即作用必须是极小或极大的原理, 可以使用任何坐标组, 而且认识到相对于任何坐标变换, Lagrange 运动方程(19)的形式是不变的.

虽然 Lagrange 原理相当于 Newton 第二运动定律, 但是 Lagrange 原理比 Newton 第二运动定律的陈述有几个优点. 首先, 任何一种方便的坐标系, 都可以说已被纳入 Lagrange 原理的结构中. 第二, 处理有约束的运动问题更容易了. 第三, 代替一系列分立的微分方程(当系统包含很多质点时, 这种方程可以有很多个)现

---

① Lagrange 明白, T 和 V 中变量的数目正好是决定该力学系统的位置所需要变量的数目. 因此如果有 N 个互相无关的质点, 每一个质点在空间的路径需用三个坐标 (x_i, y_i, z_i) 来描述, 那么共需要 $3N$ 个坐标. 这时将有 $3N$ 个坐标 q_i, $3N$ 个把 q_i 与直角坐标联系起来的方程, $3N$ 个形为(19)的方程. 互相独立的坐标的数目或者像物理学家所谓的自由度的数目, 依赖于所要讨论的系统和运动中的约束.

在有了,至少是开始有了一个原理,由它可以求得微分方程. 最后一点,虽然 Lagrange 原理要假定问题的动能和势能的情况,但并不需要知道作用力. Lagrange 用他的原理推出了力学的主要定律,并解决了一些新的问题,尽管这些还不足以包括力学所涉及到的所有问题. Lagrange 关于作用原理的工作在他的《分析力学》中有充分的阐述. 他还开始了从变分原理推出其他物理分支的定律的运动,而这种变分原理应该是最小作用原理的类似物. 他本人对广泛的一类流体动力学问题给出了一种变分原理. 在研究 19 世纪的变分法时我们将继续讲述有关这方面的内容.

从数学的观点说来,Lagrange 关于最小作用的工作赋予变分法以重大的价值. 特别是 Lagrange 曾对被积函数包含一个自变量但有几个应变量及其导数的积分导出了 Euler 方程. 这是原来变分法问题的一种推广,原来变分问题的积分中只包含一个应变量及其导数. 在这种推广中,Euler 方程是 q_i 的二阶常微分方程组.

6. 二次变分

正如 Euler 和 Lagrange 意识到的,Euler 微分方程只是使积分取极大或极小的解所应满足的一个必要条件. 他们用微分方程来求解,然后凭借直观或物理背景来决定这个解是否提供一个极大或极小. Euler 方程的作用完全类似于普通微积分中的条件 $f'(x)=0$. 使 $y=f(x)$ 取极大或极小的 x 值一定满足 $f'(x)=0$,但反过来不一定对.

Euler 方程的解必须满足什么样的附加条件才能真正使一个依赖于 $y(x)$ 的积分取到极大或极小,这个问题 Laplace 在 1782 年曾处理过,但没有成功. 以后 Legendre 在 1786 年着手解决这个问题①.

① *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1786,7～37,pub. 1788.

在普通微积分中,在使 $f'(x)=0$ 的 x 值处,$f''(x)$ 的符号决定着 $f(x)$ 是否取极大或极小. 正是以这个事实为指导,Legendre研究了二次变分 $\delta^2 J$,重新改造了二次变分的形式,并且得到结论说:对于满足 Euler 方程并且通过 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 的曲线 $y(x)$,只要沿 $y(x)$ 的每一点 x 处 $f_{y'y'}\leqslant 0$,则 J 取极大;类似地,对于同样的曲线 $y(x)$,只要沿 $y(x)$ 的每一点 x 处 $f_{y'y'}\geqslant 0$,则 J 取极小. 然后 Legendre 把这个结果推广到比(6)更一般的积分上去. 但是,Legendre 在 1787 年认识到,关于 $f_{y'y'}$ 的条件仅仅是使 $y(x)$ 成为极大或极小曲线的一个必要条件. 寻求使(6)的积分达到极大或极小的曲线 $y(x)$ 的充分条件的问题,在 18 世纪没有得到解决.

参考书目

Bernoulli, James: *Opera*, 2 vols., 1744, reprint by Birkhaüser, 1968.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, Georg Olms (reprint), 1968.

Bliss, Gilbert A.: *The Calculus of Variations*, Open Court, 1925.

Bliss, Gilbert A.: "The Evolution of Problems in the Calculus of Variations", *Amer. Math. Monthly*, 43, 1936, 598～609.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924, Vol. 3, Chap. 117, and Vol. 4, 1066～1074.

Caratheodory, C.: Introduction to Series (1), Vol. 24 of Euler's *Opera Omnia*, viii～lxii, Orell Füssli, 1952. Also in C. Caratheodory: *Gesammelte mathematische Schriften*, C. H. Beck, 1957, Vol. 5, pp. 107～174.

Darboux, Gaston: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2nd ed., Gauthier-Villars, 1914, Vol. 1, Book Ⅲ, Chaps. 1～2.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, (1), Vols. 24～25, Orell Füssli, 1952.

Hofmann, Joseph E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik", *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 1956, 61～171; published separately by Institut de mathématiques, Geneva, 1957.

Huke, Aline: *An Historical and Critical Study of the Fundamental Lemma in the Calculus of Variations*, *University of Chicago Contributions to the Calculus of*

Variations, University of Chicago Press, Vol. 1, 1930, pp. 45～160.

Lagrange, Joseph-Louis: *Œuvres de Lagrange*, Gauthier-Villars, 1867～1869, relevant papers in Vols. 1～3.

Lagrange, Joseph Louis: *Mécanique analytique*, 2 vols., 4th ed., Gauthier-Villars, 1889.

Lecat, Maurice: *Bibliographie du calcul des variations depuis les origines jusqu'à 1850*, Gand, 1916.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, 1802, Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, 643～658.

Porter, Thomas Isaac: "A History of the Classical Isoperimetric Problem", *University of Chicago Contributions to the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, 1933, Vol. 2, pp. 475～517.

Smith, David E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, pp. 644～655.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200 1800*, Harvard University Press, 1969, pp. 391～413.

Todhunter, Isaac: *A History of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century*, 1861, Chelsea (reprint), 1962.

Woodhouse, Robert: *A History of the Calculus of Variations in the Eighteenth Century*, 1810, Chelsea (reprint), 1964.

第 25 章

18 世纪的代数

> 我介绍高等分析的时候，它还是个孩子，而你正在把它带大成人.
>
> John Bernoulli，给 Euler 的一封信

1. 数系的状况

虽然在 18 世纪时很难把代数和分析互相区别开来，因为极限概念的深刻含义在当时依然是模糊的，但是按照我们现代的观点，把这两个活动领域分开还是合适的. 17 世纪的时候，代数是人们兴趣的一个重要中心；但到了 18 世纪，它变成从属于分析，而且除了数论以外，促进代数研究的因素，大部分来自分析.

因为代数的基础是数系，所以让我们先来看一下数系发展的状况. 在 1700 年左右，我们所熟悉的数系的所有成员——整数、分数、无理数、负数和复数——都已被人们熟知了. 但是，在整个这世纪中，都有人反对更新类型的数. 典型的是英国数学家 Baron Francis Masères(1731—1824)的反对意见，他是剑桥大学克莱尔(Clare)学院的研究员和皇家学会会员. 正是这位写过一些有价值的数学论文和有关人寿保险理论的实质性论文的 Masères，在 1759 年发表了《专论在代数中使用负号》(*Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*). 他说明如何避开负数(除了要表示从较小的数减去较大的数所得的差以外)，尤其是避开方程的负根，他把二次方程仔细分类，使得有负根的方程单独进行考虑；当然，负根必须舍去. 对于三次方程他也同样处理. 然后他说

到负根：

> ……就我所能判断的而言，它们只会把方程的整个理论搞糊涂，而且把一些就其本质说来是出奇地明显简单的东西搞得晦涩难懂、玄妙莫测……因此很希望代数里决不容许有负根，或者说再一次把它们从代数里驱逐出去。因为如果这样做了，那么就有很好的理由去设想，那些现在被许多知识渊博、机敏过人的人用来进行代数运算的、模糊不清并和一些几乎是不能理解的概念纠缠在一起的东西，从此将从代数中清除掉，一定会使代数(或普遍的算术)，就其本性而言，在简洁明了和证明能力方面，成为不亚于几何的一门科学。

确实的，直到现代，负数才算被真正透彻地理解了。在18世纪后半叶，Euler仍然深信负数比∞大。他还论证$(-1)\cdot(-1)=+1$说，这个乘积必定是$+1$或者-1，但因为$1\cdot(-1)=-1$，所以$(-1)\cdot(-1)=+1$。著名的法国几何学家Carnot认为，负数的使用导致谬误的结论。在1831年这样晚的时候，伦敦大学学院的数学教授、著名的数理逻辑学家、对代数有贡献的Augustus De Morgan(1806—1871)在他的《论数学的研究和困难》(*On the Study and Difficulties of Mathematics*)中说："虚数式$\sqrt{-a}$和负数式$-b$有一种相似之处，即只要它们中的任一个作为问题的解出现，就说明一定有某种矛盾或谬误。只要一涉及到实际的含义，两者都是同样的虚构，因为$0-a$和$\sqrt{-a}$同样是不可思议的。"

De Morgan举一个问题来解释他的话。父亲56岁，他的儿子29岁，问什么时候，父亲的岁数将是儿子的2倍？他解方程$56+x=2(29+x)$，得$x=-2$。因此他说，这个结果是荒唐的。接着他又说，但是，如果把x换成$-x$，解方程$56-x=2(29-x)$，我们

就得到 $x=2$.他总结道,由于最初问题的提法是错误的,所以导致不能接受的负答数.De Morgan 固执地认为考虑比 0 小的数是荒谬的.

18 世纪时,虽然在弄清楚无理数概念方面没有什么成就,但是对无理数本身还是作出了某些进展.1737 年,Euler 基本上证明了 e 和 e^2 是无理数,Lambert 证明了 π 是无理数(第 20 章第 6 节).由于要求圆的面积,大大地刺激了对 π 的无理性的研究.Legendre猜测说 π 可能不是有理系数方程的根,他的猜测导致了无理数的分类.任何有理系数代数(多项式)方程的任何一个根(不管是实的还是复的)叫做一个代数数.这样,方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根叫做代数数,其中 a_i 是有理数.因此,所有的有理数和一部分无理数是代数数,这是因为,任一有理数 c 是方程 $x-c=0$ 的根,而$\sqrt{2}$是 $x^2-2=0$ 的根.不是代数数的数叫做超越数,因为 Euler 说过,"它们超越了代数方法的能力."Euler 至少早在 1744 年就认识到了代数数与超越数之间的这一差别.他猜测说,以有理数为底的有理数的对数,必定或者是有理数,或者是超越数.然而,18 世纪时还不知道有哪一个数是超越数,因而证明超越数存在的问题仍旧没有解决.

对于 18 世纪的数学家来说,复数更是一个祸根.这些数自从被 Cardan 引进之后,直到 1700 年实际上还无人理睬.后来(第 19 章第 3 节)用部分分式法求积分时用到了复数,随之就产生了关于复数以及负数和复数的对数的冗长的论争.尽管 Euler 正确地解决了复数的对数问题,但是无论是他还是别的数学家,对这些数都是不清楚的.

Euler 试图理解复数究竟是什么,在他的《对代数的完整的介绍》(*Vollständige Anleitung zur Algebra*,这本书 1768—1769 年在俄国第一次出版,1800 年在德国出版,是 18 世纪最好的一本代

数教科书)中说:

> 因为所有可以想象的数都或者比 0 大,或者比 0 小,或者等于 0,所以很清楚,负数的平方根不能包括在可能的数[实数]中. 从而我们必须说它们是不可能的数. 然而这种情况使我们得到这样一种数的概念,它们就其本性说来是不可能的数,因而通常叫做虚数或者幻想中的数,因为它们只存在于想象之中.

Euler 在使用复数时犯了错误. 在这本《代数》中他写道:$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{4}=2$,因为$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. 他还给出 $i^i=0.207\,879\,576\,3$,但遗漏了这个量的其他数值. 他最初是在 1746 年给 Goldbach 的一封信中,而后在 1749 年一篇谈 Leibniz 和 John Bernoulli 之间争吵的文章中(第 19 章第 3 节)给出了这个数值. 虽然 Euler把复数叫做不可能的数,但他说它们是有用的. 他心目中的用处发生在当我们着手处理一个不知道是否有解的问题的时候. 例如,如果要把 12 分成两部分,使它们的乘积等于 40,我们就会得到这两部分是 $6+\sqrt{-4}$ 和 $6-\sqrt{-4}$. 他说,从而我们认识到这个问题是不能解出的.

除了 Euler 作出的关于复数的对数的正确结论以外,复数的研究确实前进了几步,但是它们在 18 世纪的影响是有限的. 在 John Wallis 的书《代数》(1685,第 66~69 章)中,他说明怎样几何地表示实系数二次方程的复根. Wallis 说,实际上,复数并不比负数更不合理,而且因为负数能在直线上表示出来,所以在平面上表示复数也应该是可能的. 他从画一条轴出发,根据一个实数与原点的关系在轴上把这个实数标出来,在这条轴上到原点的距离表示根的实部,根据实部的正或负,这个距离分别在轴的正方向或负方向上量出来. 过实轴上这样定出的这一点,作一条垂直于实轴的直线,它的长度就表示与 $\sqrt{-1}$相乘的那个数,即给出了根的虚部,这

条直线根据这个数的正负分别在不同的方向画出(他没有引进 y 轴本身作为虚轴). 接着, Wallis 作出了方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根都是实根和都是复根时的几何图像. 他的这项工作是正确的, 但是对于其他用途来说, 它不是 $x+\mathrm{i}y$ 的一个有用的表示形式. 18 世纪时还有一些人试图用别的方法几何地表示复数, 但这些方法的用途不广泛. 当时还没有一个几何表示形式使复数更能被人接受.

18 世纪初期, 大多数数学家都相信, 不同的复数根将会引进不同类型或不同阶的复数, 都相信可能存在理想的根, 这些根的性质他们还不能详细说明, 但大概可以设法把它们算出来. 但是 d'Alembert, 在他的得奖著作《关于风的一般成因的考虑》(*Réflexions sur la cause générale des vents*, 1747)中断言: 每一个由复数经过代数运算(他把取任意次幂包括在内)建立起来的式子都是一个形为 $A+B\sqrt{-1}$ 的复数. 在证明这个结论的过程中他遇到的一个困难是 $(a+b\mathrm{i})^{g+h\mathrm{i}}$ 的情形. 他的关于这个结论的证明还必须经过 Euler, Lagrange 和其他人的修补. 在《百科全书》中, d'Alembert 一反常态, 对复数保持了沉默.

在整个 18 世纪中, 复数的卓有成效的应用已足以使数学家对它们建立起一些信心(第 19 章第 3 节; 第 27 章第 2 节). 不管什么地方, 在数学推理的中间步骤中用了复数, 结果都被证明是正确的, 这个事实产生了有力的反响. 当然还存在一些怀疑, 怀疑推理的可靠性. 甚至常常怀疑结论的正确性.

1799 年 Gauss 对代数基本定理作出了他的第一个证明, 而因为这必须依赖于对复数的承认, 所以 Gauss 就巩固了复数的地位. 后来, 19 世纪勇敢地带着复值函数向前冲. 但是, 即使在复函数论在流体动力学中发展了并应用了好长一段时间之后, 剑桥大学的教授们仍然保持"一种对讨厌的 $\sqrt{-1}$ 抱不可动摇的厌恶心理, 采用笨办法去杜绝它的出现, 或用之于一切可能的地方."

甚至到了1831年那样晚的时候，人们对复数的普遍看法，还可以从De Morgan的著作《论数学的研究和困难》中了解到. 他说他这本书把当时牛津和剑桥使用的最好的书本中的一切东西都包揽无遗. 谈到复数，他说：

> 我们已经证明了记号$\sqrt{-a}$是没有意义的，或者甚至是自相矛盾或荒唐可笑的. 然而，通过这些记号，代数中极其有用的一部分便建立起来了. 它依赖于一件必须用经验来检验的事实，即代数的一般规则可以应用于这些式子[复数]，而不会导致任何错误的结果. 要把这个性质求助于经验，那是与本书开头写下的一些最重要的原理相违背的. 我们不能否认实际情况确是这样，但是必须想到这只不过是一门很大的学科中的一个小小的和孤立的部分. 对于这门学科的其余一切分支，这些原理将完整地得到应用.

上文中的“原理”，他指的是数学真理应该由公理经过演绎推理得出来.

接着，他把负根和复根加以比较.

> 于是，在负的结果和虚的结果之间就有截然的区别. 当一个问题的答案是负的时候，在产生这个结果的方程里变换一下x的符号，我们就可以或者发现形成那个方程的方法有错误，或者证明问题的提法太局限，因而可以扩展，使之容许一个令人满意的答案. 但当一个问题的答案是虚的时候，情形就不是这样了……对于支持和反对这种问题(如用负的量，等等)的所有论据，我们不赞成采用完全介入的办法来阻止学生的进步，这些论据他们不能理解，而且论据本身在两方面都无确定结果；但是学生也

> 许会意识到困难确实存在，这些困难的性质可以给他们指明，然后他们也许会通过充分多的（分类处理的）例子的考虑，而相信法则所引向的结果.

在 Morgan 写这番话的时候，人们正在弄清楚复数和复函数的概念. 但是新知识的传播是缓慢的. 确实，整个 18 世纪和 19 世纪上半叶都在热烈地争论着复数的意义. John Bernoulli, d'Alembert 和 Euler 的所有论点都被不断地改头换面重复出现. 甚至 20 世纪的三角教科书也通过不包含$\sqrt{-1}$的证明，补充介绍了应用复数的材料.

这里我们注意到另外一点，它的重要性与它的简洁性几乎成反比，根据简洁性，它可以叙述如下：18 世纪时没有人为实数系和复数系的逻辑操心. Euclid 在《原本》第 V 卷中为建立不可通约量的性质而曾做过的说明被漠视了. 产生这种漠视的部分解释是：因为那种说明依赖于几何，而 18 世纪时，算术与代数已经独立于几何了. 其次，这种逻辑的发展，即使适当地修改一下使它能从几何中解脱出来，也不能建立起负数和复数的逻辑基础，而这也可以使数学家们断绝任何想要严密地建立数系的企图. 最后，该世纪主要关心的是在科学中使用数学，而且因为运算法则（至少对实数来说）直观上是可靠的，所以没有一个人真正地担心数系的基础. 典型的例子是 d'Alembert 在《百科全书》中关于负数的条目里所说的一段话. 这一条目写得一点儿也不清楚，他下结论道："对负数进行运算的代数法则，任何一个人都是赞同的，并认为是正确的，不管我们对这些量有什么看法."各种类型的数从来没有合适地介绍给社会，然而在 18 世纪的数学界却争得了一个比较稳固的地位.

2. 方 程 论

从17世纪延续下来的几乎没有一点中断的一门科学研究是解多项式方程. 这个课题在数学中是基本的课题,所以,要获得解任意次方程的较好方法,要得到求方程近似根的较好方法,要完成方程的理论——特别是证明每一个 n 次多项式方程有 n 个根,对这些问题有兴趣是很自然的. 另外,在积分中采用部分分式法就提出了这样的问题:是不是任何实系数多项式都能分解成线性因式的乘积,或分解成实系数的一次因式和二次因式的乘积,以避免使用复数?

我们在第19章(第4节)中已看到,Leibniz 不相信每一个实系数多项式能分解成实系数的一次因式和二次因式的乘积. Euler 的看法是正确的. 他在1742年10月1日给 Nicholas Bernoulli (1687—1759)的信中断言(但没有证明):任意次数的实系数多项式是能够这样表示的. Nicholas 不相信这一结论是正确的,并举了一个例子:他说多项式

$$x^4-4x^3+2x^2+4x+4$$

的零点是 $1+\sqrt{2+\sqrt{-3}}$, $1-\sqrt{2+\sqrt{-3}}$, $1+\sqrt{2-\sqrt{-3}}$ 和 $1-\sqrt{2-\sqrt{-3}}$,这是与 Euler 的结论相矛盾的. Euler 在1742年12月15日写给 Goldbach 的信中(Fuss,第1卷第169～171页)指出,复根是以共轭形式成对地出现的,所以 $x-(a+b\sqrt{-1})$ 和 $x-(a-b\sqrt{-1})$ 的乘积(其中 $a+b\sqrt{-1}$ 和 $a-b\sqrt{-1}$ 互为共轭)是一个实系数的二次多项式. 接着 Euler 证明这对于 Bernoulli 的例子也是正确的. 但是 Goldbach 也拒绝接受这种思想,不认为每一个实系数多项式能分解成实系数因式的乘积,并给出例子 $x^4+72x-20$. 后来 Euler 给 Goldbach 证明后者做错了,并说明他自己的定理对于直到六次多项式都成立. 但是 Goldbach 仍不相信,因为 Euler 没有成功地作出他断言的一般性证明.

把一个实系数多项式因式分解成实系数的一次和二次因式的

问题,关键在于证明每一个这样的多项式至少有一个实根或一个复根.因此这件事的证明(叫做代数基本定理)就成了一个主要的目标.

D'Alembert 和 Euler 的证明是不完全的. 1772 年[①], Lagrange 在一个又长又详细的论证中,“完成”了 Euler 的证明. 但是 Lagrange 像 Euler 以及他的同时代人一样,随便地把数的一般性质应用于想象为方程的根上,而没有证明多项式方程的根在最坏的情况下是复数. 因为不知道根的性质,所以他的证明实际上是不完全的.

基本定理的第一个实质性证明是 Gauss 在他 1799 年于赫尔姆施泰特(Helmstädt)写的博士论文中作出的[②],虽然从现代的标准来看,这个证明依然是不严格的. 他批评了 d'Alembert, Euler 和 Lagrange 的工作,然后作出了自己的证明. Gauss 的方法不是去计算一个根,而是去证明它的存在. 他指出 $P(x+\mathrm{i}y)=0$ 的复根 $a+\mathrm{i}b$ 相应于平面上的点 (a, b),如果 $P(x+\mathrm{i}y)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$,那么 (a, b) 必定是曲线 $u=0$ 和 $v=0$ 的交点. 通过对这些曲线作定性的研究,他证明一条曲线上的一段连续弧连结着两个不同区域上的点,而这两个区域是被另一条曲线隔开的. 所以曲线 $u=0$ 必定与曲线 $v=0$ 相交. 这个论证是有高度创造性的. 但是他依靠了这些曲线的图形,证明它们必然相交,而这些图形是有点复杂的. 在同一篇论文中,Gauss 证明了 n 次多项式能表成一次和二次实系数因式的乘积.

Gauss 还作出了这定理的三个别的证明. 在第二个证明中[③],他不用几何的论据. 其中他还证明了每两个根之差的乘积(我们遵循 Sylvester 的说法,把它叫做判别式)能表成多项式和它的导数的线性组合,所以多项式和它的导数有公共根的充要条件是判别

---

① *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1772, 222 ff. = *Œuvres*, 3, 479～516.

② *Werke*, 3, 1～30; 再现于 Euler 的 *Opera*, (1), 6, 151～169.

③ *Comm. Soc. Gott.*, 3, 1814/1815, 107～142 = *Werke*, 3, 33～56.

式等于零. 但是,这第二个证明假定了当多项式在 x 的两个不同的值之间没有零点时,它在这两个值处不可能改变符号. 这件事实的证明超过了当时数学的严密程度.

第三个证明[①]其实使用了我们现在所谓的 Cauchy 积分定理(第 27 章第 4 节)[②]. 第四个证明[③],就其涉及到的方法而言,是第一个证明的变种. 但是,在这个证明中,Gauss 更自由地使用了复数,他说,这是因为它们现在已属于普通的知识了. 值得指出的是,在许多证明中,这条定理都不是在最一般的情形下证明的. Gauss 的前三个证明和后来 Cauchy, Jacobi 和 Abel 的证明都假定了,(文字的)系数表示实数,但整个定理却包括复系数的情况. Gauss 的第四个证明确实容许了多项式的系数是复数.

Gauss 探讨代数基本定理的方法开创了探讨数学中整个存在性问题的新的途径. 古希腊人聪明地认识到,数学研究对象的存在性必须建立在与它们有关的定理之前. 他们关于存在的准则就是可构造性. 在以后各世纪的写得更清楚的正式著作中,存在性都是通过实际获得或显示出问题中的量而建立起来的. 例如,二次方程的解的存在性,是通过把满足方程的量显示出来而建立起来的. 但是在方程的次数高于四次的情况下,这种方法就失去效用了. 当然,像 Gauss 那种存在性的证明,对于计算其存在性已建立的对象说来也许是一点用处也没有的.

当最终证明每一个实系数多项式方程至少有一个根的工作正在进行的时候,数学家们还在大力推进用代数方法求解四次以上的方程. Leibniz 和他的朋友 Tschirnhausen 是第一批作出认真

---

① *Comm. Soc. Gott.*, 3, 1816 = *Werke*, 3, 59～64.

② 对于 Gauss 的第三个证明的讨论见 M. Becher 的《代数基本定理的高斯的第三个证明》(Gauss's Third Proof of the Fundamental Theorem of Algebra, *Amer. Math. Soc.*, *Bull.*, 1, 1895, 205～209). 第三个证明的译文可以看 H. Meschkowski 的《大数学家的思想方法》(*Ways of Thought of Great Mathematicians*, 1964 年, Holden-Day).

③ *Abhand. der Ges. der Wiss. zu Gött.*, 4, 1848/1850, 3～34 = *Werke*, 3, 73～102.

努力的人. Leibniz[①] 重新考虑了不可约的三次方程,并且深信解这种类型的方程不可能不用到复数. 接着,他着手求五次方程的解,但是没有成功. Tschirnhausen[②] 认为他已经解决了这个问题,他借助于变换 $y = P(x)$, 把给定的方程变换成新的方程,这里 $P(x)$是一个适当的四次多项式. 这个变换消去了方程中除 x^5 和常数项以外的所有的项. 但是 Leibniz 证明了,要求出 $P(x)$的系数,必须解一个次数高于五次的方程,所以这个方法是没有用的.

有一段时期,解 n 次方程的问题集中在解二项方程 $x^n - 1 = 0$ 的特殊情形. Cotes 和 De Moivre 通过用复数证明,解这个问题相当于把圆周分成 n 个等分. 为了用开根求解(三角解未必是代数解),只要考虑 n 是奇素数的情况就够了,因为如果 $n = pm$,其中 p 是一个素数,那就可以考虑 $(x^m)^p - 1 = 0$. 如果这个方程可以对 x^m 求解,那么 $x^m - A = 0$ 就能解出来,其中 A 是前面已解出的方程的任何一个根. Alexandre-Théophile Vandermonde(1735—1796)在 1771 年的一篇论文中[③]断言,每一个形为 $x^n - 1 = 0$ 的方程是可以用开根解出来的,其中 n 是素数. 但是,Vandermonde 仅验证了对于 11 以下的素数 n,这种做法是行得通的. 关于二项方程的有决定意义的工作是 Gauss 做出来的(第 31 章第 2 节).

解四次以上高次方程的主要精力集中在解一般性的方程上,而且在朝着这一目标前进的过程中,一些关于对称函数的辅助性工作被证明是重要的. 代数式 $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ 是 x_1, x_2 和 x_3 的对称函数,因为在整个式子里若用 x_j 代替任何 x_i 用 x_i 代替 x_j,则整个式子保持不变. 当 17 世纪的代数学家注意到,而且 Newton 证明了,多项式根的乘积的各种和可以用方程的系数表示出来的时候,研究对称函数的兴趣就产生了. 例如,当 $n = 3$ 时,

---

① Georg Olms(重印)的《G. W. Leibniz 和数学家们的书信来往》(*Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, 1961),第 1 卷,547~564 页.

② *Acta Erud.*, 2,1683,204~207.

③ *Hist. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1771,365~416,pub. 1774.

把方程的根两两相乘,它们的和

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$$

是一个初等对称函数,如果方程写成

$$x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3 = 0,$$

那么上面的和就等于 c_2. Vandermonde 在 1771 年的文章中作出的进展就是证明了根的任何对称函数都能用方程的系数表示出来.

经过很多人,其中包括 Euler 的努力①之后,18 世纪在用开根解方程的问题方面,杰出的工作是 Vandermonde 在 1771 年的论文中和 Lagrange 在他的长篇论文《关于方程的代数解法的思考》(Réflexions sur la résolution algébrique des équations)②中作出的. Vandermonde 的各种想法都是类似的,但不是那样开阔,那样清晰. 所以我们将介绍 Lagrange 的做法. Lagrange 给自己提出了一个任务:分析解三次方程和四次方程的各种方法,看看为什么这些方法能把方程解出来,看看这些方法对于解更高次的方程能够提供什么线索.

对于三次方程

$$x^3 + nx + p = 0, \tag{1}$$

Lagrange 注意到如果引进变换(第 13 章第 4 节)

$$x = y - (n/3y), \tag{2}$$

就得到辅助方程

$$y^6 + py^3 - n^3/27 = 0. \tag{3}$$

这个方程也叫简化方程,因为它是 y^3 的二次方程,若设 $r = y^3$,方程就变为

$$r^2 + pr - n^3/27 = 0. \tag{4}$$

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 216～231, pub. 1738 = *Opera*, (1), 6, 1～19 和 *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9, 1762/1763, 70～98, pub. 1764 = *Opera*, (1), 6, 170～196.

② *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1770, 134～215, pub. 1772 与 1771, 138～254, pub. 1773 = *Œuvres*, 3, 205～421.

现在我们看到,我们能够借助原方程的系数算出这个方程的根 r_1 和 r_2,但是从 r 回到 y 必须引进立方根或解方程

$$y^3 - r = 0.$$

因此,如果令 ω 是单位立方根 $(-1+\sqrt{-3})/2$,那么 y 的值就是

$$\sqrt[3]{r_1},\ \omega\sqrt[3]{r_1},\ \omega^2\sqrt[3]{r_1},\ \sqrt[3]{r_2},\ \omega\sqrt[3]{r_2},\ \omega^2\sqrt[3]{r_2},$$

因而方程(1)的各个解就是

$$x_1 = \sqrt[3]{r_1}+\sqrt[3]{r_2},\ x_2 = \omega\sqrt[3]{r_1}+\omega^2\sqrt[3]{r_2},\ x_3 = \omega^2\sqrt[3]{r_1}+\omega\sqrt[3]{r_2}.$$

这样原方程的解就是通过简化方程的解得到的.

Lagrange 证明他的前辈们所用的各种不同方法都相当于上面的方法.然后他指出,我们应该把我们的注意力不是集中在 x 是 y 值的函数上,而是集中在 y 是 x 的函数上,因为可以让我们全部解出来的正是简化方程,这个奥秘一定是隐藏在把简化方程的解用原先提出的方程的解表示出来这一联系之中.

Lagrange 注意到当 x_1, x_2 和 x_3 按特定的顺序取出时,每一个 y 值都能写成(因为 $1+\omega+\omega^2=0$)形式

$$(5)\qquad y = \frac{1}{3}(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3).$$

检查这个式子能使我们发现简化方程(未知量是 y)的两条性质.第一条性质是:在 y 的表达式中,根 x_1, x_2 和 x_3 不是 x_1, x_2 和 x_3 的一个固定的选择,因而这个表达式可以说是意义含糊的.所以三个 x 值中的任一个可以是 x_1,其他两个中的任一个可以是 x_2 等等.但是这些 x 有 3! 种置换,所以有 6 个 y 值,因而 y 应满足一个六次方程.因此简化方程的次数是由原方程的根的置换的个数决定的.

第二条性质是:关系式(5)还说明为什么能把六次的简化方程化简为二次方程.因为在这六种置换中,三种(包括恒等置换)来自于交换所有的 x_i,另三种来自于只交换两个而固定一个.但是这样一来,由于 ω 的值的缘故,所得到的 y 的 6 个值,就有关系

$$(6)\qquad y_1 = \omega^2 y_2 = \omega y_3;\ y_4 = \omega^2 y_5 = \omega y_6,$$

并且取立方,还有

$$y_1^3 = y_2^3 = y_3^3,\ y_4^3 = y_5^3 = y_6^3.$$

这个结论的另一种说法是,函数

$$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$$

在 x_1, x_2 和 x_3 的所有六种置换下只能取 2 个值,这正说明为什么 y 所满足的方程一定是 y^3 的二次方程. 另外,y 所满足的六次方程的系数是原三次方程系数的有理函数.

对于 x 的一般四次方程,Lagrange 考虑

$$y = x_1x_2 + x_3x_4.$$

这一四个根的函数在四个根的所有 24 种置换下只取三个不同的值. 因此应当有 y 所满足的一个三次方程,而且这个方程的系数应该是原方程系数的有理函数. 这些叙述确实适用于四次方程.

然后,Lagrange 着手处理一般的 n 次方程

$$(7)\qquad x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

这个方程的系数假定是无关的,就是说,a_i 之间必须没有任何关系成立. 于是所有根必定也是无关的,因为如果根之间有一个关系式成立,就可以证明它对于系数也是对的(因为实际上系数是根的对称函数). 所以一般方程的 n 个根必须考虑为是无关的变量,它们的每一个函数都是一些无关变量的函数.

为了理解 Lagrange 解决问题的计划,让我们首先来看

$$x^2 + bx + c = 0.$$

我们知道它的根的两个函数,即 $x_1 + x_2$ 和 x_1x_2. 它们是对称函数,就是说,两个根互相交换时,函数保持不变. 一个函数在它的变量进行置换时不变,我们就说这个函数容许置换. 例如函数 $x_1 + x_2$ 容许 x_1 和 x_2 的置换,但函数 $x_1 - x_2$ 却不容许.

接着 Lagrange 证明了两个重要的命题. 如果一般的 n 次方程的根的一个函数 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 容许另一个函数 $\psi(x_1, x_2,$

…, x_n)所容许的 x_i 的所有的置换(可能还容许 ψ 所不容许的一些置换),那么函数 ϕ 可以用 ψ 和一般方程(7)的系数有理地表示出来. 例如二次方程根的函数 x_1 容许函数 $x_1 - x_2$ 所容许的所有置换(只有一个,即恒等置换),于是

$$x_1 = \frac{-b + (x_2 - x_1)}{2}.$$

Lagrange 关于这个命题的证明还说明了如何把 ϕ 表达成 ψ 的有理函数.

Lagrange 的第二个命题叙述如下:如果一般方程的根的一个函数 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$不容许函数 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$所容许的所有置换,但是在 ψ 所容许的置换下取 r 个不同的值,那么 ϕ 是一个 r 次方程的根,这个方程的系数是 ψ 和给定的一般 n 次方程的系数的有理函数. 这个 r 次方程可以构造出来. 比如 $x_1 - x_2$ 不容许 $x_1 + x_2$ 所容许的所有置换,但在这些置换下取两个值: $x_1 - x_2$ 和 $x_2 - x_1$. 于是 $x_1 - x_2$ 是一个二次方程的根,这个方程的系数是 $x_1 + x_2$ 以及 b 和 c 的有理函数. 事实上,因为 $b^2 - 4ac = (x_1 - x_2)^2$,所以 $x_1 - x_2$ 是方程

$$t^2 - (b^2 - 4c) = 0$$

的根. 用这个根的值,即 $\sqrt{b^2 - 4c}$,我们可以通过前面关于 x_1 的方程来求得 x_1.

类似地考虑三次方程 $x^3 + px + q = 0$,式子(即 ϕ)

$$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3,$$

其中 $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$,在根的六种可能的置换下取两个值,但是 $x_1 + x_2 + x_3$ (即 ψ)容许所有这六种置换. 如果那两个值记为 A 和 B,那么可以证明 A 和 B 是一个二次方程的根,这个方程的系数是 p 和 q 的有理函数(因为 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$). 如果我们解出这个二次方程,求得根是 A 和 B,那么从

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=\sqrt[3]{A},$$

$$x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3=\sqrt[3]{B},$$

我们就能求得 x_1，x_2 和 x_3. 对于四次方程，Lagrange 从函数

$$x_1x_2+x_3x_4 \tag{8}$$

出发，这个函数在根的 24 种可能的置换下取 3 个不同的值，但是 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 容许所有的这 24 种置换. 因此(8)是一个二次方程的根，这个方程的系数是原方程系数的有理函数. 而且事实上，一般的四次方程的辅助方程(或简化方程)就是三次的.

对于一般系数的 n 次方程，Lagrange 的想法是从根的对称函数 ϕ_0 出发，这个函数容许根的所有的 $n!$ 个置换. 他指出，这样一个函数可以取 $x_1+x_2+\cdots+x_n$. 然后他选择一个函数 ϕ_1，它只容许某些置换. 假定 ϕ_1 在 $n!$ 个置换下取 r 个不同的值，那么 ϕ_1 就是一个 r 次方程的根，这个方程的系数是 ϕ_0 和给定的一般方程的系数的有理函数. 这个 r 次方程可以构造出来. 再进一步，如果 ϕ_0 取为根和系数的一个对称函数，那么由给定的一般方程的系数，这个 r 次方程的系数就完全知道了. 如果这个 r 次方程可以用代数方法解出来，那么依据原方程的系数，ϕ_1 也就求得了. 然后再选择一个函数 ϕ_2，使它只容许 ϕ_1 所容许的根的置换的一部分，ϕ_2 在 ϕ_1 所容许的置换下假定取 s 个不同的值. 那么 ϕ_2 就将是一个 s 次方程的根，这方程的系数是 ϕ_1 和给定的一般方程系数的有理函数. 如果那个 r 次方程(ϕ_1 是它的一个根)能够解出来，那么这个 s 次方程的系数也就知道了. 如果这个 s 次方程可以用代数方法解出来，那么根据原方程的系数，ϕ_2 也就知道了.

如此继续下去，选择 ϕ_3，ϕ_4，… 直到最后一个函数，选择为 x_1. 于是，如果这些 r 次，s 次，…方程都能用代数方法解出来，那么根据给定的一般方程的系数，x_1 也就知道了. 其他的根 x_2，x_3，…，x_n，由同样的过程可以得到. 这些 r 次，s 次，…的方程

今天叫做预解方程①.

Lagrange 的方法对于求解一般的二次、三次和四次方程都卓有成效. 他试图用这种方法去解五次方程，但发现工作是如此艰难，以至不得不放弃. 对于三次方程他只要解一个二次方程，但对于五次方程，他就必须解一个六次方程. Lagrange 徒劳地寻求一个预解函数(在他对这个术语的解释下)，使它能满足一个次数低于五次的方程. 但是，他的工作没有给出选择 ϕ_i 的任何准则，使这些 ϕ_i 满足一个代数可解的方程. 另外，他的方法只能用于一般的方程，因为他的两个基本命题都假定根是无关的.

Lagrange 被迫得出结论说，用代数运算解一般的高次方程 ($n>4$) 看来是不可能的(对于特殊的高次方程，他贡献很少). 他判断说，或者是这个问题超越了人的智力范围，或者是根的表达式的性质必定不同于当时所知道的一切. Gauss 在他的 1801 年的《专题论文》(*Disquisitiones*)中，也声称这个问题也许是不能解决的.

Lagrange 的方法尽管很少成功，但它确实给出了洞察 $n \leqslant 4$ 时成功而 $n>4$ 时失败的道理；这种洞察力为 Abel 和 Galois 所利用(第 31 章). 另外，Lagrange 的思想是必须考虑一个有理函数当它的变量发生置换时所取的值的个数，这个思想引导到置换或代换群的理论. 其实，他已实际上得到了这样的定理：一个群的子群的阶(元素的个数)必定是该群的阶的因子. Lagrange 的著作是一切关于群论的著作的先导，上述定理在其中所取的形式是：ϕ_1 所取的值的个数 r 是 $n!$ 的因子.

受 Lagrange 的影响，Paolo Ruffini(1765—1822)在 1799 到 1813 年之间作过好几种尝试，要证明四次以上的高次方程应是不能用代数方法解出的.（Paolo Ruffini 是一个数学家、医生、政治

---

① Lagrange 对函数 ϕ_i 的特殊形式用了"预解"这个词，而不是指 ϕ_i 所满足的方程. 例如，对于三次方程，$x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$ 是 Lagrange 意义下预解的一种形式.

家，是 Lagrange 的一个热忱的弟子.）在他的《方程的一般理论》(*Teoria generale delle equazioni*)[1]中，Ruffini 用 Lagrange 所创的方法成功地证明了不存在一个预解函数（在 Lagrange 的意义下），能满足一个次数低于 5 次的方程. 事实上，他证明了当 $n > 4$ 时，不存在一个 n 元有理函数，在 n 个元素发生置换时取 3 个或 4 个值. 后来，在他撰写的《用一般的代数方法解方程的一些想法》(*Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*)[2]中，他大胆地着手证明，用代数方法解 $n > 4$ 的一般方程是办不到的. 虽然一开始 Ruffini 就相信这个结论是正确的，但他的努力没有达到目标. Ruffini 用了（但没有证明）这样一条辅助定理（现在叫做 Abel 定理）：如果一个方程能用开根解出来，那么根的表达式就能写成这样一种形式，其中的根式是已知方程的根和单位根的有理系数的有理函数.

3. 行列式和消元法理论

线性方程组的研究是在 1678 年以前由 Leibniz 开创的，我们今天把方程组写成

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{9}$$

其中 x_i 是已知量，而 y_j 是未知量. 1693 年，Leibniz[3] 用指标数的系统集合，表示含两个未知量 x 与 y 的三个线性方程所组成的系统的系数. 他从三个线性方程的系统中消去两个未知量，得到一个行列式，现在叫做方程组的结式. 这个行列式等于零就意味着存在一组 x 和 y，满足所有的这三个方程.

用行列式的方法解含有两个、三个和四个未知量的联立线性

---

① 1799 = *Opere Mat.*, 1, 1～324.

② 1813 = *Opere Mat.*, 2, 155～268.

③ *Math. Schriften*, 2, 229, 238～240, 245.

方程,可能在 1729 年,是由 Maclaurin 开创的,并发表在他的遗作《代数论著》(*Treatise of Algebra*, 1748)中. 虽然书中的记法不太好,但是他的法则是我们今天所使用的法则,Cramer 把它发表在他的《线性代数分析导言》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1750)中. Cramer 给出了一条法则,用于确定经过五个点的一般的二次曲线 $A+By+Cx+Dy^2+Exy+x^2=0$ 的系数. 他的行列式,和现在一样,是这样一些乘积的和,这些乘积是在每一行和每一列中取一个且只取一个元素组成:每一个乘积的符号是这样确定的,即从标准次序出发,得到这些元素的排列所需的重排数,如果这个数是偶数,则符号是正的,否则就是负的. 1764 年,Bezout[①] 把确定行列式每一项的符号的手续系统化了. 给定了含 n 个未知量的 n 个齐次线性方程,Bezout 证明:系数行列式等于零(结式等于零)是这方程组有非零解的条件.

Vandermonde[②] 是第一个对行列式理论作出连贯的逻辑的阐述(即把行列式理论与线性方程组求解相分离)的人,虽然他也把它应用于解线性方程组. 他还给出了一条法则,用二阶子式和它们的余子式来展开行列式. 从集中到对行列式本身进行研究这一点来说,他是这门理论的奠基人.

参照 Cramer 和 Bezout 的工作,Laplace 在 1772 年的论文《对积分和世界体系的探讨》[③]中,证明了 Vandermonde 的一些规则,并推广了他的展开行列式的方法,用 r 行中所含的子式和它们的余子式的集合来展开行列式,这个方法现在仍然以他的名字命名[④].

譬如说,含有两个未知量的三个非齐次线性方程组成的方程

---

① *Hist. de l'Acad. des Sci. Paris*, 1764, 288~388.

② *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1772, 516~532, pub. 1776.

③ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1772, 267~376, pub. 1776 = *Œuvres*, 8, 365~406.

④ 参看 M. Bocher 的 *Introduction to Higher Algebra*, Dover (reprint), 1964, p. 26.

组,有公共解的条件是结式等于零,这个条件还表示从三个方程消去 x 和 y 得到的结果. 但是消元法的问题在向别的方向伸展. 给定两个多项式

$$f = a_0x^n + \cdots + a_n,$$
$$g = b_0x^n + \cdots + b_n,$$

要求 $f=0$ 和 $g=0$ 有公共解的条件. 因为这个条件涉及这样一个事实,即至少存在 x 的一个值既满足 $f=0$ 又满足 $g=0$,所以把从 $f=0$ 解得的 x 值,代入 g,就得到 a_i 和 b_i 所应满足的条件. 这个条件,或者消去式,或者结式,是 Newton 第一个进行研究的. 在他的《普遍的算术》中他给出了从两个方程(次数可以是二次到四次)中消去 x 的法则.

Euler 在他的《引论》第二卷第 19 章中给出了两个消元的方法. 第二个方法是 Bezout 的乘数法的前驱,Euler 在 1764 年的论文[①]中对这个方法作了更好的描述. Bezout 的方法证明是得到最广泛认可的一种方法,因此我们将对它进行考察. 在他的《数学教程》(*Cours de mathématique*, 1764—1769)中,Bezout 考虑两个 n 次方程:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \\ \phi(x) &= b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

第一步:f 乘以 b_n,ϕ 乘以 a_n,然后相减;第二步:f 乘以 $b_nx + b_{n-1}$,ϕ 乘以 $a_nx + a_{n-1}$,然后相减;第三步:f 乘以 $b_nx^2 + b_{n-1}x + b_{n-2}$,$\phi$ 乘以 $a_nx^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}$,然后相减;……这样得到的每个方程都是 x 的 $n-1$ 次方程. 可以认为这组方程是未知量为 x^{n-1},x^{n-2},…,1 的 n 个齐次线性方程的组合. 这个线性方程组的结式(即未知量系数的行列式)是最初两方程 $f=0$ 和 $\phi=0$ 的结式. 当

---

① *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 20, 1764, 91~104, pub. 1766 = *Opera* (1), 6, 197~211.

两个方程的次数不同时,Bezout 也给出了一个求结式的方法[①].

消元法理论也适用于次数高于 1 的两个方程: $f(x, y)=0$ 和 $g(x, y)=0$. 解这个问题的动机是出于要确定两个方程的公共解的个数,或者从几何角度来讲,是求出相应于这两个方程的曲线的交点的个数. 从 $f(x, y)=0$ 和 $g(x, y)=0$ 消去一个未知量的卓越方法,是由 Bezout 第一个在 1764 年的文章中勾出大致轮廓,而在他的《代数方程的一般理论》(*Théorie générale des équations algébriques*, 1779)中公布于众的. Bezout 的想法是:把 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 分别乘上适当的多项式 $F(x)$ 和 $G(x)$,就能作出

$$R(y)=F(x)f(x, y)+G(x)g(x, y). \tag{11}$$

另外,他还寻求 F 和 G,使得 $R(y)$ 的次数尽可能地低.

结式的次数的问题也由 Bezout 在他的《代数方程的一般理论》中作出了回答(Euler 在 1764 年的论文中也独立地回答了这个问题). 两人的答案都是 mn,即 f 和 g 的次数的乘积,两个人都把问题归结为从一个辅助的线性方程组中进行消元的问题,从而证明这条定理. 上述的这个乘积也是两条代数曲线的交点数. Jacobi[②] 和 Minding[③] 对于两个方程的组合也给出了 Bezout 的消元法. 但是他们谁也没有提到 Bezout. 也许是他们并不知道 Bezout 的工作.

4. 数 论

数论在 18 世纪留下来一系列互不关联的成果. 在这门学科中最主要的著作是 Euler 的《代数指南》(*Anleitung zur Algebra*, 1770 年德文版)和 Legendre 的《数论随笔》(*Essai sur la théorie*

---

① 一种解说可以在 W. S. Burnside 和 A. W Panton 的 *The Theory of Equations*, 1960 年 Dover(重印)的第 2 卷第 76 页上找到.

② *Jour. für Math.*, 15, 1836, 101 ~ 124 = *Gesam. Werke*, 3, 297 ~ 320.

③ *Jour. für Math.*, 22, 1841, 178 ~ 183.

des nombres, 1798). 后者的第二版于 1808 年出版，书名是《数论》(*Théorie des nombres*)，增补了的第三版，分成两卷，于 1830 年问世. 这里要叙述的问题和结果，只是已完成的工作中抽出来的一部分小小的样品.

1736 年，Euler 证明了 Fermat 的小定理①，即如果 p 是一个素数，a 和 p 互素，那么 $a^p - a$ 可以被 p 整除. 18 和 19 两个世纪的其他一些人对这一定理作出了许多种证明. 1760 年，Euler 引进 ϕ 函数，或者叫做 n 的 totient，用来推广这条定理②，$\phi(n)$ 是小于 n 而与 n 互素的整数的个数，所以当 n 是素数时，$\phi(n)$ 就等于 $n-1$. [记号 $\phi(n)$ 是 Gauss 引进的.]接着，Euler 证明，如果 a 和 n 互素，那么

$$a^{\phi(n)} - 1$$

可以被 n 整除.

至于 Fermat 对 $x^n + y^n = z^n$ 所作的著名猜测，Euler 证明③当 $n = 3$ 和 $n = 4$ 时，它是正确的；$n = 4$ 的情形是已经由 Frénicle de Bessy 证明了的. Euler 的这个工作必须由 Lagrange，Legendre 和 Gauss 来完成. 接着 Legendre 对于 $n = 5$ 证明了这个猜测④. 我们将要看到，努力去证明 Fermat 猜测的历史是很长久的.

Fermat 还曾猜测说(第 13 章第 7 节)，对于 n 值的一个不定的集合，由式子

$$2^{2^n} + 1$$

得到的数是素数. 对于 $n = 0, 1, 2, 3$ 和 4，这都是对的. 但是 1732

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1736, 141～146, pub. 1741 = *Opera*, (1), 2, 33～37.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1760/1761, 74～104, pub. 1763 = *Opera*, (1), 3, 531～555.

③ *Algebra*, Part Ⅱ, Second Section, 509～516 = *Opera*, (1), 1, 484～489 (for $n = 3$)；和 *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1738, 125～146, pub. 1747 = *Opera*, (1), 2, 38～59 (for $n = 4$).

④ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 6, 1823, 1～60, pub. 1827.

年 Euler 证明[1]当 $n=5$ 时，这个数不是素数，它的一个因子是 641. 事实上，现在知道对许多其他的 n 值，由这个式子得到的数不是素数，但没有发现过一个比 4 大的数，代入后得到的数是素数. 然而，这个式子的重要性在于它重新出现在 Gauss 论正多边形的可作图性的著作中（第 31 章第 2 节）.

一个有许多分支的研究课题涉及到把各种类型的整数分解成其他类型的整数. Fermat 曾经断言：每一个正整数是不多于四个平方数的和（一个平方数重复出现，比如 $8=4+4$，是容许的，只要把它出现的次数算上）. 在 40 年以上的长时间里，Euler 一直试图证明这个定理，并作出了一部分结果[2]. Lagrange[3] 用了 Euler 的一部分工作，证明了这条定理. 不管是 Euler 还是 Lagrange，都没有得到一个正整数究竟能表成几个平方数的和.

在刚才提到的 Euler 1754/1755 年的论文和同一本杂志[4]的另一篇文章中，Euler 证明了 Fermat 的断言，即每一个形为 $4n+1$ 的素数能唯一地分解成两个平方数的和. 但是 Euler 没有按照递降法去做，这一递降法是 Fermat 为这个定理勾画出来的一种方法. 在另一篇论文中[5]，Euler 还证明了两个相对互质的平方数之和的每一个因子，是两个平方数之和.

Edward Waring (1734—1798)在他的《代数沉思录》(*Meditationes Algebraicae*, 1770)中叙述了一条定理，现在称之为"Waring 定理"，定理说每一个整数，或者是一个立方数，或者是至多 9 个立方数之和；另外，每一个整数，或者是一个四次方数，或者是至多 19 个

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 103～107 = *Opera*, (1), 2, 1～5.

② *Nou Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1754/1755, 13～58, pub. 1760 = *Opera*, (1), 2, 338～372.

③ *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1, 1770, 123～133, pub. 1772 = *Œuvres*, 3, 189～201.

④ 5, 1754/1755, 3～13, pub. 1760 = *Opera*, (1), 2, 328～337.

⑤ *Nou Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 4, 1752/1753, 3～40, pub. 1758 = *Opera*, (1), 2, 295～327.

四次方数之和. 他还猜测说每一个正整数可以表成至多 r 个 k 次幂之和,其中 r 依赖于 k. 这些定理他都没有证明①.

普鲁士派往俄罗斯的一位公使 Christian Goldbach,在 1742 年 6 月 7 日给 Euler 的信中,叙述了一个结论,但没有作出证明. 他说,每一个偶整数是两个素数之和,每一个奇整数或者是一个素数,或者是三个素数之和. 这个断言的第一部分现在称为 Goldbach 猜想,仍然是一个未解决的问题. 断言的第二部分其实可以从第一部分推出,因为如果 n 是奇数,那么从 n 减去任意一个素数 p, $n-p$ 就是偶数.

在有关数的分解的某些更专门化的成果中,包含有 Euler 证明的 x^4-y^4 和 x^4+y^4 不能是平方数的结论②. Euler 和 Lagrange 证明了 Fermat 的许多断言. 这些断言大意是说某些素数能用特殊的方式表示出来. 例如,Euler 证明了③形为 $3n+1$ 的素数能唯一地表成形式 x^2+3y^2.

亲和数和完全数继续吸引着数学家们. Euler④ 给出了 62 对亲和数,其中包括已经知道的 3 对,还有 2 对是错的. 在一篇死后出版的论文中⑤,他还证明了 Euclid 定理的逆定理:每一个完全偶数是形为 $2^{p-1}(2^p-1)$ 的数,其中第二个因子是素数.

John Wilson(1741—1793)是剑桥大学学数学的一个得奖学生,但后来当了律师和法官,他叙述了一条定理,现在仍以他的名字命名:对每一个素数 p,量 $(p-1)!+1$ 能被 p 整除;而且,如果

---

① 一般性的定理是由 David Hilbert 证明的(*Math. Ann.*, 67,1909,281～300).

② *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10,1738,125～146,pub. 1747 = *Opera*,(1),2,38～59;或 *Algebra* (1770),Part Ⅱ, Ch. 13, arts. 202～208 = *Opera*,(1),1,436～443.

③ *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8,1760/1761,105～128,pub. 1763 = *Opera*,(1),2,556～575.

④ "De numeris amicabilibus", *Opuscula varii argumenti*, 2,1750, 23～107 = *Opera*,(1),2,86～162.

⑤ "De numeris amicabilibus". *Comm. Arith.*, 2,1849, 627～636 = *Opera postuma*,1,1862, 85～100 = *Opera*,(1),5,353～365.

这个量能被 q 整除,那么 q 就是一个素数. Waring 在他的《代数沉思录》中公布了这条定理,Lagrange 在 1773 年证明了它①.

求方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 的整数解的问题已经讨论过了(第 13 章第 7 节). Euler 在 1732/1733 年的一篇论文中,错误地把它叫做 Pell 方程,这个名称就这样固定下来了. Euler 开始对这个方程感兴趣,因为他需要用这个方程的解去求 $ax^2 + bx + c = y^2$ 的整数解. 关于后面这个题目他写过几篇文章. 1759 年,他通过把$\sqrt{A}$表成一个连分式②,给出了一种解 Pell 方程的方法. 他的想法是:满足方程的 x 和 y 的值是使得 x/y 收敛到(在连分式的意义下)$\sqrt{A}$的值. 在证明他的方法总能求出解来,而且它的所有的解都是由$\sqrt{A}$的连分式展开给出的时候,他失败了. Pell 方程解的存在性是 Lagrange 在 1766 年证明的③,在后来的几篇论文中他的证明更简单了④.

Fermat 曾断言,他能够确定更一般的方程 $x^2 - Ay^2 = B$ 什么时候有整数解,并说在可解的时候,他就能够把它解出来. 这个方程是由 Lagrange 在刚才提到的那两篇论文中解出来的.

求一般方程

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

(其中系数都是整数)的所有整数解的问题也解决了. Euler 给出了解的不完整的类;后来 Lagrange⑤ 给出了完全的解. 在《纪要》⑥的下卷里,他作出了一个更简单的证明.

---

① *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 2, 1771, 125 ff., pub. 1773 = *Œuvres*, 3,425～438.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 11,1765,28～66,pub. 1767 = *Opera*,(1),3, 73～111.

③ *Misc. Taur.*, 4,1766/1769, 19 ff. = *Œuvres*, 1,671～731.

④ *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 23,1767,165～310,pub. 1769,and 24,2768,181～256,pub. 1770 = *Œuvres*,2,377～535 和 655～726;还包含在 Lagrange 翻译的 Euler 的 *Algebra* 的补充部分中;见参考书目.

⑤ *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 23,1767,165～310,pub. 1769 = *Œuvres*,2,377～535.

⑥ 24,1768,181～256,pub. 1770 = *Œuvres*,2,655～726.

18 世纪中数论的最富于首创精神、可能引出最多成果的发现是二次互反律. 它用了二次剩余的概念. 这里,我们采用由 Euler 在 1754/1755 年的一篇论文中引入,后由 Gauss 采用的说法:如果存在一个 x,使得 $x^2 - p$ 能被 q 整除,那么就说 p 是 q 的二次剩余;如果这样的 x 不存在,那么就说 p 是 q 的二次非剩余. Legendre(1808 年)发明了一个记号,现在用于表示上面提到的两种情况中的任意一种. 这个记号是 (p/q),它的意义如下:对于任意数 p 和任意素数 q,

$$(p/q) = \begin{cases} 1, & \text{当 } p \text{ 是 } q \text{ 的二次剩余时}, \\ -1, & \text{当 } p \text{ 是 } q \text{ 的二次非剩余时}. \end{cases}$$

还可以认为,如果 p 恰好能被 q 整除,则 $(p/q) = 0$.

在这种记号下,二次互反律说,如果 p 和 q 是不同的奇素数,那么

$$(p/q)(q/p) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

这个意思就是,如果(−1)的指数是偶数,那么,p 是 q 的二次剩余,同时 q 是 p 的二次剩余;或者哪一个也不是另一个的二次剩余. 如果(−1)的指数是奇数,这在 p 和 q 是形为 $4k+3$ 的素数时出现,那么其中一个素数是另一个素数的二次剩余,但第二个数则不是第一个数的二次剩余.

这一定理的历史须详细说一下. Euler 在 1783 年的一篇论文[①]中给出了四条定理和第五条总结性的定理,非常清楚地叙述了二次互反律. 但是,对这些定理他没有进行证明. 这篇论文里的工作注明是从 1772 年开始做的,而且被编进了甚至更早一些的著作里. Kronecker 在 1875 年[②]注意到,这条定理的叙述实际上已包含在 Euler 很早以前写的论文中了[③]. 但是 Euler 的"证明"是建立

① *Opuscula Analytica*, 1,1783, 64～84 = *Opera*,(1),3,497～512.

② *Werke*, 2,3～10.

③ *Comm. Acad. Sci. Petrop.* 14,1744/1746,151～181,pub. 1751 = *Opera*,(1),2,194～222.

在计算的基础上的. 1785年Legendre在他关于这个课题的论文中独立地宣布了这一定律,虽然他引用了Euler在《短论》的同一卷里的另一篇文章. 他的证明[①]是不完全的. 在他的《数论》[②]中他再一次叙述了这条定律,并给了另外一个证明. 但是,这一证明仍然是不完全的,因为其中假定了在某一算术级数中存在无穷多个素数. 要发现这一定律后面究竟隐藏着什么,从它究竟可以引申出多少含意,这些问题曾经成了1800年后数论研究的关键性课题,而且导致了一些重要的发现,其中的一部分我们将要在后面章节中讨论.

18世纪数论方面的工作是以Legendre 1798年的名著《数论》而结束的. 虽然这本书包含了一批有趣的结果,有些是数论方面的,也有些是其他方面的(比如椭圆积分方面的),但是Legendre没有作出重大的新发现. 人们可以指责他,介绍了一大堆命题,从中本来可以抽象出一些一般性概念,但他却没有这样做. 这项工作是由他的后继者们完成的.

参考书目

Cajori, Florian: "Historical note on the Graphical Representation of Imaginaries Before the Time of Wessel", *Amer. Math. Monthly*, 19,1912,167~171.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924; Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 3, Chap. 107; Vol. 4, pp. 153~198.

Dickson, Leonard E.: *History of the Theory of Numbers*, 3 vols., Chelsea (reprint), 1951.

Dickson, Leonard E.: "Fermat's Last Theorem", *Annals of Math.*, 18,1917,161~187.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, (1), Vols. 1~5, Orell Füssli, 1911~1944.

Euler, Leonhard: *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770) = *Opera Omnia*, (1),1.

Fuss, Paul H. von, ed.: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres*

---

① *Hist. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1785,465~559,pub. 1788.

② 1798,214~226;2nd ed., 1808,198~207.

géomètres du XVIIIème siècle, 2 vols. (1813), Johnson Reprint Corp., 1967.

Gauss, Carl Friedrich: *Werke*, Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1876, Vol. 3, pp. 3~121.

Gerhardt, C. I.: *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, Mayer und Muller, 1899; Georg Olms (reprint), 1962.

Heath, Thomas L.: *Diophantus of Alexandria*, 1910, Dover (reprint), 1964, pp. 267~380.

Jones, P. S.: "Complex Numbers: An Example of Recurring Themes in the Development of Mathematics", *The Mathematics Teacher*, 47,1954,106~114,257~263, 340~345.

Lagrange, Joseph Louis: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1867~1869, Vols. 1~3, relevant papers.

Lagrange, Joseph Louis: "Additions aux elements d'algèbre d'Euler", *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1877, Vol. 7, pp. 5~179.

Legendre, Adrien Marie, *Théorie des nombres*, 4th ed., 2 vols., A. Blanchard (reprint), 1955.

Muir, Thomas: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, 1906, Dover (reprint), 1960, Vol. 1, pp. 1~52.

Ore, Oystein: *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, 1948.

Pierpont, James: "Lagrange's Place in the Theory of Substitutions", *Amer. Math. Soc. Bulletin*, 1,1894/1895,196~204.

Pierpont, James: "Zur Geschichte der Gleichung des V. Grades (bis 1858)", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 6,1895,15~68.

Smith, H. J. S.: *Report on the Theory of Numbers*, 1867, Chelsea (reprint), 1965; also in Vol. 2 of the *Collected Mathematical Papers of H. J. S. Smith*, 1894, Chelsea (reprint), 1965.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, 1929, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, relevant selections. One of the selections is an English translation of Gauss's second proof of the fundamental theorem of algebra.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200—1800*, Harvard University Press, 1969, pp. 26~54,99~122.

Vandiver, H. S.: "Fermat's Last Theorem", *Amer. Math. Monthly*, 53,1964,555~578.

Whiteside, Derek T.: *The Mathematical Works of Isaac Newton*, Johnson Reprint Corp., 1967, Vol. 2, pp. 3~134. This section contains Newton's *Universal Arithmetic* in English.

Wussing, H. L.: *Die Genesis der abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969.

第 26 章

18 世纪的数学

> 当我们不能用数学指南针或经验的火炬时，……肯定的，我们连一步也不能向前迈进.
>
> Voltaire

1. 分析的兴起

如果 17 世纪曾经正确地被称为天才的世纪，那么，18 世纪就可以称为发明的世纪. 虽然这两个世纪都是多产的，而且 18 世纪的人并没有引进像微积分那样新颖、那样基本的概念，但他们施展了高超的技巧，发掘并增进了微积分的威力，从而产生了现在比较重要的一些分支：无穷级数、常微分方程和偏微分方程、微分几何和变分法. 在把微积分扩展到这几个领域的过程中，他们建立了现在数学中最广阔的一个领域，我们把它叫做分析（虽然，这个词现在的含意还包括 18 世纪的人几乎未曾接触过的两个另外的分支）. 另一方面，坐标几何与代数的进展，同它们在 17 世纪开始被引进时的情况比起来，只不过是一个小小的扩展. 即使是代数中的重大问题，即解 n 次方程的问题，也只是由于分析中（例如，用部分分式法求积分时）要用到它，才受到人们的注意.

差不多在这一世纪的前三分之一的时期内，几何方法是到处被使用着的；但是 Euler 和 Lagrange，认识到分析方法具有更大的有效性之后，他们就慎重地、逐渐地把几何论证换成分析论证. Euler 的许多教科书都说明怎样使用分析. 接近这一世纪末尾的时候，Monge 确实复兴了纯粹几何，虽然他大量地使用几何是为

了给分析中的工作赋予直觉的意义并作出指导. Monge 常被看成是一个几何学家,但这是因为,他正工作在几何已经枯竭的时代,他指出了几何的重要性(至少是为了上述目的),给几何注入了新的生命力. 事实上,当他觉察到几何之所以还能够发展是因为能用分析对它进行研究时,在 1786 年发表的一篇论文中,他含蓄地承认分析有更大的重要性. 和其他人一样,他基本上没有去探索新的几何的思想. 他的主要兴趣和最后成果都是在分析工作方面.

关于分析重要的最精彩叙述,是 Lagrange 在他的《分析力学》(1788)中作出的,在书的序言中他写道:

> 我们已经有了力学方面的各种专著,但是本书的计划是完全新的. 我曾致力于将这门科学[力学],以及解决与它有关的问题的技巧,化归为一般性的公式,这些公式的简单推导就给出解决每一个问题所必需的全部方程……在这项工作中找不到图形. 我在其中所阐明的方法,既不要求作图,也不要求几何的或力学的推理,而只是一些遵照一致而正规的程序的代数[分析]运算. 喜欢分析的人将高兴地看到力学变为它的一个新的分支,并将感激我扩大了它的领域.

Laplace 也强调分析的力量,在他的《宇宙系浅说》中,他说,

> 代数分析把我们的注意力集中到抽象组合上去,很快使我们忘记[我们研究的]主要目标,只是到最后才又回到原来的目标. 但是,当一个人沉湎在分析运算中时,他就被这个方法的普遍性和它的不可估量的优越性引导着,这个优越性体现在它把力学推理转变成几何往往达不到的一些结果. 分析是如此地多产,只需把一些特殊的真理

> 译成这个普遍的语言，就会看到从它们本身的表达中又出现众多新的出乎预料的真理. 没有另外一种语言是如此优美，而这些优美之处都是从一长串互相连结并全部出自于同一个基本概念的表达式中产生出来的. 因此这个世纪的几何学家[数学家]被它的[分析的]优越性折服之后，马上致力于扩大它的领域，并把它的边界往后推①.

分析的几个特点值得提一下. 一方面，Newton 对导数和反微分法的强调仍被保留着，所以很少用到求和的概念. 但另一方面，Leibniz 的概念，即导数的微分形式，以及他的记法都变成标准的了(尽管整个世纪中 Leibniz 的微分始终没有确切的意义). 一个函数 $y = f(x)$ 的一阶微分 dy 和 dx 是在 19 世纪(第 40 章第 3 节)合法化了的，但是 18 世纪的人们自由地使用的高阶微分，甚至到今天都还没有建立在一个严密的基础之上. Leibniz 形式地运用分析式子的传统在 18 世纪延续下来了，事实上，还更加强调了这种做法.

赋予分析的这种重要性隐含着 18 世纪的人们所没有重视的一些东西. 它进一步把数从几何里分离出来，并且含蓄地强调了数系、代数以及分析本身的真正的基础. 这个问题在 19 世纪开始变得更为突出. 特别是，18 世纪的数学家仍然自称为几何学家，这个名词在先前的年代中是流行的，那时候，几何在数学中占着统治地位.

2. 18 世纪工作的推动力

18 世纪的数学工作，远较其他世纪更为直接地受到物理问题

① Book Ⅴ, Chap. 5 = *Œuvres*, 6,465 ~ 466.

的激励. 实际上,可以说工作的目标不是数学,而是求解物理问题;数学是达到物理目的的一种方法. Laplace(虽然也许是一种极端的情况)确实认为数学只是物理的一个工具,而且他自己所关心的完全是数学对天文学的价值.

物理研究的主要领域当然是力学,特别是天体力学. 大体上和 Leonardo 预言的一样,力学成了数学的福地,因为它提出了如此多的研究方向. 数学与力学问题的牵连是如此地广泛,以至 d'Alembert 在《百科全书》中以及 Denis Diderot(1713—1784)在他的《关于自然界的解释的思想》(*Pensées sur l'interprétation de la nature*, 1754)中都写了从 17 世纪数学时代到力学时代的转变. 实际上,他们相信像 Descartes, Pascal 和 Newton 那样的人的数学工作已经过时了,而力学应该是数学家的主要兴趣. 按照他们的观点,那就只有当数学为物理服务时,才是普遍有用的. 18 世纪集中精力于离散质量系统的力学和连续介质的力学. 光学暂时被推入幕后.

但是,实际发生的情况同 Diderot 和 d'Alembert 所坚持的恰好相反. Lagrange 说,爱好分析的人们会高兴地看到力学变为它的一个分支. 证诸于后来的发展,我们认为,Lagrange 这样说,是作出了比较合乎事实的解释. 更概观地说,由 Galileo 开创并由 Newton 继承的工作方法(即将基本的物理原理表为定量的数学陈述,然后利用数学的论证推导出新的物理成果),已被不可估量地向前推进了. 物理越来越数学化,至少对于那些物理原理已被充分了解的领域是如此. 物理的主要分支日益增多地组织到数学结构中去,建立了数学物理.

数学不仅开始把科学包括进去,而且,部分地是因为在科学和我们今天称之为工程学之间没有明确的界限,所以数学家们从事于工业技术上的问题,这是理所当然的事情. 比如,Euler 研究船的设计、帆的作用、弹道学、地图学以及其他一些实际问题. Monge

研究挖掘、填塞并设计风车的叶片，其认真程度与研究任何微分几何或微分方程中的问题一样.

J. F. (Jean-Etienne) Montucla(1725—1799)在他的《数学史》(*Histoire des mathématiques*，第二版，1799—1802)中把数学分成两部分，一部分"由那些纯粹的抽象的东西组成，另一部分由被称为混合物，或更通常地叫做物理-数学的那些东西组成."他的第二部分包括那些能用数学方法进行研究和处理的领域，也就是力学、光学、天文学、军用和民用建筑、保险业、声学和音乐.他把光的折射甚至验光、反光学和透视画法都包括在光学之内.力学包括动力学和静力学、流体动力学和流体静力学；天文学包括地理学、理论天文学、天体天文学、测时术(例如日晷)、年代学和航海学，Montucla 还把占星学、天文台的建筑和船的设计都包括进去.

3. 证明的问题

物理问题推动了数学的大部分工作，当然并不是 18 世纪才特别这样，但是在这一世纪中数学与物理的合并是有决定意义的.我们已经看到，主要的发展是分析.但是微积分基础本身不仅不清楚，而且几乎从 17 世纪它诞生之日起就一直受到攻击.18 世纪的思想确实是不严密的、直观的.分析的任何一个较细致的问题，如级数与积分的收敛性、微分与积分次序的交换、高阶微分的使用、以及微分方程解的存在性问题等等，几乎无人问津.数学家们之所以能进行工作，完全归功于运算法则是清楚的.把物理问题用数学形式表达出来之后，学者们就开始工作，新的一套方法和结论就涌现出来.数学本身肯定是纯形式的.Euler 完全被公式迷住了，以至他一看到公式，就情不自禁地要对它们进行演算.数学家们怎么能够敢于只应用法则，而又敢于断言他们的结论是可靠的呢？

数学的物理意义引导着数学的步骤,而且时常提供部分论据,以填补那些非数学的步骤.推理本质上无异于一条几何定理的证明,其中使用了一些从图形看来完全是显然的事实,尽管没有公理或定理作为它们的依据.最后,结论在物理上的正确性保证了它在数学上也必定是正确的.

18 世纪的数学思想中有另外一个因素支持了这种论证.人们对符号的信任远远超过对逻辑的信任.因为无穷级数对于 x 的一切值都有同一个符号形式,所以对应于级数收敛的 x 值,和对应于级数发散的 x 值之间的区别,看来不需要注意.而且即使他们认识到有些级数,例如 $1+2+3+\cdots$,有一个无穷大的和,但他们宁愿试图给和数赋予一种意义,而不愿意对求和法提出疑问.

同样地,复数的自由使用也是立足于对符号的信任.因为二次式 ax^2+bx+c 在其零点是实数时可以表成线性因式的乘积,所以,同样清楚的是:当零点是复数时,也应该有线性因式存在.尽管数学家们意识到他们自己对微积分的一些概念还不太清楚,但是微积分(微分与反微分)的形式运算却被扩大到新的函数.对形式主义的这个依赖性或多或少地蒙蔽了他们.例如在他们扩大他们的函数概念时就遇到了困难,这是由于他们对函数必定能用公式表出这一点奉若神明的缘故.

18 世纪的人们完全清楚数学上对证明提出的要求.我们已经看到,Euler 就曾试图证明他使用发散级数是正当的,Lagrange 以及其他一些人也曾表示要给微积分提供一个基础.不过,这为数很少的想要达到严密性的努力,并没有使这一世纪的工作逻辑化,但它们还是值得注意的,因为它们表明了严密化的标准是随时代而变的.而且人们差不多总是持这样的意见:没有办法的事就得忍耐.他们完全陶醉于已取得的物理成就,以至在绝大部分情况下,对失去的严密性无动于衷.令人吃惊的是,在理论完全没有保证的情况下,却还极端地相信结论.因为 18 世纪的数学家们在没有逻

辑支持的情况下,愿意如此勇敢地冲杀向前,所以这段时期被称为数学的英雄年代.

或许是由于使微积分严密化的少数努力没有成功,而且随后的分析工作又提出了其他一些毫无希望获得解决的严密性问题,所以有些数学家放弃了这方面的努力,正像寓言中的狐狸对葡萄那样,有意地嘲笑希腊人的严密性. Sylvestre-François Lacroix (1765—1843)在他的第二版(1810—1819)的三卷本《微积分学教程》第一卷的序言(第 11 页)中写道,"希腊人所烦恼的这种琐碎的东西,我们不再需要了."这个世纪的典型态度是:为什么要自找麻烦,用深奥的推理来证明那些人们根本没有怀疑过的东西呢?或者用不太显然的东西去证明较为显然的东西呢?

甚至欧几里得几何也遭到批评,理由是在一些没有一个人认为有必要的地方,提供了证明. Clairaut 在他的《几何要义》(*Eléments de géométrie*, 1741)中说:

> Euclid 自找麻烦地去证明什么两个相交的圆的圆心是不同的啦,什么一个被围于另一三角形内的三角形,其各边之和小于外围三角形的各边之和啦,这是不足为怪的. 这位几何学家必须去说服那些顽固不化的诡辩论者,而这些人是以拒绝最明显的真理而自豪的. 因此,像逻辑那样,几何必须依赖形式推理去反驳他们……但现在局面倒转过来了. 所有那些涉及到常识早已熟知的事情的推理,只能掩盖真理,使读者厌倦,在今天人们对它已不屑一顾了.

Josef Maria Hoene-Wronski(1778—1853)也表达过这种 18 世纪的看法,他是一个计算方法学家,但不关心数学的严密性. 他的一篇论文被巴黎科学院的一个委员会批评为缺乏严密性. Wronski 回答说,这是"迂腐,一种偏爱手段而忽视目的的

迂腐."

总的说来,人们是知道他们对严密性掉以轻心的. 1743 年 d'Alembert 说,"直到现在……表现出更多关心的是去扩大建筑,而不是在入口处张灯结彩;是把房子盖得更高些,而不是给基础补充适当的强度."由此,18 世纪开垦了新的处女地. 鉴于做工作的人数有限,这个世纪中伟大的创造大大超过其他任何一个世纪. 19 和 20 世纪的人们倾向于看不起 18 世纪粗糙的、常常是经不住考验的归纳性工作,强调数量过于庞大,抓住其中的错误,来尽量贬低它的成就.

4. 形而上学的基础

虽然数学家们确实认识到他们的创作并没有用 Euclid 的演绎模式重新系统地陈述出来,但他们坚信数学的真理. 这个信念的部分依据,就是前已指出的,结论在物理上的正确性,部分依据是哲学和神学的理由. 因为数学只不过是把宇宙的数学设计揭示出来,所以它的真理是无可怀疑的. 17 世纪后期和 18 世纪的哲学主旨,主要是由 Thomas Hobbes,John Locke 和 Leibniz 阐述过的,是理智与自然界之间预先建立的协调一致性. 这个教义从希腊时代以来确实是没有争议的. 那么,如果这样清楚地适用于自然界的数学定律却缺乏纯数学证明的确切性,那不需要一个遁词吗? 虽然 18 世纪揭示的仅仅是一些零碎的东西,但它们是基础真理的碎片. 数学演绎法的非凡的准确性,特别表现在天体力学上,是这个世纪相信宇宙数学设计的一个光荣的坚信礼.

18 世纪的人们同样相信某些数学原理必定正确,因为宇宙的数学设计一定已经把它们吸收进去了. 譬如说,由于一个完美的宇宙不会容忍浪费,所以它的行动是达到目的所必需的最少的行动. 因此,Maupertuis 所断言的并由 Euler 在他的《发明方法》中所支

持的最小行动原理,是勿容置疑的.

世界是按照数学进行设计的这一信念来自科学与神学早期的联系.我们可以回忆一下,16 和 17 世纪的领袖人物不仅笃信宗教,而且还在他们的神学观点中寻找对他们的科学工作生死攸关的启示和信念. Copernicus 和 Kepler 确信日心说必定是正确的,是因为他们确信上帝更喜爱数学上比较简单的理论. Descartes 相信我们的天赋观念(其中包括数学公理)是正确的,而且我们的推理是正确的,是基于他深信上帝不会欺骗我们,因而否定数学的真理及其清晰性就是否定上帝.我们已经提到过,Newton 认为他的科学成就的主要价值在于对上帝的工作的研究和对天启教的支持.他著作中的许多段落是对上帝的赞美,他的《原理》第三卷末尾的总注释的大部分是对上帝的颂词(它使人联想到 Kepler 对上帝的颂词). Leibniz 关于真实世界与数学世界之间一致性的解释,和他对于他的微积分可以应用到现实世界的最后的辩护词是:世界与上帝是统一的.因此现实的规律不能偏离数学的理想的规律.宇宙是尽善尽美的,是所有可能有的世界中最美好的世界,而且是理性的思想揭示了它的规律.

虽然仍旧相信自然界是数学地设计的,但 18 世纪最终抛弃了这个信念的哲学及宗教的基础.整个哲学思想的核心,即宇宙是上帝设计的这一教义,逐渐地被纯粹数学-物理的解释削弱了它的基础.甚至推动数学工作的宗教方面的势力在 17 世纪时就开始失去地盘. Galileo 曾响亮地号召来一个决裂.他在一封信中说道:"可是,对我说来,关于神圣经典的任何讨论都可能是永远没有用的谎话连篇,没有一个正正经经的天文学家或科学家曾做过这类事情."后来 Descartes 主张自然规律是不变的,因而含蓄地限制了上帝的作用. Newton 把上帝的行动限制为:保持世界按计划行事.他用了一个比喻:造表的人负责表的修理.于是归于上帝的作用越来越受到限制.当对天上和地上的运动都适合的普遍定律(这

是 Newton 自己揭示的)开始在理性活跃的舞台上占统治地位,而预言和观察不断相符说明这些规律是完善的时候,上帝就越来越退到幕后,而宇宙的数学规律开始成为注意力的焦点. Leibniz 看到 Newton 的《原理》中隐含了一个按照计划运转或者说没有上帝的世界,就指责这本书是反基督的. 但是 18 世纪的数学越往前发展,来自宗教的对数学的启示和推动就越来越后退.

同 Maupertuis 和 Euler 不一样,Lagrange 否定在最小作用原理中隐含有任何形而上学的东西. 关心得到物理上意义重大的结果代替了关心上帝的设计. 对于数学物理说来,完全抛弃上帝及任何建立在它的存在性上的形而上学原理是 Laplace 作出的. 有这样一个被人们熟知的故事:当 Laplace 送给 Napoleon 一部他著的《天体力学》时,Napoleon 说:"Laplace 先生,他们告诉我,你写了这部关于宇宙系统的大作,而从头到尾没有一处提到它的创造者."据说 Laplace 答道:"我不需要这个假设."这个世纪快接近尾声的时候,对一段议论贴上一个"形而上学"的标签已变成责备的话,虽然这个标签常被用于谴责数学家们不理解的东西. 如 Monge 的同时代人不懂他的特征函数理论,这个理论就被称为是形而上学的.

5. 数学活动的扩张

在 18 世纪中,发起并支持数学研究的,与其说是大学,不如说是 17 世纪中期和末期建立起来的科学院. 科学院还支持办杂志,使其成为发表新的工作的正式渠道. 科学院事务方面的唯一变化是 1795 年巴黎科学院改组为法兰西学院下设三个分支中的一个.

1800 年以前,德国的大学不作研究. 它们提供两年人文科学的必修课,然后是法律、神学或医学的专门化课. 大数学家不属于

大学,而是归属柏林科学院.但在 1810 年,Alexander von Humboldt(1769—1859)建立了柏林大学并提出一个基本的思想:教授应该讲授他们想讲的课程,而学生可以学习他们喜欢学习的东西.因此教授第一次可以按照他们的研究兴趣授课.比如 Jacobi 从 1826 年起在哥尼斯堡(Koenigsberg)讲授他的关于椭圆函数的工作,虽然这仍然是很稀有的,而且其他教员必须负担自己的正规课程.19 世纪时德国的许多王国、公国和自由城都设立了大学,开始支持搞研究的教授.

18 世纪时法国的大学,至少一直到大革命时期,并不比德国的大学好.但是新政府决定建立高水平的大学,进行教学和研究.这项工作的组织者是 Nicolas de Condorcet,他在数学方面有过一些活动.1794 年建立的多科工艺学校,以 Monge 和 Lagrange 作为它的第一批数学教授.学生为被录取而互相竞争,他们接受培养其为工程师或军官的训练.事实上,课程的数学水平是很高的,因而毕业生能够从事数学研究.通过这种训练和出版的讲义,这所学校产生了广泛而有力的影响.1808 年法国政府建立了高等师范学校,它的前身是师范学校,建于 1794 年,但只持续了几个月.这所新的学校是用来培养教师的,分成两部分:人文科学和自然科学.在这里,学生也为被录取而互相竞争,它也提供高深的课程,学习与研究的条件是好的,学习较好的学生被引导去搞研究.

18 世纪时,欧洲各国在出数学成果的多寡方面差别相当大.领先的国家是法国,其次是瑞士.德国(指德意志各民族而言)相对说来不太活跃,虽然 Euler 和 Lagrange 是受柏林科学院资助的.英国也没有什么活力,Brook Taylor, Matthew Stewart(1717—1785)和 Colin Maclaurin 是仅有的几位卓越的数学家.英国的这种可怜的状况,与它在 17 世纪时巨大的活动性相比,是令人难以置信的,但这是容易找到解释的.英国的数学家,不仅仅因为 Newton 和 Leibniz 的争吵所造成的后果,而把他们每一个人孤立

于大陆上的人们之外，而且因为他们遵循 Newton 的几何方法而受到损害. 英国人专心致志于研究 Newton，而不是研究自然界. 甚至在他们的分析工作中，他们用 Newton 表示流数和流量的记号，而拒绝阅读任何用 Leibniz 的记号写的东西. 另外，在牛津和剑桥，甚至不容许任何一个犹太人或不信英国国教的人入学. 大约在 1815 年前后，英国数学已奄奄一息了，天文学也差不多是这样.

在 19 世纪的前四分之一的时期内，英国数学家开始对在大陆上迅猛发展的微积分及其扩展的工作感兴趣. 1813 年剑桥成立了分析学会，研究这项工作. George Peacock (1791—1858), John Herschel(1792—1871), Charles Babbage 以及另外一些人从事于研究"d-主义"的原理——即微积分中 Leibniz 用的符号(与"点-状态"原理，或 Newton 所用的符号相对立). 不久，商 dy/dx 代替了 $\dot{y}$，而且英国的学生开始能得到大陆上用的教科书. Babbage, Peacock 和 Herschel 翻译并在 1816 年出版了 Lacroix 的《教程》的一卷版本. 到 1830 年前后，英国人已经能够参加到大陆上的人的工作中去了. 英国的分析，被证实大部分是数学物理，虽然几个完全新的工作方向(代数不变量理论和形式逻辑)也是在这个国家开创的.

6. 向前的一瞥

我们知道，到 18 世纪末尾的时候，数学家们已开创了一些新的数学分支. 但是这些分支中的问题变得极其复杂，而且除了少数例外，都没有找到解决它们的一般的方法. 数学家们开始感到山穷水尽了. 1781 年 9 月 21 日，Lagrange 在给 d'Alembert 的信中说："在我看来似乎[数学的]矿井已挖掘很深了，除非发现新的矿脉，否则迟早势必放弃它. 现在物理和化学提供了最辉煌的财富，它们

也比较容易开发.我们这一世纪的嗜好看来也是完全在这个方向上,而且科学院中几何学的处境将会有一天变成目前大学里阿拉伯语的处境一样,那也不是不可能的."[1] Euler 和 d'Alembert 同意 Lagrange 的意见,认为数学的思想已差不多快穷尽了,他们看到没有新的伟大智能的人物从地平线上出现.这种恐惧甚至早在 1754 年 Diderot 在《关于自然界的解释的思想》中就已经表述过:"我敢说,不出一个世纪,欧洲就将剩不下三个大的几何学家[数学家]了.这门科学很快就将停滞不前,停留在 Bernoulli 家族,Maupertuis 们,Clairaut 们,Fontaine 们,d'Alembert 们和 Lagrange 们把它发展到的那个地方……我们将不能越过那个地方."

Jean-Baptiste Delambre(1749—1822)是法兰西学院数学和物理部的常设书记,他在一份报告《关于 1789 年以来数学科学进展的历史及其现状的报告》(*Rapport historique sur le progrès des sciences mathématiques depuis 1789 et sur leur état actual*,巴黎,1780)中说:"至于未来能给数学的进展提供什么机会,要对此作分析,那会是困难的和轻率的;在它的几乎所有的分支里,人们都被不可克服的困难阻挡住了;把细微末节完善化看来是剩下来的唯一可做的事情了.所有这些困难好像是宣告我们的分析的力量实际上已经穷竭了……."

比较聪明的预言是 1781 年 Condorcet 作出的,Monge 的工作曾给他以深刻的印象.他说:

> ……虽然如此多的工作时常获得圆满的成功,但是我们还远远没有穷尽分析在几何上的所有的应用,不应该相信什么我们已经接近了这些科学必定会停止不前的终点(因为它们已经达到了人类精神力量的极限),我们应该

① Lagrange, *Œuvres*, 13,368.

> 公开声称,我们仅仅是踏在万里征途的第一步上.这些新的[实际的]应用(与它们对自身可能有的用处是无关的),一般说来对分析的进步是必需的;它们产生了人们也许想不到要提出的一些问题;它们要求创造新的方法.技术解决的方法是应运而生的;对于最抽象的科学的方法,也可以这样说.但是我们把更高级的一种需要归于后者,需要发现新的真理,需要更好地了解自然界的规律.
>
> 于是人们看到长期搁置不用的一些卓越的理论忽然变成了一些最重要的应用的基础,而类似地,一些貌似简单的应用产生了最抽象的理论的概念,对于这些概念也许没有人感觉到有需要,而这些应用把几何学家[数学家]的工作引导到了这些理论上去……

Condorcet 当然是正确的.其实,数学在 19 世纪的扩展还更超过了 18 世纪.1783 年,Euler 和 d'Alembert 都去世了,这一年,Laplace 34 岁,Legendre 31 岁,Fourier 15 岁,而 Gauss 只有 6 岁.

至于新的数学究竟是什么,我们将在随后的几章中看到.但在这里我们将提到一些传播成果(这些成果,我们将在以后谈到)的媒介.首先是科研杂志数量的一个巨大的膨胀.《多科工艺学校杂志》(*Journal de l'Ecole Polytechnique*)和学校同时创立(1794).1810 年 Joseph Diez Gergonne(1771—1859)创办了《纯粹与应用数学记事》(*Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*),一直持续到 1831 年.这是第一个纯数学的杂志.与此同时 August Leopold Crelle(1780—1855,他是一个值得注意的人物,因为他是一个很好的组织者,并且帮助许多年轻人获得了大学里的位置)在 1826 年创办了《纯粹与应用数学杂志》(*Journal*

für die reine und angewandte Mathematik)[1],Crelle 用这个名称是想表示他愿意扩大数学兴趣的范围. 但是不管 Crelle 的意图如何,这个杂志很快就被专业化的数学文章全部占据,因而曾常常被戏称为《纯粹非应用数学杂志》(*Journal für reine unangewandte Mathematik*). 这份杂志也被叫做《Crelle 杂志》(*Crelle's Journal*),而且从 1855 年到 1880 年,它被叫做《Borchardt 的杂志》(*Borchardt's Journal*). 1795 年《科学院纪要》(*Mémoires de l'Académie des Sciences*)变为《法兰西学院的科学院纪要》(*Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*). 巴黎科学院在 1835 年也创办了《周报》(*Comptes Rendus*),在 4 页或更少一些的纸上摘要写出新的成果. 有一个未曾考证确凿的故事说,之所以限制为 4 页,是要限制 Cauchy,因为他总是写得很多.

1836 年 Liouville 创办了与《Crelle 杂志》类似的法文杂志《纯粹与应用数学杂志》(*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*),通常被叫做《Liouville 杂志》(*Liouville's Journal*). 1864 年 Louis Pasteur(1822—1895)创办了《高等师范学校科学纪事》(*Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supërieure*),1870 年 Gaston Darboux (1842—1817)创办了《数学科学通报》(*Le Bulletin des Sciences Mathématiques*). 在浩繁的其他杂志中,我们提一下《数学纪事》(*Mathematische Annalen*, 1868),《数学学报》(*Acta Mathematica*, 1882)和《美国数学杂志》(*American Journal of Mathematics*),这是美国的第一份数学杂志,是由 J. J. Sylvester 在 1878 年建立的,当时他是约翰·霍普金斯大学(Johns Hopkins University)的教授.

19 世纪以来存在着另外一种促进数学研究积极性的力量. 有几个国家的数学家组成专业性的学会,例如伦敦数学会(这是第一个数学会,建立于 1865 年)、法国数学会(1872)、美国数学会

---

[1] 以后简写为 *Jour. für Math.*.

(1888)和德国数学会(1890). 这些学会定期开会并宣读论文,每一个学会都主办一个或几个杂志,除去前面已经提到的以外,例如还有《法国数学会通报》(*Bulletin de la Société Mathématique de France*)和《伦敦数学会会报》(*Proceedings of the London Mathematical Society*).

如以上关于新的组织和新的出版物的概略的含义所示,在 19 世纪中数学巨大地扩展了. 这个扩展之所以有可能,主要是由于一个个小的数学家贵族团体被一个个范围大得多的集体所代替. 知识的传播,使得可能从各个经济阶层涌现出远较过去多得多的学者. 这个趋势甚至在 18 世纪就已经开始了. Euler 是一个牧羊人的儿子;d'Alembert 是由一个穷苦家庭抚养长大的私生子;Monge 是一个小商贩的儿子;而 Laplace 出身于一个农民家庭. 大学参与研究,教科书的写作,以及由 Napoleon 开创的对科学家的系统训练,这一切造就了为数众多的数学家.

参考书目

Boutroux, Pierre: *L'Ideal Scientifique des mathématiciens*, Libraire Felix Alcan, 1920.

Brunschvicg, Léon: *Les Etapes de la philosophie mathématique*, Presses Universitaires de France, 1947, Chaps. 10～12.

Hankins, Thomas L.: *Jean d'Alembert: Science and Enlightenment*, Oxford University Press, 1970.

Hille, Einar: "Mathematics and Mathematicians from Abel to Zermelo", *Mathematics Magazine*, 26, 1953, 127～146.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, 2nd ed., 4 vols., 1799～1802, Albert Blanchard (reprint), 1960.

第 27 章

单复变函数

> 实域中两个真理之间的最短路程是通过复域.
>
> Jacques Hadamard

1. 引　　言

从技术观点来看,19 世纪最独特的创造是单复变函数的理论. 这个科目时常被称为函数论,虽然这个简称隐含有更多的意思. 这个新的数学分支统治了 19 世纪,几乎像微积分的直接扩展统治了 18 世纪那样. 函数论,这一最丰饶的数学分支,曾被称为这个世纪的数学享受. 它也曾被欢呼为抽象科学中最和谐的理论之一.

2. 复函数论的开始

我们已经看到,复数尤其是复函数是由于与部分分式积分法,确定负数与复数的对数,保形映射,以及实系数多项式的分解等相联系而实际进入数学的. 实际上 18 世纪的人们在复数及复函数方面所做的工作远不止此. D'Alembert 在他的流体力学论文《关于流体阻力的一个新理论试论》(*Essay on a New Theory of the Resistance of Fluids*, 1752)中,考虑了一个物体经过各向同性的、无重量理想流体的运动,联系这一研究,还考虑了下面的问题. 他想确定出两个函数 p 及 q,它们的微分是

$$dq = M dx + N dy, \quad dp = N dx - M dy. \tag{1}$$

由于量 N 及 M 在 $\mathrm{d}p$ 和 $\mathrm{d}q$ 中都出现,故立即推知

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y},\ \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{2}$$

这些方程现在称为 Cauchy-Riemann 方程. 方程(2)是说(第 19 章第 6 节) $q\mathrm{d}x+p\mathrm{d}y$ 和 $p\mathrm{d}x-q\mathrm{d}y$ 是某些函数的恰当微分. 于是表达式(我们将用 i 表示 $\sqrt{-1}$,虽然 Euler 只是偶尔这样用,到 Gauss 才成为普遍的用法.)

$$q\mathrm{d}x+p\mathrm{d}y+\mathrm{i}(p\mathrm{d}x-q\mathrm{d}y)=(q+\mathrm{i}p)\left(\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{i}}\right),$$

$$q\mathrm{d}x+p\mathrm{d}y-\mathrm{i}(p\mathrm{d}x-q\mathrm{d}y)=(q-\mathrm{i}p)\left(\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{i}}\right)$$

也是完全微分,从而 $q+\mathrm{i}p$ 是 $x+y/\mathrm{i}$ 的函数,$q-\mathrm{i}p$ 是 $x-y/\mathrm{i}$ 的函数. D'Alembert 设

$$q+\mathrm{i}p=\xi\left(x+\frac{y}{\mathrm{i}}\right)+\mathrm{i}\zeta\left(x+\frac{y}{\mathrm{i}}\right), \tag{3}$$

$$q-\mathrm{i}p=\xi\left(x-\frac{y}{\mathrm{i}}\right)-\mathrm{i}\zeta\left(x-\frac{y}{\mathrm{i}}\right), \tag{4}$$

其中 ξ 和 ζ 是有待于确定的函数,在特殊的情形下,d'Alembert 曾把它们确定出来. 将(3)及(4)相加并相减,他得出 p 和 q. 这一点的意义是表明了 p 和 q 是一个复函数的实部及虚部.

Euler 指出了如何利用复函数去计算实积分的值. 从 1776 年起到 1783 年逝世时止,他写了一系列论文,这些论文从 1788 年起开始发表. 其中有两篇是在 1793 年和 1797 年①发表的. Euler 指出:z 的任一函数,若对 $z=x+\mathrm{i}y$ 具有形式 $M+\mathrm{i}N$,其中 M, N 为实函数,那么它对于 $z=x-\mathrm{i}y$,就具有形式 $M-\mathrm{i}N$. 他说,这是复数的基本定理. 他利用这个断言去求实积分的值.

假定

---

① *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, 7,1789,99～133, pub. 1793 = *Opera*, (1), 19,1～44; *ibid.*, 10,1792,3～19, pub. 1797 = *Opera*, (1),19,268～286.

(5) $$\int Z(z)\mathrm{d}z = V,$$

其中 z 是实的. 他令 $z = x + \mathrm{i}y$, 从而 V 变为 $P + \mathrm{i}Q$. 于是

(6) $$P + \mathrm{i}Q = \int (M + \mathrm{i}N)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y),$$

其中 $M + \mathrm{i}N$ 现在是 $Z(z)$的复形式. 根据他的基本断言,

(7) $$P - \mathrm{i}Q = \int (M - \mathrm{i}N)(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y),$$

所以将实部及虚部分开,就有

(8) $$P = \int M\mathrm{d}x - N\mathrm{d}y,\ Q = \int N\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y.$$

于是, $M\mathrm{d}x - N\mathrm{d}y$ 与 $N\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y$ 分别是 P 与 Q 的恰当微分,随之有

(9) $$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x},\ \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

这样在 $Z(z)$中代入 $z = x + \mathrm{i}y$,“就得到两个函数 M 和 N,它们具有值得注意的性质: $\partial M/\partial y = -\partial N/\partial x$, $\partial M/\partial x = \partial N/\partial y$; P 与 Q 也有类似的性质”. 这里 Euler 强调了一个复函数的实部和虚部即 M 和 N,满足 Cauchy-Riemann 方程. 但是,他的主要点是利用积分(8)去计算(5),因为 P 等于原来的 V. 为将(8)中的积分化为一元函数的积分,Euler 在(5)中把 $z = x + \mathrm{i}y$ 换为 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 并保持 θ 不变. 事实上这就是沿着复平面上过原点的一条射线积分. 然后他用他的方法去求一些积分的值.

Laplace 也使用了复函数去求积分的值. 在从 1782 年起到他的名著《概率的分析理论》(*Théorie analytique des probabilités*, 1812)为止的一系列论文中,他像 Euler 那样,把实积分转换为复积分来计算实积分的值. Laplace 要求优先权,因为 Euler 的论文发表得比他晚. 不过,即使是上面提到的 1793 年和 1797 年的论文,就已在 1777 年 3 月在彼得堡科学院宣读过. 在这一工作中 Laplace 附带地引进了我们现在称之为解微分方程的 Laplace 变

换方法.

Euler, d'Alembert 和 Laplace 的工作构成了函数论的重要进展.不过,在他们的工作中有一个本质的局限性,他们依靠把 $f(x+iy)$ 的实部和虚部分开来进行他们的分析工作.复函数实际上不是基本的实体.显然,这些人对于使用复函数还感觉到很不自然. Laplace 在他 1812 年的书中指出:"这个由实到虚的过渡可以看作是一个启发式的方法,它像长期以来数学家所用的归纳法.但是,如果十分谨慎地有约束地使用这个方法,那么所得到的结果总是可以证明的."他的确强调,结果都必须验证.

3. 复数的几何表示

使单复变函数理论的建立更为直觉合理的一个重要步骤是复数及其代数运算的几何表示.许多人——Cotes, De Moivre, Euler,以及 Vandermonde——确实曾把复数看作是平面上的点,这可以由下述事实来说明:当他们解方程 $x^n-1=0$ 的时候,他们都把这些解

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

看作是一个正多边形的顶点.例如,Euler 把 x 和 y 几何地设想为坐标平面上的点,用 $x+\mathrm{i}y$ 代替 x 和 y,然后将 $x+\mathrm{i}y$ 表为 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,再将 r 和 θ 作为极坐标画出来.因此可以说复数作为平面上点的坐标的表示法在 1800 年就已经知道了.不过,没有作出两者的决定性的同一化,也没有给出复数的代数运算的任何几何意义.还缺少把 $x+\mathrm{i}y$

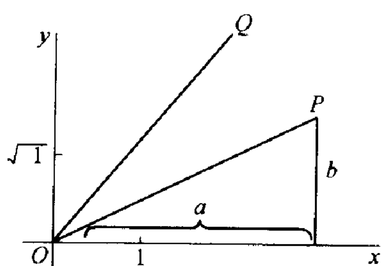


图 27.1

的复函数 $u+iv$ 的值用另一个平面的点来表示的想法.

1797 年,挪威出生的自学的测量员 Caspar Wessel(1745—1818)写了一篇论文,题目是《关于方向的分析表示;一个尝试》,这篇论文刊载在丹麦皇家科学院 1799 年的论文集中. Wessel 企图几何地表示出有向线段(向量)以及它们的运算. 在这篇论文中,除寻常的具有实单位 1 的 x 轴外,他同时引进了一根虚轴,以$\sqrt{-1}$(他把$\sqrt{-1}$写为 ϵ)作为单位. 在 Wessel 的几何表示法中,向量 OP(图 27.1)是在具有单位+1 及$\sqrt{-1}$的平面上从原点 O 画出线段 OP,这向量用复数 $a+b\sqrt{-1}$ 表示. 类似地,向量 OQ 是线段 OQ,且是用另一数 $c+d\sqrt{-1}$ 表示.

然后 Wessel 利用以几何术语定义的复数运算来定义向量的运算. 他给出的四种运算的定义实际上就是我们今天所学习的. 例如 $a+bi$ 与 $c+di$ 的和是相邻两边 OP 与 OQ 所决定的平行四边形的对角线. $a+bi$ 与 $c+di$ 的积是一个新的向量 OR,使得 OR 与 OQ 的比等于 OP 与实单位之比,而 OR 与 x 轴的夹角是 OP 及 OQ 与 x 轴的夹角之和. 显然,与其说 Wessel 将复数与平面上的点相联系,还不如说他想的是将平面上的点用向量表示. 他把他的向量几何表示法用于几何问题与三角问题. Wessel 的论文尽管有巨大的价值,但一直未被注意,直到 1897 年译成法文重新发表,才被人们重视.

瑞士人 Jean-Robert Argand(1768—1822)给出了复数的一个

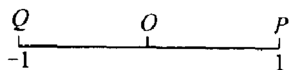


图 27.2

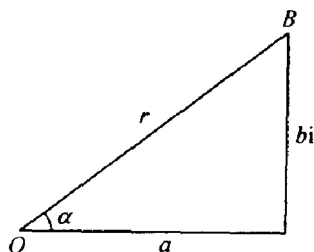


图 27.3

稍微不同的几何解释. Argand也是自学的,并且是一个簿记员,他曾出版了一本小书《试论几何作图中虚量的表示法》(*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, 1806)①. 他注意到负数是正数的一个扩张,它是将方向与大小结合起来得出的. 于是他问,我们能否利用增添某种新的概念来扩张实数系? 考虑序列 1, x, -1,我们能否找到一种运算,将1转变为x,再把它应用到x上又将x转变为-1? 如果将OP(图27.2)按反时针方向绕O转动90°,然后重复这个转动,我们就确实由于两次重复一个运算而由P到了Q. 但是,Argand注意到,这正是以$\sqrt{-1}$乘1,然后又以$\sqrt{-1}$乘此乘积时所发生的事情,即得到-1. 所以我们可以把$\sqrt{-1}$看成是按反时针方向转过90°的旋转,而$-\sqrt{-1}$是顺时针方向转过90°的旋转.

利用复数的这个运算意义,Argand决定,由原点出发的一个典型线段OB(图27.3,他称它为有向线)应表为$r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$,其中$r$为长度. 他也把复数$a+bi$看作是符号化了$a$及$bi$的几何结合$OB$. Argand像Wessel一样,指出如何将复数几何地相加或相乘,并应用这些几何想法去证明三角、几何及代数的定理. 虽然Argand的书在复数的几何解释方面惹起一些争论,但这是他对数学所作的唯一贡献,他的工作没有多大的冲击,然而我们现在仍然讲Argand图解.

在使人们接受复数方面,Gauss做得更为有效. 他在代数基本定理的几个证明中,用了复数(第25章第2节). 在前三个证明中(1799,1815及1816),他预先假定了直角坐标平面上的点与复数的一一对应. 这里没有实际画出$x+iy$,而是将x和y作为平面上

---

① 一批论Argand以及其他作者的关于复数几何表示的思想的文章,可以在Gergonne的*Annales des Mathématiques*的第四卷(1813—1814)和第五卷(1814—1815)中找到.

一点的坐标. 此外,在证明中并没有真正用到复函数理论,因为他将涉及到的函数分为实部和虚部. 他在 1811[1] 年给 Bessel 的一封信中说得更明显,他说 $a+bi$ 用点(a, b)表示,并说在复平面上可以沿着许多路径从一点到另一点. 毫无疑问,从三个证明及其他未发表的工作(其中有一些我们随后就要讨论)中所表现出来的思想,可以判断 1815 年 Gauss 已完全掌握了复数及复函数的几何理论,虽然在 1825 年的一封信中他确实说了"$\sqrt{-1}$的真正奥妙是难以捉摸的".

然而,如果说 Gauss 仍旧有任何顾虑的话,那他在 1831 年前后已经克服了它们,他公开描述了复数的几何表示. Gauss 在为他的论文《双二次剩余理论》所作的第二个说明[2]中以及在他为 1831 年 4 月 23 日的《格丁根学报》(*Göttingische gelehrte Anzeigen*)所写的这篇论文的"摘要"中[3],他对复数的几何表示是很清楚的. 在论文的第 38 节中他不仅将 $a+bi$ 表示为复平面上一点(不像 Wessel 和 Argand 那样表示为一向量),而且阐述了复数的几何加法与乘法. 在"摘要"[4]中 Gauss 说,双二次剩余理论进入复数域可能会扰乱了不熟悉这些数的人们,并且可能使他们对剩余理论有不确定的印象. 所以他重复了他在这篇论文中对复数的几何表示所说的话. 然后他指出,虽然现在对于分数、负数及实数都已很好地理解了,但对于复数只是抱了一种容忍的态度,而不顾它们的巨大价值. 对于许多人来说,它们不过是一种符号游戏. 但是在这个几何表示中人们可以看到"**复数的直观意义已完全建立起来并且不需要再增加什么就可以在算术领域中采用这些量**[着重号是添加的]."他还说,如果 1, -1 和 $\sqrt{-1}$ 原来

---

① *Werke*, 8, 90～92.

② *Comm. Soc. Gott.*, 3, 1832 = *Werke*, 2, 95～148; 这篇论文的主要内容将在第 34 章第 2 节中讨论.

③ *Werke*, 2, 169～178.

④ *Werke*, 2, 174 ff.

不称为正、负和虚单位而称为直、反和侧单位，那么人们对这些数就可能不会产生一些阴暗神秘的印象. 他说几何表示使人们对虚数真正有一个新的看法. 他引进术语“复数”[1]以与虚数相对立，并用 i 代替 $\sqrt{-1}$.

4. 复函数论的基础

Gauss 还引进了有关单复变函数的一些基本概念. 在 1811 年给 Bessel 的信中[2]，针对 Bessel 的一篇关于对数积分 $\int dx/x$ 的论文，Gauss 指出将虚(复)的积分限考虑进去的必要性. 然后他问：“当上限为 $a+bi$ 时 $\int \phi(x)dx\left(\text{Gauss 写为}\int \phi x \cdot dx\right)$的意义应当是什么? 显然，如果要求有清楚的概念，那就必须假定 x 取小的增量，从使积分为零的 x 值到 $a+bi$ 这个 x 值，然后将所有的 $\phi(x)dx$加起来……但是在复平面上从 x 的一个值到另一个值的连续过程发生在一条曲线上，所以通过许多条路径是可能的. 现在我断言积分 $\int \phi(x)dx$ 只有一个值，即使是通过不同的路径，只要在两条路径所围的空间内 $\phi(x)$是单值的，并且不变为无穷. 这是一个很美丽的定理，它的证明并不难，我将在一个适当的机会给出这证明. ”Gauss 没有给出这个证明. 他还断言，如果 $\phi(x)$变为无穷，那么$\int\phi(x)dx$ 可以有许多值，取决于所取的闭路径围绕 $\phi(x)$ 变为无穷的点一次、二次或更多次.

然后 Gauss 回到$\int dx/x$ 的特殊情形并且说，从 $x=1$ 出发，走到某一个值 $a+bi$，如果路径不包围 $x=0$，就得出积分的唯一的一个值；但是如果路径包围 $x=0$，那么就必须对从 $x=1$ 到 $a+bi$

① *Werke*, 2, 102.

② *Werke*, 8, 90～92.

不包围 $x=0$ 的路径所得之值加上 $2\pi i$ 或 $-2\pi i$. 这样,对于一个已给的 $a+bi$, 就有许多对数. 随后在这信中,Gauss 说复变函数的积分的研究应引导到最有趣的结果. 所以,甚至在 Gauss 发表他的代数基本定理的第二及第三个证明以前——在其中,像在第一个证明中一样,他避免直接应用复数及复函数,除去偶然一次写出 $a+b\sqrt{-1}$ 以外——他对于复函数及其积分已有很明确的概念.

Poisson 在 1815 年注意到并且在 1820 年的一篇论文①中讨论了,沿着复平面上的路径所取的复函数的积分的用处. 作为一个例子,他给出了

$$\int_{1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{10}$$

在这里他令 $x=e^{i\theta}$, 其中 θ 由 $(2n+1)\pi$ 变到 0,并且,将积分作为一个和数的极限处理,得到值 $-(2n+1)\pi i$.

于是他指出,一个积分,沿着一条虚路径同沿着一条实路径,其值不一定相同. 他给出了例子

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x, \tag{11}$$

其中 a 和 b 是正的常数. 他令 $x=t+ik$, 其中 k 是常数且是正的, 对于 $k>b$, 他得到 $\pi(e^{-ab}-e^{ab})/2\pi$, 而当 $k<b$ 时,得 πe^{-ab}. 第二个值对于 $k=0$ 也是正确的. 所以对于 k 的两个不同的值(意味着两条不同的路径),就得到两个不同的结果. Poisson 是第一个沿着复平面上的路径实行积分的人.

虽然 Gauss 和 Poisson 的这些观察的确是重要的,但他们都没有发表过较重要的关于复函数理论的文章. 这个理论是 Augustin-Louis Cauchy 建立的. 1789 年,他生于巴黎,于 1805 年进入多科工艺学校,在那儿他学习工程. 由于他的健康情况很差,

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 11, 1820, 295~341.

Lagrange和 Laplace 就劝他献身于数学. 他担任了多科工艺学校、巴黎大学及法兰西学院的教授. 政治对于他的经历发生了意料不到的影响. 他是一个热心的保皇党员,并且是 Bourbons 家族的支持者. 1830 年,当 Bourbons 家族的一个远支统治法国时,他拒绝发誓效忠于新君主政体,并且辞去了多科工艺学校的教授职位. 他出走到都灵,教了几年拉丁文和意大利文. 1838 年他回到巴黎,在那里当了几个教会机构的教授,一直到 1848 年的革命以后的政府废弃了效忠的誓言. 1848 年 Cauchy 主持了巴黎大学理学院(Faculté des Sciences of the Sorbonne)的数学天文学讲座. 虽然 Napoleon 三世在 1852 年恢复了誓言,但他允许 Cauchy 拒绝宣誓. 对于皇帝的屈尊姿态,他的回答是捐赠他的薪金给他曾住过的地方索(Sceaux)的穷人. Cauchy 是一个令人钦佩的教授和 -位最伟大的数学家,他于 1857 年去世.

Cauchy 具有广泛的兴趣. 他熟悉他那时代的诗歌并且是一本关于 Hebrew 作诗法著作的作者. 在数学方面他写的论文超过 700 篇,仅次于 Euler. 他的全集的近代版有 26 卷,包含数学的一切分支. 在力学方面,他写了关于杆和弹性膜的平衡以及关于弹性介质中的波等重要著作. 在光的理论中,他研究了 Fresnel 开创的波的理论及光的散射和极化. 他大大地发展了行列式的理论,建立了常微分方程和偏微分方程的一些基本定理.

在复函数理论方面,Cauchy 的第一篇重要论文是他的《关于定积分理论的报告》(Mémoire sur la théorie des intégrales définies). 这篇论文 1814 年宣读于巴黎科学院. 但直到 1825 年才送去发表,在 1827 年出版①. 出版时 Cauchy 增加了两个注解,相当可靠地反映了 1814 年到 1825 年间的发展和在这个期间 Gauss 的工作的可能影响. 现在我们来看一下这篇论文本身. 在序言中

---

① *Mém. des sav. étrangers*, (2),1,1827, 599 ~ 799 = *Œuvres*, (1),1,319 ~ 506.

Cauchy 说,他被引导到这个工作中来,是因为他致力于严密化如下过程中由实到复的过渡,这过程是 Euler 从 1759 年起以及 Laplace从 1782 年起用来计算定积分的值的. 事实上,Cauchy 引证了 Laplace 的工作,后者注意到方法需要严密化. 但论文本身并没有处理这个问题,它处理了在流体力学研究中出现的二重积分的更换积分次序的问题. Euler 曾在 1770 年[①]说过,当积分号下每个变量的限彼此无关的时候,这个次序更换是允许的,至于 Laplace,他显然是同意的,因为他屡次用了这个事实.

具体说,Cauchy 处理了关系式

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,\ y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{12}$$

其中 x_0, y_0, X, Y 都是常数(图 27.4). 当 $f(x,\ y)$ 在区域的内部及边界上是连续的时候,这个积分次序更换成立. 然后他引进了两个函数 $V(x,\ y)$ 与 $S(x,\ y)$,使得

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x},\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial y}. \tag{13}$$

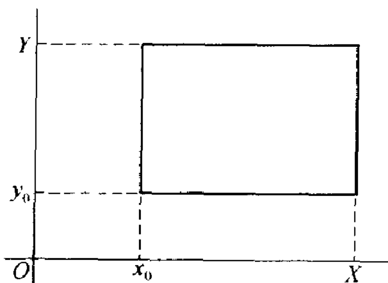


图 27.4

Euler 在 1777 年就已经指出如何得到这样的函数(见参考书目 [5], [8], [9]). 现在 Cauchy 考虑一个由 $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}$ 给出的 $f(x,\ y)$. 将(12)的左边 f 换为$\partial V/\partial y$,在右边将 f 换为$\partial S/\partial x$. 于是有

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{14}$$

而用(13)中第二个方程,他便得到

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 14, 1769, 72～103, pub. 1770 = *Opera*, (1), 17, 289～315.

$$(15)\qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\frac{\partial S}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这些等式可以用来在任一次序下计算二重积分的值.不过它们并不涉及复函数.当Cauchy在他的引言①中说,他将"严格地并且直接地建立由实到虚(复)的过渡"时,他心中想的是方程(13).Cauchy说②这两个方程包含了由实到虚的过渡的全部理论.

上述一切都是在1814年的论文的正文中,而且确实没有明显指出复函数理论怎样被包括在内.另外,虽然Cauchy按照Euler与Laplace的同一方式,用复函数来计算实定积分的值,但是这个用法并未把复函数作为基本实体.一直到1821年,在他的《分析教程》(*Cours d'analyse*)中③,他说

$$\cos a+\sqrt{-1}\sin a,$$
$$\cos b+\sqrt{-1}\sin b,$$
$$\cos(a+b)+\sqrt{-1}\sin(a+b)$$

"是三个符号式,它们不能按照一般已建立的常规来解释,并且不代表任何实的东西."他说,上面的第一与第二式的乘积等于第三式这一事实,并不具有什么意义.为了使这个方程具有意义,必须令实部与$\sqrt{-1}$的系数相等."每一个虚方程仅仅是实量间的两个方程的符号表示."如果我们按照对实量建立的法则来对复式进行运算,我们得到时常是重要的准确结果.

在这本书里他确实处理了复数及复变数 $u+\sqrt{-1}v$,其中 u 及 v 是一个实变数的函数,不过总是这样理解,即两个实的部分是它们的有意义内容.一个复变数的复值函数没有被考虑.

在1822这一年,Cauchy前进了几步.从关系式(14)和(15)他有

---

① *Œuvres*, (1), 1, 330.

② *Œuvres*, (1), 1, 338.

③ *Œuvres*, (2), 3, 154.

$$(16)\int_{x_0}^{X}[V(x,Y)-V(x,y_0)]\mathrm{d}x=\int_{y_0}^{Y}[S(X,y)-S(x_0,y)]\mathrm{d}y,$$

$$(17)\int_{x_0}^{X}[S(x,Y)-S(x,y_0)]\mathrm{d}x=-\int_{y_0}^{Y}[V(X,y)-V(x_0,y)]\mathrm{d}y.$$

现在他有了可以把这两个方程结合起来的想法,因此作出了关于 $F(z)=F(x+\mathrm{i}y)=S+\mathrm{i}V$ 的一个陈述.例如,他以 i 乘(16)并将两方程相加,得到

$$\int_{x_0}^{X}F(x+\mathrm{i}Y)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{X}F(x+\mathrm{i}y_0)\mathrm{d}x=\int_{y_0}^{Y}F(X+\mathrm{i}y)\mathrm{i}\mathrm{d}y-\int_{y_0}^{Y}F(x_0+\mathrm{i}y)\mathrm{i}\mathrm{d}y,$$

整理后,就给出

$$(18)\int_{y_0}^{Y}F(x_0+\mathrm{i}y)\mathrm{i}\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{X}F(x+\mathrm{i}Y)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{X}F(x+\mathrm{i}y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{Y}F(X+\mathrm{i}y)\mathrm{i}\mathrm{d}y.$$

最后这个结果是沿着一个长方形边界(图 27.4)的复积分法这一简单情形下的 Cauchy 积分定理.这个结果可以表示为

$$(19)\qquad \int_{ADC}F(z)\mathrm{d}z=\int_{ABC}F(z)\mathrm{d}z.$$

即是说,积分与路径无关.

以上这些想法,是 Cauchy 在 1822 年的一个注解中,在他《关于无穷小计算课程的总结》[①](*Résumé des le, ons sur le calcul infinitésimal*)中,并且在 1827 年发表的 1814 年的论文的一个脚注中给出的.从这些较晚的著作,我们看到 Cauchy 是怎样从实函数到复函数的.

1825 年,Cauchy 写了另一篇论文《关于积分限为虚数的定积

① = *Œuvres*(2), 4,13 ~ 256.

分的报告》,但这篇文章到1874年才发表[1]. 这篇论文被许多人看作是他的最重要的论文,并且是科学史上最瑰丽的一篇,虽然在一段时间内Cauchy本人并没有赏识到它的价值.

在这篇论文中,他又考虑了将常数及变数用复值代替的方法来计算实积分的问题. 他处理了

$$\int_{x_0+iy_0}^{X+iY} f(z)\,dz, \tag{20}$$

其中 $z = x + iy$, 并且小心地定义这个积分为和数

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x_\nu + iy_\nu)[(x_{\nu+1} - x_\nu) + i(y_{\nu+1} - y_\nu)]$$

的极限,其中 $x_0, x_1, \cdots, X$ 以及 $y_0, y_1, \cdots, Y$ 是沿着从 (x_0, y_0) 到 (X, Y) 的路径的分划点. 这里 $x + iy$ 肯定是复平面上的一个点并且积分是沿着一条复的路径的. 他还证明,如果令 $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, 其中 t 是实的,那么结果与 ϕ 和 ψ 的选择无关,也就是说,与路径无关,条件是在两条不同的路径之间没有 $f(z)$ 的间断点. 这个结果普遍化了对于矩形成立的结果.

Cauchy正式叙述他的定理如下:若 $f(x+iy)$ 对于 $x_0 \leqslant x \leqslant X$ 和 $y_0 \leqslant y \leqslant Y$ 为有穷并连续,那么积分(20)的值与函数 $x = \phi(t)$ 和 $y = \psi(t)$ 的形式无关. 他证明这条定理用了变分的方法. 他考虑了一条可供选择的路径 $\phi(t) + \varepsilon u(t)$, $\psi(t) + \varepsilon v(t)$, 并且证明积分对于 ε 的第一变分等于零. 这个证明并不令人满意. 在其中Cauchy不仅用了 $f(z)$ 的导数的存在性,而且还用了导数的连续性,但他在定理的叙述中并没有作任何假定. 对这一点的解释是, Cauchy相信一个连续函数总是可微的,而导数只能在函数本身不连续的地方才不连续. Cauchy的信念是有道理的,因为在他的工作的早期,他和18世纪和19世纪初期的其他的人一样,都把函数理解为一个解析表达式,因而导数立即可以通过惯用的形式微分

[1] *Bull. des Sci. Math.*, 7, 1874, 265~304, 与 8, 1875, 43~55, 148~159; 这篇论文未收入Cauchy的论文集.

法则得出.

在 1825 年的论文中,Cauchy 对于他在 1814 年的论文中以及在该论文的一个脚注里已经接触到的一个较重要的概念看得较清楚些了.他考虑当 $f(z)$在矩形(图 27.4)的内部或边界上不连续时,将发生什么事情.这时沿着两条不同路径的积分的值可能不同.如果在 $z_1 = a + ib$ 处,$f(z)$为无穷,但极限

$$F = \lim_{z \to z_1}(z - z_1)f(z)$$

存在,也就是说,在 z_1 处 f 有一个单极点,那么积分的差是 $\pm 2\pi\sqrt{-1}F$. 例如对于函数 $f(z) = 1/(1+z^2)$,它在 $z = \sqrt{-1}$ 处为无穷,因而 $a = 0$,$b = 1$,而

$$F = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{x + (y-1)\sqrt{-1}}{[x + (y+1)\sqrt{-1}][x + (y-1)\sqrt{-1}]} = \frac{-\sqrt{-1}}{2}. \tag{21}$$

Cauchy 在他的《数学练习》① (*Exercices de mathématique*)中,把量 F 本身称为**积分留数**.另外,当一个函数在两条积分路径所围的区域内有几个极点时,Cauchy 指出,必须取留数之和来得到沿着两条路径的积分之差.在这个关于留数的特别的一节中,他的两条路径仍构成一个矩形,但他取了很大的一个,并让边长变为无穷,使所有的留数都包含在内.

在《练习》② 中,Cauchy 指出 $f(z)$在 z_1 的留数也是 $f(z)$展为 $z - z_1$ 的幂级数展开式中项 $(z - z_1)^{-1}$ 的系数.很久以后,在 1841 年的一篇论文③ 中,Cauchy 给出了在一个极点的留数的一个新的表达式,即

$$F(z_1) = E[f(z)]_{z_1} = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)dz,$$

---

① Four vols., 1826~1830 = *Œuvres*, (2),6~9.

② Vol. 1,1826, 23 ~ 37 = *Œuvres*, (2),6,23 ~ 37.

③ *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, Vol. 2,1841, 48 ~ 112 = *Œuvres*, (2),12,48~112.

其中积分是沿着一个包含 $z=z_1$ 的小圆取的. 留数的概念及发展是 Cauchy 的一个重要贡献. 到此为止，他所给出的所有结果的直接应用都是计算定积分的值.

从 Cauchy 在他 1814 年论文的脚注中增加的内容以及 1825 年杰出的论文中写的东西，显然看出，他一定是通过长期而刻苦的思考才认识到，引进复量以后，实函数对之间的一些关系就获得它们的最简单的形式. 至于他从 Gauss 和 Poisson 的工作中究竟学到了多少东西那是不知道的.

在 1830 年到 1838 年间，当他住在都灵及布拉格时，他发表的工作是不连贯的. 在他的《分析与数学物理练习》(*Exercices d'analyse et de physique mathématique*，四卷，1840—1847)中，他引用了这些工作，且将其中的大部分重新刊入.

在 1831 年写成的发表较晚的一篇论文中①，他得到下述定理：函数 $f(z)$ 可以按照 Maclaurin 公式展成为一个幂级数，它对所有这样的 z 收敛，即 z 的绝对值小于那些使函数或其导数不为有穷或不为连续的 z.（在那时 Cauchy 所知道的奇点仅仅是我们现在称为极点的奇点.）他证明这个级数逐项按绝对值小于一个收敛的几何级数，其和数为

$$\frac{Z}{Z-z}\overline{f(z)},$$

其中 Z 是使 $f(z)$ 不连续的第一个值，$\overline{f(z)}$ 是就所有绝对值等于 $|Z|$ 的 z 而言 $|f(z)|$ 的最大值. 这样 Cauchy 就给出了函数可展为 Maclaurin 级数的一个有力的便于应用的判别法则，它用了一个现在称为强级数的比较级数.

在定理的证明中，他首先证明

① *Comp. Rend.*，4.，1837，216～218 = *Œuvres*，(1)，4，38～42；亦见 *Exercices d'analyse et de physique mathématique*，Vol. 2，1841，48～112 = *Œuvres*，(2)，12，48～112.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{z}f(\bar{z})}{\bar{z}-z}\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\bar{z}=|Z|e^{i\phi}$. 这个结果实际上就是我们现在所称的 Cauchy 积分公式. 然后他将分式 $\bar{z}/(\bar{z}-z)$ 展为 $z/\bar{z}$ 的幂的几何级数并证明了定理本身.

在这个定理中 Cauchy 还假定了由函数本身的连续性必然推出导数的存在性及连续性. 在他把这个材料重新写在他的《练习》中的时候,他曾与 Liouville 和 Sturm 通信并对以上定理的叙述增加了这样一句话,即收敛区域止于使函数及其导数不再为有穷或连续的 z 的那个值. 但他还是没有确信必须对导数加些条件,而且在后来的工作中他把它们删掉了.

在另一篇比较重要的关于复函数论的论文《关于伸展到一个闭曲线的所有的点的积分》①中,Cauchy 将[解析的] $f(z)=u+iv$ 沿着一个[单连通]区域边界曲线的积分和展布在这个区域上的积分联系起来. 若 u, v 是 x, y 的函数,则

$$(22)\qquad \begin{aligned}\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int u\mathrm{d}y+\int v\mathrm{d}x,\\ \iint\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int(-u\mathrm{d}x)+\int v\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中二重积分展布在区域上,而单积分沿着边界曲线. 现在,考虑到 Cauchy-Riemann 方程(见参考书目[13]),左边等于 0,两个等式的右边就是出现在

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z=\int(u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)=\int(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+i\int(u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x)$$

中的积分. 所以 $\int f(z)\mathrm{d}z=0$, 因而 Cauchy 得到了与路径无关的基本定理的一个新证明. 他对一个矩形证明了这定理,然后,推广到不自交的闭曲线. (这个定理 Weierstrass 在 1842 年也独立地得

① *Comp. Rend.*, 23,1846, 251 ~ 255 = *Œuvres*, (1),10,70~74.

到.)Cauchy 是否学习了 Green 1828 年的工作(第 28 章第 4 节)才得到他早期的一些概念的比较丰饶的公式表示,这点是不能肯定的,但这样的征兆是有的,因为 Cauchy 将以上结果推广到了曲面上的区域.

在以上提到的 1846 年论文和同一年的另一篇论文① 中,Cauchy 改变了他对复函数的观点,与他 1814,1825 及 1826 年的工作相对立.现在他关心的不再是实积分及其计值,而转到复函数理论本身,并为这个理论建立基础.在 1846 年的第二篇论文中,他给出了关于沿着一条任意闭曲线的积分 $\int f(z)\mathrm{d}z$ 的一个新的叙述:如果曲线包围着一些极点,那么积分的值是函数在这些极点上的留数之和的 $2\pi\mathrm{i}$ 倍.就是说

$$\int f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}E[f(z)], \tag{23}$$

其中 $E[f(z)]$ 是他用以表示留数之和的记号.

他还着手处理了多值函数的积分.② 论文的第一部分(其中他处理了单值函数的积分)叙述的内容并不比 Gauss 在给 Bessel 的信中关于 $\int \mathrm{d}x/x$ 或 $\int \mathrm{d}x/(1+x^2)$ 所指出的更多.这些积分确是多值的,而且它们的值与积分路径有关.

但 Cauchy 更进一步考虑积分号下的多值函数.在这篇论文中他说,如果被积函数是一个代数方程或超越方程的根,例如 $\int w^3\mathrm{d}z$(其中 $w^3 = z$),且如果沿着一条闭路径积分并又回到起点,那么被积函数现在就表示另外一个根.在这些情形中沿着闭路径积分的值依赖于起点;而沿着路径的延拓产生积分的不同的值.

---

① "Sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur," *Comp. Rend.*, 23,1846, 537 与 557～569 = *Œuvres*, (1),10, 133～134 与 135～143.

② "Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée," *Comp. Rend.*, 23,1846, 689～702 = *Œuvres*, (1),10, 153～168.

但若环绕路径充分多次使 w 回到它的原始值，那么积分的值将重复出现，因而积分是 z 的一个周期函数. 积分的**周期模**(*indices de périodicité*)不再像单值函数的情形那样，可以用留数表示了. Cauchy 关于多值函数的积分的概念依然是模糊的.

自 1821 年以后，差不多 25 年中，Cauchy 单独一人发展了复函数理论. 1843 年他的同国人才开始继续他的工作. Pierre-Alphonse Laurent(1813—1854)，单独工作并发表了在 1843 年得到的一个较重要的结果[①]. 他证明，当一个函数在一孤立点上不连续时，就必须用变数的升幂及降幂展开式来代替 Taylor 展开式. 如果函数和它的导数在一个圆环内单值并连续，这个圆环的中心是孤立点 a，则函数以相反方向沿着圆环的两个边界圆所取的积分适当展开后就给出 z 的升幂及降幂的一个展开式，它在圆环内收敛. 这个 Laurent 展开式是

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \tag{24}$$

它是 Taylor 展开式的一个推广. 这个结果 Weierstrass 在 1841 年就已知道，但未发表[②].

Victor-Alexandre Puiseux 研究了多值函数的问题. 1850 年 Puiseux 发表了一篇著名的论文[③]，论 $f(u, z) = 0$ 给出的复代数函数，其中 f 是 u 和 z 的多项式. 他第一次搞清了极点与支点的区别(Cauchy 几乎没有觉察到这一点)，并且引进了本性奇点(一个无穷阶的极点)的概念，对这个概念 Weierstrass 曾独立地促使人们注意. 这样的点可以用 $e^{1/z}$ 在 $z = 0$ 作为例子. 虽然 Cauchy 在 1846 年的论文中确实考虑了简单多值函数沿着包围支点的几条路径的变化，但是 Puiseux 也澄清了这个问题. 他证明了如果 u_1

---

① *Comp. Rend.*, 17, 1843, 348～349；文章全文发表在 *Jour. de l'Ecole Poly.*, 23, 1863, 75～204.

② *Werke*, 1, 51～66.

③ *Jour. de Math.*, 15, 1850, 365～480.

是 $f(u, z)=0$ 的一个解,而且 z 沿着某一条路径变化,则 u_1 的最后值并不依赖于路径,只要这个路径确实不包围使 u_1 为无穷的任何点,也不包围使 u_1 等于其他解的任何点(即一个支点).

Puiseux 还证明了,z 的函数在支点 $z=a$ 处附近的展开式必须含有 $z-a$ 的分数次幂. 于是他改进了 Cauchy 的把函数展为 Maclaurin 级数的定理. Puiseux 得到 $f(u, z)=0$ 的解 u 的一个展开式,它不是展成 z 的幂而是展成 $z-c$ 的幂,所以这个展开式在一个以 c 为中心,并且不含极点或支点的圆内是正确的. 然后 Puiseux 让 c 沿着一条路径变化,使那些收敛圆部分重叠,并使在一个圆内的展开式可以延伸到另一个圆. 这样,从 u 在一点的值开始,可以沿着任何一条路径了解它的变化.

通过他对于多值函数和它们在复平面上的支点的有意义的研究,并且通过他对于这种函数的积分的创始性工作,Puiseux 把 Cauchy 在函数论方面的先驱性工作推进到可以称为第一阶段的尽头. 多值函数和它们的积分的理论中的困难尚待克服. Cauchy 的确写了关于多值函数的积分的其他论文①,在其中他企图跟上 Puiseux 的工作;虽然他引进了分支切割的概念,但他对极点和支点的区别仍然混淆不清. 代数函数及其积分的这个课题要由 Riemann 来继续进行(第 8 节).

在 1851 年《报告》(*Comptes Rendus*)的另外几篇论文中②,Cauchy 给出了关于复函数性质的一些更谨慎的叙述. 特别地,Cauchy 肯定了复函数本身及其导数的连续性对于幂级数展开式是必需的. 他还指出作为 z 的函数的 u 在 $z=a$ 处的导数与 $x+iy$ 平面上 z 趋于 a 的方向无关,且 u 满足 $\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2=0$.

Cauchy 在 1851 年的这些论文中引进了新的术语. 对于某一

---

① *Comp. Rend.*, 32,1851,68~75 与 162 ~ 164 = *Œuvres*, (1),11,292~300 与 304~305.

② *Œuvres*, (1),11.

区域中 z 的每一个值，当函数是单值的时候，他用了 monotypique 或 monodrome. 一个函数是 monogen，如果对于每一个 z，它恰有一个导数(即，导数与路径无关). 他称一个永不为无穷的、恰有一个导数的、单值函数为 synectique. 后来 Charles A. A. Briot (1817—1882)和 Jean-Claude Bouquet(1819—1885)引进了"holomorphic"(全纯)代替 synectique，并用"meromorphic"(亚纯)称在区域中只有极点的函数.

5. Weierstrass 探讨函数论的途径

正当 Cauchy 在由解析式表示的函数的导数和积分的基础上建立函数论的时候，Karl Weierstrass 开辟了一条新的探讨途径. 他于 1815 年出生在威斯特伐利亚(Westphalia)，在波恩大学学习法律. 学了四年以后，他在 1838 年转向数学的学习，但未完成博士工作，而是得到许可，当一个高中(gymnasium)教员，从 1841 年到 1854 年他教年轻人的写作课及体育课. 这些年间他与数学界没有接触，但他刻苦地进行数学研究. 在这段时间内他发表的少数几个结果使他在 1856 年获得在柏林的工学院讲授技术课程的位置. 同一年他成为柏林大学的讲师，随后在 1864 年成为教授，一直担任这一职位到 1897 年去世.

他是一个有条理而又苦干的人. 不像 Abel, Jacobi, Riemann 那样，他没有直觉的闪光. 事实上他不信任直觉，而是致力于使数学推理建立在一个牢固的基础上. 有鉴于 Cauchy 的理论建立在几何的基础上，Weierstrass 转而构造实数理论；这个工作约在 1841 年完成之后(第 41 章第 3 节)，他在幂级数的基础上建立起解析函数的理论，并建立起解析开拓的方法，幂级数的技巧是他从他的老师 Christof Gudermann(1798—1852)那里学来的. 这个工作是在 19 世纪 40 年代完成的，虽然当时他并没有发表. 他在函数

论的许多其他方面作出了贡献,并研究了天文学中的 n 体问题和光的理论.

很难确定 Weierstrass 的创作的日期,因为当他第一次得到这些创造时发表的并不多.通过他在柏林大学的讲演,他的许多工作才被数学界知道.当他在 19 世纪 90 年代出版他的《著作集》(*Werke*)时,他并不担心优先权,因为他的很多结果在当时已被其他人发表,他更关心的是阐明他发展函数论的方法.

用幂级数表示已用解析形式给出的复函数,自然是众所周知的.但是,从已知的一个在限定区域内定义一个函数的幂级数出发,根据幂级数的有关定理,推导出在其他区域中定义同一函数的另一些幂级数,这个问题是 Weierstrass 解决的.一个在以 a 为圆心以 r 为半径的圆 C 内收敛的 $z-a$ 的幂级数,代表一个函数,它在圆 C 内的每一个 z 值上解析.在圆内选择一点 b 并利用原始级数所给出的函数及其各阶导数的值,可以得到 $z-b$ 的一个新的幂级数,它的收敛圆 C' 与第一个圆交叠.在两个圆的公共点上,这两个级数给出函数的同一个值.但是,对于 C' 的处在 C 外部的点,第二个级数的值是第一个级数定义的函数的一个解析开拓.尽可能地继续下去,从 C' 接连地开拓到其他的圆,就得到 $f(z)$ 的全部解析开拓,完全的 $f(z)$ 便是在所有的圆中、在所有点上的值的集合.每一个级数称为函数的一个元素.

在增加越来越多的收敛圆以拓广函数的定义域的过程中,一个新圆也许可能覆盖链中不直接在它前面的一个圆的一部分,并且在这个新圆和前面一个圆的公共部分中函数的值可能不一致,这时函数便是多值的.

在这个过程中可能出现的奇点(极点或支点),必定位于幂级数的收敛圆的边界上,如果一个奇点的阶是有穷的,那么它是由 Weierstrass 包含在函数之中的,因为在这样一个点上 $(z-z_0)^{1/n}$ 的幂级数展开式只可能有有穷个负指数的项.为了得到在 $z=\infty$

附近的展开式,Weierstrass 使用 $1/z$ 的级数. 如果函数元素在全平面收敛,Weierstrass 就称它为一个整函数. 如果它不是一个有理整函数,即不是一个多项式,那么它在∞处便有一个本性奇点(例如 $\sin z$).

Weierstrass 还给出幂级数的第一个例子,它的收敛圆是它的自然边界,即圆是奇点曲线,并且给出了一个解析表达式的一个例子,它在平面的不同部分可以代表不同的解析函数.

6. 椭圆函数

在这个世纪前半叶,可与复函数论基本定理的发展相提并论的,有椭圆函数及以后的 Abel 函数的特殊发展. 毫无疑问,Gauss 得到了椭圆函数论中的许多关键性的结果,因为其中许多是在他死以后,在一些他从未发表过的论文中找到的. 不过,公认的椭圆函数论的创始人是 Abel 和 Jacobi.

Niels Henrik Abel(1802—1829)是一个穷牧师的儿子. 作为在挪威奥斯陆学习的一个学生,他有幸以 Berndt Michael Holmböe(1795—1850)作为老师. 后者看出 Abel 的天才,并预言 Abel 17 岁时将成为世界上最大的数学家. 在奥斯陆和哥本哈根学习完以后,Abel 得到了一笔奖学金,使他能够出外旅行. 在巴黎他被介绍给 Legendre, Laplace, Cauchy 及 Lacroix,但他们无视他,用完了钱以后,他到柏林去和 Crelle 一起度过了 1825—1827 年. 他自己写道,当他回到奥斯陆时极度疲竭,以至他需依靠在一所教堂的门上. 为了钱,他给年轻学生教课. 通过他发表的工作,他开始引起人们的注意,Crelle 曾想,他也许可以为 Abel 在柏林大学谋一个教授的位置. 但 Abel 生了肺病,并于 1829 年去世.

Abel 知道 Euler, Lagrange, Legendre 在椭圆积分方面的工作,他从事于这一工作也许是从 Gauss 所作的评论,特别是他的

《算术研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*)中的陈述得到启发的.他自己从1825年起开始写论文,他把他关于积分的重要论文于1826年10月30日送到巴黎科学院,以便能在它的杂志上发表.这篇论文是《关于很广一类超越函数的一个一般性质》,包含了Abel大定理(第7节).当时科学院的秘书Fourier读了论文的引言,然后委托Legendre和Cauchy对论文作出评价,后者是主要负责人.这篇论文很长并且很难,这只是因为它包含了许多新的概念.Cauchy把它放在一旁,醉心于自己的工作.Legendre把它忘了.Abel去世以后,当他已经有了名望时,科学院寻找这篇论文,找到之后于1841年发表[①].Abel在《Crelle杂志》和Gergonne的《年报》上发表了其他关于方程论和椭圆函数的论文.这些论文从1827年起开始刊出.因为Abel 1826年的主要论文到1841年才发表,所以其他的一些作者,读了这段时期内发表的限制较多的定理,独立地得到了许多Abel 1826年的结果.

另一个椭圆函数的发现者是Carl Gustav Jacob Jacobi(1804—1851).和Abel不一样,他过着安静的生活.他出生于波茨坦(Potsdam)的一个犹太人家庭,在柏林大学学习,到1827年成为哥尼斯堡(Königsberg)的一个教授.1842年,由于健康不良,他放弃了他的职位.普鲁士政府给了他退休金,退隐到柏林,于1851年去世.他在世的时候声誉就很高,他的学生把他的思想散播到各个地方.

Jacobi讲授椭圆函数多年.他对这一课题的探讨成为函数论本身发展所遵循的模式.他还研究了函数行列式(Jacobi行列式)、常微分方程和偏微分方程、动力学、天体力学、流体动力学、超椭圆积分和超椭圆函数.Jacobi常被认为是一个纯粹数学家,但是,像他那个世纪和前一些世纪中的几乎所有的数学家一样,他最认真地研究自然界.

---

① *Mém. des. sav. étrangers*, 7,1841, 176～264 = *Œuvres*, 145～211.

当 Abel 研究椭圆函数的时候,Jacobi(他也已经读过Legendre关于椭圆积分的工作)在 1827 年开始研究椭圆函数. 他送了一篇没有证明的论文给《天文报告》(*Astronomische Nachrichten*)①. 差不多在同一时间,Abel 独立地发表了他的《关于椭圆函数的研究》②. 两个人都达到了从椭圆积分的反函数着手研究这一关键性想法,这个想法 Abel 从 1823 年就已经有了. Jacobi 后来给出了他在 1827 年发表的结果的证明,发表在 1828—1830 年的《Crelle 杂志》的几篇文章中. 此后两个人都发表了关于椭圆函数的论文;不过 Abel 在 1829 年就去世,而 Jacobi 活到 1851 年,因而能够发表多得多的东西. 特别地,Jacobi 1829 年的《椭圆函数基本新理论》(*Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*)③成了椭圆函数的一本关键性的著作.

通过 Jacobi 的来信,Legendre 熟悉了 Jacobi 和 Abel 的工作. 1828 年 2 月 9 日他在给 Jacobi 的信中说:"我很满意地看到两个年轻数学家如此成功地开辟了分析的一个分支,它很久以来是我喜爱的领域,但在我自己的国家中它却没有受到应有的重视."后来 Legendre 发表了他的《椭圆函数专著》(*Traité des fonctions elliptiques*,二卷,1825—1826)的三个补篇,其中他叙述了 Jacobi 和Abel的工作.

一般椭圆积分牵涉到

$$u=\int R(x,\ \sqrt{P(x)})\,\mathrm{d}x, \tag{25}$$

其中 $P(x)$是一个具有不同根的三次或四次多项式,$R(x,\ y)$是 x 和 y 的一个有理函数. 企图推断 x 的函数 u 的一般性质的努力失败了,这是因为对于 Euler 和 Legendre 来说,积分的意义本身是

① *Astron. Nach.*, 6,1827, 33～38 = *Werke*, 1,31～36.

② *Jour. für Math.*, 2,1827,101～181 与 3,1828, 160～190 = *Œuvres*, 263～388.

③ *Werke*, 1,49～239.

受到限制的. $P(x)$的系数是实的,x的取值范围是实的,并且不包含$P(x)=0$的根. 有了复函数理论的更多知识,研究x的函数u就有可能前进一步,但这个见解没有获得效果. 结果证明,Abel和Jacobi的想法较好.

具体地说,Legendre引进了(第19章第4节)椭圆积分$F(k, \phi)$, $E(k, \phi)$及$\pi(n, k, \phi)$. 1826年左右,Abel注意到,如果(例如考虑$F(k, \phi)$)研究

$$(26)\qquad u=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},$$

其中$x=\sin\phi$, 那么会遇到像研究

$$u=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$$

时出现的同样的困难. 较好的关系来自把x作为u的函数来研究. 因此Abel建议在椭圆积分情形中,把x作为u的函数来研究. 由于$x=\sin\phi$, 所以ϕ也可作为u的函数.

Jacobi引进了①记号

$$\phi=\mathrm{am}\, u.$$

表示(26)定义的u的函数ϕ. 他还引进了

$$\cos\phi=\cos\mathrm{am}\, u \text{ 和 } \Delta\phi=\Delta\mathrm{am}\, u=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}.$$

这个记号被Gudermann简化为

$$x=\sin\phi=\sin\mathrm{am}\, u=\mathrm{sn}\, u,\ \cos\phi=\cos\mathrm{am}\, u=\mathrm{cn}\, u,$$
$$\Delta\phi=\Delta\mathrm{am}\, u=\mathrm{dn}\, u.$$

我们立刻有

$$\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{cn}^2 u=1,\ \mathrm{dn}^2 u+k^2\mathrm{sn}^2 u=1.$$

如果ϕ换为$-\phi$,则u变号. 故有

$$\mathrm{am}(-u)=-\mathrm{am}\, u,\ \mathrm{sn}(-u)=-\mathrm{sn}\, u,$$
$$\mathrm{cn}(-u)=\mathrm{cn}\, u,\ \mathrm{dn}(-u)=\mathrm{dn}\, u.$$

---

① *Fundamenta Nova*, 1829.

由下式定义的量 K 起着三角函数中 π 的作用,

$$K=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=F\left(k,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

与 K 联系着的是超越量 K',它作为 k' 的函数相同于 K 作为 k 的函数,其中 k' 由 $k^2+k'^2=1$ 定义,$0<k<1$.

关于 K 及 K',重要的是(在这里不证明)

$$\mathrm{sn}(u+4K)=\mathrm{sn}\,u,\ \mathrm{cn}(u+4K)=\mathrm{cn}\,u,\ \mathrm{dn}(u\pm 2K)=\mathrm{dn}\,u.$$

所以 $4K$ 是椭圆函数 $\mathrm{sn}\,u$ 和 $\mathrm{cn}\,u$ 的周期,而 $2K$ 是 $\mathrm{dn}\,u$ 的周期.

到此为止,函数 $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ 和 $\mathrm{dn}\,u$ 都只对实的 x 和 u 定义. Abel已有了把每一个函数看作是一个元素的想法,因为每一个函数只是对实值有定义. 他的下一个想法便是引进 u 的复值,在总体上来定义椭圆函数. 关于复函数的知识,Abel 在他访问巴黎时就熟悉了 Cauchy 的工作. 事实上,他曾研究了变数和指数都取复值的二项式定理. 首先推广到纯虚值是利用所谓 Jacobi 的虚变换来完成的. Abel 引进了

$$\sin\theta=\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\phi,\ \cos\theta=\frac{1}{\cos\phi},\ \Delta(\theta,\ k)=\frac{\Delta(\phi,\ k')}{\cos\phi},$$

其中 $\theta=\mathrm{am}\,\mathrm{i}u$, 从而有

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}u,\ k)=\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{sn}(u,\ k')}{\mathrm{cn}(u,\ k')},\ \mathrm{cn}(\mathrm{i}u,\ k)=\frac{1}{\mathrm{cn}(u,\ k')},$$

$$\mathrm{dn}(\mathrm{i}u,\ k)=\frac{\mathrm{dn}(u,\ k')}{\mathrm{cn}(u,\ k')}.$$

Abel 除了允许他的变量取纯虚值以外,还建立了椭圆函数的加法定理. 在

$$u=A(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

的情形,我们知道这个积分是多值函数 $A(x)=\arcsin x$, 并且有

$$A(x_1)+A(x_2)=A(x_1y_2+x_2y_1), \tag{27}$$

其中 y_1 和 y_2 是相应的余弦值;即 $y_1=\sqrt{1-x_1^2}$. 但在这种情形下

引进单值的反函数 $x = \sin u$ 就可以得到很大的简化，替代(27)，我们有熟知的正弦函数加法定理. 现在在

$$u = E(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R(x)}}$$

的情形(其中 $y^2 = R(x)$ 是一个四次多项式)，Euler 曾经得到加法定理(第 19 章第 4 节)

$$E(x_1) + E(x_2) = E(x_3),$$

其中 x_3 是 x_1，x_2，y_1，y_2 的一个已知的有理函数，并且 $y = \sqrt{R(x)}$. Abel 认为对反函数 $x = \phi(u)$，也许有一个简单的加法定理，而这一点被证明是对的. 这个结果也出现在他的 1827 年的论文中. 于是对于实的 u 及 v 有

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \tag{28}$$

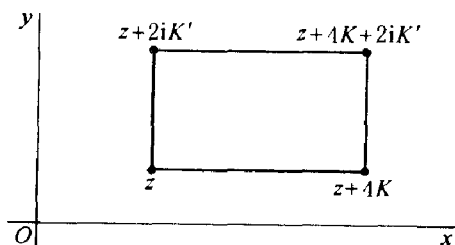


图 27.5

对于 $\operatorname{cn}(u+v)$ 及 $\operatorname{dn}(u+v)$ 亦有类似的公式. 这些就是椭圆函数的加法定理，是椭圆积分加法定理的类似物.

对于自变量的实值和虚值定义了椭圆函数以后，Abel借助于加法定理，便将定义推广到复值. 因为，若 $z = u + \mathrm{i}v$，则由加法定理，$\operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(u + \mathrm{i}v)$ 就有了意义，分别用 u 和 $\mathrm{i}v$ 的 sn，cn 和 dn 表出.

随之还有

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(\mathrm{i}u + 2\mathrm{i}K', k) &= \operatorname{sn}(\mathrm{i}u, k), \\ \operatorname{cn}(\mathrm{i}u + 4\mathrm{i}K', k) &= \operatorname{cn}(\mathrm{i}u, k), \\ \operatorname{dn}(\mathrm{i}u + 4\mathrm{i}K', k) &= \operatorname{dn}(\mathrm{i}u, k). \end{aligned} \tag{29}$$

所以，$\operatorname{sn} z$ 的周期(不是唯一的)是 $4K$ 及 $2\mathrm{i}K'$；$\operatorname{cn} z$ 的周期是 $4K$ 及 $2K + 2\mathrm{i}K'$；$\operatorname{dn} z$ 的周期是 $2K$ 及 $4\mathrm{i}K'$. 关于周期，重要的一点

是存在两个周期(它们的比不是实数),因而这些椭圆函数是双周期的. 这是 Abel 的伟大发现之一. 这些函数是单值的,所以只须在复平面的一个平行四边形中(图 27.5)研究它们,因为它们在每一个全等的平行四边形中重复它们的性质. 椭圆函数除去是单值的双周期的以外,只有一个本性奇点,在∞处. 事实上可以用这些性质定义椭圆函数. 在每一个周期平行四边形中,它们的确有极点.

Abel 引进了椭圆积分的反演(Legendre 忽略了这一点,而这被证明是探索椭圆积分的关键),尽管他是从 Legendre 那里取得可能是他一生工作的精华的,但 Legendre 称赞 Abel 说:"这个年轻的挪威人的智力是多高啊."Charles Hermite 说 Abel 留下了一些思想,可供数学家们工作 150 年.

Abel 所得到的结果中,有许多被 Jacobi 独立地得到了,前面已指出过,他在这方面的第一篇论文,出现在 1827 年. Jacobi 知道他在《新基本》(*Fundamenta Nova*)中所用的基本方法是不令人满意的,并且部分地在这本书中的某些地方和他在以后的演讲中,采用了不同的起点. 他的演讲从未全部发表,但通过他的学生们的信件和笔记,这些演讲的实质内容相当全面地被知晓了. 在他的新的探讨中,他把他的椭圆函数理论建立在被称为 θ 函数这一辅助函数的基础上,它是用

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2t+2niz} \tag{30}$$

为例来说明的,其中 z 及 t 是复数,且 $\mathrm{Re}(t)>0$. 这个级数在 z 平面的任何有界区域内都绝对一致收敛. Jacobi 引进了四个 θ 函数,然后利用这些函数来表示出 $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ 和 $\mathrm{dn}\,u$. θ 函数是可以构造出椭圆函数的最简单的元素. 他还得到 θ 函数的各种无穷级数和无穷乘积的表示式. 对于 Abel 工作中想法的进一步研究将 Jacobi 引导到研究 θ 函数与数论之间的关系. 这个联系随后由 Hermite,

Kronecker 以及其他人继续进行. θ 函数的多种不同形式之间的关系的研究是 19 世纪数学家的一个较重要的活动. 它是常见的贯穿在数学中的许多流行一时的风尚之一.

在 1835 年的一篇重要论文①中, Jacobi 证明了单变量的一个单值函数, 如果对于自变量的每一个有穷值具有有理函数的特性(即为一亚纯函数), 它就不可能有多于两个的周期, 而周期的比必须是一个非实数. 这个发现开辟了一个新的研究方向, 即, 找出所有的双周期函数的问题. 就在 1844 年②, Liouville 在给法国科学院的一封信中, 说明如何从 Jacobi 的定理出发建立双周期椭圆函数的一个完整的理论. 这个理论是椭圆函数方面的一个较重要的贡献. 在双周期性中 Liouville 发现了椭圆函数的一个实质性质及其理论的一个统一观点, 虽然双周期函数是比 Jacobi 称之为椭圆函数的更广的一类函数, 但双周期函数的确具有椭圆函数的所有的基本性质.

Weierstrass 于 1860 年左右开始研究椭圆函数, 他从 Gudermann 那里学习了 Jacobi 的工作, 并从 Abel 的论文里学习了 Abel 的工作. 这些论文给他的印象如此之深, 以至于后来经常督促他的学生们读 Abel 的著作. 这时, 为了他的教员证明书, 他研究了 Gudermann 给他指定的一个问题, 即把椭圆函数表示成为幂级数的商. 他做到了这一点. 作为一个教授, 在他的讲演中他经常重新作出他的椭圆函数理论.

Legendre 曾将椭圆积分简化成含有一个四次多项式的平方根的三个标准形式. Weierstrass 得到含有一个三次多项式的平方根的三个不同形式③, 即

---

① *Jour. für Math.*, 13, 1835, 55 ~ 78 = *Werke*, 2, 23~50.

② *Comp. Rend.*, 19, 1844, 1261~1263 与 32, 1851, 450~452.

③ *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1882, 443 ~ 451 = *Werke*, 2, 245~255; 亦见 *Werke*, 5.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

他把“反演”第一个积分所得的椭圆函数作为基本的椭圆函数.就是,如果

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

那么 u 的椭圆函数 x 就是 Weierstrass 的

$$x = \wp(u) = \wp(u \mid g_2, g_3).$$

为了使 $\wp(u)$ 不退化为一个指数函数或三角函数,必须有判别式 $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$,换句话说,x 的三次多项式的三个根应该是不相等的.Weierstrass 的双周期 $\wp(u)$ 起着 Jacobi 理论中 sn u 的作用并且提供了最简单的双周期函数.他证明了每一个椭圆函数可以借助于 $\wp(u)$ 和他的导数很简单地表示出来.在 Weierstrass 的探讨中,椭圆函数的“三角学”比较简单,但 Jacobi 的函数和 Legendre 的椭圆积分对于数值计算比较好.

Weierstrass 实际上是从他的 $\wp(u)$ 的一个元素出发,即

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{4\cdot 5}u^2 + \frac{g_3}{4\cdot 7}u^4 + \cdots \quad (g_2, g_3 \text{ 是复的}),$$

这个元素是他利用解以上积分给出的关于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ 的微分方程得到的.然后,类似于 Abel 的方式,利用关于 $\wp(u)$ 的加法定理得出整个函数.Weierstrass 的工作完备了、改写了并且美化了椭圆函数的理论.

虽然我们将不进入特殊细节的讨论,但在我们离开椭圆函数这个课题以前,不能不提一下 Charles Hermite(1822—1901)的工作,他是巴黎大学理学院(Sorbonne)和多科工艺学校的教授.他从学生时代起就经常研究椭圆函数.他在 1892 年写道:“我不能离开椭圆领域.山羊被系在那里,就必须在那里吃青草.”他创作

了理论本身中的基本结果,并研究了与数论的联系. 他应用了椭圆函数解五次多项式方程,并处理了包含这种函数的力学问题. 他也由于对 e 的超越性的证明和他引进的 Hermite 多项式而闻名于世.

7. 超椭圆积分与 Abel 定理

在椭圆积分(25)和相应函数的研究中所取得的成功鼓励着数学家们去处理一种更难类型的积分——超椭圆积分.

超椭圆积分具有形式

$$\int R(x, y)\,dx, \tag{31}$$

其中 $R(x, y)$是 x 和 y 的一个有理函数, $y^2 = P(x)$, 并且 $P(x)$的次数最少是五. 当 $P(x)$是五次或六次时,这种积分在 19 世纪中期,被称为超椭圆积分. 为了强调复值,通常把它写成

$$\int R(u, z)\,dz, \tag{32}$$

而 $P(z)$通常被写成

$$u^2 = P(z) = A(z-e_1)\cdots(z-e_n). \tag{33}$$

当然 u 是 z 的一个多值函数.

在形如(32)的积分中,有一些是处处有穷的. 这些基本的积分是

$$u_1 = \int \frac{dz}{u},\ u_2 = \int \frac{z\,dz}{u},\ \cdots,\ u_p = \int \frac{z^{p-1}\,dz}{u}, \tag{34}$$

其中 u 由(33)给出,而 $p = (n-2)/2$ 或 $(n-1)/2$, 依 n 是偶或奇而定. 对于 $n = 6$ (因而 $p = 2$),有两个这样的积分. 一般积分(32)最多有极点和对数奇点,即像 $\log z$ 在 $z = 0$ 处那样的奇点. 那些第一类的积分,即那些处处有穷因而没有奇点的积分,总是可以借助于线性无关的 p 个积分(34)表示出来.

对于 $n=6$ (因而 $p=2$)的情形,第二类积分的范例是

$$\int \frac{z^2 \mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}}, \int \frac{z^3 \mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}}, \tag{35}$$

其中 $P(z)$是一个六次多项式. 对于 $n=6$, 第一类和第二类积分每个都有四个周期.

超椭圆积分是上限 z 的函数,如果下限固定的话. 假定我们用 w 表示这样 -个函数. 那么,像椭圆积分的情形一样,可以提出什么是 w 的反函数 z 的问题. Abel 处理了这个问题,但他没有解决;后来 Jacobi 着手处理了这问题①. 我们按照 Jacobi 那样来考虑特殊的超椭圆积分

$$w=\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}},\ w=\int_0^z \frac{z\mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}}, \tag{36}$$

其中 $P(z)$是一个五次或六次多项式. 在这里,要将 z 确定为 w 的单值函数,经验证明是没有希望的. 事实上,Jacobi 证明,对于五次的 $P(z)$,这种积分的单纯反演并不引到一个单演函数. 对 Jacobi 说来,反函数是不合理的,因为在每一种情形下 z 作为 w 的函数是无穷多值的;而在当时这种函数并不能被很好地理解.

Jacobi 决定考虑这种积分的组合. 在 Abel 定理(看下面)的指引下(这个定理的叙述他至少是知道的,因为大部分内容已经发表),Jacobi 的做法如下:考虑方程

$$\int_0^{z_1} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}}+\int_0^{z_2} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}}=w_1, \tag{37}$$

$$\int_0^{z_1} \frac{z\mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}}+\int_0^{z_2} \frac{z\mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}}=w_2. \tag{38}$$

Jacobi 成功地证明了,对称函数 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是 w_1 和 w_2 的单值函数,具有**四**个周期的一个系统. 于是就得到两个变数 w_1 和 w_2 的函数 z_1 和 z_2, 他还给出了这些函数的一个加法定理. Jacobi 遗

① *Jour. für Math.*, 9,1832, 394 ～ 403 = *Werke*, 2,7～16, 与 *Jour. für Math.*, 13,1835, 55 ～ 78 = *Werke*, 2,25～50 与 516～521.

留下许多不完全之处,他说:“对于 Gauss 的那种严密性,我们没有时间.”

推广椭圆与超椭圆积分的研究是由 Galois 开始的,不过较重要的开创性步骤是 Abel 在 1826 年的论文中作出的. 他考虑(32),即

$$\int R(u,\ z)\mathrm{d}z, \tag{39}$$

但原来(33)那里的 u 和 z 只是由一个多项式如 $u^2 = P(z)$ 联系着,因而代替(33),Abel 考虑一个一般的含 z 和 u 的代数方程

$$f(u,\ z) = 0. \tag{40}$$

方程(39)和(40)定义一个 Abel *积分*,它包含椭圆与超椭圆积分作为特殊情形.

虽然 Abel 没有将 Abel 积分的研究推进很远,但他证明了这方面的一个关键性定理. Abel 的基本定理是椭圆积分加法定理(第 19 章第 4 节)的一个很宽的推广. 这个定理和证明是在他 1826 年的巴黎论文中,定理的叙述刊在 1829 年的《Crelle 杂志》① 上. 考虑积分

$$\int R(x,\ y)\mathrm{d}x, \tag{41}$$

其中 x 与 y 由方程 $f(x,\ y) = 0$ 联系,f 为 x 和 y 的一个多项式. 在 Abel 写的文章中,x 和 y 作为实变数,虽然偶尔也以复数出现. 非严谨地叙述起来,Abel 定理是这样的:“几个具有形式(41)的积分之和可以用 p 个这样的积分加上一些代数的与对数的项表示出来. 另外,这个数 p 只依赖于方程 $f(x,\ y) = 0$,而事实上,它就是这个方程的亏格(genus).

为了得到一个更精确的叙述,设 y 是 x 的代数函数,由下式定义:

---

① *Jour. für Math.*, 4, 212 ~ 215 = *Œuvres*, 515~517.

(42) $$f(x, y) = y^n + A_1 y^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

其中 A_i 是 x 的多项式,而多项式(42)不可能分解成同样形式的因式. 设 $R(x, y)$是 x 和 y 的任一有理函数. 则任何 m 个相似积分之和

(43) $$\int^{(x_1, y_1)} R(x, y)\mathrm{d}x + \cdots + \int^{(x_m, y_m)} R(x, y)\mathrm{d}x$$

(其下限固定,但是任意),可以用 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 的有理函数与这种有理函数的对数加上 p 个积分

(44) $$\int^{(z_1, s_1)} R(x, y)\mathrm{d}x, \cdots, \int^{(z_p, s_p)} R(x, y)\mathrm{d}x$$

之和来表示,其中 $z_1, \cdots, z_p$ 是 x 的值,可从 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 作为一个代数方程的根确定出来,这个方程的系数是 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 的有理函数,而 $s_1, \cdots, s_p$ 是由(42)确定的相应的 y 值,而任一 s_i 可以确定为 z_i 及 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 的一个有理函数. 这样用$(x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)$来确定$(z_1, s_1), \cdots, (z_p, s_p)$的关系必须假定在积分的各阶段中都成立;特别是这些关系确定出后面 p 个积分的下限,用开始的 m 个积分的下限表示. 数 p 不依赖于 m,不依赖于有理函数 $R(x, y)$的形式,也不依赖于 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 的值,但它确实依赖于联系 y 与 x 的基本方程(42).

在 $f = y^2 - P(x)$, $P(x)$是一个六次多项式而 $p = (n-2)/2 = 2$ 的超椭圆积分的情况下,Abel 定理的主要部分是说

(45) $$\begin{aligned}&\int_0^{x_1} R(x, y)\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^{x_m} R(x, y)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{A} R(x, y)\mathrm{d}x + \int_0^{B} R(x, y)\mathrm{d}x\\ &\quad + R_1(x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m, A, y(A), B, y(B))\\ &\quad + \sum \text{const.} \log R_2(x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m,\\ &\qquad A, y(A), B, y(B)),\end{aligned}$$

其中 R_1 和 R_2 是它们的变数的有理函数.

Abel 对一般的 $f(x, y)=0$ 的少数几种情形,实际上计算了数 p. 虽然他没有看出他的结果的全部意义,但他肯定在 Riemann 以前就认识到了亏格的概念并且建立了 Abel 积分这个科目. 他的论文很难懂,部分地是因为他试图利用实际计算结果来证明我们今天称之为存在定理的东西. 后来的证明很大地简化了 Abel 的证明(也看第 39 章第 4 节). Abel 没有考虑反问题. 所有关于超椭圆积分和 Abel 积分的反演的工作,一直到 Riemann 出现,都受到处理多值函数有局限性的方法的妨碍.

8. Riemann 与多值函数

在 1850 年左右,在函数论方面取得成就的一段时期告终了. 严密的方法(像 Weierstrass 所提供的),结果的准确描写和无疑问的存在性证明,在任何一种数学训练中都标志着发展中的一个重要的但也是最后的阶段. 进一步的发展必须有一段先行时期,充满着自由的、繁多的、不连贯的、常常是偶然发现的、而且也许是无秩序的创造. Abel 定理就是这样的一步. 在代数函数、它们的积分和反函数的理论中,一个新的发明时期是属于 Riemann 的. 他实际上提供了一个宽广得多的理论,即多值函数的处理. 在这方面只有 Cauchy 与 Puiseux 曾作过研究,并且由此为几个不同的进展铺平了道路.

Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826—1866)是 Gauss 和 Wilhelm Weber 的学生. 1846 年到格丁根学神学,但不久就转学数学. 他的 1851 年的博士论文是在 Gauss 指导下写的,题目是《单复变函数的一般理论的基础》[①],是复函数论的一篇基本论文. 三年以后他成为格丁根的一个无薪大学教员(*Privatdozent*),即被允许作一些讲演并收学生的酬金. 为了获得无薪大学教员的资格,

① *Werke*, 3~43.

他写了大学讲师就职论文《关于利用三角级数表示一个函数的可能性》(*Habilitationsschrift*),并且作了一个大学讲师就职讲演《关于几何基础的假设》(*Habilitationsvortrag*). 在这以后又写了一批有名的论文. 1859 年 Riemann 接替 Dirichlet 作为格丁根的数学教授,他死于肺病.

Riemann 常被描述为一位纯粹数学家,但这远非正确. 虽然他对数学本身作了很多贡献,但他深深地关心于物理以及数学与物理世界的关系. 他写了关于热、光、气体理论、磁、流体力学以及声学方面的论文. 他企图将引力与光统一起来,并研究了人耳的结构. 他的关于几何基础的工作试图找出我们对于物理空间的知识哪一些是绝对可靠的(第 37 章). 他自己说,他的关于物理定律的工作是他的主要兴趣. 作为一个数学家,他自由地运用几何直观及物理论证. 基于 Felix Klein 给出的证据,Riemann 的复函数思想很可能是来自他研究平面电流的流动. 位势方程是那个科目的中心,而在 Riemann 对复函数的探讨中也是这样.

在 Riemann 对多值函数的探讨中,关键思想是 Riemann 面的概念. 函数 $w^2 = z$ 是多值的,事实上对于 z 的每一个值,有 w 的两个值. 为了研究这个函数并保持两个值集 $\sqrt{z}$ 和 $-\sqrt{z}$ 分开,即把分支分开来, Riemann 给每一分支引进一个 z 值平面. 他还附带地在每一平面上引进一个点对应于 $z=\infty$. 这两个平面被看作是一个位于另一个的上方,并且首先是在两个分支给出相同 w 值的那些 z 值上连接起来. 这样, $w^2 = z$ 的这两个平面(或称为叶)就在 $z=0$ 和 $z=\infty$ 处连接起来了.

现在 $w=+\sqrt{z}$ 仅由上叶上的 z 值表示, $w=-\sqrt{z}$ 则由下叶的 z 值表示. 只考虑上叶的 z 值时,就理解为必须计算 $w_1=+\sqrt{z}$. 可是,当 z 沿着该叶上围绕原点的圆变动(图 27.6),因而 $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ 中的 θ 由 0 变到 2π 时, $\sqrt{z}$ 只覆盖住映入 w 值的复平面上的一个半圆. 现在让 z 变动到第二叶,譬如说,让它穿过正 x 轴.

当 z 变动到这个第二叶时，我们取由 $w_2=-\sqrt{z}$ 给出的 w 值. 当 z 作出另一个绕原点的环路，因而在第二叶上 θ 由 2π 变到 4π 时，对这个路径，我们得到 $w_2=-\sqrt{z}$ 的取值范围，这些 w 值的极角由 π 变到 2π. 当 z 又一次穿过正 x 轴时，我们认为它是运行在第一叶上. 这样，经过 z 值绕原点的两个环行(在每一叶上各一次)，我们就得到函数 $w^2=z$ 的 w 值的全部范围. 另外，本质的一点是，如果 z 在 Riemann 面(它是两叶的集合)上变动，w 就变为 z 的一个单值函数.

为了把一叶上的路径区别于另一叶上的路径，我们同意在 $w^2=z$ 的情形下，把正 x 轴看作是一个分支切割. 它连接点 $z=0$ 和 $z=\infty$. 也就是说，当 z 穿过这个切割时，必须取属于 z 进入的那一叶的 w 的分支. 分支切割并不一定要是正 x 轴，但是，在现在的情形下，它必须连接 0 和∞. 点 0 和∞称为支点，因为当 z 绕着 0 和∞划出一个闭路径时，$w^2=z$ 的分支互相交换.

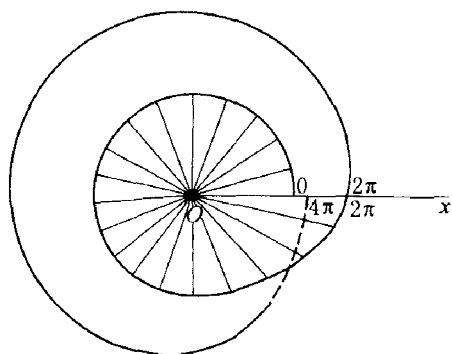


图 27.6

函数 $w^2=z$ 和与它相联系的 Riemann 面特别简单. 考虑函数 $w^2=z^3-z$. 这函数也有两个分支，它们在 $z=0$，$z=1$，$z=-1$ 和 $z=\infty$ 处变为相等. 而且(我们不给出全部论证)所有这四点都是支点，因为如果 z 绕着它们中的任一点作一环行时，w 的值就从一个分支变到另一个分支. 分支切割可以取为由 0 到 1，0 到 -1，1 到∞和 -1 到∞的线段. 当 z 穿过这些分支切割的任何一个时，w 的值从它在一个分支所取的值变到它在第二个分支所取的值.

对于更复杂的多值函数，Riemann 面更为复杂. 一个 n 值函数需要一个 n 叶 Riemann 面. 可能有很多支点，必须引进连接每两

个支点的分支切割. 另外,一个支点的各叶并不一定和另一支点的各叶相同. 如果 k 个叶重合于一个支点,就称这个支点是 $k-1$ 阶的. 然而一个 Riemann 面的两叶可以在一点接触,但是当 z 绕这一点走完一周时,函数的各分支可能不变. 这时,这个点就不是支点.

不可能在三维空间里准确地表示出 Riemann 面. 例如, $w^2=z$ 的两叶,如果在三维空间里来表示,它们就必须沿正 x 轴相交. 因而一叶必须沿着正 x 轴被割开,但是另一方面数学要求从第一叶光滑地进入第二叶,然后,绕 $z=0$ 作一环行以后,又回到第一叶.

Riemann 面不仅是描绘多值函数的一个方法,而且有效地使这样的函数在曲面上单值,与 z 平面上的情形相对立. 这样,关于单值函数的定理可以推广到多值函数. 举例来说,单值函数沿着一个区域(在其中函数为解析)的边界曲线的积分为 0 的 Cauchy 定理,被 Riemann 推广到了多值函数. 解析区域在**曲面**上必须是单连通的(可以收缩到一点的).

Riemann 把它的曲面想象为平面的一个 n 叶复制品,每一个复制品被补充了一个无穷远点. 可是,把这样一个曲面设想为 n 个互相连结的平面,就难以理解所有的有关论证. 因此,从 Riemann 那个时候以来,数学家们曾经提出了一些较易想象的等价模型. 我们知道,利用球极平面射影可以将一个平面变换成一个球面(第 7 章第 5 节). 因此我们可以利用 n 个半径差不多相同的同心球面来构造 Riemann 面的一个模型. 球面序列是和平面序列相同的. 平面的支点与分支切割照样变换到球面上,因而这些球面沿着分支切割互相缠绕. 现在我们把这组球面想象为 z 的域,而 z 的多值函数 w 在这组球叶上是单值的.

直到现在,我们说明 Riemann 的思想时,都是从一个函数 $f(w,z)=0$ 出发(它是 w 和 z 的一个不可约多项式),指出什么

是它的 Riemann 面. 这并不是 Riemann 的途径. 他是从一个 Riemann 面出发的,并提议证明有一个属于它的方程 $f(w, z)=0$,并进一步证明有其他单值及多值函数定义在这个 Riemann 面上.

单值解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的 Riemann 定义是:这个函数在一点及其邻域内解析,如果它连续可微并满足我们现在称之为 Cauchy-Riemann 方程的话:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{46}$$

我们知道这些方程曾出现在 d'Alembert, Euler 和 Cauchy 的著作中. 顺便说说,Riemann 是第一个要求导数 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 的存在性是指 $\Delta w/\Delta z$ 的极限必须对于 $z+\Delta z$ 趋近于 z 的每一途径都相同的人. (这个条件区分出了复函数,因为在实函数 $u(x, y)$ 的情形下,u 的一阶导数对于所有趋于某点 (x_0, y_0) 的方向都存在并不能保证解析.) 于是他寻求整个地决定 $x+\mathrm{i}y$ 的一个函数的最少条件,而不管这个函数存在于哪一个区域. 从 Cauchy-Riemann 方程显然看出,u 和 v 要满足二维位势方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0. \tag{47}$$

Riemann 曾有过这样一个想法,认为利用 u 满足位势方程这个事实,这个复函数可以在它的存在区域中立刻整个地被确定.

Riemann 明确地假定,Riemann 面上的一个位置函数 w 将由实函数 $u(x, y)$ 确定(除一个附加的常数以外),如果 u 满足下列条件:

(1) 它在曲面上所有使导数不为无穷的点处满足位势方程.

(2) 如果 u 是多值的,那么它在曲面任一点上的值彼此相差一些实常数整数倍的线性组合(这些实常数是 w 的周期模的实部,我们将在以后讨论).

(3) u 可以在曲面的指定点上有给定形式的无穷(极点). 这

些无穷应属于使 w 为无穷的那些项的实部. 作为一个次要的条件,他的确进一步假定了沿着曲面一部分的边界闭曲线,u 可以有有穷值,或者说 u 和 v 的边界值可能存在一个关系. 至于这样一个关系的一般性的程度,Riemann 说得不明确.

这些条件应该确定 u. 一旦 u 被确定了,则由 Cauchy-Riemann 方程就有

$$v=\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right). \tag{48}$$

这样 v 因而 w 也被确定了. 重要的是,对于 Riemann 来说,u 的域是 Riemann 面的任何一个部分,包括可能是整个曲面. 在他的博士论文中,他考虑了有边界的曲面,只是在以后才用了闭曲面,即没有边界的曲面,例如环面.

为了决定 u,Riemann 的本质性工具是他称为的 Dirichlet 原理,因为这是他从 Dirichlet 那里学到的;不过他把它推广到 Riemann 面上的区域,并且在域中规定了 u 的奇异性和跳跃(以上条件 2 及 3). Dirichlet 原理说的是,最小化 Dirichlet 积分

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的函数 u 满足位势方程. 事实上后者就是 Dirichlet 积分的第一变分为零的必要条件(也看第 28 章第 4 节). 因为在 Dirichlet 积分中,被积函数为正,故有一个大于或至少等于 0 的下界,Riemann 断定必有一函数 u 最小化积分并因而满足位势方程. 于是对 Riemann 来说,函数 u 的存在,因而由(48),函数 $f(z)$的存在(它属于 Riemann 面,甚至可以有规定的奇异性和复跳跃(周期性模)),可以保证.

以一个已给的 Riemann 面作为值域的函数的存在性一旦确立以后,就可以证明对于已给的曲面可以联系一个基本方程,即有一个 $f(w,z)=0$,它以已给的曲面为它的曲面. 至于这个曲面如

何相应于 w 与 z 之间的关系，Riemann 并没有叙述. 实际上，这个 $f(w, z)=0$ 不是唯一的. 事实上，从曲面上 w 与 z 的每一个有理函数 w_1，通过 $f(w, z)=0$ 可以得到另一个方程 $f_1(w_1, z)=0$，如果它是不可约的，那么就有同一个 Riemann 面. 这是 Riemann 方法的一个特点.

为了进一步研究能在一个 Riemann 面上存在的函数类，必须熟悉 Riemann 关于 Riemann 面的连通性的概念. 一个 Riemann 面可能有边界曲线，或可能像球或环面那样是闭的. 如果是一个代数函数的 Riemann 面，也就是说，如果 $f(w, z)=0$ 定义 w 为 z 的函数，而 f 是 w 和 z 的一个多项式，那么曲面就是闭的. 如果 f 是不可约的，即不能表示为这种多项式的乘积，那么曲面是由一片构成的，或者说是连通的.

一个平面或一个球面是这样一个曲面，任意一条闭曲线把它分成两部分，要连续地从一个部分中的一点通到另一部分中的一点，不可能不穿过这闭曲线. 这样的一个曲面称为**单连通的**. 可是，如果能够在一个曲面上画出一条闭曲线，它不使曲面分离，那么这个曲面就不是单连通的. 而如果能够在一个曲面上画出某种闭曲线而不至使这曲面不连通，这曲面就是多连通的. 举例来说，我们可以在环面上画两条不同的闭曲线（图 27.7），即便两者都出现，也不使这个曲面不连通.

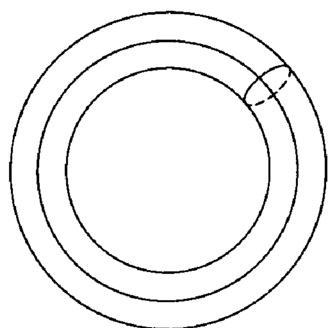


图 27.7

Riemann 想指定一个数来表示他的曲面的连通性. 他把极点与支点看作是曲面的部分，而且由于他心目中想的是代数函数，所以他的曲面是闭的. 去掉一叶的一小部分，这个曲面就有了一条边界曲线 C. 然后他把这个曲面想象为被一个不自交的曲线割开，这条曲线从边界 C 的一点跑到边界 C 的另

一点. 这样一条曲线称为横剖线(*Querschnitt*). 这条横剖线和 C 被看作是一个新的边界,并且可以引进从(新)边界的一点出发到另一点而不穿过(新)边界的第二条横剖线.

引进足够多的这样的横剖线,将一个可能是多连通的 Riemann 面剖为一个单连通曲面. 例如,如果一个曲面是单连通的,就不需要横剖线,并且这个曲面有连通数(Grundzahl)1. 一个曲面称为双连通的,如果用一条适当的横剖线就可以把它变成单一的单连通曲面. 这时,连通数是 2. 一个平面环和有两个洞的球面就是双连通的例子. 一个曲面称为三连通的,如果用两条适当的横剖线可以把它变成单一的单连通曲面. 这时连通数就是 3. 有一个洞的环面就是一个例子. 一般地说,一个曲面称为 N 连通的,或有连通数 N,如果用 $N-1$ 条适当的横剖线可以把它变成一个单连通曲面. 有 N 个洞的球面有连通数 N.

现在可以将一个 Riemann 面(有一个边界)的连通数和支点的个数联系起来了. 每一个支点 r_i 是按照在这一点互换的函数的分支个数来计算的. 如果这个数是 w_i, $i=1,2,\cdots,r$, 那么 r_i 的重数就是 w_i-1. 假定曲面有 q 叶,则连通数 N 是

$$N = \sum_i w_i - 2q + 3.$$

可以证明,有单一边界的闭曲面的连通数 N 是 $2p+1$. 所以

$$2p = \sum w_i - 2q + 2.$$

整数 p 称为 Riemann 面和与之相联系的方程 $f(w, z) = 0$ 的亏格,这个联系是 Riemann 建立的.

一个相当重要的特殊情形是

$$w^2 = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$$

的曲面,它有一个两叶的 Riemann 面,有 n 个有穷支点,当 n 是奇数时,$z=\infty$ 是一个支点,于是 $\sum w_i = n$ 或 $n+1$, $2q=4$. 曲面的亏格 p 是

$$p = \begin{cases} \dfrac{n-2}{2}, \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ \dfrac{n-1}{2}, \text{当 } n \text{ 为奇数时}. \end{cases}$$

给定了由 $f(w, z) = 0$ 确定的一个 Riemann 面，我们知道 w 是这个曲面上的点的一个单值函数. 于是 w 和 z 的每一个有理函数也是曲面上的位置的一个单值函数(因为在这个有理函数中可以将 w 换为它的用 z 表示的值). 这个有理函数的支点，虽不是它的极点，但也和 f 的那些支点相同. 反过来，可以证明具有有穷阶极点的曲面上的位置的每一个单值函数，都是 w 和 z 的一个有理函数.

即使是定义在通常平面上的简单单值函数，它的积分也可以是多值的. 例如

$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = w + n\pi,$$

其中 w 是沿着譬如说由 0 到 z 的直线路径的积分的值，而 n 则依赖于由 0 到 z 的路径绕 $\pm \mathrm{i}$ 的情形. 同样，在一个 Riemann 面上的单值函数，例如在这曲面上的 w 和 z 的一个有理函数，这种函数的积分就可能是多值的. 这确实会发生. 如果引进横剖线使曲面成为单连通的，而且如果积分路径是从 z_1 到 z_2，每当路径穿过横剖线一次，积分的基本值 U 上就加一个常数值 I，这个基本值 U 是在曲面的一个单连通部分的一个路径上积分的值. 如果路径在同一个方向穿过横剖线 m 次，则值 mI 就被加到 U 上. 常数 I 称为一个周期模，每一横剖线引进它自己的周期模，而如果曲面的连通数是 $N+1$，就有 N 个线性无关的周期模. 设它们是 $I_1, I_2, \cdots, I_n$. 那么原来的单值函数沿着原来路径的积分的值就是

$$U + m_1 I_1 + m_2 I_2 + \cdots + m_n I_n,$$

其中 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 为整数. 这些 I_i 在一般情形下是复数.

9. Abel 积分与 Abel 函数

Riemann 在《数学杂志》① 上发表的四篇重要论文中，重述了他的博士论文中的许多思想，它们主要是用于研究 Abel 积分与 Abel 函数的. 第四篇论文对所论课题赋予了较重要的进展. 所有四篇论文都难懂："它们是一本莫名其妙的书."幸运的是，后来一些优秀的数学家详细阐述并解释了这些材料. Riemann 将 Abel 和 Jacobi 的工作结合在一起(它们大部分渊源于实函数)，并结合了 Weierstrass 的处理方法(它用了复函数).

因为 Riemann 澄清了多值函数的概念，所以对于 Abel 积分他可以更清楚些. 设 $f(w, z)=0$ 是一个 Riemann 面的方程，并设 $\int R(w, z)dz$ 是这 Riemann 面上的 w 和 z 的一个有理函数的积分. Riemann 将 Abel 积分分类如下：在由方程 $f(w, z)=0$ 确定的 Riemann 面上 w 和 z 的有理函数的积分中，有一些是处处有穷的，虽然在未剖割的曲面上它们是多值函数. 这些积分称为第一类积分. 这样的线性无关的积分的个数等于曲面的亏格 p，如果连通数是 $2p+1$. 如果引进 $2p$ 个横剖线，则每一个积分对于横剖线所包围的一个区域中的路径来说是一个单值函数. 如果路径穿过一条横剖线，那么前节中讨论过的周期模必须考虑进去，并且积分之值如下：如果 W 是它从一个固定点到 z 的值，那么所有可能的值是

$$W+\sum_{r=1}^{2p} m_r\omega_r,$$

其中 m_r 是整数，ω_r 是这个积分的周期模.

第二类积分有代数的无穷但不是对数的无穷. 一个第二类的基本积分在 Riemann 面的一点处有一个一阶的无穷. 如果 $E(z)$

① Vol. 54, 1857, 115 ~ 155 = *Werke*, 88～144.

是这积分在曲面一点处的值(积分的上限),那么积分的所有的值都包含在

$$E(z)+\sum_{r=1}^{2p} n_r \varepsilon_r$$

中,其中 n_r 是整数,ε_r 是这个积分的周期模. 在 Riemann 面的同一点处变为无穷的两个基本积分,它们的差是一个第一类积分. 由此可以推断,有 $p+1$ 个线性无关的第二类基本积分,在 Riemann 面的同一点上变为无穷.

具有对数无穷的积分称为第三类积分. 可以证明,每一个积分必定有两个对数无穷. 如果这样的一个积分没有代数无穷,也就是说,在它有对数无穷的任何一点的附近,积分的展开式中没有代数项,那么这个积分就称为第三类的基本积分. 有 $p+1$ 个第三类的线性无关的基本积分,它们的对数无穷同在 Riemann 面的两个点上. 每一个 Abel 积分是这三类积分的一个和.

Abel 积分的分析阐明了在 Riemann 面上能够存在哪些种类的函数. Riemann 研究了两类函数;第一类是曲面上的单值函数,它的奇点是极点. 第二类在具有横剖线的曲面上是单值的,但沿着每一横剖线是不连续的函数. 事实上,这种函数在第 ν 个横剖线的一边的值和它在另一边的值相差一个复常数 h_ν. 这第二类函数也可以有极点和对数无穷. Riemann 证明,第一类函数是代数函数,而第二类函数是代数函数的积分.

在曲面上也有处处为有穷的函数. 这样的一个函数可以用上面的第一类函数表示出来,也可以将第二类和第三类积分结合起来以构造曲面上的代数函数. 于是 Riemann 证明了,代数函数可以用超越函数的和来表示. 同样,在若干个给定点上为代数无穷的单值函数可以用有理函数表示. 在整个曲面上单值的函数是一个处处为有穷的积分的被积函数. 这个函数可以表示成 w 和 z 的一个有理函数,并且可以有形式 $\phi(w,z)/\partial f/\partial w$,其中 $f(w,z)=0$

是曲面的方程. 出现在这里和第一类积分的构造之中的函数 ϕ,称为 $f(w, z) = 0$ 的伴随多项式. 一般说来,当 f 的次数是 n 时,它的次数是 $n - 3$.

Riemann 面上的有理函数的重要性来自刚才提到的事实,即在曲面上单值并且没有本性奇点的每一个函数是一个有理函数. 这样一个函数的零点的个数与极点的个数相同,并且以相同次数取每一个值. 而且,一旦定义曲面的方程 $f(w, z) = 0$ 被固定下来,那么,曲面上位置的所有其他函数在总体上是和 w 与 z 的有理函数及其积分同样广阔的.

Weierstrass 在 19 世纪 60 年代也研究了 Abel 积分,不过他和这一领域中的 Riemann 的后继者是由代数函数来建立超越函数的,与 Riemann 的做法相反. 他们这样做是因为他们有理由不相信 Dirichlet 原理. Weierstrass 在 1870 年宣读的一篇论文[①]中指出,极小化 Dirichlet 积分的函数的存在还没有证明. Riemann 自己有另外一个想法. 在 Weierstrass 作出他的陈述以前,Riemann 已认识到 Dirichlet 积分的极小化函数的存在问题,不过他说,Dirichlet 原理只是一个碰巧合用的方便工具;他说,函数 u 的存在却仍然是正确的. 对于这一点 Helmholtz 的意见也是有趣的:"……对于我们物理学家来说,Dirichlet 原理(的应用)仍然是一个证明."[②]

Riemann 发起的复函数理论中的另一个新的研究是 Abel 积分的反演,即当

$$u = \int_0^z R(z, w)\,dz$$

时,把 z 确定为 u 的函数,当然 w 和 z 是由一个代数方程联系着的. 这个 u 的函数 z 不仅是多值的而且不能清楚地定义出来. 像

① *Werke*, 2,49~54.

② Dirichlet 问题和 Dirichlet 原理的后来历史,见第 28 章第 4 节和第 8 节.

在超椭圆积分的情形一样，Riemann 取 p 个 Abel 积分的和，并定义新的 p 个变量的 Abel 函数，它们是单值的并且是 $2p$ 重周期的. p 个变量的 $2p$ 重周期的一个函数的意思是，存在 $2p$ 组量 ω_{1k}, ω_{2k}, …, ω_{pk}, $k=1, 2, \cdots, 2p$, 每一组包含这 p 个变量的每一个变量的一个周期. Riemann 证明，一个单值函数不可能有多于 $2p$ 组的同时周期. Abel 函数表成 p 个变量的 θ 函数，是椭圆函数的推广.

在亏格为 p 的 Riemann 面上的函数的一个值得注意的结果，现在通称为 Riemann Roch 定理. 这个结果的工作，是由 Riemann 开始并由 Gustav Roch(1839—1866)[①] 完成的. 本质上，这个定理确定了在至多有有穷个极点的曲面上线性无关的亚纯函数的个数. 更明确地说，假定 w 是这曲面上的一个单值函数，在点 c_1, c_2, …, c_m 处有一阶极点，但在别处没有，这些 c_i 的位置不一定互相独立. 如果 q 个线性无关的函数(伴随函数)在这些点上为零，那么 w 含有 $m-p+q+1$ 个任意常数. 它是 $m-p+q$ 个函数的任意倍数的线性组合，这 $m-p+q$ 个函数的每一个都有 $p-q+1$ 个一阶极点，其中 $p-q$ 个是线性组合中的所有函数所共有的.

10. 保形映射

Riemann 为了完善他的博士论文的理论，在结束时给出了函数论在保形映射的几个应用. 从一个平面到另一个平面的保形映射的一般性问题(它是由绘制地图而来的)是 Gauss 在 1825 年解决的. 他的结果相当于这样一个事实，即保形映射是由任何一个解析的 $f(z)$ 建立的——虽然 Gauss 没有用复函数理论. Riemann 知道一个解析函数建立了从 z 平面到 w 平面的保形映射，但他关心的是将此推广到 Riemann 面. 这就在保形映射中开辟了新的

① *Jour. für Math.*, 64, 1864, 372～376.

一章.

Riemann 在论文的结尾给出了下述定理:两个给定的单连通平面(他将 Riemann 面上的单连通区域包括进去)可以一对一地并且保形地相互映射,一曲面的一个内点和一个边界点可以对应到另一个曲面上的任意选取的一个内点和一个边界点.整个的映射便由此被确定了.这个定理包含了以下基本结果作为一个特殊情形:给定任何一个单连通区域 D,它的边界不止一个点,又给定了这个区域的一点 A 以及在这点的一个方向 T,那么存在一个函数 $w=f(z)$,在 D 内解析并保形地一对一地把 D 映射到 w 平面上中心在原点而半径为 1 的圆.在这个映射下 A 变到原点,T 变到正实轴方向.这后一个叙述通常称为 Riemann 映射定理.

Riemann 是用 Dirichlet 原理来证明它的定理的,但由于这个原理当时已被看出有毛病,所以数学家们就寻求一个正确的证明. Carl Gottfried Neumann 和 Hermann Amandus Schwarz 在 1870 年证明了,可以将一个单连通平面区域映射到一个圆.可是,他们不能够处理多叶的单连通区域.

顺便说一下,强调一个单连通区域到一个圆的保形映射的原因是由于这样的事实:将一个单连通区域保形映射到另一个单连通区域,只需将每一个区域映射到一个圆,然后做两个保形映射的乘积就可达到目的.

虽然 Riemann 映射定理的证明尚未解决,但是保形映射的一些特殊结果却被得到了.其中对于解偏微分方程最有用的一个是 Schwarz[①] 和 Elwin Bruno Christoffel[②] 给出的.他们的定理说明如何把 z 平面上的一个多边形及其内部(图 27.8)保形映射到 w 平面的上半部.这个映射由下面的积分给出:

---

① *Jour. für Math.*, 70, 1869, 105～120 = *Ges. Abh.*, 2, 65～83.

② *Annali di Mat.*, (2), 1, 1867, 95～103 和 (2), 1, 1871, 1～9 = *Ges. Abh.*, 2, 56 ff.

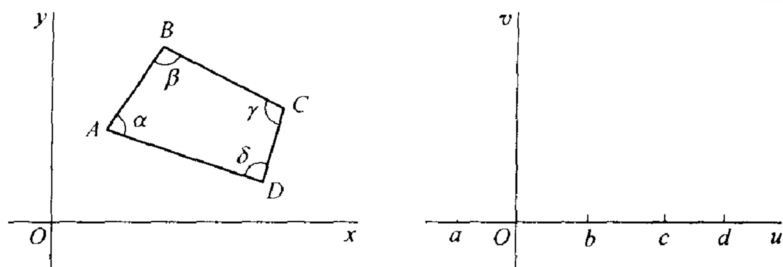


图 27.8

$$z = c\int_0^z (w-a)^{(\alpha/\pi)-1}(w-b)^{(\beta/\pi)-1}\cdots dw + c',$$

其中 c 和 c' 可以从多边形的位置确定出来，而 $a, b, c, \cdots$ 对应于 $A, B, C, \cdots$. 这个映射对于求解位势(Laplace)方程是很有用的.

11. 函数的表示与例外值

19 世纪后期，复函数的理论迅速发展，我们将有机会在以后几章中考虑这些发展的某些部分. 可是，在许多创造中，有少数几个原来就与复函数本身直接关联着的却要在这里先提一下.

在单值复函数中，相当重要的一种是整函数(就是在平面的有穷部分没有奇点的函数，它包括多项式，e^z, $\sin z$, $\cos z$)，因为粗略地说，它们是初等实函数的类似物. 对于这种函数，Liouville 定理说，每一个有界的整函数是一个常数①. Weierstrass 把实多项式分解为线性因式的定理推广到了整函数，他建立这个定理②大概是在 19 世纪 40 年代. 这定理称为因式分解定理，是这样说的：如果 $G(z)$ 是一个整函数，不恒等于零，但有无穷多个根(即不是一个

---

① 这个定理是属于 Cauchy 的(*Comp. Rend.*, 19, 1844, 1377～1381 = *Œuvres*, (1), 8, 378～385). C. W. Borchardt 在 Liouville 1847 年的演讲中听到了这个定理，因而把它归于 Liouville.

② *Abh. König. Akad. der Wiss.*, *Berlin*, 1876, 11～60 = *Werke*, 2, 77～124.

多项式),那么 $G(z)$ 可以写成一个无穷乘积

$$G(z) = \Gamma(z)z^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)},$$

其中
$$g_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n};$$

$\Gamma(z)$ 是一个没有零点的整函数;a_n 是 $G(z)$ 的零点;z^m 表示在 $z=0$ 的 m 重零点(如果 $G(z)$ 有这样一个零点的话),乘积的各因式称为 $G(z)$ 的质因式.

复杂性仅次于整函数的是亚纯函数,它在复平面的有穷部分只能有极点. Weierstrass 在 1876 年①的论文中证明,一个亚纯函数可以表示为两个整函数的商. 这个定理由 Gösta Mittag-Leffler (1846—1927)在 1877 年的一篇论文中加以推广②. 在任意一个区域上的亚纯函数可以表示为两个函数的商,其中每一个都在该区域内解析. 在 Weierstrass 定理和 Mittag-Leffler 定理中,分子和分母都不在区域的同一点上为零.

另外一个引起许多数学家注意的论题是各种类型的复函数能够取值的范围. 在这方面,(Charles) Emile Picard(1856—1941)得到一系列结果. 他是巴黎大学的高等分析的教授,也是巴黎科学院的永久书记. Picard 在 1897 年③证明,对一个整函数而言,如果它不退化为一常数的话,最多只能有一个有穷值它达不到;并且如果存在至少两个这样的值,其中每一个只被取有穷次,那么这个函数就是一个多项式. 否则,除去这例外的一个以外,这个函数要无穷次地取到每一个值. 如果这个函数是亚纯的,则无穷是一个可取的值,最多有两个值可以不取,而不使函数退化为一常数.

在同一篇论文中,他发展了 Julian W. Sochozki(1842—1927)

---

① *Abh. König. Akad. der Wiss.*, *Berlin*, 1876, 11～60 = *Werke*, 2, 77～124.

② *Öfversigt af Kongliga Vetenskops Akademiens Förhandlingar*, 34, 1877, #1, 17～43;亦见 *Acta Math.*, 4, 1884, 1～79.

③ *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (2), 9, 1880, 145～166.

和 Weierstrass 的一个结果,证明了在一个孤立本性奇点的任何邻域内,一个函数要取到所有的值,最多可能有一个(有穷)值例外.这个结果是深刻的,并且有许多推论.确实,其他一些结果和可供选择的证明产生了,它们把这个论题很好地带入了20世纪.

在复函数这门学科中,19世纪结尾时回到了基础方面.19世纪 Cauchy 积分定理的证明用到 df/dz 为连续的事实. Edouard Goursat(1858—1936)证明了[①],沿着一条闭曲线 C 的 Cauchy 定理,$\int f(z)dz=0$,而没有假定在曲线 C 所围成的闭区域内导数 $f'(z)$ 连续. $f'(z)$ 的存在已是充分的. Goursat 指出,$f(z)$ 的连续与导数的存在已足够刻画解析性.

像我们概述复函数理论的兴起时所指出的,Cauchy, Riemann 和 Weierstrass 是函数论的三个主要奠基人.在一段长时间内他们各自的思想和方法被他们的追随者各自继续研究着.后来 Cauchy 和 Riemann 的思想被融合起来了,而 Weierstrass 的思想逐渐从 Cauchy-Riemann 观点推导出来,因而不再强调从幂级数出发的思想.而且 Cauchy-Riemann 观点的严密性被改进了,以至从这个观点看来 Weierstrass 的探讨途径不是本质的.完全的统一只是在20世纪开头时才实现.

参考书目

Abel, N. H.: *Œuvres complètes*, 2 vols., 1881, Johnson Reprint Corp., 1964.

Abel, N. H.: *Mémorial publié à l'occasion du centénaire de sa naissance*, Jacob Dybwad, Kristiania, 1902.

Brill, A., and M. Noether: "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit", *Jahres. der Deut. Math. Verein.*, 3, 1892/1893, 109～556, 155～186 in particular.

Brun, Viggo: "Niels Henrik Abel. Neue biographische Funde", *Jour. für Math.*,

① *Amer. Math. Soc.*, *Trans.*, 1, 1900, 14～16.

193, 1954, 239~249.

Cauchy, A. L. : *Œuvres complètes*, 26 vols., Gauthier Villars, 1882~1938, relevant papers.

Crowe, Michael J. : *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, 1967, Chap. 1.

Enneper, A. : *Elliptische Funktionen: Theorie und Geschichte*, 2nd ed., L. Nebert, 1890.

Hadamard, Jacques: *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard*, Gauthier Villars, 1901.

Jacobi, C. G. J. : *Gesammelte Werke*, 7 vols. and Supplement, G. Reimer, 1881~1891; Chelsea reprint, 1968.

Jourdain, Philip E. B. : "The Theory of Functions with Cauchy and Gauss", *Bibliotecha Mathematica*, (3), 6, 1905, 190~207.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 2 vols., Chelsea (reprint), 1950.

Lévy, Paul, et al. : "La Vie et l'œuvre de J. Hadamard", *L'Enseignement Mathématique*, (2), 13, 1967, 1~72.

Markuschewitsch, A. I. : *Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen*, V E B Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955.

Mittag-Leffler, G. : "An Introduction to the Theory of Elliptic Functions", *Annals of Math.*, 24, 1922/1923, 271~351.

Mittag-Leffler, G. : "Die ersten 40 Jahre des Lebens von Weierstrass", *Acta Math.*, 39, 1923, 1~57.

Ore, O. : *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*, University of Minnesota Press, 1957.

Osgood, W. F. : "Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1901~1921, Ⅱ B1, 1~114.

Reichardt, Hans, ed. : *Gauss: Leben und Werk*, Haude und Spenersche Verlags-buchhandlung, 1960; B. G. Teubner, 1957, 151~182.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd, ed., Dover (reprint), 1953.

Schlesinger, L. : "Über Gauss' Arbeiten zu Funktionenlehre", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1912, Beiheft, 1~143; also in Gauss's *Werke*, 10_2, 77 ff.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, 2 vols., Dover (reprint), 1959, pp. 55~66, 404~410.

Staeckel, Paul: "Integration durch imaginäres Gebiet", *Bibliotecha Mathematica*, (3), 1, 1900, 109~128.

Valson, C. A. : *La Vie et les travaux du baron Cauchy*, 2 vols., Gauthier-Villars, 1868.

Weierstrass, Karl: *Mathematische Werke*, 7 vols., Mayer und Müller, 1895~1924.

第 28 章

19 世纪的偏微分方程

对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉.

Joseph Fourier

1. 引　言

诞生于 18 世纪的偏微分方程这门学科,在 19 世纪发展起来了. 随着物理科学所研究的现象在广度和深度两方面的扩展,微分方程的新的类型的数目增加了;即使是已知的类型,如波动方程和位势方程也应用到新的物理领域了. 偏微分方程变成并继续成为数学的中心. 它们对物理科学的重要性还只是它们取得这中心位置的原因之一. 从数学自身的角度看,偏微分方程的求解促使数学需要在函数论、变分法、级数展开、常微分方程、代数、微分几何等各方面发展. 课题是变得这样广泛,以至在这一章里我们只能给出其主要结果的一小部分.

我们今天习惯于按类型把偏微分方程分类. 但在 19 世纪初期,对这学科知道得还很少,以至区分各种类型的思想还不可能出现. 是物理问题指挥着应该探讨何种方程,而数学家们则随便地从一种类型的问题转到另一种类型而不觉察其间有某些我们现在认为是基本的差别. 物理世界过去和现在都是从不关心数学家们的分类的.

2. 热方程与 Fourier 级数

19 世纪的第一个大步,并且是真正极为重要的一步,是由

Joseph Fourier(1768—1830)迈出的. Fourier 年轻时是一个很出色的数学学者,但他专志于当一个军官. 因为他是一个裁缝的儿子而被拒绝任命,他便转谋教士职位. 当他曾经就读过的军事学校委之以教授职位时他接受了,同时数学就变成了他终生的爱好.

像他同时代的其他科学家一样,Fourier 从事热流动的研究. 对热流有兴趣,作为实际问题,在工业上是为了处理金属,作为科学问题,是企图确定地球内部的温度,这温度随时间的变化,以及其他同类问题. 1807 年[①],他向巴黎科学院呈递了一篇关于热传导的基本论文,这篇论文经 Lagrange, Laplace 和 Legendre 审评后被拒绝了. 但科学院的确想鼓励 Fourier 发展他的思想,所以把热传导问题定为将于 1812 年授予高额奖金的课题. Fourier 在 1811 年呈递了修改过的论文,受到上述诸人和另外一些人审评,得到了奖金,但因受到缺乏严密性的评论而未发表在当时的科学院的《报告》里. Fourier 对他所受到的待遇感到愤恨. 他继续对热的课题进行研究,在 1822 年发表了数学的经典文献之一——《热的解析理论》(*Théorie analytique de la chaleur*)[②],编入了他实际上未作改动的 1811 年论文的第一部分. 此书是 Fourier 的思想的主要出处. 两年以后,他成为科学院的秘书,于是能够把他 1811 年的论文原封不动地发表在《报告》[③]里.

在吸收或释放热的物体内部,温度分布一般是不均匀的,在任何点上都随时间而变化. 所以温度 T 是空间和时间的函数. 函数的准确形式依赖于物体的形状、密度、材料的比热、T 的初始分布(即在时刻 $t=0$ 时 T 的分布)以及保持于物体表面上的条件. Fourier 在他的书中考虑的第一个主要问题是在均匀和各向同性

---

① 其手稿今保存在交通工程学校(*Ecole des Ponts et Chaussées*)的图书馆里.

② *Œuvres*, 1.

③ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, (2),4,1819/1820,185～555,1824 年版和 5,1821/1822,153～246,1826 年版;仅第二部分转载于 Fourier 的《全集》里,2,3～94.

的物体内确定作为 x、y、z、t 的函数的温度 T. 根据物理原理他证明了 T 必须满足偏微分方程

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=k^2\frac{\partial T}{\partial t},$$

叫做三维空间的热方程,其中 k^2 是一个常数,其值依赖于物体的质料.

Fourier 当时解决了特殊的热传导问题. 我们将考虑一种对他的方法说来是典型的情形,即对两端保持在温度 0°,侧面绝热因而无热流通过的柱轴,求解方程(1)的问题. 因为这根轴只涉及一维空间,故(1)变成

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t},$$

附以边界条件

$$(3)\qquad T(0,\ t)=0,\ T(l,\ t)=0,\ t>0$$

和初始条件

$$(4)\qquad T(x,\ 0)=f(x),\ 0<x<l.$$

为解出这个问题,Fourier 用了变量分离法. 他令

$$(5)\qquad T(x,\ t)=\phi(x)\psi(t).$$

代入微分方程后,得到

$$\frac{\phi''(x)}{k^2\phi(x)}=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}.$$

然后他阐明(参看第 22 章的[30]),这两个比值必须是常数,假定为$-\lambda$,因此有

$$(6)\qquad \phi''(x)+\lambda k^2\phi(x)=0$$

和

$$(7)\qquad \psi'(t)+\lambda\psi(t)=0.$$

因此,根据(5),边界条件(3)蕴涵着

$$(8)\qquad \phi(0)=0\ 和\ \phi(l)=0.$$

(6)的通解是 $\qquad \phi(x)=b\sin(\sqrt{\lambda}kx+c).$

条件 $\phi(0)=0$ 蕴涵着 $c=0$. 条件 $\phi(l)=0$ 给 λ 加上了限制,即 $\sqrt{\lambda}$ 必须是 π/kl 的整数倍. 所以 λ 有无穷多个可取的值 λ_ν,或

(9) $$\lambda_\nu=\left(\frac{\nu\pi}{kl}\right)^2,\ \nu \text{ 为整数.}$$

这些 λ_ν 就是我们现在称作的本征值或特征值.

因为(7)的通解是指数函数,但现在 λ 限于取 λ_ν,于是由(5), Fourier 到此得到

$$T_\nu(x,t)=b_\nu e^{-(\nu^2\pi^2/k^2l^2)t}\sin\frac{\nu\pi x}{l},$$

其中 b_ν 目前表示在 b 位置上的常数,而 $\nu=1,2,3,\cdots$. 然而方程(2)是线性的,所以诸解的和仍然是解. 故可以断言

(10) $$T(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu e^{-(\nu^2\pi^2/k^2l^2)t}\sin\frac{\nu\pi x}{l}.$$

为了满足初始条件(4),对 $t=0$ 必须有

(11) $$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu\sin\frac{\nu\pi x}{l}.$$

于是 Fourier 面临着这样的问题: $f(x)$ 能表示成三角级数吗? 特别是 b_ν 能确定吗?

Fourier 进而回答这些问题. 虽然那时他略为意识到有严密性的问题,但他仍以 18 世纪的风气形式地进行着. 为了领悟 Fourier 的工作,为简单起见,我们将设 $l=\pi$. 这样我们考虑

(12) $$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu\sin\nu x,\ 0<x<\pi.$$

Fourier 把每个正弦函数按 Maclaurin 定理展开为幂级数;即他用

(13) $$\sin\nu x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\nu^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

替换(12)式中的 $\sin\nu x$. 然后用一个当时认为无问题的变换求和次序的运算,他得到

(14) $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2n-1}b_\nu\right)x^{2n-1}.$$

这样 $f(x)$就表成了 x 的幂级数，这隐含着在 Fourier 讨论的可容许函数 $f(x)$ 上加了一个事先没有假定的强限制，即这个幂级数必须是 $f(x)$的 Maclaurin 级数，因此

$$(15)\qquad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^{k}.$$

令(14)和(15)中 x 的同次幂的系数相等，Fourier 发现，对偶数 k，$f^{(k)}(0)=0$，而除此之外，则有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2n-1}b_{\nu}=(-1)^{n-1}f^{(2n-1)}(0),\ n=1,2,3,\cdots$$

现在 $f(x)$的诸导数是已知的，因为 $f(x)$是已给的一个初始条件. 所以 b_ν 是无穷线性代数方程组里的未知数的一个无穷集合.

在先前的一个问题中，Fourier 面临着同类的方程组，那里他取前 k 项和前 k 个方程的右端常数，解前 k 个方程得 $b_{\nu,k}$，表示 b_ν 的近似值，得到了 $b_{\nu,k}$的一般表示式时，他就大胆地下结论说：$b_\nu=\lim\limits_{k\to\infty}b_{\nu,k}$. 然而，这一次他要确定 b_ν 却有许多困难. 他对几个不同的 $f(x)$，用非常复杂的、包含发散表示式的程序说明了如何确定 b_ν. 用这些特殊情形作为指导，他得到了 b_ν 的、含有无穷乘积及无穷和的一个表达式，Fourier 觉得这个表达式相当无用. 经过更为大胆和富于创造性的、虽然往往又是含糊的几步，他得到了公式

$$(16)\qquad b_{\nu}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(s)\sin\nu s\,ds.$$

这结论在一定程度上说并不是新的. 我们已经说到(第 20 章第 5 节)，Clairaut 和 Euler 已经怎样把某些函数展开为 Fourier 级数并得到公式

$$(17)\qquad \begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\end{aligned}\qquad n\geqslant 1.$$

此外，Fourier 这样得到的结果是很局限的，因为他假定了 $f(x)$有

Maclaurin 展开，这意味着有无穷阶导数. 最后，Fourier 方法确实是不严密的，并且比 Euler 的方法更为复杂. Fourier 不得不用无穷线性方程组，而 Euler 却用三角函数的性质做得更为简单.

但这时 Fourier 作了一些值得注意的观察. 他注意到每一个 b_ν 可以解释为 x 取值 0 到 π 时，曲线 $y=(2/\pi)f(x)\sin \nu x$ 下方的面积. 这样一个面积即使对很随意的函数都是有意义的. 这种函数不必是连续的，或者只要从图形上知道就可以了. 所以 Fourier 下结论说，每一个函数都可以表示为

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu x, \quad 0<x<\pi. \tag{18}$$

当然，这个可能性除 Daniel Bernoulli 以外，已被 18 世纪的名家否定了.

Fourier 对其前人的工作知道多少是不清楚的. 在 1825 年的文章中他说 Lacroix 已告诉他关于 Euler 的工作，但他没有说何时告诉他的. 无论如何，Fourier 并没有被前人的意见所吓住. 他选取了大量的函数，对每个函数计算头几个 b_ν，并对每个函数作出正弦级数(18)的头几项和的图形. 从这一图形他得出结论说，不管在区间 $0<x<\pi$ 外怎样，这个级数在 $0<x<\pi$ 上总是表示 $f(x)$的. 在书中(第 198 页)他指出，两个函数可在一给定的区间上相合，但不一定在此区间外相合. 看不到这一点，说明了早期的数学家为什么不能接受任意一个函数可展开为三角级数的原因. 在目前的情形下，级数真正给出的是函数在 0 到 π 区间上的值，在区间外则周期地重复着.

Fourier 一旦得到了上述关于 b_ν 的简单结果，他就像 Euler 一样了解到每个 b_ν 可以由级数(18)乘以 $\sin \nu x$，再从 0 到 π 积分而得到. 他又指出这个程序可以应用于表达式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x. \tag{19}$$

他接着考虑任何 $f(x)$在区间$(-\pi, \pi)$的表达式. 级数(18)表示一个奇函数 $[f(x)=-f(-x)]$, 而级数(19)表示一个偶函数 $[f(x)=f(-x)]$. 但任何函数可以表示为一个奇函数 $f_0(x)$与一个偶函数 $f_e(x)$之和,这里

$$f_0(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\ f_e(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

于是任何 $f(x)$在区间$(-\pi, \pi)$上可以表示为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x), \tag{20}$$

而其系数可经遍乘 $\cos\nu x$ 或 $\sin\nu x$ 再从 $-\pi$ 到 π 积分来确定,这就给出了(17).

Fourier 对"任意"的函数可以表成(20)那样的级数一事从未给出过任何完全的证明. 在那本书中他给出一些严密的论证,在他关于这事的最后讨论里(第 415 节、416 节和 423 节),给出了一个证明的概要;但即使在那里,Fourier 仍没有说出一个函数可以展开为三角级数必须满足的条件. 虽然如此,Fourier 对这种可能性的信念是表现于整本书里的. 他还说①,不管 $f(x)$怎样,不管是否可给 $f(x)$以解析表达式,不管函数是否服从任何正规的法则,他的级数总是收敛的. Fourier 关于任何函数可以展开为 Fourier 级数的信念是建立在前述几何证据上的. 关于这点他在该书(第 206 页)中说道:"为了证实新结果的真实性, 为了明白

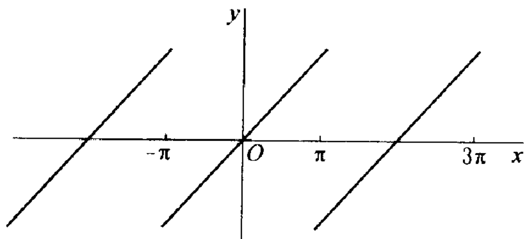


图 28.1

① 第 196 页 = *Œuvres*, 1, 210.

地给出分析学常用的表达形式,没有什么比几何图形对我们更适宜了."

Fourier 的工作渗透到几个主要的进展之中.除促进偏微分方程的理论外,他迫使函数概念作一种修改.假设函数 $y = x$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内由 Fourier 级数(20)表示出来,则这级数的性态就在每个长为 2π 的区间上重复着.因此这级数给出的函数看起来像图 28.1 所显示的那样.这样的函数不能用单个(有限的)解析式表示,然而 Fourier 的先驱者都曾坚持一个函数必须是可用单个式子表示的.因为对所有 x,整个函数 $y = x$ 不能用级数表示,他们就不能看出任意的非周期函数怎样可用这类级数来表示了.虽然 Euler 和 Lagrange 实际上都曾经对特殊的非周期函数这样做过. Fourier 明白,他的级数也可以表示在区间 $(0, \pi)$ 或 $(-\pi, \pi)$ 的不同部分有不同解析式的函数,不管这些表示式互相是否连续地接合着.最后他指出,在 Daniel Bernoulli 的赞助下,他的工作解决了关于弦振动问题的解的争论. Fourier 的工作标志着人们从解析函数或可展成 Taylor 级数的函数中解放了出来.以下的事情也是重要的:一个 Fourier 级数在一整段区间上表示一个函数,而一个 Taylor 级数仅在函数是解析的点附近表示该函数(虽然在特殊情形下其收敛半径可以是无穷大).

我们已经注意到, Fourier 1807 年的论文没有很好地被巴黎科学院接受,文中他坚持认为任意函数可以展开为三角函数. Lagrange 特别坚决地否认这种展开的可能性.虽然他仅仅批评了该论文缺乏严密性,但他确实被 Fourier 所持的函数的普遍性所困惑,因为 Lagrange 仍然相信函数是由其在任意小区间上的值所决定的(这对解析函数是正确的).事实上 Lagrange 重返到弦振动问题,并且没有比他早期工作显示出更好的洞察力,而坚持为 Euler 关于任意函数不可能展开为三角级数的争论辩护. Poisson 后来确实断言 Lagrange 指出过任意函数可以表示为 Fourier 级数,但

Poisson是妒忌Fourier的,他说这话是为了抢夺Fourier的名誉而归之于Lagrange.

Fourier的工作还弄明白了另一件在18世纪Euler和Lagrange的著作中还不清楚的事情.这些人为了解一些特殊问题,已经把函数按Bessel函数或Legendre多项式展开为级数了.函数可以展开为像三角函数、Bessel函数、Legendre多项式这样一些函数的级数,这个普遍性事实是由Fourier的工作揭露出来的.他进一步说明了施加于偏微分方程的解的初始条件可以怎样被满足,因此推进了解这类方程的技术.Fourier 1811年的那篇论文,虽然到1824—1826年才发表,但当时对别人是易于接受的,他的思想最初是勉强地得到承认,但最后赢得了赞许.

Fourier的方法立即被Siméon-Denis Poisson(1781—1840)吸取.Poisson是19世纪最大的分析学家之一,又是第一流的数学物理学家.虽然他父亲要他学医,但他却先后成为19世纪法国数学家的发源地——多科工艺学校的学生和教授.他从事于热的理论方面的工作,是弹性的数学理论的奠基人之一,又是最先提出把引力位势理论移植到静电磁学的人之一.

Poisson对Fourier关于任意函数都可以展开为函数的级数的证据有极深刻的印象,以至他相信所有偏微分方程都可以用级数展开来求解;这级数的每一项本身是一些函数的乘积,每个函数是一个独立变量的函数(参看[10]).他想,这些展开式包括了最一般的解.他还相信,如果一个展开式发散,就意味着应当寻找一个以其他函数表出的展开式.当然他是太过分地乐观了.

大约从1815年起Poisson本人解决了许多热传导问题,并使用了按三角函数、Legendre多项式、Laplace曲面调和函数的展开式.这工作的某一些我们将会在以后碰到.Poisson关于热传导方面的许多工作表述在他的书《热的数学理论》(*Théorie mathématique de la chaleur*, 1835)中.

3. 封闭解;Fourier 积分

尽管有偏微分方程的 Fourier 级数解法的成功与冲击,19 世纪主要努力之一仍然是要寻求封闭形式的解,即用初等函数及其积分表示的解.这样的解,至少是 18 世纪和 19 世纪初已知的类型的解,在计算中是更易于掌握的,更明白的,并且是更易于使用的.

用封闭形式解偏微分方程的最重要的方法是 Fourier 积分,它起源于 Laplace 开创的工作.这思想应当归源于 Fourier, Cauchy, Poisson. 把这个重要发现的优先权归给谁是不可能的,因为这三个人都向科学院宣读了直到一个时期以后才发表出来的论文,但每人都听过别人的论文,无法从出版物中确定什么东西是每个人取自口头报告的.

Fourier 在 1811 年得奖论文的最后一节里,讨论了在一个方向延伸到无穷远的区域内热的传导问题.为了得到这类问题的解答,他从有界区域的热方程的解的普遍形式出发,即(参看[10])

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-kq_n^2 t} \cos q_n x, \tag{21}$$

其中 q_n 由边界条件确定,a_n 由初始条件确定.这时 Fourier 把 q_n 看作曲线的横坐标,把 a_n 看作曲线的纵坐标.于是 $a_n = Q(q_n)$,其中 Q 是 q 的某一函数.然后他把(21)换成

$$u = \int_0^{\infty} Q(q) e^{-kq^2 t} \cos qx \, dq \tag{22}$$

并设法确定 Q. 他回到关于系数的公式

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(x) \cos nx \, dx,$$

其中 $\phi(x)$ 通常就是初始函数.利用把 a_n 换成 Q、把 n 换成 q 的"极限过程",他得到

(23)
$$Q = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(x)\cos qx\,\mathrm{d}x,$$

其中 $F(x)$是偶函数,是在该无穷区域上给定的初始温度.然后把(23)用于(22),并交换积分次序(Fourier 对此种交换不怀疑有什么问题),他便有

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(\alpha)\mathrm{d}\alpha\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-kq^2t}\cos qx\cos q\alpha\,\mathrm{d}q.$$

Fourier 然后对奇函数 $F(x)$做了类似的事,从而最后得到

(24)
$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\mathrm{d}\alpha\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-kq^2t}\cos q(x-\alpha)\mathrm{d}q.$$

这样,解便被表示为封闭的形式了.今对 $t=0$, u 就是 $F(x)$,它可以是任何给定的函数,所以 Fourier 断言,对任意的函数 $F(x)$,

(25)
$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\mathrm{d}\alpha\int_0^{\infty}\cos q(x-\alpha)\mathrm{d}q,$$

这便是任意函数的 Fourier 重积分表示的一种形式. Fourier 在他的书里指出,如何用这个积分解许多类型的微分方程.一个用法是根据这样的事实,即如果用任何方法得到了(24),则(25)就表示 u 满足 $t=0$ 时的初始条件.另一个用法更为明白,如果我们用Euler关系式 $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x$ 把 Fourier 积分写成指数形式.则(25)变成

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iqx}\mathrm{d}q\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\mathrm{e}^{-iq\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

这个形式表明,$F(x)$可以分解为无穷多个具有连续变动频率 $q/2\pi$ 和振幅为$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\mathrm{e}^{-iq\alpha}\mathrm{d}\alpha$ 的调和分量,而通常的 Fourier 级数则是把给定函数分解成无穷多个但为离散的调和分量的集合.

Cauchy 关于 Fourier 积分的导出有点相似,载有此事的论文《波的传播理论》获得了巴黎科学院 1816 年的奖金①.此文是对流体表面上波动的第一次大规模的研究,这是由 Laplace 在 1778 年

① *Mém. divers savans*, 1,1827, 3 ~ 312 = *Œuvres*, (1),1,5~318;也可见 Cauchy, *Nouv. Bull. de la Soc. Phil.*, 1817,121 ~ 124 = *Œuvres*, (2),2,223~227.

开辟的课题. 虽然 Cauchy 建立了一般的流体动力学方程, 但他差不多限于研究特殊情形. 特别是他考虑方程

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0,$$

其中 q 就是后来称为速度势的, 而 x 与 y 是空间坐标. 他未加说明就写出了解(参看[22])

$$q = \int_0^\infty \cos mx e^{-ym} f(m) \mathrm{d}m, \tag{26}$$

其中 $f(m)$ 至此还是任意的. 因为在曲面上 $y=0$, q 化为已给函数 $F(x)$,

$$F(x) = \int_0^\infty \cos mx f(m) \mathrm{d}m. \tag{27}$$

然后 Cauchy 证明

$$f(m) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos mu F(u) \mathrm{d}u. \tag{28}$$

有了 $f(m)$ 的这个值后就有

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \cos mx \cos mu F(u) \mathrm{d}u \mathrm{d}m. \tag{29}$$

这样 Cauchy 不但得到了 $F(x)$ 的 Fourier 二重积分表示, 而且又有了 $f(m)$ 到 $F(x)$ 的 Fourier 变换及其逆变换. 给定了 $F(x)$, $f(m)$ 就由(28)确定, 并能用于(26).

Cauchy 钻研他的得奖论文后不久, Poisson 就发表了关于水波的主要著作《关于波的理论的报告》①(Poisson 不能争奖, 因为他是科学院的成员). 在这著作中他用与 Cauchy 大致相同的方式导出了 Fourier 积分.

4. 位势方程和 Green 定理

下一个重要的发展以位势方程为中心, 虽然其主要结果, 即

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, (2), 1, 1816, 71～186.

Green 定理,已应用于许多其他类型的微分方程. 位势方程在 18 世纪关于引力的研究中已显露头角,在 19 世纪关于热传导的研究中又出现了,因为物体内的温度分布虽然逐点变化着,但当它不随时间变化,即处于稳定状态时,(1)中的 T 就与时间无关,从而热方程就化为位势方程. 19 世纪早期在重力吸引的计算中仍继续强调位势方程,但被静电学和静磁学的新的一类应用加强了. 这里椭球体的吸引也是一个关键问题.

Poisson① 对用位势方程表述重力吸引的理论作了一个更正. Laplace(第 22 章第 4 节)曾假设位势方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{30}$$

对产生重力吸引的物体的内部或外部任何点(x, y, z)都成立,其中 V 是 x, y 和 z 的函数. Poisson 指出,如果(x, y, z)在吸引体内部,则满足

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho, \tag{31}$$

其中 ρ 是吸引体密度,也是 x, y, z 的一个函数. 虽然(31)仍叫做 Poisson 方程,但像他自己所承认的,他对其正确性的证明即使以那个时代标准来看也是不严密的.

在这同一篇论文中,说到当电荷被允许自行分布在任何导体表面,则 V 在表面上的值必定是常数时,Poisson 提请注意在电的研究中可利用这函数 V. 在别的论文中,他解决了许多求电荷在互相邻近的诸导体表面上分布的问题. 他的基本原理是,在各个导体的任何一个的内部,静电合力必须为零.

在位势方程方面,尽管有 Laplace, Poisson, Gauss 以及别人的工作,但关于它的解的一般性质在 19 世纪 20 年代还几乎毫无所知,那时确信通积分必须包含两个任意函数,一个给出解在边界

---

① *Nouv. Bull. de la Soc. Philo.*, 3, 1813, 388~392.

上的值,另一个给出导数在边界上的值. 然而在温度满足位势方程的稳态热传导情形,人们知道只要温度在表面上给定了,整个三维物体内部的温度或热分布就确定了. 因此在位势方程的上述假定的通解中,任意函数之一必须按某种方式由某一个别的条件固定下来.

在这点上,通过自修而成功的英国数学家 George Green (1793—1841)企图用彻底的数学方式来论述静电磁学. 1828 年 Green 出版了一本私人印刷的小册子《关于数学分析应用于电磁学理论的一篇论文》(*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*). 此文未受到重视,直到 William Thomson 爵士(Kelvin 勋爵,1824—1907)发现了它,认识到它的巨大价值,才把它发表于《数学杂志》①. Green 从 Poisson 的论文中学到许多东西,他也把位势函数的概念移用到电磁学.

他从(30)式开始,证明了下述定理:设 U 与 V 是 x, y, z 的任意两个连续函数,它们的导数在一任意物体的任何点上都不为无穷. 其主要定理断言(我们将用 ΔV 表示(30)的左边,虽然 Green 没有用它)

(32)
$$\iiint U\Delta V dv+\iint U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma =\iiint V\Delta U dv+\iint V\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma,$$

其中 n 是物体表面指向内部的法向,$d\sigma$ 是曲面元. 定理(32)恰巧也曾由俄国数学家 Michel Ostrogradsky(1801—1861)证明过,他在 1828 年②把这定理呈给了彼得堡科学院.

然后 Green 指出 V 和它的每个一阶导数在物体内部连续这

① *Jour. für Math.*, 39,1850,73～89;44,1852,356～374;47,1854,161～221 = *Green's Mathematical Papers*, 1871,3～115.

② *Mém. Acad. Sci. St. Peters.*, (6),1,1831,39～53.

--要求可以用来代替 V 的导数所应满足的边界条件. 根据这一事实,Green 用 V 在边界(其函数假设已给定)上的值 $\overline{V}$ 和另一个具有如下性质的函数 U 来表示物体内部的 V:(a)U 在表面上必须为 0;(b)在内部一个固定的但未确定的点 P 上,U 像 $\frac{1}{r}$ 那样变为无穷,其中 r 是 P 与任何另一点间的距离;(c)U 在内部必须满足位势方程(30). 如果 U 已知(它可能是比较容易找到的,因为它满足比 V 较为简单的条件),那么 V 在每一内点可以表示为

$$4\pi V = -\iint \overline{V}\,\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中积分展布在曲面上,而 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 是 U 沿垂直于曲面而指向物体内部方向上的导数. 不用说,P 的坐标包含在 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 内,而且是在 P 处的变量. 这个由 Green 引进的后来 Riemann 称之为 Green 函数的函数 U 已成为偏微分方程的一个基本概念. 与 V 一样,Green 用"位势函数"的术语称这个特殊函数 U,他求得位势方程解的方法与用特殊函数的级数的方法相反,称为奇异点方法. 遗憾的是,函数 U 没有一般的表达式,也没有求它的一般方法. 在这件事情上,Green 满足于对电荷所产生的电位的情形,给出 U 的物理意义.

Green 应用他的定理和概念于电磁学问题. 1833 年他又着手研究变密度椭球体的引力位势问题①. 在这个工作中,Green 证明了,当 V 在物体边界上给定时,在整个物体上刚好有一个函数满足 $\Delta V = 0$, 没有奇点,有给定的边界值. 为了作出他的证明,Green 假定了存在一个函数极小化积分

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}v. \tag{33}$$

这是 Dirichlet 原理的第一次使用(参看第 27 章第 8 节).

① *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 5_3, 1835, 395～430 = *Mathematical Papers*, 187～222.

Green 在 1835 年的这篇论文中，做了许多用 n 维代替三维的工作，又给出了我们现在叫做超球面函数的重要结果，它是 Laplace 球面调和函数的推广. 因为 Green 的工作在一个时期内没有出名，所以，其他一些人独立地做了这个工作中的某些部分.

在分析引入英国后，Green 是第一个沿着大陆上的工作线索前进的英国大数学家. 他的工作培育了数学物理学者的庞大的剑桥学派，其中包括 William Thomson 爵士，Gabriel Stokes 爵士，Rayleigh 勋爵和 Clerk Maxwell.

继 Green 成就之后的是 Gauss 1839 年[①]的主导性著作《与距离平方成反比而作用的吸引力和排斥力的普遍定理》. Gauss 严格地证明了 Poisson 的结果，即在作用体内部一点处成立 $\Delta V = -4\pi\rho$，而 ρ 满足条件：在该点及周围一小区域内连续. 这个条件在作用体的表面上是不满足的. 在表面上 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ 有跳跃.

到这时为止，在位势方程和 Poisson 方程方面的工作，都假定了解的存在性. Green 关于存在 Green 函数的证明完全基于物理的理由. 从存在性观点看，位势理论的基本问题是要证明存在一个位势函数 V(William Thomson 在大约 1850 年时称它为调和函数)，它的值在一个区域的边界上是给定了的，在区域内满足 $\Delta V = 0$. 人们可以直接证实这件事，或者先证实 Green 函数 U 的存在性，然后再从它得到 V. 建立 Green 函数或 V 本身的存在性的问题称为 Dirichlet 问题或位势理论的第一边值问题，是这门学科中的最基本和最古老的存在性问题. 当 V 在边界上的法向导数已给定时，要找函数 V 使其在区域内部满足 $\Delta V = 0$ 的问题，采用莱比锡的教授 Carl G. Neumann(1832—1925)的名字叫 Neumann

---

① *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*, Vol. 4, 1840 = *Werke*, 5, 197～242.

问题.这个问题叫做位势理论的第二基本问题.

一条通向建立方程 $\Delta V=0$ 的解的存在性问题的路径,Green 已经采用过(请看[33]),但是 William Thomson 把它提到突出地位.1847 年[①] Thomson 发表了一条定理或原理,这一原理在英国以它的名字命名,在大陆则叫做 Dirichlet *原理*,因为 Riemann 这样称呼它.虽然 Thomson 是用较为普遍的形式叙述的,但原理的本质可以这样说:曲面 S 把区域分为内部区域 T 和外部区域 T',考虑在 T 和 T' 上分别有连续二阶导数的一切函数 U 的集合.这些函数 U 处处连续,并且在 S 上取一连续函数 f 的值.极小化 Dirichlet 积分

$$I=\iiint_T\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dv \tag{34}$$

的函数 V 就是满足 $\Delta V=0$ 并且在边界 S 取值为 f 的一个函数.(34)和 ΔV 的联系在于:按变分学的意义,I 的一级变分是 ΔV,而对于极小化的 V,ΔV 必须是 0.因为对于实的 U,I 不可能是负的,所以看来很清楚,极小化函数 V 一定存在,从而不难证明它是唯一的.于是 Dirichlet 原理是探讨位势理论中 Dirichlet 问题的一条途径.

Riemann 在复变函数方面的工作给 Dirichlet 问题和原理本身以新的重要性.Riemann 在他的博士论文中关于 V 的存在性的"证明"用了二维情形的 Dirichlet 原理,但像他自己所承认的,这个证明是不严格的.

Weierstrass 在他的 1870 年的一篇文章中[②]对 Dirichlet 原理提出批评时指出,极小化函数 U 的先验存在性是不为正确推理所支持的.对一切连续可微函数 U(它从内部区域到指定边界值

---

① *Jour. de Math.*, 12,1847,493～496 = *Cambridge and Dublin Math. Jour.*, 3,1848,84～87 = *Math. and Physical Papers*, 1,93～96.

② 第27章第9节.

上是连续地变动的),此积分有一个下界,那是对的. 但是在连续的可微的函数类中是否存在一个函数 U_0 达到这下界却是未经证明的.

解位势方程的另一技术是利用复函数论. 虽然 d'Alembert 在他 1752 年的著作(第 27 章第 2 节)中和 Euler 在一些特殊问题中已经用这技术解过位势方程,但直到 19 世纪中叶复函数论才活跃地应用于位势理论. 函数论与位势理论的相依关系基于如下事实:如果 $u+iv$ 是 z 的一个解析函数,则 u 和 v 两者都满足 Laplace 方程. 此外,如果 u 满足 Laplace 方程,则使 $u+iv$ 解析的共轭函数 v 必定存在(第 27 章第 8 节).

把方程 $\Delta u = 0$ 用于研究流体流动时,函数 $u(x, y)$ 就是 Helmholtz 所称的速度势,而这时 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 就表示流体在任一点 (x, y) 的速度分量. 在静电学的情形,u 是静电位而 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 是电力分量. 在这两种情形下,曲线 $u=$ 常数是等位线,而正交于 $u=$ 常数的曲线 $v=$ 常数都是流线或趋势线(电力线). 函数 $v(x, y)$ 叫流势函数. 由于这个函数的物理意义,把它引进来显然是有用的.

在解位势方程时,使用复函数论的一个优点来自这样一个事实,即:如果 $F(z) = F(x+iy)$ 是解析函数,因而它的实部和虚部满足 $\Delta V = 0$, 那么经过变换

(35) $$\xi = f(x, y), \eta = g(x, y),$$

其中 $$\zeta = \xi + i\eta,$$

把 x 与 y 变换到 ξ 与 η,就产生另一个解析函数 $G(\zeta) = G(\xi+i\eta)$,它的实部和虚部也满足 $\Delta V(\xi, \eta) = 0$. 现在如果原来的位势问题 $\Delta V = 0$ 必须在某区域 D 中求解,那么经适当选择变换,变换后的方程 $\Delta V = 0$ 必须在区域 D' 中求解,而 D' 可能简单得多. 这里,利用保角变换,如像 Schwarz-Christoffel 变换,是极为有益的.

我们不深入讨论复函数论在位势理论中的用法了,因为它的

用法的细节远远超出解偏微分方程的任何基本方法论. 然而,值得再次注意的是,许多数学家拒绝使用复函数,因为他们仍对复数感到不安. 在剑桥大学,甚至在 1850 年,还用繁笨的手段以避免牵涉到复函数. Horace Lamb 的《流体运动的数学理论教程》(*Treatise on the Mathematical Theory of the Motion of Fluids*),出版于 1879 年,是第一本在剑桥承认接受函数论的书. 这本书仍然是一本经典著作(今称为《流体动力学》(*Hydrodynamics*)).

5. 曲线坐标

Green 引入了许多主要的概念,其意义远远延伸到位势方程以外. 最先关注热方程的数学家兼工程师 Gabriel Lamé(1795—1870)引入了另一个主要的技巧,即使用曲线坐标系,它也可以用于许多类型的方程. Lamé 于 1833 年①指出,热方程仅对那些表面垂直于坐标平面 $x=$常数,$y=$常数,$z=$常数的导体是解出来了. Lamé 的想法是引入新的坐标系和相应的坐标面. 在非常有限的程度上说,这事已由 Euler 和 Laplace 做过了,他们两人使用了球坐标 ρ, θ, ϕ,在这情况下,坐标面 $\rho=$ 常数、$\theta=$ 常数、$\phi=$ 常数分别是球面、平面、锥面. 知道了从直角坐标变换到球坐标的方程,人们就能像 Euler 与 Laplace 所做的那样,把位势从直角坐标变换到球坐标.

新坐标系和坐标曲面的价值是双重的. 第一,在直角坐标系中,一个偏微分方程可能不能分离成这坐标系中的常微分方程,但在另一坐标系中可能是可分离的. 第二,物理问题可能需要一个,比如说,椭球上的边界条件,这样的边界在有一族以椭球面组成坐标面的坐标系中可以简单地表示出来,而在直角坐标系中必须用相当复杂的方程. 此外,在所采用的适当的坐标系中经变量分离

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, 14, 1833,194～251.

后,这个边界条件变成恰好可应用于所得常微分方程中的一个方程.

为了在新坐标系中解热方程的特殊目的,Lamé 引进了几个新的坐标系①. 他的主要坐标系是三族曲面,由下列方程给出:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}-1=0,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}-1=0,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}-1=0,$$

其中 $\lambda^2>c^2>\mu^2>b^2>\nu^2$. 这三族曲面是椭球面,单叶双曲面和双叶双曲面,它们全都具有相同的焦点. 一族中的任一曲面垂直地交割所有其他两族中的曲面,而实际上是在曲率线上交割它们的(第 23 章第 7 节). 因此空间中任何点有坐标$(\lambda,\ \mu,\ \nu)$,即每族中经过该点的曲面的 λ, μ 和 ν. 这个新坐标系叫做椭球面的,虽然 Lamé 曾称它为椭圆的(这一术语现已用于另一种坐标系了).

Lamé 把稳态情形(即温度不依赖于时间)的热方程,即位势方程,变换到这些坐标系,并指出他能用变量分离法把偏微分方程划归为三个常微分方程. 当然这些方程必须在适当的边界条件下求解. Lamé 在 1839 年②的一篇论文中进一步研究了在三轴椭球体中稳态的温度分布,并对他 1833 年论文处理的问题给出了一个完全解. 在这 1839 年的论文中他又引进了另一个曲线坐标系,现在称为球锥系,其中坐标曲面是一族球面和两族锥面. Lamé 还用这坐标系解过热传导问题. Lamé 用椭球坐标写了许多关于热传导的论文,连同 1839 年的第二篇论文包含在同一卷《数学杂志》内,在其中他处理了椭球体的一些特殊情形③.

---

① *Annales de Chimie et Physique*, (2),53,1833,190～204.

② *Jour. de Math.*, 4,1839,126～163.

③ *Jour. de Math.*, 4,1839,351～385.

互相正交的曲面族的课题,在偏微分方程的求解中有如此明显的重要性,以至对它本身或它内部的问题的研究已成为一个主题. 在1834年的一篇论文[①]中 Lamé 考虑了任何三族互相正交的曲面的普遍性质,给出了一个沿用至今的技术:在任何正交坐标系中表示偏微分方程的程序.

(Heinrich) Eduard Heine(1821—1881)沿着 Lamé 的思路前进. Heine 在他1842年的博士学位论文中[②],不仅确定了旋转椭球体内部的(稳态温度)位势(当位势在表面的值已给出时),而且还确定了这种椭球体外部的和两同焦旋转椭球面之间的壳体的位势.

Lamé 对他和别人用相互正交的坐标系所完成的事有如此深刻的印象,以至认为所有的偏微分方程都可能通过寻找适当的坐标系求解. 后来他认识到这是一个错误. 1859年他出版了一本论整个课题的书——《曲线坐标讲义》(*Leçons sur les coordonnées curvilignes*).

虽然把三族互相正交的曲面用作坐标曲面不能解决所有的偏微分方程,但确实开辟了一个新技术,在许多问题中能表现其优越性. 曲线坐标的使用已移植到其他偏微分方程. 例如, Emile-Léonard Mathieu(1835—1900)在1868年的一篇论文中[③],处理一个椭圆薄膜振动问题,其中涉及到波动方程,这里他引入了椭圆柱坐标,相应于这些坐标的函数,今称为 Mathieu 函数(第29章第2节). 在同一年 Heinrich Weber(1842—1913)研究方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2u=0$ 时[④],对由完整椭圆所围成的区域解出了它,同时也对由两个同焦椭圆弧和与椭圆弧同焦的两个双曲弧围成的区域解出

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, 14,1834,191～288.

② *Jour. für Math.*, 26,1843,185～216.

③ *Jour. de Math.*, (2),13,1868,137～203.

④ *Math. Ann.*, 1,1869,1～36.

了它.在椭圆和双曲线变成同焦抛物线的特殊情形也被考虑过,这里 Weber 引进了在这坐标系中便于展开的函数,今称为 Weber 函数或抛物柱函数. Mathieu 在他的《数学物理教程》(*Cours de physique mathématique*, 1873)中,讨论了包含椭球体的新问题,并引入了其他更新的函数.

Lamé 所开创的想法,即用曲线坐标的想法,还只是描述了这一工作的开端.许多其他的坐标系已经导入,用变量分离法引出的常微分方程,求解时得到的相应的各种特殊函数也已研究过了①.特殊函数的这个理论的大部分,是由物理学者在具体问题中,当他们需要这些函数及其性质时所创立的(亦可见第 29 章).

6. 波动方程和退化波动方程

偏微分方程的最重要的类型也许是波动方程了.在三维空间中,其基本形式是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{36}$$

就我们所知,这方程在 18 世纪就已经引入了,并且也已用球坐标表示出来. 19 世纪时波动方程的新用途被发现了,特别是在萌芽时期的弹性领域.各种形状的固体在不同的初始条件和边界条件下的振动以及波在弹性体中的传播产生一大堆问题.进一步研究声和光的传播引起成百个附加问题.

在变量可分离的场合,解(36)的技巧与 Fourier 解热方程和 Lamé 用某一曲线坐标系表示位势方程后所做的没有差别. Mathieu 用曲线坐标经变量分离而求解波动方程是成百篇论文中的典型.

---

① 见 William E. Byerly 的 *An Elementary Treatise on Fourier Series*, Dover (reprint), 1959,与 E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Chelsea (reprint), 1955.

处理波动方程的另一类完全不同的重要结果是把方程作为整体对待而得到的. 第一个这样的主要结果是论述初值问题的,这要追溯到Poisson,他在1808到1819年期间研究过这个方程. 他的主要成就①是一个关于波$u(x, y, z, t)$传播的公式,其初始状态由初始条件

$$(37)\qquad u(x, y, z, 0) = \phi_0(x, y, z),$$
$$u_t(x, y, z, 0) = \phi_1(x, y, z)$$

描述,而波u满足偏微分方程

$$(38)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

其中a是常数. 其解u由下式给出:

$$(39)\quad u(x, y, z, t)$$
$$= \frac{1}{4\pi a}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\phi_1\ (x + at\sin\phi\cos\theta,\ y + at\sin\phi\sin\theta,$$
$$z + at\cos\phi)at\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$+ \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\phi_0\ (x + at\sin\phi\cos\theta,\ y + at\sin\phi\sin\theta,$$
$$z + at\cos\phi)at\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,$$

其中θ与ϕ是普通的球坐标. 积分区域是以具有坐标x, y, z的点P为中心,以at为半径的球S_{at}的表面.

Poisson的结果意味着什么,为了得到这方面的某些启示,让我们来考虑一个物理例子. 假如初始扰动是由边界为S的物体V(图28.2)发出,使得ϕ_0与ϕ_1定义在V上并在V外为0. 我们说这初始扰动在V上被局部化了. 从物理上看是一个波从V发出并向空间扩展出去. Poisson的公式告诉我们在V外任一点$P(x, y, z)$处发生些什么事情. 令d与D表示P到V上的点的最小与最大距离. 当$t < \frac{d}{a}$时,(39)中的积分为零,因为积分区域是中心在

① *Mém. de l' Acad. des Sci., Paris*, (2),3,1818,121～176.

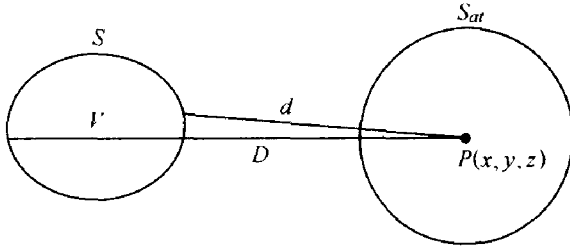


图 28.2

P、半径为 at 的球 S_{at} 的表面. 因为 ϕ_0 与 ϕ_1 在 S_{at} 上是 0, 于是函数 u 在 P 处是 0. 这意味着从 S 扩展出来的波还没有达到 P. 在 $t=\frac{d}{a}$ 时, 球 S_{at} 刚刚接触到 S, 因此从 S 发出的波的波前到达 P. 当 t 在 $t=\frac{d}{a}$ 和 $t=\frac{D}{a}$ 之间时, 球 S_{at} 交割 V, 所以 $u(P, t)\neq 0$. 最后对 $t>D/a$, 球 S_{at} 将不与 S 相交(整个区域 V 属于 S_{at} 的内部), 即是说, 初始扰动已经通过了 P. 所以又有 $u(P, t)=0$. 时刻 $t=\frac{D}{a}$ 相应于波的尾缘通过 P. 在任何给定的时刻 t, 波的前缘呈曲面形状, 把扰动已到达的点和尚未到达的点分开. 这个前缘是中心在 S、半径为 at 的一族球面的包络. 在时刻 t, 波的后缘是一个曲面, 把还存在有扰动的点与扰动已经过去的点分开. 于是我们看到, 在空间局部化了的扰动在每一点 P 引起的效果仅仅持续有限时间. 此外这波(扰动)还有前缘和后缘. 这整个现象叫做 Huygens 原理.

解波动方程初值问题的一个完全不同的方法是 Riemann 在研究有限振幅声波传播的过程中创立的①. 他考虑可写为如下形状的二阶线性微分方程:

(40) $$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0,$$

其中 D, E, F 是 x 和 y 的二阶可微的连续函数. 问题是在知道了

① *Abh. der Ges. der Wiss. zu Gött.*, 8, 1858/1859, 43~65 = *Werke*, 156~178.

沿曲线 Γ 的 u 和 $\partial u/\partial n$(意即知道 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$)时,去求出在任意点 P 处的 u(图 28.3),他的方法依赖于找一个函数 v(叫 Riemann 函数或特征函数)①,使其满足现今所称的共轭方程

$$(41)\qquad M(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial(Dv)}{\partial x}-\frac{\partial(Ev)}{\partial y}+Fv=0$$

和其他一些我们即将详细说明的条件.

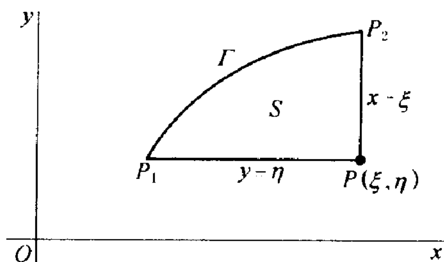


图 28.3

Riemann 引入通过 P 的特征(他没有用这个名词),$x=\xi$ 和 $y=\eta$ 的线段 PP_1 和 PP_2. 现在把广义 Green 定理(二维情形)应用于微分表示式 $L(u)$. 为了简明地表示这定理,我们引进

$$X=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+Duv,$$

$$Y=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+Euv.$$

于是 Green 定理说

$$(42)\qquad \int_S[vL(u)-uM(v)]\mathrm{d}S=\int_S\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\int_C\{X\cos(n,\ x)+Y\cos(n,\ y)\}\mathrm{d}s,$$

其中 S 是图中的区域,C 是 S 的整个边界,$\cos(n,\ x)$ 是 C 的法线方向和 x 轴间夹角的余弦.

除了满足(41),Riemann 对 v 还要求

① v 与基本解或 Green 函数不一样.

$$
(43)\qquad
\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\ v = 1 \quad 在\ P\ 处,\\
&(\mathrm{b})\ \frac{\partial v}{\partial y} - Dv = 0 \quad 在\ x = \xi\ 上,\\
&(\mathrm{c})\ \frac{\partial u}{\partial x} - Ev = 0 \quad 在\ y = \eta\ 上①.
\end{aligned}
$$

使用条件 $M(v) = 0$ 与条件(43),并算出 C 上的曲线积分,Riemann 得到

$$
(44)\qquad u(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} \{X\cos(n, x) + Y\cos(n, y)\}\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\{(uv)_{P_1} + (uv)_{P_2}\}.
$$

这样,在任意点 P 处 u 的值就用 u, $\partial u/\partial n$, v 和$\partial v/\partial n$ 在 Γ 上的值及 u 和 v 在 P_1 与 P_2 处的值给出来了.

现在 u 在 P_1 与 P_2 已给出. 函数 v 本身必须从求解 $M(v) = 0$ 得出并满足条件(43). Riemann 方法取得的成就在于:把原来关于 u 的初值问题变成关于 v 的另一类初值问题. 而第二个问题通常较容易求解. 在 Riemann 的物理问题中,找出 v 来特别容易. 然而这样的 v 的存在性一般说来不是由 Riemann 证明的.

刚才所述的 Riemann 方法仅对以二元波动方程(双曲方程)作为例子的那类方程有用,而不能直接推广. 把这个方法推广到多于两个独立变量时,遇到了 Riemann 函数在积分区域边界上变为奇异从而使积分发散的困难. 这方法已经被推广,但以增加复杂性为代价.

用其他方法解波动方程的进展是与所谓稳态问题密切联系的,它导致简化的波动方程. 波动方程就其形式本身来说,是包含时间变量的. 在许多物理问题里,如果人们感兴趣的是简单谐波,就假设 $u = w(x, y, z)e^{ikt}$,把它代入波动方程就得到

---

① 对二维问题,v 是四个变量 ξ, η, x 和 y 的函数. 作为 x, y 的函数,它满足方程 $M(v) = 0$.

$$(45)\qquad \Delta w + k^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k^2 w = 0.$$

这就是退化波动方程或 Helmholtz 方程. 方程 $\Delta w + k^2 w = 0$ 表示所有调和的、声音的、弹性的、电磁学的波. 正当较老的作者满足于寻找特殊积分的时候, Hermann von Helmholtz(1821—1894)在他论一端开放的管道内(风琴管)空气振动的著作里,给出了关于这个方程的解的第一个普遍的研究①. 他关注传音的问题,其中 w 是一个作谐振动的气体的速度势, k 是由空气弹性和振动频率确定的常数, λ 是波长,等于 $2\pi/k$. 应用 Green 定理,他证明了: $\Delta w + k^2 w = 0$ 的任一个在给定区域内连续的解可以表示为区域表面上激发点的单层和双层效应. 把 $e^{-ikr}/4\pi r$ 作为 Green 定理中的一个函数,他得到

$$(46)\quad w(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial w}{\partial n}dS + \frac{1}{4\pi}\iint w\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS,$$

其中 r 表示 P 到边界上变动点的距离. 这样,在求解区域内任一点 P 处的 w 就由 w 与 $\partial w/\partial n$ 在边界 S 上的值给出.

19 世纪伟大的德国数学物理学者之一, Gustav R. Kirchhoff (1824—1887)使用 Helmholtz 的工作求得了波动方程初值问题的另一个解. 假定 $\Delta w + k^2 w = 0$ 是得自

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u,$$

其中已令 $u = we^{i\sigma t}$ 以使 $k = \sigma/c$. 于是(46)可写为

$$(47)\qquad u(P,t) = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{e^{i\sigma[t-(r/c)]}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS + \frac{1}{4\pi}\iint u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{i\sigma[t-(r/c)]}}{r}\right)dS.$$

这个公式被 Kirchhoff 推广了. 如果令 $\phi(t)$ 是 u 在时刻 τ 时边界上

① *Jour. für Math.*, 57, 1860, 1～72 = *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 1, 303～382.

任一点(x, y, z)处的值，并令$f(\tau)$是$\frac{\partial u}{\partial n}$相应的值，则 Kirchhoff 证明了①

$$(48) \qquad u(P, t) = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{f[t-(r/c)]}{r}\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\phi[t-(r/c)]}{r}\right)\mathrm{d}S,$$

其中假定在最后一项中关于n的微分仅在r明显出现于分子分母两者时才应用于r. 这样，在P处的u就用u与$\frac{\partial u}{\partial n}$在较早时刻、在围绕$P$点的闭曲面上的值表出. 这结果叫作声学的 Huygrens 原理，是 Poisson 公式的推广.

我们已经注意到 Riemann 用了稍较广义的 Green 定理. 用到共轭微分方程的 Green 定理的完全推广也称为 Green 定理，来源于 Du Bois-Reymond(1831—1889)的一篇论文②和 Darboux 的书《曲面的一般理论》(*Théorie générale des surfaces*)③；两者都引用了 Riemann 1858/1859 年的论文. 如果给定的方程是

$$L(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

其中系数都是x与y的函数. 在u、v与其一阶、二阶导数都连续的假定下，在x-y平面的任意区域R上积分乘积$vL(u)$. 于是由分部积分就得到广义的 Green 定理：

$$\iint uM(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint vL(u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int(Q\mathrm{d}y - P\mathrm{d}x),$$

其中重积分展布于R的内部，单积分展布于R的边界上，并且

$$M(v) = \frac{\partial^2(Av)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2(Bv)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2(Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial(Dv)}{\partial x} - \frac{\partial(Ev)}{\partial y} + Fu,$$

① *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1882, 641～669=*Ges. Abh.*, 2, 22 ff.

② *Jour. für Math.*, 104, 1889, 241～301.

③ Vol. 2, Book Ⅳ, Chap. 4, 2nd ed., 1915.

$$P = B\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)uv,$$

$$Q = A\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + B\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right)uv.$$

$M(v)$是 $L(u)$的共轭表示式, $M(v) = 0$ 是共轭微分方程. 反之, $L(u)$是 $M(v)$的共轭.

Green 定理的重要性在于它能用于求得某些偏微分方程的解. 例如,因为椭圆型方程总能够写成

$$L(u) = \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

的形式,于是

$$M(v) = \Delta v - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv = 0.$$

令 v 是共轭方程的一个解,它在任意点(ξ, η)像对数那样变成无穷;就是说,它的性态相同于

$$v = U\log r + V,$$

其中 r 是从(ξ, η)到(x, y)的距离;U 与 V 在所考虑的区域 R 内是连续的;并且 U 是标准化了的,因而$U(\xi, \eta) = 1$. 现在把(ξ, η)包围在一个圆内,把它从积分区域中剔出来. 于是,当此圆收缩到(ξ, η)时,由广义 Green 定理给出

$$(49)\quad 2\pi u(\xi, \eta) = -\iint vL(u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\int\left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} + (a\cos(n, x) + b\cos(n, y))uv\right]\mathrm{d}s,$$

其中的 n 如果指向区域外部就是正的,单积分按反时针方向展布在边界上. 因为 u 满足 $L(u) = 0$; 如果我们知道 v,并且在边界上

u 与$\partial u/\partial n$ 已给出(两者都不是任意的),那么我们就把 u 表示成了单积分.函数 v 叫做 Green 函数.然而常常把 v 在 R 的边界上为 0 的条件附加到 Green 函数的定义中去.Green 定理的这个用法已发展到各种特殊情形和各种推广.

7. 偏微分方程组

18 世纪时,流体运动的微分方程显现为第一个重要的偏微分方程组.19 世纪时创建了三个更为基本的方程组:粘性介质的流体动力方程、弹性介质方程和电磁理论方程.

当有粘性出现时(实际上总是这样),流体运动方程的获得经历了曲折的途径.Euler 已经给出了无粘性流体运动的方程.从 Lagrange 所处的时代起,就已经认识到有速度位势存在和无速度位势存在的流体运动之间的本质差别.经与弹性理论的形式类比和分子受排斥力激活的假设的启发,多科工艺学校和交通工程学校的力学教授 Claude L. M. H. Navier(1785—1836)在 1821 年得到了基本方程①.像今天被确认的那样,Navier-Stokes 方程是

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} &= \rho X-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u,\\
\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} &= \rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v,\\
\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} &= \rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w,\\
\theta &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},
\end{aligned}
\tag{50}
$$

其中 Δ 有通常意义;ρ 是流体的密度;p 是压力;u, v, w 是流体在时刻 t 时,在任一点(x, y, z)处的速度分量;X, Y, Z 是一个外力的分量;常数 μ 依赖于流体的性质,叫做粘性系数;导数 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 具

① *Mém de l' Acad. des Sci.*, *Paris*, (2),1827,375~394.

有第 22 章第 8 节解释的意义. 对于不可压缩的流体, $\theta = 0$.

这些方程也被 Poisson 在 1829 年[①]得到. 之后,又被剑桥大学数学教授 George Gabriel Stokes(1819—1903)在他的论文《关于运动流体内部摩擦的理论》[②]中根据连续介质力学重新导出. Stokes 力图说明在所有已知液体中的摩擦作用,它把动能转化为热而引起运动衰减. 液体由于其粘性而附着于固体的表面,因而对它们作用着切向力.

弹性的学科是由 Galileo, Hooke, Mariotte 奠基的,而由 Bernoulli 家族和 Euler 培育的. 但这些人只处理了一些特殊问题. 为了解决这些问题,他们关于梁、杆和板在应力、压力或荷载下是怎样变动的提出了专门的假设. 严格意义上的理论是 19 世纪创立的. 从 19 世纪初叶起,许多伟大人物持续地致力于获得主宰弹性介质(包括空气)的行为的方程. 这些人主要是工程师和物理学家. 在他们之中 Cauchy 和 Poisson 是大数学家,虽然 Cauchy 按其所受的训练说来是个工程师.

弹性问题包括:物体在应力下的行为,其中要考虑它们将取什么平衡位置;物体在一个初始扰动或一个连续作用力驱动时的振动;以及在空气或固体的情形下,波通过它们的传播. 在 19 世纪,大约在 1820 年,出现了由物理学家 Thomas Young(1773—1829)和工程师 Augustin-Jean Fresnel(1788—1827)开创的光的波动理论,于是对弹性学的兴趣就增浓了. 光被看作是波在以太中的运动,而以太被认为是一种弹性介质. 因此光通过以太的传播就成为一个基本问题. 19 世纪初期,对弹性学引起强烈兴趣的另一个刺激是 Ernst F. F. Chladni(1756—1827)关于玻璃和金属的振动的实验(1787),他指出了波节线. 这些应与声音有关,例如与振动鼓

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, 13, 1831, 1～74.

② *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 8, 1849, 287～319 = *Math. and Phys. Papers*, 1, 75～129.

面发出的声音有关.

求得弹性学基本方程的工作是长期的和充满陷阱的,因为对于物质内部或分子结构知道得很少,所以把握任何物理原理都是困难的. 对于固体、空气、以太所作的假设随着作者的不同而不同,并且是互相争执着的. 对于以太的情形,人们推测它是穿过固体的,因为光线通过某些固体,并被另一些固体所吸收,而以太分子同固体分子的关系也提出了极大的困难. 我们不打算追究弹性体的物理理论,即使今天我们的理解也是不完全的.

Navier① 是第一个(1821)研究弹性体平衡和振动的普遍方程的人. 他把材料假设为各向同性,因而各方程只包含表示物体性质的单独一个常数. 到 1822 年,经 Fresnel 工作的刺激,Cauchy 开辟了另一条通向弹性理论的途径②. Cauchy 的方程包含表示物体材料的两个常数,对各向同性的物体来说,其方程是

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u&=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v&=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w&=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\
\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&+\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

这里 u, v, w 是位移分量,θ 叫做膨胀系数,λ 和 μ 是物体或介质的常数. 对一般的非各向同性介质来说,方程是十分复杂的,而把它们普遍地写出来可能是乏味的. 这些方程是由 Cauchy 给出的③.

19 世纪对科学和技术带有巨大冲击的最壮观的胜利是

---

① *Mém. de l' Acad. des Sci.*, *Paris*, (2),7,1827,375~394.

② *Exercices de math.*, 1828 = *Œuvres*, (2),8,195~226.

③ *Exercices de math.*, 1828 = *Œuvres*, (2),8,253~277.

Maxwell在1864年关于电磁学规律的导出①. Maxwell利用无数先辈们特别是Faraday关于电和磁的研究引入了位移电流的概念——无线电波是位移电流的一种形式——并且用这个概念确切地表述了电磁波的传播. 他的方程有四个,最方便的是用后来为Oliver Heaviside采用的向量形式叙述,包含电场强度 $\boldsymbol{E}$,磁场强度 $\boldsymbol{H}$,介电系数 ξ,介质的磁通率 μ,和电荷密度 ρ. 这些方程是

$$(52)\qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t},\operatorname{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\boldsymbol{H})}{\partial t},$$

$$(53)\qquad \operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E}=\rho,\operatorname{div}\mu\boldsymbol{H}=0\text{②}.$$

前两个方程是主要的方程,等于六个标量(非向量)的偏微分方程,位移电流是 $\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})/\partial t$.

正是对这些方程的研究,使Maxwell预言电磁波以光速通过空间. 基于两速度相同,他勇敢地断言光是电磁现象. 这是一个从他那时代起已被详尽地证实了的预言.

大家知道,没有解任何上述方程组的普遍方法. 然而,19世纪的人们渐渐认识到在偏微分方程的情形下,不管是单个方程还是方程组,通解几乎不像初始条件和边界条件已给定的特殊问题的解有用,在这种情形下实验工作也可能帮助作出有用的简化假定. Fourier,Cauchy,Riemann的著作促进了这事的实现. 关于使这些方程组特殊化的许多初值和边值问题的求解工作是大量的,在这世纪中几乎所有的数学家都研究过这类问题.

8. 存在性定理

当18和19世纪的数学家们创立了大量类型的微分方程时,他们就发现解出很多这些方程的方法是不合用的. 在多项式方程

---

① *Phil. Trans.*, 155,1865,459～512 = *Scientific Papers*, 1,526～597.

② 关于curl和div的意义见第32章第5节.

的情形,解四次以上方程的努力失败后,Gauss 转而去证明根的存在性(第 25 章第 2 节).和这种情况有点相像,在微分方程的工作中,若求出了显解,则这一事实本身就证得了存在性;而求显解的失败就使数学家转而去证明解的存在性.这样的证明即使并不显示出一个解或把解表为有用的形式,但仍满足多种目的.几乎在所有的情形下,微分方程都是物理问题的数学描述.因为没有什么东西可以有效地保证数学方程可以求解,所以解的存在性证明至少会保证解的寻求不是作无谓的尝试.存在性的证明还会回答这样的问题:关于给定的物理情况,我们必须知道些什么,就是说,什么初始条件和边界条件保证有一个解,并且最好是保证有唯一的解.另外有些目标,在存在性定理工作开始之初可能没有想像到,现在立即被认识到了.解是否随着初始条件连续地变动?或者当初始条件或边界条件稍稍变化时是否有完全新的现象产生?例如,由行星的一个初始速度值得到的抛物轨道,作为初始速度稍微变化的结果,可以变成椭圆轨道.轨道上这样的差异在物理上是最有意义的.更进一步,解问题的某些方法论,如像 Dirichlet 原理或 Green 原理的运用,都预先假定了一个特解的存在.这些特解的存在性并没有建立起来.

在我们给出关于存在性定理的工作的某些简短叙述之前,先说明偏微分方程的一种分类可能是有帮助的,这种分类实际上是在这世纪相当晚的时候才作出的.虽然 Laplace 和 Poisson 已用把这些方程划归为正规或标准形式的办法对分类作了某些努力,但 Du Bois-Reymond 引入的分类现在已成为标准的了. 1839 年①他用特征线方法(第 22 章第 7 节)把最一般的齐次二阶线性方程

$$(54)\quad R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+S\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+Zu=0$$

① *Jour. für Math.*, 104, 1889, 241～301.

进行了分类，方程中的系数都是 x 和 y 的函数，这些系数和它们的一阶和二阶导数都是连续的. 特征曲线到 x-y 平面的投影(这些投影也叫特征)满足

$$T\mathrm{d}x^2 - S\mathrm{d}x\mathrm{d}y + R\mathrm{d}y^2 = 0.$$

特征为虚值、相异实值或相同实值，取决于

$$TR - S^2 > 0,\ TR - S^2 < 0,\ TR - S^2 = 0.$$

Du Bois-Reymond 分别叫这些情形为椭圆的、双曲的和抛物的. 然后他指出，引入新的独立实变量

$$\xi = \phi(x,\ y),\ \eta = \psi(x,\ y)$$

之后，上述方程总可以分别变换到下面三种正规形式之一：

$$\text{(a)}\ R'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) + P'\frac{\partial u}{\partial\xi} + Q'\frac{\partial u}{\partial\eta} + Zu = 0,$$

$$\text{(b)}\ S'\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + P'\frac{\partial u}{\partial\xi} + Q'\frac{\partial u}{\partial\eta} + Zu = 0,$$

$$\text{(c)}\ R'\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + P'\frac{\partial u}{\partial\xi} + Q'\frac{\partial u}{\partial\eta} + Zu = 0.$$

曲线族 $\phi(x,\ y) =$ 常数和 $\psi(x,\ y) =$ 常数是两族特征曲线的方程.

可附加的补充条件对三类方程是不同的. 在椭圆型的情形(a)，人们考虑 x-y 平面的一个有界区域并给定 u 在边界上的值(或一个等价的条件)，而要求 u 在区域内的值. 对双曲型微分方程(b)的初值问题，人们必须在某初始曲线上给定 u 与 $\partial u/\partial n$. 还可以有边界条件. 对于抛物型情形(c)，虽然今天知道可以给(c)加上一个初始条件和边界条件，但那时适当的初始条件却还未指明. 偏微分方程的这个分类法已推广到多变量方程，高阶方程和方程组. 虽然分类和补充条件在这世纪的早期是不知道的，但数学家们渐渐地知道了这些差别，并且，这些差别已出现在他们能够证明的定理中.

关于存在性定理的工作成为 Cauchy 的主要活动，他强调说，

在求显解无效的场合常常可以确证存在性. 在一系列论文中①Cauchy 注意到任何阶数大于一的偏微分方程都可以划归为偏微分方程组,他讨论了方程组的解的存在性. 他称他的方法为**极限的计算**(Calcul des limites),但今天叫做优势函数法. 这方法的本质在于证明:具有一定收敛区域的自变量的幂级数确实满足这方程组. 我们将联系 Cauchy 关于常微分方程的工作来说明这个方法(第 29 章第 4 节). 他的定理仅包括方程中系数和初始条件都是解析的情形.

为了得到 Cauchy 工作的某些具体概念,我们将考虑隐含于两个自变量的二阶方程

$$r = f(z,\ x,\ y,\ p,\ q,\ s,\ t) \tag{55}$$

中的东西,像通常一样,其中 $r = \partial^2 z/\partial x^2$, 而 f 对其变量是解析的. 在这情形下,人们必须在初始线 $x = 0$ 上指明

$$z(0,\ y) = z_0(y),\ \frac{\partial z}{\partial x}(0,\ y) = z_1(y),$$

其中 z_0 和 z_1 是解析的.(初始线可以改成曲线,在这情形下$\partial z/\partial x$必须改为$\partial z/\partial n$.)如果以上条件都满足了,那么解 $z = z(x,\ y)$ 是存在且唯一的,并且在某个从初始线出发的区域内解析.

Cauchy 关于方程组的工作被 Sophie Kowalewsky(1850—1891)②用稍为改进一点的形式独立地做出来了. Kowalewsky 是 Weierstrass 的学生并继承了他的思想. Kowalewsky 是少数有名望的女数学家之一. 1816 年 Sophie Germain(1776—1831)关于弹性的论文赢得了法国科学院授予的奖金. Kowalewsky 由于她 1888 年写的关于绕一固定点旋转的物体的运动方程的积分也赢

① *Comp. Rend.*, 14,1842, 1020～1025 = *Œuvres*, (1),6,461～467,和 *Comp. Rend.*, 15,1842,44～59,85～101,131～138 = *Œuvres*, (1),7,17～33,33～49,52～58.

② *Jour. für Math.*, 80,1875,1～32.

得了巴黎科学院的奖金;1889年她在斯德哥尔摩当了数学教授. Cauchy 和 Kowalewsky 的证明后来被 Goursat① 改进了.

代替(55),如果给定的二阶方程形为

(56) $$G(z, x, y, p, q, r, s, t) = 0,$$

那么在写成(55)的形式之前必须先解出 r. 考虑一个简单的但重要的情形,设方程是

$$G = A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0,$$

其中 $A, B, \cdots, F$ 是 x, y 的函数,于是为了解出 r, $\frac{\partial G}{\partial r}$ 必须不是0. 在 $\partial G/\partial r = 0$ 的情形,Cauchy 问题的解并不一定存在,而当解存在时,它并不是唯一的. 在有三个或更多个自变量的情形(我们考虑三个),如果方程写为

(57) $$\sum_{i,k} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f,$$

其中系数是自变量 x_1, x_2, x_3 的函数,则例外情形发生于初始曲面 S 满足一阶偏微分方程

(58) $$\sum A_{ik}\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_k} = 0$$

的时候. 沿着这样的曲面,(57)的两个解可以是相切的,甚至有高阶接触. 这个性质和一阶方程 $f(x, y, u, p, q) = 0$ 的特征曲线的性质(第22章第5节)是一样的,所以这些曲面也叫特征. 在物理上,这些曲面 S 就是波前.

关于特征的这个理论,对于两个自变量的情形,Monge 和 André-Marie Ampère(1775—1836)是知道特征的这个理论的. 把它推广到多于两个自变量的二阶方程的情形首先是由 Albert

① *Bull. Soc. Math. de France*, 26,1898,129~134.

Victor Bäcklund(1845—1922)① 作出的，但在 Jules Beudon② 再次把它作出之前知道的并不广泛.

20 世纪最主要的法兰西数学家 Jacques Hadamard(1865—1963)，在他的《关于波的传播的讲义》(*Leçons sur la propagation des ondes*, 1903)中，把特征理论推广到了任意阶的偏微分方程. 作为例子，我们来考虑自变量为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 而应变量为 ξ, η, ζ 的三个二阶偏微分方程的方程组. 这个方程组的 Cauchy 问题是：在 $n-1$ 维"曲面"M_{n-1} 上给定了 ξ, η, ζ 和 $\partial\xi/\partial x_n$, $\partial\eta/\partial x_n$, $\partial\zeta/\partial x_n$ 的值，求出函数 ξ, η 和 ζ. 于是，除非 M_{n-1} 满足一个六次的一阶偏微分方程，比如说 $H=0$，否则函数 ξ, η 和 ζ 的二阶和高阶导数就都可以计算. 所有满足 $H=0$ 的"曲面"是特征"曲面". 根据一阶偏微分方程的理论，微分方程 $H=0$ 有由

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\partial H/\partial P_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{\partial H/\partial P_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\partial H/\partial P_{n-1}}$$

定义的特征线(曲线)，其中 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 是 x_n 沿"曲面" M_{n-1} 而取的关于 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的偏导数. 这些线叫做原来二阶方程组的双特征. 在光的理论中，它们就是射线.

目前特征在偏微分方程的理论中起着重大的作用. 例如，在特征理论的基础上，Darboux③ 曾经给出积分两个自变量的二阶偏微分方程的强有力的方法. 它把问题转化为积分一个或多个常微分方程，包括了 Monge, Laplace 和其他一些人的方法.

另外一类存在性定理处理了 Dirichlet 问题，就是用直接方法或用 Dirichlet 原理的方法建立 $\Delta V=0$ 的解的存在性. 二维 Dirichlet 问题(但不是极小化 Dirichlet 积分的 Dirichlet 原理)的第一个存在性证明是由 Weierstrass 的学生 Hermann Amandus Schwarz(1843—1921)给出的. Schwarz 于 1892 年在柏林接替

---

① *Math. Ann.*, 13, 1878, 411～428.

② *Bull. Soc. Math. de France*, 25, 1897, 108～120.

③ *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (1), 7, 1870, 175～180.

Weierstrass,受到 Weierstrass 对此问题的提示. 在关于边界曲线的普遍假设下,利用所谓交替法的手续①,他证明了解的存在性②.

在同一年,即1870年,Carl G. Neumann 用算术平均法给出了三维 Dirichlet 问题③的解的另一个存在性证明,而他也没用到 Dirichlet 原理④. 其思想主要发挥在他的《关于 Abel 积分的 Riemann 理论的讲义》(*Volesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*)⑤中.

后来 Henri Poincaré⑥ 用扫除法,即"扫出去"的方法,这方法处理问题的办法是,造出一系列在区域 R 上不调和但取正确边值的函数,这些函数变得越来越调和.

最后,David Hilbert 重建了 Thomson 和 Dirichlet 的变分方法,并建立了 Dirichlet 原理,作为证明 Dirichlet 问题的解的存在性的一个方法. 1899年⑦,Hilbert 证明了在区域、边值和允许函数的适当条件下,Dirichlet 原理确实成立. 他使 Dirichlet 原理成为函数论中的一个有力工具. 在含有1901年⑧做的工作的另一出版物中,Hilbert 给出了更为一般的条件.

Dirichlet 原理的历史是值得重视的. Green, Dirichlet, Thomson 以及他们那个时代的其他一些人把这原理认为完全可靠的方法并自由地运用它. 后来,Riemann 在复变函数论中指明它对导出

---

① Schwarz 的方法见于 Felix Klein 的 *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Chelsea (reprint), 1950, 1, p. 265,其中叙述了这个方法的大意;又见于 A. R. Forsyth 的 *Theory of Functions*, Dover (reprint), 1965, 2, 十七章,其中作了完整的叙述,在后一书中给出了许多文献.

② *Monatsber. Berliner Akad.*, 1870, 767～795 = *Ges. Math. Abh.*, 2, 144～171.

③ *Königlich Sächsischen Ges. der Wiss. zu Leipzig*, 1870, 49～56, 264～321.

④ 这方法描述于 O. D. Kellogg 的 *Foundations of Potential Theory*, Julius Springer, 1929, 281ff 中.

⑤ 第二版, 1884, 238ff.

⑥ *Amer. Jour. of Math.*, 12, 1890, 211～294 = *Œuvres*, 9, 28～113.

⑦ *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 8, 1900, 184～188 = *Ges. Abh.*, 3, 10～14.

⑧ *Math. Ann.*, 59, 1904, 161～186 = *Ges. Abh.*, 3, 15～37.

主要结果是非凡的工具.所有这些人都明白基本的存在性问题还没有解决,甚至在 1870 年 Weierstrass 宣布他的批判之前,他怀疑这方法就已有几十年了.后来,在本世纪,这原理被 Hilbert 所拯救、利用并扩充了.假如前进步伐要使原理的应用等待 Hilbert 的工作,那么 19 世纪很大一段关于位势理论和函数论的工作就会丧失掉了.

Laplace 方程 $\Delta V = 0$ 是椭圆型微分方程的基本形式.许多存在性定理是对更一般的椭圆型微分方程,诸如,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \tag{59}$$

建立的.这种定理的变种是繁多的.我们将只叙述一个关键的结果.这方程的解的存在性和唯一性(解在边界上的值是规定好了的)是由 Picard① 对充分小的区域证明了的.这结果已被 Picard 和其他人扩充到多变量、大区域和其他方面. Picard② 还证明了系数是解析的上述形式的(甚至是稍微更普遍一些的)方程在求解区域内仅具有解析解,即使这解取非解析的边界值也是这样.

迄今所讨论的定理已一般地处理了解析微分方程和解析初值或边界数据.然而,这样一些条件对应用是太局限了,因为所给物理数据可能不是解析的.另外一大类定理处理不太严厉的条件,我们将只给出一个例子.应用于双曲方程的 Riemann 方法依赖于其特征函数 v 的存在性.像我们指出过的,Riemann 没有证明 v 的存在性.

对于这个双曲方程的情形(见[40]),Du Bois-Reymond 在 1889 年寻找适当的条件并得到了结果③,这结果是对 $x=$ 常数与 $y=$ 常数都是特征的情形表达的,它是这样说的:如果沿曲线 AB

---

① *Comp. Rend.*, 107,1888,939～941; *Jour. de Math.*, (4),6,1890,145～210; *Jour. de Math.*, (5),2,1896,295～304.

② *Jour. de l'Ecole Poly.*, 60,1890,89～105.

③ *Jour. für Math.*, 104,1889,241～301.

给出了连续函数 u 与$\partial u/\partial n$,即任何特征线交曲线 AB 不多于一次,则存在这微分方程的一个并且只有一个解 u,它沿 AB 取 u 与 $\partial u/\partial n$ 的已给值. 这解定义在过 A 与过 B 的特征所确定的矩形上. 另外,如果连续函数 u 的值在互相联结的两特征线段上给定了,那么 u 在特征所确定的矩形上仍然是唯一确定的. 用 x, y 和 u 作为空间坐标来表示,第一个结果说的是曲面 $u(x, y)$以给定倾斜度通过一给定空间曲线. 第二个结果意味着解或曲面包含在两条相交的空间曲线所确定的空间里. 对连续的初始条件 u 与 $\partial u/\partial n$(在第二种情形下是 u),解在上述矩形中将是正则的或处处满足偏微分方程. u 与$\partial u/\partial n$ 的间断性将沿着矩形中的特征传播.

19 世纪的后半叶,对区域 D 中 $\Delta u+k^2u=0$ 的特征值的存在性做了大量工作. 主要结果是:对于已给区域和在三个边界条件 $u=0$, $\partial u/\partial n=0$, $\partial u/\partial n+hu=0$(当正法向量指向区域外面时, $h>0$)的任何一个之下,总有 k^2 的无穷多个离散值,而每一个值就有一个解. 在二维情形,用沿边界固定的薄膜振动来说明这定理. k 的值是无穷多个纯粹谐振的频率,相应的解给出薄膜在实现其特征振动时的变形.

主要的第一步是 Schwarz① 的证明,他证明了

$$\Delta u+\xi f(x, y)u=0$$

的第一个特征函数的存在性,就是说,证明了存在一个 U_1,使得

$$\Delta U_1+k_1^2 f(x, y)U_1=0,$$

而在所考虑区域的边界上 $U_1=0$. 他的方法给出了找解的步骤,并且可用于计算 k_1^2. 后来 Picard② 证明了第二个特征值 k_2^2 的存在性.

Schwarz 在 1885 年的论文中还指出,当区域连续变化时,第一特征值 k_1^2 的值也连续地变化,且当区域变小时,k_1^2 无限增大. 这

① *Acta. Soc. Fennicae*, 15,1885, 315～362＝*Ges. Math. Abh.*, 1,223～269.
② *Comp. Rend.*, 117,1893,502～507.

样，较小的膜发出较高的第一谐音.

1894 年 Poincaré① 证明了:

$$\Delta u + \lambda u = f \tag{60}$$

在一个有界三维区域内的所有特征值的存在性及其基本性质，这里 λ 是复数，在区域边界上 $u = 0$. u 的存在性是用推广了的 Schwarz 方法证明的. 其次他证明 $u(\lambda)$ 是复变数 λ 的整函数，其极点是实的，这些正是特征值 λ_n. 然后他得到特征解 U_i，即

$$\Delta U_i + k_i^2 U_i = 0 \quad (\text{在内部}),$$
$$U_i = 0 \quad (\text{在边界上}).$$

k_1^2 都是特征数(特征值)，并确定相应特征解的频率.

在物理上，Poincaré 的结果有如下意义:(60)中的函数 f 可以想像为一个作用力. 力学系统的自由振动是那样一些振动，在其中强迫振动退化并变为无穷. 事实上，(60)是一个振动系统的方程，这系统被振幅为 f 的周期力激发；而其特征解就是系统的自由振动，它一次激发后就无限地持续下去. 这些自由振动的频率与 k_i 成比例，根据 Poincaré 的方法计算出来，它们就是对应于强迫振动 u 变为无穷的那些 $\sqrt{\lambda}$ 值.

在这世纪末，从 Schwarz 1885 年的基本论文开头的关于偏微分方程的初值问题和边值问题的系统理论，仍然是不成熟的. 这个领域的工作于 20 世纪迅速地铺开了.

参考书目

Bacharach, Max: *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie*, Vandenhoeck and Ruprecht, 1883.

Burkhardt, H.: "Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, Vol. 10, 1908, 1～1804.

---

① *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 8, 1894, 57～155 = *Œuvres*, 9, 123～196.

Burkhardt, H. and W. Franz Meyer: "Potentialtheorie", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ A7b, 464～503.

Cauchy, Augustin Louis: *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1890,(2),8.

Fourier, Joseph: *The Analytical Theory of Heat* (1822), Dover reprint of English translation, 1955.

Fourier, Joseph: *Œuvres*, 2 vols., Gauthier-Villars, 1888～1890; Georg Olms (reprint), 1970.

Green, George: *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, 1828, reprinted by Wezäta Melins Aktiebolag, 1958; also in Ostwald's Klassiker #61 (in German), Wilhelm Engelmann, 1895.

Green, George: *Mathematical Papers*, Macmillan, 1871; Chelsea (reprint), 1970.

Heine, Eduard: *Handbuch der Kugelfunktionen*, 2 vols., 1878～1881, Physica Verlag (reprint), 1961.

Helmholtz, Hermann von: "Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden", *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Wilhelm Engelmann, 1896.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert*, 2 vols., Chelsea (reprint), 1950.

Langer, R. E.: "Fourier Series, the Genesis and Evolution of a Theory", *Amer. Math. Monthly*, 54, Part Ⅱ, 1947,1～86.

Pockels, Friedrich: *Über die partielle Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$, B. G. Teubner, 1891.

Poincaré, Henri: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1954,9.

Rayleigh, Lord (Strutt, John William): *The Theory of Sound*, 2nd ed., 2 vols., Dover (reprint), 1945.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd ed., Dover (reprint), 1953, pp. 156～211.

Sommerfeld, Arnold: "Randwertaufgaben in der Theorie der Partiellen Differentialgleichungen", *Encyk. der math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ A7c, 504～570.

Todhunter, Isaac, and Karl Pearson: *A History of the Theory of Elasticity*, 2 vols., Dover (reprint), 1960.

Whittaker, Sir Edmund: *History of the Theories of Aether and Electricity*, rev. ed., Thomas Nelson and Sons, 1951, Vol. Ⅰ.

第 29 章

19 世纪的常微分方程

物理不仅仅给我们以解决问题的机会……而且还使我们预料到它的解.

Henri Poincaré

1. 引　　言

常微分方程是 18 世纪在直接回答物理问题中兴起的. 在着手处理更为复杂的物理现象,特别是在弦振动的研究中,数学家们得到了偏微分方程. 在 19 世纪这两个课题的地位略有倒转. 用变量分离法解偏微分方程的努力导致求解常微分方程的问题. 此外,因为偏微分方程都是以各种不同的坐标系表出的,所以得到的常微分方程是陌生的,并且不能用封闭形式解出. 数学家们便采用无穷级数解,今天叫做特殊函数或高级超越函数,以便与 $\sin x$, e^x, $\log x$这样的初等超越函数相区别.

对于扩充了的常微分方程类做了许多研究以后,针对这种方程类型的某些深刻的理论研究展开了. 这些理论研究也把 19 世纪的工作与 18 世纪的工作区别开来. 像偏微分方程的情形一样,这新世纪的贡献是如此繁多,以至我们不能指望综观其所有的主要发展. 我们的论题是这世纪内创作的一个样品.

2. 级数解和特殊函数

正如我们刚才已经说过的,为了求解应用变量分离法于偏微

分方程后所得的常微分方程,数学家们没有过分忧虑解的存在性和解应具有的形式,而转向无穷级数的方法(第 21 章第 6 节).从变量分离得到的常微分方程中最重要的是 Bessel 方程

(1) $$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

其中 n 是参数,可以是复的,x 也可以是复的.然而,对数学家兼哥尼斯堡(Königsberg)天文台台长 Friedrich Wilhelm Bessel (1784—1846)来说,n 与 x 都是实的.这个方程的特殊情形早在 1703 年就发现了,Jacob Bernoulli 在给 Leibniz 的一封信里作为特解就谈到了它,此后,在 Daniel Bernoulli 和 Euler 的更广博的著作中又谈到过(第 21 章第 4、6 节,第 22 章第 3 节).特殊情形还出现于 Fourier 和 Poisson 的著作中.对这个方程的解的最早的系统研究是由 Bessel 在研究行星运动时作出的①.对每个 n,这方程有两个独立的解,今天记为 $J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$,分别叫作第一类和第二类 Bessel 函数. Bessel 自 1816 年开始,对这方程进行研究,首先(对整数 n)给出积分关系式

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nu - x\sin u)\,du$$

(他写这为 I_k^h,而他的 k 就是我们的 x). Bessel 还得到级数

(2) $$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)} \times \left\{1 - \frac{x^2}{2^2\cdot 1!\,(n+1)} + \frac{x^4}{2^4\cdot 2!\,(n+1)(n+2)} - \cdots\right\}.$$

1818 年 Bessel 证明了 $J_n(x)$ 有无穷多个实零点.在 1824 年的论文中,Bessel 还(对整数 n)给出递推公式

$$xJ_{n+1}(x) - 2nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x) = 0,$$

和别的许多牵涉到第一类 Bessel 函数的关系式.把 Bessel 函数 $J_n(x)$ 中的 n 和 x 取值为复数,并使(2)保持为正确公式的推广是

---

① *Abh. Konig. Akad. der Wiss. Berlin*, 1824,1~52, pub. 1826 = *Werke*, 1, 84~109.

由几个人①作出来的.

因为二阶方程应当有两个独立的解，所以很多数学家都去寻找它们. 当 u 不是整数时，这第二个解是 $\mathrm{J}_{-n}(x)$. 对于整数 n，第二个解是由 Carl. G. Neumann② 找出来的. 然而，今天最普遍采用的公式是 Hermann Hankel(1839—1873)③找到的，即

$$\mathrm{Y}_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r[(1/2)z]^{n+2r}}{r!(n+r)!}\left\{2\log\left(\frac{z}{2}\right)+2\gamma - \sum_{m=1}^{n+r}\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{r}\frac{1}{m}\right\} - \sum_{r=0}^{n-1}\frac{[(1/2)z]^{-n+2r}(n-r-1)!}{r!},$$

其中 γ 是 Euler 常数. Neumann④ 还给出解析函数 $f(z)$ 的展开式，即

$$f(z) = \alpha_0\mathrm{J}_0(z) + \alpha_1\mathrm{J}_1(z) + \alpha_2\mathrm{J}_2(z) + \cdots,$$

其中 α_i 是可以确定的常数.

许多数学家，通常是研究天体力学的数学家，独立地得到了 Bessel 函数和成百个别的关系式以及这些函数的表达式. 论述这些函数的庞杂文献中的一些思想可以从 G. N. Watson 的《Bessel 函数论教程》⑤(*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*)中得到.

Legendre 多项式或单变量球函数和两个自变数的球面函数早已由 Legendre 和 Laplace 引进了(第 22 章第 4 节). Legendre 多项式满足 Legendre 微分方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

如我们所知，这个方程是对以球坐标表示的位势方程应用分离变量法而得到的. 1833 年，剑桥大学的一位校务委员 Robert Mur-

---

① 主要由 C. J. Lommel(1837—1899)在他的 *Studien über die Bessel'schen Functionen* 中作出的(1868).

② *Theorie der Bessel'schen Funktionen*, 1867, 41.

③ *Math. Ann.*, 1, 1869, 467～501.

④ *Jour. für Math.*, 67, 1867, 310～314.

⑤ Cambridge Univ. Press, 1944 年第二版.

phy(死于 1843 年)写了一本教科书:《电、热和分子作用理论的基本原理》(*Elementary Principles of the Theories of Electricity, Heat and Molecular Actions*). 在书中,他收集了有关 Legendre 多项式的一些老的结果,并得到了一些新的结果. 因为大部分结果早已为人所知,所以我们不介绍 Murphy 著作的细节,只是指出:它是系统性的著作,并且他证明了"任何"函数 $f(x)$,通过逐项积分和正交性质(积分定理),可以按 $P_n(x)$展开.

Heine[①] 在论述旋转椭球体外部的位势问题和同心旋转椭球面之间的壳体的位势问题时(第 28 章第 5 节)引进了第二类球面调和函数,通常记为 $Q_n(x)$,这函数为 Legendre 方程提供了第二个独立解. 像 Bessel 函数一样,Legendre 函数已扩充到复的 n 和复的 x,还得到了若干别的表示式以及它们之间的关系式[②].

特殊函数作为常微分方程的级数解而出现,它的研究由 Gauss 在 1812 年关于超几何级数的一篇著名论文[③]加以推进. 在这篇论文中,Gauss 没有用到微分方程

$$x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta y=0,$$

但他在未发表的材料中确实用到了这方程[④]. 当然,这方程及其级数解

$$(3)\quad F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

早已为人们熟知了,因为它们已由 Euler 研究过(第 21 章第 6 节). Gauss 认识到对于 α, β, γ 的特殊值,这级数包括了几乎所有当时已知的初等函数和许多像 Bessel 函数、球函数那样的高级超越函数. 除了证明这些级数的一些性质外,Gauss 还建立了著名的

---

① *Jour. für Math.*, 26,1843,185～216.

② 例如看 E. W. Hobson 的 *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*,1931 年,Chelsea(重印),1955.

③ *Comm. Soc. Sci. Gott.*, 2, 1813 = *Werke*, 3,123～162.

④ *Werke*, 3,207～230.

关系式:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

他还建立了这级数的收敛性(参考第 40 章第 5 节). 记号 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$应归源于 Gauss.

另一类特殊函数是由 Lamé 引进的①. 在第 28 章第 5 节中,我们曾经指出 Lamé 在研究椭球内稳态的热分布时,用椭球坐标 ρ, μ, ν 分离了 Laplace 方程. 这个程序对这三个变量中的每一个都给出同一个常微方程,即

$$(4)\quad (\rho^2-h^2)(\rho^2-k^2)\frac{d^2E(\rho)}{d\rho^2}+\rho(2\rho^2-h^2-k^2)\frac{dE(\rho)}{d\rho} + \{(h^2+k^2)p-n(n+1)\rho^2\}E(\rho)=0,$$

对 μ 和 ν 要用适当的变换代到 ρ 的位置上去. 这里 h^2 和 k^2 是坐标曲面族方程中的参数,而 p 和 n 则是常数. 这方程叫做 Lamé 微分方程,它的解 $E(\rho)$叫做 Lamé 函数或椭球调和函数. 对于整数 n,这些函数归属于下列四类形式:

$$E_n^p(\rho) = a_0\rho^n + a_1\rho^{n-2} + \cdots,$$

或者是这种多项式乘上$\sqrt{\rho^2-h^2}$, 或者乘上 $\sqrt{\rho^2-k^2}$, 或者乘上 $\sqrt{\rho^2-h^2}$ 和$\sqrt{\rho^2-k^2}$ 两个因子. 对于 n 的给定值,这种函数(保证 $E(\rho)$的某些性质)的个数是 $2n+1$.

Lamé 方程的第二个解(从 $E(\rho)$的其他条件或性质得到)是

$$F_n^p(\rho) = (2n+1)E_n^p(\rho)\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-h^2)(\rho^2-k^2)[E_n^p(\rho)]^2}},$$

这种函数叫做第二类 Lamé 函数. 这些都是由 Liouville② 和 Heine③ 引进的.

微分方程

---

① *Jour. de Math.*, 2,1837,147~183;4,1839,126~163.

② *Jour. de Math.*, 10,1845,222~228.

③ *Jour. für Math.*, 29,1845,185~208.

$$\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+(a-2k^2\cos 2\eta)\phi=0,\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2}-(a-2k^2\cosh 2\xi)\psi=0$$

出现在 Mathieu 关于椭圆薄膜振动的工作中[①],他们还出现于椭圆柱的位势问题中,那是把方程 $\Delta u+k^2u=0$ 用二维椭圆柱坐标表示,然后应用变量分离法而引起的.碰巧,这些椭圆坐标由方程

$$x=h\cosh\xi\cos\eta,\ y=h\sinh\xi\sin\eta$$

与直角坐标相联系,其中 $x=\pm h,\ y=0$ 是在椭圆坐标系里同焦椭圆族和双曲线族中诸椭圆和双曲线的焦点.表达 Mathieu 方程的各种形式以及不同作者对解所取的许多记号是纷繁的,用两个微分方程中的任一个定义的函数叫作椭圆柱的 Heine 函数,现在叫作 Mathieu 函数. Mathieu 和 Heine 首先得到解的级数表达式.后来他们企图固定参数 a,使得一类解成为以 2π 为周期的周期解.寻求周期解的问题对物理应用是最重要的问题,在这整个世纪中都在努力研究这个问题. 1883 年[②] Gaston Floquet 发表了关于 n 阶线性微分方程(它的系数有同一周期 ω)的周期解的存在性及其性质的一篇完整的讨论.解的普遍性质已经确定之后,后来的作者集中很大注意力于发现找出解的实际方法的问题,但没有发现普遍的方法(参看第7节).

广泛地研究过的一类特殊函数是 Heinrich Weber(1842—1913)在 1868 年引进的[③]. Weber 对两抛物线围成的区域内积分 $\Delta u+k^2u=0$ 感到兴趣,所以他把直角坐标通过变换

$$x=\xi^2-\eta^2,\ y=2\xi\eta$$

变到抛物线坐标(它是椭圆坐标的极限情形). $\xi=$ 常数和 $\eta=$ 常数这两族曲线是抛物线族,一族中每一条与另一族中各曲线正交. Weber 用变量分离法从简化后的波动方程导出的常微分方

① *Jour. de Math.*, (2), 13, 1868, 137~203.

② *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (2), 12, 1883, 47~88.

③ *Math. Ann.*, 1, 1869, 1~36.

程是

$$\frac{d^2E}{d\xi^2}+(k^2\xi^2+a)E=0,$$

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}+(k^2\eta^2-a)H=0.$$

Weber 用定积分的形式给出了第二个方程的四个特解，这些解叫作抛物柱函数. Weber 还指出，在所有正交坐标系中，可对 $\Delta u+k^2u=0$ 应用变量分离法的唯一情形是二阶同焦曲面或由之而得的特殊分支.

特殊函数类要比我们这里所能摘述的远为繁多. 上述类型和引入的许多其他类型足供在某有界区域内解微分方程之用，也可用于在这区域内表示任意函数（通常是偏微分方程问题的初始函数）之用. 有界区域的限制是由于正交性质而施加的. 在三角函数的基本情形中，这区域是$(-\pi,\ \pi)$，因为，比如说，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0,\ m\neq n.$$

在无穷区间或半无穷区间上解常微分方程的问题以及在这些区间上求得任意函数的展开式问题，在这世纪的后半期也为许多人研究过，像 Hermite 函数这样的特殊函数首先由 Hermite 在 1864 年①，Nikolai J. Sonine(1849—1915)在 1880 年②引入，把它作为解这个问题之用.

为了使用这些特殊函数的所有类型，必须知道它们的性质，就像对初等函数的性质一样熟悉. 还因为这些特殊函数更为复杂，所以其性质也同样复杂. 原始论文和教科书中的文献几乎是难以置信地庞杂. 对于 Bessel 函数、球函数、椭球函数、Mathieu 函数以及其他类型的函数已经有了完整的专门论著.

---

① *Comp. Rend.*, 58, 1864, 93～100 和 266～273 = *Œuvres*, 2, 293～308.

② *Math. Ann.*, 16, 1880, 1～80.

3. Sturm-Liouville 理论

牵涉到数学物理中偏微分方程的问题,通常包含一些边界条件,如像振动的弦必须在端点固定这样的条件.当分离变量法应用于偏微分方程时,这方程就分解为两个或多个常微分方程,而加在所求解上的边界条件就变成一个常微分方程的边界条件.一般说来这常微分方程包含一个参数,事实上它是从变量分离的过程中得来的,而给参数赋以特殊值,通常可得到方程的解.这些值叫特征值或本征值,而相应于任一特征值的解叫特征函数.此外,为了适合起先的条件或原问题的条件,必须把给定的函数 $f(x)$ 用特征函数表出(例如看第28章的[11]).

确定带边界条件的一个常微分方程的特征值和特征函数的问题,以及把给定的函数展为特征函数的无穷级数的问题(大约起自1750年),随着新坐标系的引入和新的函数类像 Bessel 函数、Legendre 多项式、Lamé 函数、Mathieu 函数等作为常微分方程的特征函数而兴起,就变得更为突出了.巴黎大学理学院(Sorbonne)力学教授 Charles Sturm(1803—1855)和 Sturm 的朋友、法兰西学院的数学教授 Joseph Liouville(1809—1882),这两人决定着手钻研任何二阶常微分方程的一般问题. Sturm 从1833年起就已经从事研究偏微分方程的问题.最初是从事变密度棒中热流问题的研究,所以他是完全知道特征值和特征函数的问题的.

他应用于这个问题上的数学思想①是与他对代数方程的根的实性和分布的研究密切联系着的.他说,他关于微分方程的思想是从差分方程的研究并过渡到极限而得来的.

Sturm 告诉 Liouville 他正在研究的问题后,Liouville 也研究

① *Jour. de Math.*, 1,1836,106～186 与 373～444.

起同一课题来了①. 这两人的几篇论文中的结果是十分详尽的,可用近代的记号最方便地概述如下:他们考虑一般的二阶方程

$$(5) \qquad Ly'' + My' + \lambda Ny = 0,$$

其中 L, M, N 是 x 的连续函数,L 不为零,λ 是参数. 遍乘以 $L^{-1}e^{\int ML^{-1}dx}$ 后,方程可以改成

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda\rho(x)y = 0,\ p(x) > 0,\ \rho(x) > 0.$$

原方程和变换后的方程所应满足的边界条件可以有一般形式

$$\begin{aligned} y'(a) - h_1 y(a) &= 0, \\ y'(b) + h_2 y(b) &= 0, \end{aligned} \qquad h_1 \geqslant 0,\ h_2 \geqslant 0,\ a < b.$$

Sturm 和 Liouville 证明了下列基本结果:

(a) 仅当 λ 取递增到∞的正数序列 λ_n 的任一值时,这问题才有非零解.

(b) 对每一 λ_n,解是一函数 v_n 的倍数,而 v_n 可以用条件 $\int_a^b \rho v_n^2 dx = 1$ 加以规范化.

(c) 成立正交性质 $\int_a^b \rho v_m v_n dx = 0,\ m \neq n.$

(d) 每个在区间(a, b)上二次可微的、满足边界条件的函数 f 可以展为一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x),$$

其中 $c_n = \int_a^b \rho f v_n(x) dx.$

(e) 等式

$$\int_a^b \rho f^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

普遍成立. 这最后的等式叫做 Parseval 等式. 已由 Mare-Antoine

---

① *Jour. de Math.*, 1,1836,253~265;2,1837,16~35 和 418~436.

Parseval(? —1836)在 1799 年[1]纯形式地对三角函数集证明过了.随之而来的是 Bessel 在 1828 年证明的[2](还是关于三角级数的)不等式,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

实在说,Sturm-Liouville 的结果并不是在所有方面都令人满意的. $f(x)$可以表为特征函数的无穷和的证明是不充分的. 一个困难是关于特征函数集的完全性的事实,对(a, b)上的连续函数$f(x)$,这就是上面的条件(e),粗糙地看,这意味着特征函数集大得足以表示“任何”函数 $f(x)$. 另外,虽然 Liouville 用 Cauchy 和 Dirichlet 发展的理论确实给出了某种情形下$\sum c_n v_n(x)$收敛到$f(x)$的证明,但是级数$\sum c_n v_n(x)$是在何种意义下收敛到 $f(x)$的问题,是逐点收敛、一致收敛还是在某种更一般意义下的收敛,还没有包括进去.

4. 存在定理

在 19 世纪的偏微分方程那一章,在同一标题下,我们已经说到,当数学家们发现求解特殊微分方程的问题越来越困难时,他们就转向这样的问题:给定一个微分方程,它对于给定的初始条件和边界条件是否有解? 当然希望在常微分方程中也会出现同样的转变. 存在性问题被忽视了这么长时间,部分原因是微分方程发生在物理问题和几何问题中,而在直觉上则很清楚,这些问题是有解的.

Cauchy 是考虑微分方程解的存在性问题的第一个人,并成功地给出了两个方法. 第一个方法可以应用于

---

① *Mém. des sav. étrangers*, (2),1,1805,639~648.

② *Astronom. Nach.*, 6,1828,333~348.

(6) $$y' = f(x, y),$$
这是在 1820 年到 1830 年间某一时候创立的,综述在他的《分析练习》中①.

这方法的本质可以从 Euler 的著作②中找到,它利用了在积分作为和的极限中所包含的同样的想法. Cauchy 想证明有一个而且只有一个 $y = f(x)$ 满足(6)式,并且适合给定的初始条件 $y_0 = f(x_0)$. 他分(x_0, x)为 n 部分 $\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n-1}$并作

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x_i,$$

其中 x_i 是 Δx_i 中 x 的任一值. 然后定义

$$y_n = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta x_i.$$

现在 Cauchy 证明当 n 趋于无穷时,y_n 收敛到一个唯一的函数

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x,$$

并证明这个函数满足(6)式和初始条件.

Cauchy 假定 $f(x, y)$和 f_y 在由区间(x_0, x)和(y_0, y)所确定的矩形内部对 x, y 的所有实值都是连续的. 1876 年 Rudolph Lipschitz(1832—1903)把这定理的假设减弱了③. 他的基本条件是:存在常数 K 使得对矩形 $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$ 内所有的(x, y_1)和(x, y_2)(即具有同一横坐标的任意两点),满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K(y_1 - y_2).$$

这个条件叫 Lipschitz 条件,而这条存在性定理就叫做Cauchy-Lipschitz定理.

Cauchy 的建立微分方程解的存在性的第二个方法,即控制函数或优势函数的方法,比他的第一个方法可有更广泛的应用, Cauchy 把它用到了复数域. 这个方法表述于 1839—1842 年间《报

① Vol. 1,1840, 327ff. = *Œuvres*, (2),11,399~465.

② *Inst. Cal. Int.*, 1,1768,493.

③ *Bull. des Sci. Math.*, (1),10,1876,149~159.

告》上的一系列论文中[①]. Cauchy 把这方法叫做**极限的计算**(calcul des limites),因为他提供了下极限,在这些下极限范围内,已经建立了存在性的解保证收敛.这个方法为 Briot 和 Bouquet 所简化,这两个人的作法[②]已经成为标准的了.

为了说明这方法,我们注意它是怎样应用于

$$y' = f(x, y)$$

的,其中 f 关于 x 和 y 是解析的.所要建立的定理这样说:对于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \tag{7}$$

如果函数 $f(x, y)$ 在 $P_0 = (x_0, y_0)$ 的邻域内解析,那么微分方程有唯一解 $y(x)$,它在 x_0 的邻域内解析,而当 $x = x_0$ 时它等于 y_0.这解可以用级数

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y_0'''}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots \tag{8}$$

表示,其中 y' 是 (x_0, y_0) 处的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$,而 y_0'', y_0''', …的意义类似,其中的导数由原来微分方程经逐次微分来确定,y 则作为 x 的函数来对待.

证明的方法我们仅给一概要.首先利用这样的事实:因为 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域内解析,为了方便,我们取 (x_0, y_0) 为 $(0, 0)$,于是有一个以 $x_0 = 0$ 为圆心、以 a 为半径的圆和一个以 $y_0 = 0$ 为圆心、以 b 为半径的圆,使 $f(x, y)$ 在其中解析.于是对落在相应圆中的一切 x, y 的值,$f(x, y)$ 有一个上界 M.现在获得级数(8)的方法本身就保证它形式地满足(7),于是问题是要证明这级数收敛.

为达到这目的,设立优势函数

① *Œuvres*, (1), Vols. 4~7 和 10.最重要的论文在 *Comptes Rendus* 的下列诸号上:Aug. 5, Nov. 21, 1839, June 29, Oct. 26, Nov. 2 和 Nov. 9, 1840, June 20, July 4, 1842.

② *Comp. Rend.*, 39, 1854, 368~371.

$$F(x, y) = \sum \frac{M}{a^p b^q} x^p y^q,$$

它是

(9) $$F(x, y) = \frac{M}{(1 - x/a)(1 - y/b)}$$

的展开式. 然后证明

(10) $$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = F(x, Y)$$

的级数解,即

(11) $$Y = Y'_0 x + Y''_0 \frac{x^2}{2!} + Y'''_0 \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

逐项控制着级数(8). 级数(11)是从(10)导出的,用的是由(7)导出(8)的相同办法. 所以如果级数(11)收敛,那么(8)也就收敛. 为了证明(11)收敛,就用(9)中 F 的值明显地解出(10),然后再证明解的级数展开必定是(11),并且收敛.

这方法本身确定不出关于 y 的级数的准确收敛半径,所以人们用大量的努力专致于证明这半径可以扩大. 然而所有论文都没有给出全部收敛区域,所以没有多大实际的重要性.

确立常微分方程解的存在性的第三个方法(Cauchy 也许是知道的),首先是 Liouville 对一个二阶方程的情形发表出来的①. 这就是逐次逼近法,今天已把荣誉归于 Emile Picard,因为他给出了这方法的普遍形式②. 对于实变量 x 和 y 的方程

$$y' = f(x, y),$$

其中 $f(x, y)$ 对 x, y 解析,方程的解 $y = f(x)$ 要通过点 (x_0, y_0),这方法是引进一串函数

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\mathrm{d}t,$$

① *Jour. de Math.*, (1), 3, 1838, 561～614.

② *Jour. de Math.*, (4), 6, 1890, 145～210 和(4), 9, 1893, 217～271.

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\mathrm{d}t,$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\mathrm{d}t.$$

然后证明 $y_n(x)$趋于一极限 $y(x)$，它就是一个而且是唯一的一个满足常微分方程和 $y(x_0) = y_0$ 的 x 的连续函数. 像今天通常所看到的，这方法须假定 $f(x, y)$满足 Lipschitz 条件. 这方法已由 Picard 在 1893 年的论文中用到二阶方程上去，并且还扩充到复的 x, y 的情形.

上述各种方法不仅已应用于高阶常微分方程，而且还应用于复变量的微分方程组. 例如 Cauchy 就把他的第二类存在性定理推广到 n 个应变量的一阶常微分方程组. 他还曾把这个极限计算方法推广到复域中的方程组①. Cauchy 的结果现叙述如下：给定方程组

$$(12)\quad \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = f_k(x, y_0, \cdots, y_{n-1}),\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$

令 $f_0, \cdots, f_{n-1}$是其变量的单演(单值解析)函数，并设它们可在初值

$$x = \xi,\ y_0 = \eta_0,\ \cdots,\ y_{n-1} = \eta_{n-1}$$

的邻域内用 $x - \xi,\ y_0 - \eta_0,\ \cdots,\ y_{n-1} - \eta_{n-1}$

的正整数幂展开. 于是有在 $x = \xi$ 的邻域内收敛的 $x - \xi$ 的 n 个幂级数，把它们代入(12)的 $y_0, \cdots, y_{n-1}$时满足方程. 这些幂级数是唯一的. 它们给出方程组取初值的一个正则解. 这个在普遍意义下的结果可以在 Cauchy 的《关于采用所谓极限计算的新计算法解微分方程组的报告》②中找到. 这样，这一思想对建立解的存在性

① 关于一阶微分方程组的不同的存在性证明，请看本章末尾书目中 Painlevé 的第二本参考书.

② *Comp. Rend.*, 15, 1842, 14 ~ 25 = *Œuvres*, (1), 7, 5~17.

和在复平面上的一点邻域内求出这解来说,已是够满意的了.在同一年(1842)里,Weierstrass 曾得到同样的结果,但直到 1894 年才于全集上发表①.

5. 奇点理论

19 世纪中期,常微分方程的研究走上了一个新的历程.存在定理和 Sturm-Liouville 理论都预先假设在考虑解的区域内,微分方程包含解析函数或至少包含连续函数.另一方面,某些已经考虑过的微分方程,如像 Bessel 方程、Legendre 方程、超几何方程,当把它们表示得使二阶导数的系数为 1 时,它们就有奇异的系数,在奇异点的邻域内级数解的形式是特别的,尤其是第二个解.所以数学家们便转而研究奇点邻域内的解,也就是一个或多个系数在其上奇异的那种点的邻域内的解.一个点,所有系数在其上至少连续而通常是解析的,就叫作常点.

在奇点邻域内的解可以用级数得出,关于级数的适当形式的知识必须在计算它之前就掌握.这知识只能从微分方程得到.这个新问题由 Lazarus Fuchs(1833—1902)在 1866 年的一篇论文(见下面)中描述:"在科学的现状下,微分方程的理论问题,不像从微分方程本身推演出它的积分在全平面各点即复变量的所有值上的性态那样,那么多地把给定微分方程归结为求积分问题."对于这个问题,Gauss 关于超几何级数的工作指明了道路.先导者是 Riemann 和 Fuchs,后者是 Weierstrass 的学生和他在柏林的继承者.这方面研究得到的理论叫做线性微分方程的 Fuchs 理论.

在这个新领域中,人们的注意力集中于形为

$$y^{(n)}+p_1(z)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(z)y=0 \tag{13}$$

---

① *Math. Werke*, 1,75~85.

的线性微分方程，其中 $p_i(z)$除在孤立奇点外是复变数 z 的单值解析函数. 这个方程之所以受到注意，是因为它的解包括所有初等函数甚至某些高等函数，例如我们以后将要谈到的模函数和自守函数.

在考虑奇点上和奇点邻域内的解之前，我们指出一个基本定理，它是由 Fuchs 直接证明的①，虽然 Fuchs 自认得益于 Weierstrass 的讲演，但这定理确是从 Cauchy 关于常微分方程组的存在性定理推导出来的. 如果系数 $p_1, \cdots, p_n$ 在点 a 及其某一邻域内解析，并且如果在 $z=a$ 给出了 y 和 y 的头 $n-1$ 阶导数的任意初值，那么 y 就有以 z 表示的形如

$$(14) \qquad y(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}y^{(r)}(a)(z-a)^r$$

的唯一的幂级数解. Fuchs 给 Cauchy 的结果增添的是：这级数在以 a 为中心、$p_i(z)$在其中解析的任何圆内绝对并一致收敛. 从此推得这解仅能在系数为奇异的地方具有奇异性.

奇点邻域内的解的研究是由 Briot 和 Bouquet 起始的②. 因为他们关于一阶线性方程的结果很快就得到了推广，所以我们将考虑更为普遍一些的论述.

为了知道解在奇点邻域内的性态，Riemann 提出了一条非凡的途径. 虽然在(13)中假定 $p_i(z)$除了在孤立奇点外是单值解析函数，解 $y_i(z)$除了可能在奇点外都是解析的，但在 z 值的整个区域内一般说来并不是单值的. 假定有一个基本解系，$y_i(z)(i=1, 2, \cdots, n)$，即上面定理中指明类型的 n 个独立解. 那么通解就是

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n,$$

其中 c_i 是常数.

如果现在我们探索一下一个解析的 y_i 沿着一条含有奇点的

---

① *Jour. für Math.*, 66,1866, 121～160 = *Math. Werke*, 1,159 ff.

② *Jour. d'Ecole Poly.*, (1),21,1856,85～132,133～198,199～254.

闭路径的性态,那么虽然 y_i 仍保持为微分方程的解,但它的值要变到同一函数的另一分支上去. 因为任何解都是 n 个特解的线性组合,所以改变了的 y_i,不妨记为 y_i',仍是 y_i 的线性组合. 这样,我们得到

$$
\begin{aligned}
y_1' &= c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n,\\
y_2' &= c_{21}y_1 + \cdots + c_{2n}y_n,\\
&\cdots\cdots\\
y_n' &= c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

这就是说,当每个 y_i 沿包含奇点的一条闭路径运动时,y_1, …, y_n 就经受一定的线性变换. 对于绕每一奇点或绕多个奇点组合的任一闭路径,就会出现这样一个变换. 这些变换的集合形成一个群[①],按 Hermite 取的名词[②],这个群叫作微分方程的单值群.

Riemann 求得奇点邻域内解的特征的途径见于他在 1857 年的论文《对可用 Gauss 级数 F(α, β, γ, x)表示的函数的理论的补充》[③]. 如 Gauss 所知,超几何微分方程有三个奇点 0, 1, ∞. 这时 Riemann 对复的 x 证明了:为得到二阶微分方程的特解在奇点附近的性态的一些结论,不必知道微分方程本身,而只需知道当自变量沿着围绕三个奇点的诸闭路径变动时,两个独立解是怎样变动的. 这就是说,对于每个奇点,我们必须知道变换

$$y_1' = c_{11}y_1 + c_{12}y_2,\quad y_2' = c_{21}y_1 + c_{22}y_2.$$

这样,Riemann 处理用微分方程定义的函数的思想就是:从关于单值群的知识导出这些函数的性质. 他的 1857 年的论文处理了超几何微分方程,但是他的计划是讨论带代数系数的 n 阶线性微分方程. Riemann 在 1857 年写的一个没有发表的片断,直到 1876

---

① 在 Riemann 那个时代,群的代数概念已经知道了. 在本书第 31 章中将要介绍这一点. 然而,这里需要知道的是:两个相继交换的作用仍是集里的一个变换,每个变换的逆仍属于这个集.

② *Comp Rend.*, 32, 1851, 458 ~ 461 = *Œuvres*, 1, 276~280.

③ *Werke*, 67~83.

年才见之于他的全集中①，在这片断里 Riemann 考虑了比有三个奇点的二阶方程更为普遍的方程. 因此他假定有 n 个函数，除了在某些任意指定的点(奇点)上之外，是一致、有限和连续的，并且当 z 绕这种点走一闭回路时经受一个任意指定的线性替换. 然后他证明这种函数系要满足一个 n 阶线性微分方程，但是他没有证明这些分支点(奇点)和这些替换可以任意选择. 他的这工作在此处是不完全的，留下了叫做 Riemann 问题的未解决问题：在复平面上给定 m 个点 a_1，…，a_m，每点结合一个形如(15)的线性变换，在关于这些奇点的单值群的性态的基本假定的基础上(以这些性质不是已经确定为限)，要证明：满足一个以 a_i 为奇点(支点)的 n 阶线性微分方程的函数类 y_1，…，y_n 就确定了，并使得当 z 绕 a_i 点的闭路径走一周后，这些 y_i 就经受一个与 a_i 联系着的线性变换.

以 Riemann 1857 年关于超几何方程的论文为指导，Fuchs 把奇点的工作做得更深入了. 从 1865 年开始② Fuchs 和他的学生着手研究 n 阶微分方程，而 Riemann 已发表的还只是关于 Gauss 超几何微分方程问题. Fuchs 没有沿着 Riemann 的途径走，而直接研究微分方程. Fuchs 不但把线性微分方程，而且把微分方程的整个理论普遍地移植到复函数论的领域.

Fuchs 在上面提到的论文内给出了他关于常微分方程的主要工作. 他从以 x 的有理函数为系数的 n 阶线性微分方程出发，通过仔细地考察形式上满足这方程的级数的收敛性，他发现方程的奇点是固定的，即不依赖于积分常数，而且可以在积出之前就找到，因为它们就是微分方程的系数的极点.

接着他证明，当自变量 z 描出围绕奇点的一个回路时，基本解系就经受一个常系数的线性变换. 从解的这个性态他导出了在围

---

① *Werke*, 379～390.

② *Jour. für Math.*, 66, 1866, 121～160; 68, 1868, 354～385.

绕这点并伸展到邻近奇点的圆形区域内正确的解的表达式. 这样, 他就建立除在某些点的邻域外都是一致、有限且连续的 n 个函数的函数系的存在性, 并且当变量 z 走过绕这些点的闭回路时, 这函数系就经受一个常系数的线性替换.

然后, Fuchs 考虑: 形如(13)的微分方程必须具有什么性质, 才能使其解在奇点 $z = a$ 处具有形状:

$$(z-a)^s[\phi_0 + \phi_1\log(z-a) + \cdots + \phi_\lambda \log^\lambda(z-a)],$$

这里 s 是某个(可以进一步指明的)常数, ϕ_i 是在 $z = a$ 的邻域内单值的函数, 可能有有限阶极点. 他的答案是: 一个充要条件为 $p_r(z) = (z-a)^{-r}P(z)$, 其中 $P(z)$在 $z = a$ 及其邻域内是解析的. 这样, $p_1(z)$ 有一阶极点, 等等. 这样的点 a 叫做正则奇点(Fuchs 叫它为决定性的点).

Fuchs 还研究过一类形如(13)但较为特殊的方程. 这种类型的齐次线性方程, 当它在扩充了的复平面(包括无穷远点∞)上在最坏的情况下只有正则奇点时, 就称为是 Fuchs **型方程**. 在这种情形下, $p_i(z)$必须是 z 的有理函数. 例如, 超几何方程在 $z=0, 1, \infty$处就有正则奇点.

但是对微分方程在给定点的邻域内的积分的研究不一定给出积分本身. 这种研究已作为探讨完全积分的出发点. 由于 Fuchs 作了大量研究, 所以数学家们已经成功地扩大了能明显积分的线性常微分方程类. 以前仅是常系数的 n 阶线性方程和 Legendre 方程

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n} + A(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + L(ax+b)\frac{dy}{dx} + My = 0$$

可以积分, 后者要用到变换 $ax+b=e^t$. 新的方程中可以积分的是那样的方程, 其积分都是 z 的一致性(单值)函数. 通过微分方程的奇点的研究, 人们认识到那些积分都具有这个性质. 这样得到的一

般积分通常是新的函数.

除了特殊类型微分方程的各种积分的普遍结果外,对于在 $z=a$ 点处有正则奇点的方程,它的解还有利用级数的途径. 如果原点是这样的点,那么方程必定有形式

$$z^n\frac{d^nw}{dz^n}+z^{n-1}P_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}+\cdots+zP_{n-1}(z)\frac{dw}{dz}+P_n(z)w=0,$$

其中 $P_i(z)$ 在 $z=0$ 及其邻域内解析. 在这种情形下,人们可以得到 n 个基本解,用关于 $z=0$ 处的级数形式表示,并证明对 z 值的某些范围这级数收敛. 这级数有形式

$$w=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^{\rho+\nu}.$$

而对每个解,ρ 与 c_ν 是可以确定的. 这结果属于 Georg Frobenius (1849—1917)①.

19 世纪的后半期仍在研究 Riemann 问题,但没有成功,直到 1905 年②, Hilbert 和 Oliver D. Kellogg(1878—1932)③,借助于当时已发展了的积分方程理论才第一次给出完全解. 他们证明了产生单值群的变换可以任意地预先指定.

6. 自守函数

线性微分方程的理论尔后为 Poincaré 和 Felix Klein 所追研. 他们引进的课题叫做自守(automorphic)函数,它不但对其他各种应用是重要的,而且在微分方程理论中也扮演着主要的角色.

Henri Poincaré(1854—1912)是巴黎大学理学院(Sorbonne)

---

① *Jour. für Math.*, 76,1874, 214 ～ 235 = *Ges. Abh.*, 1,84～105.

② *Proc. Third Internat. Math. Cong.*, 1905, 233 ～ 240; 与 *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1905,307～388. 还有在 D. Hilbert 的 *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 1912, Chelsea(重印), 1953,81～108.

③ *Math. Ann.*, 60,1905,424～433.

的一位教授.他的著作几乎与 Euler 和 Cauchy 一样多,包罗了数学和数学物理的广泛领域.我们没有机会讨论他的物理研究,其中包括:毛细管引力,弹性学,位势理论,流体力学,热的传播,电学,光学,电磁理论,相对论,而尤为突出的是天体力学.Poincaré 对他研究的每个问题都深刻洞察,并揭示出其本质.他敏锐地集中于一个问题,并细致地考察它.他还深深信赖于对一个问题的每个方面作定性的研究.

自守函数是圆函数、双曲函数、椭圆函数以及初等分析中其他函数的推广.函数 $\sin z$,当 z 换为 $z+2m\pi$ 时,函数值不变,这里 m 是任何整数.也可以说,当 z 受到群 $z'=z+2m\pi$ 的任何变换时,函数 $\sin z$ 的值是不变的.双曲函数 $\sinh z$,当 z 受到群 $z'=z+2\pi m\mathrm{i}$ 中的任何变换时其值不变.椭圆函数在群 $z'=z+m\omega+m'\omega'$ 的变换下,其值保持不变,这里 ω 与 ω' 是这函数的周期.所有这些群都是不连续的(这术语是 Poincaré 引进的),就是说,在群的变换下,任何一点的所有变式的数目在任何有界区域内都是有限的.

自守函数的名称今天已用于包括那些在变换群

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{16}$$

或这个群的某些子群作用下不变的函数,其中 a,b,c,d 可以是实数或复数,而 $ad-bc=1$.此外,在复平面的任何有限部分上,这群必须是不连续的.

研究得最早的自守函数是椭圆模函数,这些函数在模群或它的某些子群的作用下是不变的,所谓模群就是(16)的那样一个子群,其中 a,b,c,d 是实整数且 $ad-bc=1$.这些椭圆模函数是从椭圆函数导出的.我们这里不再继续讨论它们,因为它们与微分方程的基本理论无关.

更一般的自守函数是为研究二阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}z^2}+p_1\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z}+p_2\eta=0, \tag{17}$$

而引进的，其中 p_1 和 p_2 最初是 z 的有理函数. 一个特殊情形是有 0，1，∞三个奇点的超几何方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)}{z(1-z)}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z}+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\eta=0. \tag{18}$$

Riemann 在他的 1858—1859 年关于超几何级数的讲义里和 1867 年关于极小曲面的一篇遗著中，和 Schwarz① 独立地各自确立了下面所说的理论. 令 η_1 和 η_2 是方程(17)的任两个特解. 于是所有解可以表为

$$\eta=m\eta_1+n\eta_2.$$

当 z 绕奇点的一条闭路径走过一圈时，η_1 和 η_2 变成

$$\eta_1^1=a\eta_1+b\eta_2,\ \eta_2^2=c\eta_1+d\eta_2,$$

而令 z 绕所有奇点的诸闭路径旅游时，就得到这种线性变换的整个群，它就是这微分方程的单值群.

现令 $\zeta(z)=\eta_1/\eta_2$. 当 z 绕闭路径走一圈时，这个商 ζ 就变为

$$\zeta^1=\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}. \tag{19}$$

从(17)我们发现 ζ 满足微分方程

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)=2p_2-\frac{1}{2}p_1^2-p_1'. \tag{20}$$

如果把(18)中的特殊函数取作(17)中的 p_1 和 p_2，便得到

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2=\frac{1-\lambda^2}{2z^2}+\frac{1-\mu^2}{2(1-z)^2}-\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{2z(1-z)}, \tag{21}$$

其中 $\lambda^2=1-\gamma^2$，$\mu^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2$，$\gamma^2=(\alpha-\beta)^2$ 而 λ, μ, ν 取正数(α, β, γ 是实的). 变换类(19)就是微分方程(21)的单值群.

接着 Riemann 和 Schwarz 证明了，当 λ, μ, ν 是实数时，方程

---

① *Jour. für Math.*, 75,1873, 292 ~ 335 = *Ges. Abh.*, 2,211~259.

(21)的每个特解 $\zeta(z)$ 都是一个从上半 z 平面(图 29.1)到 ζ 平面上的以圆弧为边、以 $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ 为角的曲线三角形的保角变换.

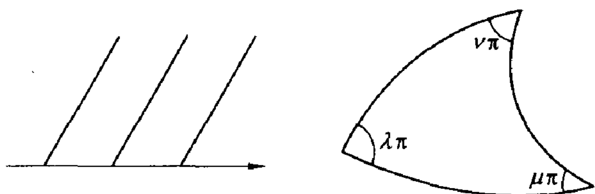


图 29.1

在区域由三圆弧围成的情形下,如果这三角形的角满足一定条件,则 $\zeta = \zeta(z)$ 的反函数就是一个自守函数 $z = \phi(\zeta)$, 它的整个存在区域是半平面或圆. 在 ζ 经线性变换(19)的群中的元素变换后,这函数保持不变,而变换(19)把上述那种形状的任一曲线三角形变到另一曲线三角形. 给定的"圆边"三角形是这个群的基本区域. 在这变换群的作用下,这个区域变成类似的三角形,它们的和覆盖了半平面或圆. 这圆边三角形是椭圆函数情形里的平行四边形的类似物.

Poincaré 和 Klein 的工作从这个基点继续前进. 1880 年以前, Klein 在自守函数方面做了一些基本的工作. 后来在 1881—1882 年期间与 Poincaré 合作. Poincaré 在受 Fuchs 上述工作的吸引而注意这事后,对这课题也已作了先行的工作. 1884 年 Poincaré 在《数学学报》的前五卷中发表了关于自守函数的五篇重要论文. 当这组论文的第一篇在《数学学报》的第一卷上发表时, Kronecker 警告编辑 Mittag Leffler 说,这篇不成熟和隐晦的论文会把这期刊扼杀掉.

以椭圆函数理论为指导, Poincaré 发明了一类新的自守函数①. 这类自守函数是考虑了方程

① *Acta. Math.*, 1,1882,1~62 与 193 ~ 294 = *Œuvres*, 2,108~168,169~257.

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}+P(w,\ z)\frac{d\eta}{dz}+Q(w,\ z)\eta=0$$

的两个线性无关解的商的反函数而得到的,其中 w 与 z 由多项式方程 $\phi(w,\ z)=0$ 相连,而 P 与 Q 都是有理函数. 这是 Fuchs 型自守函数类,由在圆(叫做基本圆)内一致(单值)全纯函数组成,这圆在形如

$$z'=\frac{az+b}{cz+d} \tag{22}$$

的线性变换类作用下是不变的,其中 a, b, c, d 是实数且 $ad-bc=1$. 这些使圆和其内部不变的变换形成一个群,叫做 Fuchs 群. Schwarz 函数 $\phi(\zeta)$ 是 Fuchs 型函数的最简单的例子. 这样, Poincaré 就证明了比椭圆模函数更为普遍的自守函数类的存在性①.

Poincaré 关于自守函数的构造(在 1882 年的第二篇论文里)是根据他的 θ 级数作出的. 设群(22)的变换是

$$z'=\frac{a_iz+b_i}{c_iz+d_i},\ a_id_i-b_ic_i=1,\ i=1,\ 2,\ \cdots \tag{23}$$

令 z_1, z_2, …为 z 在群中的各种变换下的象. 令 $H(z)$是一个有理函数(撇开其他不重要的条件). 于是 Poincaré θ 级数就是函数

$$\theta(z)=\sum_{i=0}^{\infty}(c_iz+d_i)^{-2m}H(z_i),\ m>1. \tag{24}$$

可以证明 $\theta(z_j)=(c_jz+d_j)^{2m}\theta(z)$. 现在令 $\theta_1(z)$与 $\theta_2(z)$是具有同一 m 的两个 θ 级数. 这些级数不仅是单值函数而且是整函数. 因此

$$F(z)=\frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)} \tag{25}$$

是群(23)的一个自守函数. 按照这群是属于 Fuchs 群还是 Klein 群,Poincaré 把级数(24)叫做 θ-Fuchs 级数或 θ-Klein 级数(Klein

---

① 在关于 Fuchs 型群的这一工作中,Poincaré 使用了非欧几里得几何(第 36 章),并证明了 Fuchs 型群的研究归结为 Lobatchevsky 几何的平移群的研究.

群马上就要讲到).

Fuchs 型函数有两类:一类存在于整个平面上,另一类只存在于基本圆的内部.如我们在上面所见,Fuchs 型函数的反函数是代数系数的二阶线性微分方程的两个积分的比.这种方程,Poincaré 称之为 Fuchs 型方程,可以用 Fuchs 型函数的方法积分出来.

后来,Poincaré① 把变换群(22)扩充到复系数的情形,并考虑了这种群的几种类型,Poincaré 把这种群叫做 Klein 群.这里我们必须满意地注意到,如果一个群在本质上是非有限的或非 Fuchs 型的,但当然具有(22)的形状,并且在复平面的任何部分上是不连续的,那么这群便是 Klein 群.对这些 Klein 群,Poincaré 得到了新的自守函数,即在 Klein 群变换下不变的函数,Poincaré 把它叫做 Klein 函数.这些函数有类似于 Fuchs 型函数的性质;然而,这些新函数的基本区域比圆要复杂.顺便说说,Klein 考虑了 Fuchs 型函数,但 Lazarus Fuchs 倒没有考虑过.Klein 因此向 Pioncaré 提过抗议.Poincaré 的回答是把自己紧接着发现的一类自守函数叫作 Klein 函数,因为这些函数是某些人默默注意到的,从来都没有被 Klein 考虑过.

后来,Poincaré 指出如何借助于 Klein 函数表示仅有正则奇点的代数系数的 n 阶线性方程的积分.这样,整个这类线性微分方程都可以用 Poincaré 的这些新的超越函数来解了.

7. Hill 在线性方程周期解方面的工作

当自守函数的理论还正处在创立的阶段时,天文学方面的工作激起了对一个二阶常微分方程的兴趣,它比 Mathieu 方程更为

---

① *Acta Math.*, 3,1883,49～92;4,1884, 201 ～ 312 = *Œuvres*, 2,258～299, 300～401.

普遍一些. 因为 n 体问题不可能明显地解出,只有复杂的级数解才可用,于是数学家们转而去挑选周期解.

周期解的重要性来源于行星或卫星轨道的稳定性问题. 假如一个行星略微离开其轨道,并给它一个小的速度,那么行星是围绕其轨道振动而过了一定时间后也许又回到轨道呢,还是从此就离开轨道呢? 在前一种情形下,轨道是稳定的,而在后一种情形下,轨道是不稳定的. 这样,行星的原始运行或运行中的任何不规则性是否周期的问题乃是极其重要的问题.

如我们知道的(第 21 章第 7 节),Lagrange 在三体问题中已找到了特殊的周期解. 到第一个美国大数学家 George William Hill(1838—1914)研究月球理论之前一直没有找到三体问题新的周期解. 1877 年,Hill 私人出版了关于月球近地点运动的一篇具有卓越创见性的论文①. 他在《美国数学杂志》②上又发表了一篇关于月球运动的很重要的论文. 他的工作创立了周期系数的线性齐次微分方程的数学理论.

Hill(在 1877 年的论文中)第一个基本思想是对月球运动的诸微分方程确定一个近似于实际观察到的运动的周期解. 于是他对这个周期解变差写出方程,这使他得到一个带周期系数的四阶线性微分方程组. 知道了某些积分后,他便能把这个四阶方程组化简为单独一个二阶线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\theta(t)x=0, \tag{26}$$

$\theta(t)$是以 π 为周期的偶函数. 把 $\theta(t)$展开为 Fourier 级数,Hill 方程的形式就可以写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x(q_0+2q_1\cos 2t+2q_2\cos 4t+\cdots)=0. \tag{27}$$

---

① 此文重印于 *Acta Math.*, 8,1886, 1～36 = *Coll. Math. Works* 1,243～270.

② *Amer. Jour. of Math.*, 1,1878,5～26,129～147, 245～260 = *Coll. Math. Works*, 1,284～335.

Hill 令 $\zeta = e^{it}$, $q_{-\alpha} = q_\alpha$, 并且写(27)为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x \sum_{-\infty}^{\infty} q_\alpha \zeta^{2\alpha} = 0. \tag{28}$$

然后他令

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \zeta^{\mu+2j},$$

其中 μ 与 b_j 待定. 把 x 的这个值代入(28),并令 ζ 的每个幂的系数为 0,他得到二重无穷线性方程组

$$\begin{array}{c}
\cdots\cdots \\
\cdots[-2]b_{-2} - q_1 b_{-1} - q_2 b_0 - q_3 b_1 - q_4 b_2 - \cdots = 0, \\
\cdots - q_1 b_{-2} + [-1]b_{-1} - q_1 b_0 - q_2 b_1 - q_3 b_2 - \cdots = 0, \\
- q_2 b_{-2} - q_1 b_{-1} + [0]b_0 - q_1 b_1 - q_2 b_2 - \cdots = 0, \\
- q_3 b_{-2} - q_2 b_{-1} - q_1 b_0 + [1]b_1 - q_1 b_2 - \cdots = 0, \\
- q_4 b_{-2} - q_3 b_{-1} - q_2 b_0 - q_1 b_1 + [2]b_2 - \cdots = 0, \\
\cdots\cdots
\end{array}$$

其中

$$[j] = (\mu + 2j)^2 - q_0.$$

Hill 令未知量 b_j 的系数行列式等于 0. 他首先确定 μ 的无穷多个解的性质并给出确定 μ 的明显公式. 然后,利用 μ 的这些值,他对无穷多个 b_j 的无穷齐次线性方程组解出 b_j 与 b_0 的比值. Hill 确实证明了二阶微分方程有周期解,因而证明了月球近地点的运动是周期性的.

在 Poincaré 证明了 Hill 这种做法的收敛性,因而使无穷行列式和无穷线性方程组的理论有了根据之前①, Hill 的工作是一直受人嘲笑的. Poincaré 对 Hill 的成就的注意和完善,使 Hill 和有关课题著名了.

---

① *Bull. Soc. Math. de France*, 13, 1885, 19～27; 14, 1886, 77～90 = *Œuvres*, 5, 85～94, 95～107.

8. 非线性微分方程:定性理论

在 Hill 工作的刺激下,Poincaré 为支配行星运动以及行星和卫星轨道稳定性的微分方程的周期解的研究开辟了一条新的途径.因为有关的方程是非线性的,所以 Poincaré 就从事于这类方程的研究.非线性常微分方程实际上在一些课题的开创期就出现了,例如在 Riccati 方程(第 21 章第 4 节)中,在摆动方程中,在变分法的 Euler 方程(第 24 章第 2 节)中.解非线性方程还没有找出普遍的方法.

由于运动方程,即使是三体的运动方程都不可能用已知函数明显地解出,所以稳定性问题就不可能通过考察解的性态而得到解决.于是 Poincaré 寻找通过考察微分方程本身就可以回答问题的方法.他把自己所创立的这个理论叫做微分方程的定性理论.这理论表述在四篇本质上是同一标题的论文《关于由微分方程确定的曲线的报告》(Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle)[①]里.用他自己的话说,他要寻求解答的问题是:"动点是否描出一闭曲线? 它是否永远逗留在平面某一部分的内部? 换句话说,并且用天文学的话来说,我们要问轨道是稳定的还是不稳定的?"

Poincaré 从形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)} \tag{29}$$

的非线性方程出发(其中 P, Q 对 x, y 是解析的),选择这个形式的部分原因是由于行星运动的某些问题,部分原因是由于它是 Poincaré 心目中开始研究的类型中最简单的数学类型.(29)的解

---

① *Jour. de Math.*, (3), 7, 1881, 375～422; 8, 1882, 251～296; (4), 1, 1885, 167～244; 2, 1886, 151～217 = *Œuvres*, 1, 3～84, 90～161, 167～221.

有 $f(x, y) = 0$ 的形式,而这方程就说是定义一个轨道系统. 代替 $f(x, y) = 0$, 可以考虑参数形式 $x = x(t)$, $y = y(t)$.

在分析方程(29)的所有可能有的解的类型时,Poincaré 发现微分方程的奇点(使 P 与 Q 同时为 0 的点)起着关键性作用. 这些奇点在 Fuchs 意义下是不确定的或是不规则的. 这里,Poincaré 继续 Briot 和 Bouquet(第 5 节)的早期工作,但使自己限于实值并宁可研究整个解的性质,而不只研究在奇点邻域内解的性质. 他把奇点区分为四类,并阐述了解在这些点附近的性态.

第一类奇点是焦点,即图 29.2 中的原点,当 t 从 $-\infty$ 变向 $+\infty$ 时,解环绕原点盘旋并趋向于原点. 这种类型的解被看成是稳定的. 第二类奇点是鞍点. 它是图 29.3 中的原点,轨道趋近于这个点然后又离开它. 两条分角线是轨道的渐近线. 这种运动是不稳定的. 第三类奇点叫结点,是无穷多个解相交叉的点. 第四类奇点叫中心,有若干闭轨道围绕着它,一个闭轨道包含着另一个,并且都包含着中心.

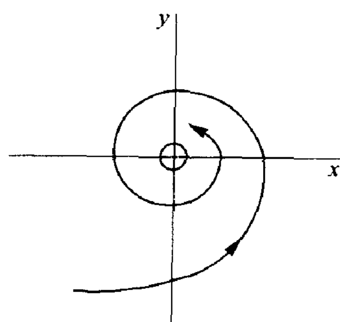


图 29.2

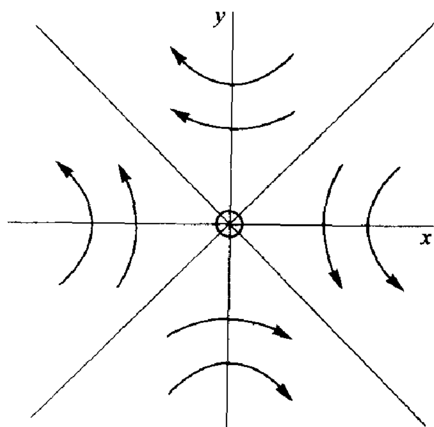


图 29.3

在许多结果中,Poincaré 发现可能有一些闭曲线不与任何满足微分方程的曲线组相接触. 他把这些闭曲线叫做无接触环. 一条满足微分方程的曲线与这环的交点不能多于一个. 因而,如果

它跨过这环,则它就不可能再次跨过这环.如果这种曲线是一行星的轨迹,那么它就表示不稳定的运动.

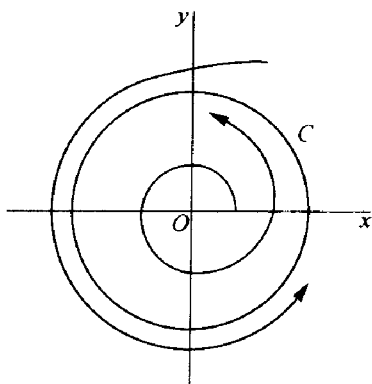


图 29.4

除了无接触环外,还有一种Poincaré称之为极限环的闭曲线.它们是满足这微分方程的闭曲线,而且其他解渐近地趋向于它们,也就是永远达不到极限环.这种趋向可以是从极限环 C 之外,也可以是从极限环 C 之内(图29.4).对某些(29)型的微分方程,Poincaré确定了其极限环和它们的存在区域.在极限环的情形下,轨道曲线趋向于一条周期曲线,所以运动仍然是稳定的.然而,如果运动方向是离开极限环的,那么在极限环外面的运动是不稳定的,而在环内的运动则是一条收缩螺线.

Poincaré在他关于这课题的第三篇论文中,研究了高次的和具有形状 $F(x, y, y') = 0$ (其中 F 是 x, y, y' 的多项式)的一阶方程.为了研究这些方程,把 x, y, y' 看作三直角坐标,并考虑由微分方程定义的曲面.如果这曲面有亏格0(球的形状),那么积分曲线有与一次微分方程情形相同的性质.对于其他亏格,关于积分曲线的结果可以很不相同.例如,对于一个环管就有许多新的情形发生.Poincaré没有完成这个研究.在(1886年的)第四篇论文里,他研究了二阶方程,并得到了某些类似于一阶方程所具有的结果.

Poincaré在继续进行关于微分方程(29)解的类型的工作同时,又考虑了一种针对天文学中三体问题的更普遍的理论.在一篇得奖的论文《论三体问题和动力学方程》①中,他考虑了微分

---

① *Acta Math.*, 13,1890, 1 ~ 270 = *Œuvres*, 7,262~479.

方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(x_1, \cdots, x_n, \mu), \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{30}$$

他用小参数μ的幂展开X_i,并假定这方程组对$\mu = 0$有一个已知的以T为周期的周期解

$$x_i = \phi_i(t), \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

他企图找方程组的当$\mu = 0$时归化为$\phi_i(t)$的周期解.对三体问题,周期解的存在性已由 Hill 发现,而 Pioncaré 则利用了这一事实.

在这里考虑 Poincaré 工作的细节是太专门化了.他首先推广了 Cauchy 关于常微分方程组的解的较早的工作,其中 Cauchy 已用了他的**极限计算**.然后,Poincaré 证明了他所要寻找的周期解的存在性,并把他所学得的知识应用于三体问题周期解的研究,其中两个物体的质量(不是太阳的质量)都是很小的.于是,经假定这两个小质量物体围绕太阳在同一平面的两个同心圆上运动后,便得到这样的解.如果假定在$\mu = 0$时轨道都是椭圆,并且它们的周期是可公度的,便可以得到其他的解.利用这些解,并利用他对方程组所建立的理论,他便得到其他的周期解.总结起来,他证明了有无穷多个初始位置和初始速度使得三星体**相互间的距离**是时间的周期函数(这样的解也叫作周期解).

Poincaré 在 1890 年的这篇论文中引用了关于方程组(30)的周期解和殆周期解的许多别的结论,其中包含有这种方程组的从前不知道的一类新的解这样非常卓越的发现.他把这些解叫作渐近解.共有两类.在第一类中,当t趋于$-\infty$或t趋于$+\infty$时,这解渐近地趋于周期解.第二类解由二重渐近解组成,也就是当t趋于$-\infty$和$+\infty$时,这种解趋于一周期解.这种二重渐近解有无穷多个.在 1890 年的这篇论文中所有的结果以及许多其他结果也可以

在 Poincaré 的《天体力学的新方法》(*Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*)①中找到.

Poincaré 关于太阳系稳定性问题的工作仅仅是部分地成功了. 稳定性仍然是一个未解决的问题. 事实上,月球轨道是不是稳定的问题也是这样;今天大多数科学家认为它是不稳定的.

(29)的解的稳定性可以用所谓特征方程的方法来分析,所谓特征方程就是

$$\begin{vmatrix} Q_x(x_0,\ y_0)-\lambda & P_x(x_0,\ y_0) \\ Q_y(x_0,\ y_0) & P_y(x_0,\ y_0)-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{31}$$

其中$(x_0,\ y_0)$是(29)的一个奇点. 按照杰出的俄罗斯数学家 Alexander Liapounoff(1857—1918)的一个定理,在$(x_0,\ y_0)$的邻域内稳定性依赖于这个特征方程的根②. 可能情形的分析是细致的,并包括着比上面讨论的 Poincaré 的工作更多的类型. Liapounoff 关于稳定性问题的工作一直继续到这世纪的早期. 据 Liapounoff 说,基本结果是当且仅当方程(31)关于 n 的根都有负实部时,方程的所有解才是稳定的.

非线性方程的定性研究被 Poincaré 引进的拓扑论证法(在《数学杂志》上四篇论文的第一篇中)所推进. 为了描述奇点的性质,他引进了指数的概念. 考虑一奇点 P_0 和围绕它的一条简单闭曲线 C. 在 C 与方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)} \tag{32}$$

的解的每个交点上,有轨道的一个方向角,我们用 ϕ 表示,这个角可以取从 0 到 2π 弧度间的任何值. 如果一个点依反时针方向沿 C 移动(图 29.5),则角 ϕ 将要变化;而且当点 C 走完一圈以后,ϕ 将有值 $2\pi I$,其中 I 是一个整数或 0(因为轨道的方向角已经转回到

① Three volumes, 1892～1899.

② *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*,(2),9,1907,203～474;1892 年最初在俄国发表.

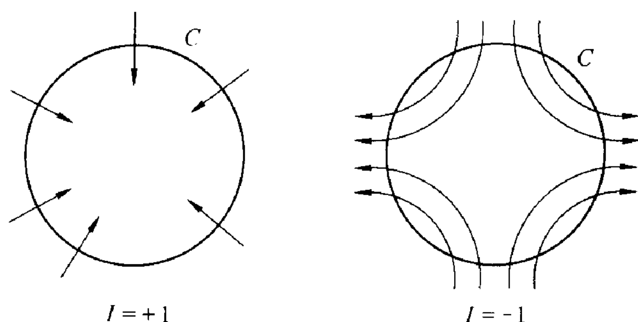


图 29.5

原来的值了). 量 I 就是曲线的指数. 可以证明:包含几个奇点的闭曲线的指数是它们的指数的代数和. 闭轨道的指数是 +1,反之亦然.

轨道的性质可以由特征方程确定,因此,一条曲线的指数 I 应当仅仅知道微分方程就能确定了. 可以证明

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_C \mathrm{d}\left(\arctan\frac{P}{Q}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{P\mathrm{d}Q-Q\mathrm{d}P}{P^2+Q^2},$$

其中积分路径是闭曲线 C.

Poincaré 之后,关于形为(32)的方程的解的最有意义的工作是属于 Ivar Bendixson(1861—1935)的. 他的主要结果①之一是提供一个准则,据以可证明在某区域内没有闭轨道存在. 若 D 是 $\partial Q/\partial x+\partial P/\partial y$ 在其中同号的一个区域,则方程(32)在 D 中没有周期解.

在 Bendixson 1901 年的论文里,有现在以 Poincaré 和 Bendixson 命名的定理,它提供了(32)存在一个周期解的一个肯定判断准则. 如果 P 与 Q 在 $-\infty<x,\ y<\infty$ 内有定义并且是正则的,又如果当 t 趋于∞时,解 $x(t),\ y(t)$永远保持在$(x,\ y)$平面的有界区域内且不趋于奇点,那么这微分方程至少存在一条闭的解曲线.

Poincaré 创始的非线性方程的研究已在各个方面加宽变广

① *Acta Math.*, 24,1901,1~88.

了.这里要提一下在19世纪开始的又一个论题. Fuchs研究过的线性微分方程的奇点都是固定的,而且事实上是被这微分方程的系数所确定了的.在非线性方程的情形下,奇点可能随初始条件而变动,因而称为可去奇点.例如方程 $y' + y^2 = 0$ 有一般解 $y = 1/(x-c)$,其中 c 是任意的.在解中,奇点的位置依赖于 c 的值.可去奇点的现象是由Fuchs[①]发现的.可去奇点的研究和具有或不具有这种奇点的二阶非线性方程的研究被许多人做过,特别是被Paul Painlevé(1863—1933)研究过.一个有趣的特征是对许多形如 $y'' = f(x, y, y')$ 的二阶方程类,它们的解需要新的超越函数类,现在叫做Painlevé超越函数[②].

对于非线性方程的兴趣在20世纪已经变得浓烈了.它的应用已从天文学转移到通信、服务机构、自动控制系统和电子学.它的研究也已从定性阶段转移到定量研究的阶段了.

参考书目

Acta Mathematica, Vol. 38, 1921. This entire volume is devoted to articles on Poincaré's work by various leading mathematicians.

Bôcher, M.:"Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ, A7a, 437～463.

Bôcher, M.:"Boundary Problems in One Dimension", *Internat. Cong. of Math.*, Proc., Cambridge, 1912, 1, 163～195.

Burkhardt, H.:"Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 10, 1908, 1～1 804.

Cauchy, A. L.:*Œuvres complètes*, (1), Vols. 4, 7, and 10, Gauthier-Villars, 1884, 1892, and 1897.

---

① *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1884, 699 ～ 710 = *Werke*, 2, 364 ff.

② *Comp. Rend.*, 143, 1906, 1 111～1 117.

Craig, T.: "Some of the Developments in the Theory of Ordinary Differential Equations Between 1878 and 1893", *N. Y. Math. Soc. Bull.*, 2, 1893, 119～134.

Fuchs, Lazarus: *Gesammelte mathematische Werke*, 3 vols., 1904～1909, Georg Olms (reprint), 1970.

Heine, Eduard: *Handbuch der Kugelfunktionen*, 2, vols., 1878～1881, Physica Verlag (reprint), 1961.

Hilb, E.: "Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ, B5.

Hilb, E.: "Nichtlineare Differentialgleichungen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ, B6.

Hill, George W.: *Collected Mathematical Works*, 4 vols., 1905, Johnson Reprint Corp., 1965.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert*, Vol. Ⅰ, Chelsea (reprint), 1950.

Klein, Felix: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Julius Springer, 1923, Vol. 3.

Painlevé, P.: "Le Problème moderne de l'intégration des équations différentielles", *Third Internat. Math. Cong. in Heidelberg*, 1904, 86～99, B. G. Teubner, 1905.

Painlevé, P.: "Gewöhnliche Differentialgleichungen, Existenz der Lösungen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ, A4a.

Poincaré, Henri: *Œuvres*, 1, 2, and 5, Gauthier-Villars, 1928, 1916, and 1960.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd ed., 1892, Dover (reprint), 1953.

Schlesinger, L.: "Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 18, 1909, 133～266.

Wangerin, A.: "Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ, A10.

Wirtinger, W.: "Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung", *Third Internat. Math. Cong. in Heidelberg*, 1904, B. G. Teubner, 1905, 121～139.

第 30 章

19 世纪的变分法

> 虽然不允许我们看透自然界本质的秘密,从而认识现象的真实原因,但仍可能发生这样的情形:一定的虚构假设足以解释许多现象.
>
> Leonhard Euler

1. 引　　言

我们已经看到,变分法主要是由 Euler 和 Lagrange 在 18 世纪确立的.除各类数学和物理问题外,对它的研究有一个主导的动力,即**最小作用原理**,它在 Maupertuis, Euler 和 Lagrange 手中已成了数学物理的主导原理. 19 世纪的人们继续做着最小作用方面的工作,而 19 世纪前半期对变分法最大的刺激就来自这方面.在物理方面,其兴趣来自力学特别是天文学的问题.

2. 数学物理和变分法

Lagrange 用其最小作用原理对动力学规律的成功描述,启示着这概念应该可以应用到物理学的其他分支上去. Lagrange 对流体动力学给出了极小原理(适用于可压缩的和不可压缩的流体)[①],他由此导出了关于流体动力学的 Euler 方程(第 22 章第 8 节),而且他确实自夸说,极小原理主宰了这个领域,就像它主宰着质点运动和刚体运动那样. 在 19 世纪早期,许多弹性问题也为

① *Misc. Taur.*, 2_2,1760/1761,196～298,pub. 1762 = *Œuvres*, 1,365～468.

Poisson, Sophie Germain, Cauchy 和其他一些人用变分法解决.弹性问题的工作还使这课题保持经常的活跃,但在这个领域内或在 Gauss 的著名力学贡献——"**最小约束原理**"(The Principle of Least Constraint)[①]中,并没有主要的变分学的新数学概念引人注目.

第一个值得注意的新论点归于 Poisson. 利用 Lagrange 的广义坐标,Poisson 直接追随 Lagrange 的两遍论文,并且从Lagrange 方程(第 24 章第 5 节)

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

出发[②]. 这里用广义坐标表示的动能 T 是 $2T=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$, V 是势能,而 T, V 与 t 无关. 他令 $L=T-V$. 当 V 仅依赖于 q_i 而不依赖于 $\dot{q}_i$ 时,就有

$$(2)\qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

从而他可以把运动方程改写成

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

他还引进

$$(4)\qquad p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

因此从(3)他得到

$$(5)\qquad \dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i},\ i=1,2,\cdots,n.$$

这些 p_i 是动量的分量,而 q_i 是位置的直角坐标. 方程(5)是走上我们将要考察的方向上的一步.

最小作用原理,在叙述上的巨大改变是由 William R. Hamilton 作出的,这一改变对变分法、常微分方程和偏微分方程都是重

① *Jour. für Math.*, 4,1829, 232 ~ 235 = *Werke*, 5,23~28.

② *Jour. de l'Ecole Poly.*, 8,1809,266~344.

要的. Hamilton 是经光学到动力学的. 他在光学上的目的是要用 Lagrange 处理力学那样的方式形成一种演绎的数学结构.

Hamilton 也是从最小作用原理出发,并要推演出一些新的原理. 然而他对这种原理的态度与 Maupertuis, Euler, Lagrange 是有深刻区别的. 在《都柏林大学评论》(*Dublin University Review*)上发表的一篇论文①中他说:"但是虽然最小作用原理已如此立足于物理学最高级定理之林,然而在宇宙经济的基地上看,当时人们普遍拒绝把它作为宇宙规律的主张,对此,拒绝恰恰在于其他理由,事实上伪装节约的数量都常常浪费地消耗着."因为在某些自然现象,甚至于最简单的现象里,作用是极大化了的,所以 Hamilton 宁愿把它说成稳定作用原理.

Hamilton 在 1824 到 1832 年间的一系列论文里建立了他的光学的数学理论,尔后把他在那里引入的概念移植到力学中去. 他写了两篇基本论文②. 其中第二篇更为著名. 在那里他引进作用积分,即动能与位能的差对时间的积分

$$S=\int_{P_1,t_1}^{P_2,t_2}(T-V)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

虽然量 $T-V$ 是由 Poisson 引进的,但却叫做 Lagrange 函数. P_1 代表 $q_1^1, q_2^1, \cdots, q_n^1$ 而 P_2 代表 $q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, \cdots, q_n^{(2)}$. 现在 Hamilton 推广 Euler 与 Lagrange 的原理,允许有不受限制的比较路径,只是沿这些路径的运动必须在时间 t_1 从 P_1 开始,在时间 t_2 到达 P_2. 同时能量守恒定律不必成立,而在 Euler-Lagrange 原理中,能量守恒定律是预先假定的,因而,一物体历经比较途径中任一条所需的时间不同于历经真实途径所费的时间.

Hamilton 最小作用原理断言,真实运动是使作用稳定的运动. 对于保守系统,即在力的分量可从仅是位置的函数的位能导出

---

① 1833, 795～826 = *Math. Papers*, 1, 311～332.

② *Phil. Trans.*, 1834, Part Ⅱ, 247～308; 1835, Part Ⅰ, 95～144 = *Math. Papers*, 2, 103～211.

的场合，$T+V=$ 常数，所以 $T-V=2T-$ 常数，从而 Hamilton 原理化归到 Lagrange 原理. 但如已经指出的，Hamilton 原理对非保守系统也是成立的. 还有，位能 V 可以是时间的函数，甚至还是速度的函数，即在广义坐标中，$V=V(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t)$.

如果令 $T-V=L$，我们把作用积分(6)写为

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t)\mathrm{d}t. \tag{7}$$

附以条件：所有比较函数 $q_i(t)$ 在 t_1 和 t_2 都必须有同一给定值，于是，问题就是要在真实的 q_i 使积分稳定的条件下来确定 q_i 为 t 的函数. 表示 S 的一级变分为 0 的条件的 Euler 方程变成齐次二阶常微分方程组，即

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=0,\ k=1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

而这些方程要在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 内是可解的. 虽然 L 现在是一个不同的函数，但这些方程仍叫做 Lagrange 运动方程. 坐标系的选择是任意的，通常是用 Lagrange 广义坐标，这是变分原理的基本优点.

现在引进(看(4))

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

于是方程(8)变成

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

虽然引进 p_i 作为一组新的自变量是 Poisson 首先做的，但是仍归功于 Hamilton. 现在我们有了一组对称的微分方程

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\ \dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i},\ i=1, 2, \cdots, n. \tag{9}$$

这是 $2n$ 个关于 p_i 和 $\dot{p}_i$ 的一阶微分方程组. 然而这些 $\dot{p}_i$ 就是 $\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}$.

Hamilton 在他的第二篇(1835 年)论文中，简化了这个方程组. 他引进一个新的函数 H，定义为

$$(10)\qquad H(p_i, q_i, t) = -L + \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i.$$

这个函数在物理上就是总能量,因为这个和可以证明是等于 $2T$. 从 L 到 H 的变换叫做 Legendre 变换,因为 Legendre 曾把它用在他的常微分方程研究中. H 是 p_i, q_i, t 的函数,而 $L = T - V$ 是 q_i, $\dot{q}_i$, t 的函数,这是因为 $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, 所以我们可以解出 $\dot{q}_i$,并代到 L 中去.

利用(10),可以证明运动的微分方程(9)具有形式

$$(11)\qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

在应用于物理问题中时,函数 H 假定是已知的. 这些方程是 $2n$ 个一阶常微分方程的方程组,有 $2n$ 个应变量 p_i 和 q_i,它们都是 t 的函数,而 Lagrange 方程(1)是 $q_i(t)$的 n 个二阶常微分方程的方程组. 后来 Jacobi 把 Hamilton 方程称为典型微分方程. 它们是积分

$$S = \int_{P_1, t_1}^{P_2, t_2} (T - V)\mathrm{d}t = \int L\mathrm{d}t = \int \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right\} \mathrm{d}t$$

的变分方程(Euler 方程). 这组方程出现在 Lagrange 1809 年的一篇研究力学系统机动理论的论文中. 然而,Lagrange 没有看出这些方程与运动方程的基本联系,而 Cauchy 在 1831 年的一篇未发表的论文中则看出来了. Hamilton 在 1835 年把这些方程作为他的力学研究的基础.

为了运用 Hamilton 的运动方程,常常可能采用合适的 p 和 q 坐标系来表示 H,使得可以从方程组(11)解出 p_i 与 q_i 作为 t 的函数. 特别地,如果能选取坐标使得 H 只依赖于 p_i,那么这方程组就是可解的.

Jacobi 在 1837 年的一篇论文①中以及在 1842 年和 1843 年关

① *Jour. für Math.*, 17, 1837, 97 ~ 162 = *Ges. Werke*, 4, 57~127.

于动力学的讲演里(这讲演 1866 年刊于经典著作《动力学讲义》(*Vorlesungen über Dynamik*)中)都指出,人们可以把 Hamilton 的程序反转过来. 在 Hamilton 的理论中,如果知道作用 S 或 Hamilton 函数 H,就可以作出 $2n$ 个典型微分方程并可试图解出这方程组. Jacobi 的思想是图谋找出坐标 P_i 和 Q_i 以使 H 尽可能简单,因而微分方程(11)能易于积分. 特别地,他找到一个变换

(12)
$$Q_j = Q_j(p_i, q_i, t),$$
$$P_j = P_j(p_i, q_i, t),$$

使得
$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)\right)dt = 0$$

经变换(12)变到

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K(P_i, Q_i, t)\right)dt = 0,$$

从而 Hamilton 微分方程变成

(13)
$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i},\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i},$$

其中 $K(P_i, Q_i, t)$是新的 Hamilton 算子. 这一途径导致

$$K = H(p_i, q_i, t) + \frac{\partial\Omega}{\partial t}(Q_i, q_i, t),$$

其中 Ω 是新的函数,叫做变换的母函数. Jacobi 选取 $K = 0$, 从而由(13)得到

$$\dot{Q}_i = 0,\ \dot{P}_i = 0,$$

也就是说 Q_i, P_i 是常数. 此外,有

(14)
$$H + \frac{\partial\Omega}{\partial t} = 0,$$

并可证明
$$p_i = \frac{\partial\Omega}{\partial q_i}.$$

考虑到 H 中的变量,就可由(14)得到

(15)
$$H\left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_i}, q_i, t\right) + \frac{\partial\Omega}{\partial t}(Q_i, q_i, t) = 0.$$

因为 $\dot{Q}_i = 0$, $Q_i = \alpha_i$, 所以这方程是关于 Ω(具自变量 q_i 和 t)的

一阶方程. 作这样的改变后,方程(15)便是关于 Ω 的 Hamilton-Jacobi偏微分方程. 如果这个方程可以解出一个完全的 Ω,即包含 n 个任意常数的解,那么这解将有形式

$$\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, q_1, q_2, \cdots, q_n, t).$$

现在从 Jacobi 变换理论有这样一个事实:

$$P_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i}.$$

并且因为 $\dot{P}_i = 0$, 有 $P_i = \beta_i$ 是常数. 所以从代数方程

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i} = -\beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

解出 q_i,这些解

$$q_i = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, t), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

是 Hamilton 典型方程的解. 这样,Jacobi 便证明了经过解偏微分方程(15)就可以解出方程组(11). Jacobi 本人就对许多力学问题找出了真正解 Ω.

Hamilton 的工作是提供一个普遍原理(可以从它导出各种力学问题的运动定律)的一系列努力的顶峰,它鼓舞人们努力在其他数学物理分支,如弹性学、电磁理论、相对论、量子理论中求得相似的变分原理. 已经导出的原理,即使是 Hamilton 原理,都不必是解特殊问题的更实际途径. 虽然科学家们不再推断说极大极小原理的存在是上帝的智慧和效能的证据了,但是这种广泛的公式的吸引力,毋宁说是在于哲学和美学的兴趣.

从数学史的角度看,Hamilton 和 Jacobi 的工作是有意义的,因为它不仅推动了变分法的进一步研究,而且也推动了常微分方程组和一阶偏微分方程组的进一步研究.

3. 变分法本身的数学扩充

我们记得,即使在最简单的情形,要把积分

$$(16) \qquad J=\int_a^b f(x, y, y')\mathrm{d}x$$

极小化或极大化,Euler 和 Legendre 的结果也只提供了必要条件(第 24 章). 在 Legendre 的工作以后大约 50 年的期间内,数学家们进一步探索了一阶和二阶变分,但没有得到决定性的结果. 1837 年[①],Jacobi 发现了如何强化 Legendre 条件使它可以提供充分条件. 在这方面,他的主要发现是共轭点的概念. 我们先来解释一下这是什么意思.

考虑满足 Euler(特征)方程的曲线;这种曲线叫极值曲线. 对于变分学的基本问题,通过给定点 A,存在一族单参数极值曲线. 现在假定 A 是我们寻求极大或极小曲线的两端点之一. 给了任一极值曲线,当其他极值曲线越来越接近这极值曲线时,其他极值曲线的交点的极限就是这极值曲线上 A 的共轭点. 表达这概念的另一方法是,我们有一族曲线,这族曲线可能有一包络. 任一极值曲线与这族曲线的包络的接触点就是这极值曲线上与 A 共轭的点. 于是 Jacobi 条件就是:如果 $y(x)$ 是原来问题中端点 A 和 B 之间的一条极值曲线,那么在 A, B 间的极值曲线 $y(x)$ 上必定没有共轭点,或甚至于连 B 本身也不是.

这在具体问题中究竟是什么意思,可以从一个例子看出来. 可以证明,从 A 点以相同速度 v 但以不同的倾角发射的炮弹,其所有轨线的抛物路径(图 30.1)是使作用积分

$$\frac{m}{2}\int_A^B v\,\mathrm{d}s$$

极小化或极大化的问题的极值曲线. 把 A, B 两点之间的作用极小化的问题,一般确实有两个解,即抛物线 $AA''B$ 与抛物线 ABA'. 还有,通过 A 点的抛物线族有一包络,它在 A'' 和 A' 点与两抛物线相切触. 在 $AA''B$ 上的共轭点是 A'',在 ABA' 上的共轭点是

① *Jour. für Math.*, 17, 1837, 68 ~ 82 = *Ges. Werke*, 4, 39~55.

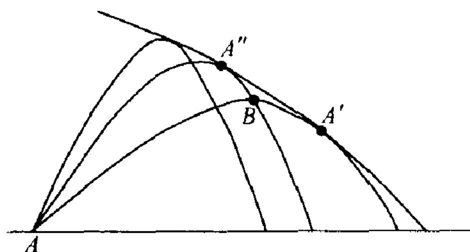


图 30.1

A'. 按照 Jacobi 条件，极值曲线 $AA''B$ 不能提供一个极大或极小，但极值曲线 ABA' 可以提供.

Jacobi 重新考虑了二级变分 $\delta^2 J$（第 24 章第 4 节）. 如果以 $y+\varepsilon t(x)$ 代替 Lagrange 的 $y+\delta y$，又如果 a 与 b 是 A 与 B 的横坐标，那么

$$(17)\qquad \delta^2 J=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_a^b (t^2 f_{yy}+2tt'f_{yy'}+t'^2 f_{y'y'})\mathrm{d}x.$$

Jacobi 证明了

$$\delta^2 J=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_a^b f_{y'y'}\left(t'-t\frac{u'}{u}\right)^2\mathrm{d}x,$$

其中 u 是 Jacobi 辅助方程

$$(18)\qquad \left\{f_{yy}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{yy'}\right\}u-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{y'y'}u')=0$$

的解，其中偏导数是沿联结两端点 A 与 B 的一条极值曲线计值的. 现在 $u(x)$ 被要求通过 A 点. 于是在通过 A 和 B 的极值曲线 $y(x)$ 上，使 $u(x)$ 取零值的所有点都是这极值曲线上共轭于 A 的点. 如果 $u=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2$ 是辅助方程(18)的通解，那么可以证明

$$\frac{u_1(x)}{u_2(x)}=\frac{u_1(a)}{u_2(a)}$$

是所有与 A 共轭的点的横坐标的方程，其中 a 是点 A 的横坐标.

Jacobi 还指出，不必去解辅助方程. 因为在随便什么情况下，总要解 Euler 方程，设 $y=y(x,c_1,c_2)$ 是这方程的通解，即极值曲线族. 那么 u_1 可以取为$\dfrac{\partial y}{\partial c_1}$，而 u_2 可取为$\dfrac{\partial y}{\partial c_2}$.

Jacobi 从他关于共轭点的研究引出两条结论. 第一是:如果沿从 A 到 B 的极值曲线有一个共轭于 A 的点,那么极大或极小便是不可能的. 在这一结论上,Jacobi 基本上是正确的. Jacobi 根据他关于共轭点的考虑还作出结论说,一条在 A 与 B 之间取得极值的曲线(Euler 方程的解),如果沿这曲线 $f_{y'y'}>0$ 并且在 A 与 B 间(或在 B 点上)不存在共轭点,那么这极值曲线便给出原积分的一个极小. 他断言,对于 $f_{y'y'}<0$, 相应的命题对极大成立. 实际上,我们马上就会看到,这些充分条件是不正确的. 在这篇 1807 年的论文中,Jacobi 叙述了结果并给出了证明的简单指示. 正确命题的完全证明由后继的研究者补出来了.

Jacobi 的结果除了对极大化或极小化函数的存在性有特殊价值外,他的工作使人们清楚地看到,变分学的进展不能以通常微积分的极大和极小理论为指导.

把 Jacobi 的两条结论当作正确的接受下来有 35 年之久. 在这时期内关于这课题的论文在陈述方面是不确切的,在证明方面是有问题的. 问题没有严明简洁地陈述,因而造成各种错误. 后来,Weierstrass 从事于变分学的研究工作. 他的资料表述于 1872 年在柏林的讲义里,但是他本人没有发表出来,像 Weierstrass 在其他领域里的工作那样,他的思想引起了新的兴趣,在这课题内激起了更大的动力,并锐化了思维.

Weierstrass 的第一个论点是:迄今为止所建立的极大或极小判别准则——Euler 的、Legendre 的、Jacobi 的——都是有局限的,因为假设中的极大或极小曲线 $y(x)$ 是与别的曲线 $y(x)+\varepsilon t(x)$ 相比较的,在这里实际上是假定 $\varepsilon t(x)$ 和 $\varepsilon t'(x)$ 两者,或 Lagrange 所说的 δy 和 $\delta y'$ 两者,沿 x 域从 A 到 B 都是很小的. 也就是说,$y(x)$ 是与其他有限制的曲线类相比较的,并且在满足这三个判别准则的条件下,它确实比这些比较曲线中任何别的一条要好. Adolf Kneser(1862—1930)把这种变分叫做弱变分. 然而为了

找出真正极小化或极大化积分 J 的曲线，人们必须把它与所有其他联结 A 与 B 的曲线相比较，在这些比较曲线中，包括着那些在距离上越益接近极大曲线时，其导数可能不趋近极大(或极小)曲线的导数的比较曲线. 例如比较曲线在沿 x 域从 A 到 B 途中可能在一处或多处有尖角(图 30. 2). Weierstrass 想像中的比较曲线就是 Kneser 所说的强变分.



图 30. 2

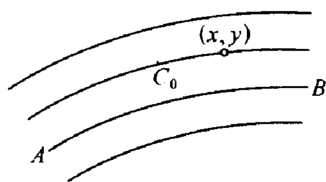


图 30. 3

Weierstrass 在 1879 年确实证明了弱变分的三个条件：曲线是极值曲线(Euler 方程的解)，沿极值曲线 $f_{y'y'} > 0$，任何与 A 共轭的点必定位于 B 点之外，这三个条件确实是极值曲线给出积分 J 一个极小值(对极大值是 $f_{y'y'} < 0$)的充分条件.

然后，Weierstrass 考虑了强变分. 对这些变分，首先引进了第四个必要条件. 他引进一个新的函数，定义为

$$(19)\qquad E(x,\ y,\ y',\ \tilde{p}) = f(x,\ y,\ \tilde{p}) - f(x,\ y,\ y') - (\tilde{p} - y')f_{y'}(x,\ y,\ y'),$$

叫做 E 函数，或过剩函数. 他的结果是，$y(x)$提供一个极小值的第四个必要条件是：对每个有限值 $\tilde{p}$，沿极值曲线 $y(x)$上有 $E(x,\ y,\ y',\ \tilde{p}) \geqslant 0$. 对极小值是 $E \leqslant 0$.

后来(1879 年)Weierstrass 把他的注意力转向允许强变分时极大值(或极小值)的充分条件. 为了简明地陈述他的充分条件，有必要引进 Weierstrass 关于场的概念. 考虑极值曲线的任一单参数族 $y = \Phi(x,\ \gamma)$ (图 30. 3)，其中包括联结 A 与 B 的特殊极值曲线，不妨说它是 $\gamma = \gamma_0$ 的那一条. 关于这族极值曲线，除了

$\Phi(x, \gamma)$的连续性和可微性的某些细节外,本质性的事实是:在过 A 和 B 的极值曲线附近的一个区域内,极值曲线族中有一条且仅有一条通过这区域内的任何一点(x, y). 满足这个本质性条件的极值曲线族就叫做场.

给了一个环绕联 A 和 B 的极值曲线 C_0 的一个场(图 30.4),如果在 $x=a$ 和 $x=b$ 间的任何点(x, y)上以及这个场所覆盖的区域内有 $E(x, y, p(x, y), \tilde{p}) \geqslant 0$, 其中 $p(x, y)$表示通过(x, y)的极值曲线在(x, y)处的斜率,$\tilde{p}$ 是任一有限值,那么相对于这场内联结 A 和 B 的任何其他 C 来说,C_0 使得积分 J 极小化.(对极大值来说,要 $E \leqslant 0$.)

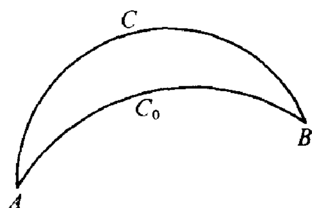


图 30.4

1900 年 Hilbert[①] 提出了他的不变积分理论,这个理论大大简化了充分性的证明. Hilbert 提出了一个问题:是否可能确定函数 $p(x, y)$,使得积分

$$(20)\qquad I=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x, y, p)-(y'-p)f_{y'}(x, y, p)\}\,\mathrm{d}x$$

在(x, y)的区域中与积分路径无关? 他发现,如果 $p(x, y)$是这样确定的话,那么微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x, y)$$

的解是一个场的极值曲线. 反之,如果 $p(x, y)$是场 F 的斜率函数,则在 F 中 I 与路径无关. 从这个定理出发,Hilbert 导出了 Weierstrass 关于强变分的充分性条件.

---

① *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1900, 291～296 = *Ges. Abh.*, 3,323～329. 在 *Amer. Math. Soc. Bull.*, 8,1902,472～478 上有一个由 Mary Winston Newsom 翻译的英译本. 这个材料是 1900 年 Hilbert 的著名论文《数学问题》(Mathematical Problems)的一部分.

4. 变分法中的有关问题

我们对变分法历史的说明主要集中于积分

$$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,\ y,\ y')\mathrm{d}x.$$

还提到过一些其他问题,如等周问题、单个变量几个函数的问题(例如在最小作用原理中出现的问题),以及重积分的情形,这个情形 Lagrange 首先论述过,而且在极小曲面问题中就出现过(第 24 章第 4 节). 有许多种与变分法有关的问题,诸如以参数表示 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 来处理的极小化或极大化曲线——Weierstrass 详尽地讨论了这个问题——以及主要在动力学中的一些问题,其中出现在被积函数中的变量受一些辅助方程的限制,这些辅助方程称为约束. 最后这类问题多少也与等周问题有关,因为在等周问题中也规定了一个辅助条件,即规定了围出最大面积的曲线的长度(虽然在等周问题中辅助条件是以表示曲线长度的积分这种形式出现的),而在动力约束的情形,一个或一组约束条件的形式是包含自变量和应变量甚至包含应变量的微分的方程. 还有一个早就讨论过的重要问题叫做 Dirichlet 问题(第 28 章第 4 节和第 8 节).

我们将不去追溯这些问题的详细历史,因为尽管这些问题是有意义的而且到如今已经做了相当多的工作,但是没有一个数学发展的重要特征是出自这些问题的. 也许值得提一下的是极小曲面的课题,这个问题要求解方程

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

从 1817 年 Ampère 的一篇论文以后,直到比利时物理学家 Joseph Plateau(1801—1883)在 1873 年写的一本书《遵从单一分子模型的流体静力学实验与理论》(*Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules formes moléculaires*)为止,关于极

小曲面问题的研究一直是不活跃的. Joseph Plateau 在他的书中指出,如果人们把具有闭曲线形状的金属丝浸到甘油溶液(或肥皂水)中,然后把金属丝取出来,那么具有最小面积的曲面形状的肥皂薄膜就张成金属丝边界. 于是,为了研究由一条空间闭曲线所围的极小曲面问题,数学家们接受了一种新的刺激. 因为边界曲线或曲线组可以非常复杂,极小曲面问题真正的显式解析解也许是不可能得到的. 这个问题现在被称为 Plateau 问题,导致关于至少是解的存在性证明的研究,由此可以导出解的某些性质.

参 考 书 目

Dresden, Arnold:"Some Recent Work in the Calculus of Variations," *Amer. Math. Soc. Bull.*, 32,1926,475~521.

Duren, W. L., Jr.:"The Development of Sufficient Conditions in the Calculus of Variations," *University of Chicago Contributions to the Calculus of Variations*, Ⅰ, 1930,245~349, University of Chicago Press, 1931.

Hamilton, W. R.: *The Mathematical Papers*, 3 vols., Cambridge University Press, 1931,1940 and 1967.

Jacobi, C. G. J.: *Gesammelte Werke*, G. Reimer, 1886 and 1891, Chelsea (reprint), 1968, Vols. 4 and 7.

Jacobi, C. G. J.: *Vorlesungen über Dynamik* (1866), Chelsea (reprint), 1968. Also in Vol. 8 of Jacobi's *Gesammelte Werke*.

McShane, E. J.:"Recent Developments in the Calculus of Variations," *Amer. Math. Soc. Semicentennial Publications*, Ⅱ, 1938,69~97.

Porter, Thomas Isaac:"A History of the Classical Isoperimetric Problem," *University of Chicago Contributions to the Calculus of Variations*, Ⅱ, 475~517, University of Chicago Press, 1933.

Prange, Georg:"Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik," *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1904~1935, Ⅳ, 2, 509~804.

Todhunter, Isaac: *A History of the Calculus of Variations in the Nineteenth Century*, Chelsea (reprint), 1962.

Weierstrass, Karl: *Werke*, Akademische Verlagsgesellschaft, 1927, Vol. 7.

第31章

Galois 理论

> 最有价值的科学书籍是作者在书中明白地指出了他所不明白的东西的那些书,遗憾地,这还很少被人们所认识;作者由于掩盖难点,大多害了他的读者.
>
> Evariste Galois

1. 引 言

求解多项式方程,这个代数的基本问题,继续占据着19世纪前期代数舞台的中心.这期间,哪些方程可用代数运算求解,这个重要问题由Galois明确而透彻地回答了.然而,他不仅创立了代数理论的头等意义的表达清楚的主体,而且引进了新概念,这些新概念被发展成其他有广泛应用的代数理论.特别地,在他和Abel的著作中出现了群和域的概念.

2. 二项方程

我们已经讨论过(第25章第2节)Euler,Vandermonde,Lagrange和Ruffini为了代数地求解四次以上的方程和二项方程$x^n-1=0$所作的无效的努力.一个重要的成就是由Gauss完成的.在他的《算术研究》①的最后一节,Gauss考察了方程

$$x^p-1=0, \tag{1}$$

---

① 1801, *Werke*, I.

这里 p 是素数①. 这个方程通常称为分圆方程或对圆进行分割的方程. 上面的术语参考了下述事实:由 de Moivre 定理,这个方程的根是

$$(2) \qquad x_k = \cos k\frac{2\pi\theta}{p} + i\sin k\frac{2\pi\theta}{p},\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ p,$$

而这些复数 x_k 当几何地作出图像时就是单位圆上的正 p 边形的顶点.

Gauss 证明了,这个方程的根可用一个方程序列

$$(3) \qquad Z_1 = 0,\ Z_2 = 0,\ \cdots$$

的根有理地表示出来,这些方程的系数是这序列中前面的方程的根的有理函数. (3)中方程的次数正好是 $p-1$ 的素因子. 对每个因子,即使是重复的因子,有一个 Z_i. 而每个 $Z_i = 0$ 都能用根式解出,于是方程(1)也能同样解出.

这个结果对于代数地求解一般的 n 次方程的问题当然具有重要的意义,它表明了某些高次方程能用根式解出,例如,设 5 是 $p-1$ 的一个因子,则有一个五次方程,或设 7 是 $p-1$ 的一个因子,则有一个七次方程能用根式解出.

这结果对作正 p 边形的几何问题也具有重要性. 如 $p-1$ 没有异于 2 的因子,则正 p 边形可用直尺和圆规作出,因为(3)中每个方程的次数都是 2,而它的每个根都可通过它的系数作出. 这样我们就能够作出边数为素数 p 而 $p-1$ 是 2 的方幂的全部正多边形. 这样的素数是 3, 5, 17, 257, 65537, …. 换个说法,如 p 是 $2^{2^h}+1$ 形式的素数②,正 p 边形就能作出. Gauss 评论说(Art. 365),虽然 3, 5, 15 边的正多边形以及从它们直接得出的那些——如 2^n, $2^n \cdot 3$, $2^n \cdot 5$, $2^n \cdot 15$(这里 n 是正整数)的正多

① p 素数的情况满足 $x^n-1=0$ 的需要,因为若 $n=pq$,令 $y=x^q$,而 $y^p-1=0$ 是可解的,因此 $x^q=$ 常数. 当 q 是素数时可解,如 q 不是素数,可按分解 n 的相同方式来分解 q.

② 在形为 $2^\mu+1$ 的素数中,μ 一定是 2^h 的形状,但 $2^{2^h}+1$ 不一定是素数.

边形的几何作图在 Euclid 时期就已知道了,但在 2000 年的期间里,没有发现新的可作图的正多边形,而且几何学家们曾一致声称没有别的正多边形能够作得出来.

Gauss 料想到他的结果可能导致寻找新的可作图的边数为素数的正多边形的种种努力.于是他警告说:"每当 $p-1$ 包含 2 以外的素数因子,我们就得到高次方程,就是说,如 3 是 $p-1$ 的一次或多次因子,就得到一个或多个三次方程.如 $p-1$ 能被 5 除尽,就得到一个五次方程,等等.而且我们能完全严密地证明这种高次方程不能避免或不能使得它们依赖于低次方程;虽然这项工作的限制不允许我们在这里给出证明,但我们还是认为注意这个事实是必要的,这是为了使人们除了由我们的理论所给出的那些多边形以外不要去寻找别的(边数为素数的)多边形的作图,例如 7, 11, 13, 19 边的多边形,白白耗费他的时间."

然后,Gauss 考虑任何 n 边多边形(Art. 366)并且断言,一个正 n 边形是可作图的,当且仅当 $n=2^l p_1 p_2 \cdots p_n$,这里 p_1, p_2, …, p_n 是形为 $2^{2^h}+1$ 的不同素数,而 l 是任意正整数或 0.这个条件的充分性确实容易从 Gauss 关于边数为素数的多边形的工作得出,但是必要性却一点也不显然,并且没有被 Gauss 证明①.

从 1796 年起,Gauss 就对正多边形的作图发生兴趣,那时他就构思 17 边形可以作图的第一个证明.关于这个发现有一段值得重述的故事.这个作图问题早已是著名的问题了.一天,Gauss 带着这个多边形可作图的证明到格丁根大学他的教授 A. G. Kästner 那儿去,Kästner 不相信,并企图赶走 Gauss,很像今天的大学教师们赶走三等分角的人一样.Kästner 不愿花时间检查 Gauss 的证明,并想从中寻找假定上的错误,他告诉 Gauss,这个

① 看 James Pierpont, "On an Undemonstrated Theorem of the *Disquisitiones Arithmeticae*", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 2,1895~1896,77~83.这篇文章给了证明.Gauss 条件是必要的这个事实首先是由 Pierre L. Wantzel (1814—1848)所证明,见 *Jour. de Math.*, 2,1837,366~372.

作图法是不重要的，因为实际的作图法是熟知的. 当然 Kästner 知道实际的或近似的作图法的存在是与理论问题不相干的. Gauss 为了使 Kästner 对他的作图法感兴趣，就指出他曾经解出了一个 17 次的代数方程. Kästner 回答说这是不可能的. 但 Gauss 答辩说，他把这个问题化简成解一个低次的方程. Kästner 嘲笑说："噢，好，我已经这样做了."因 Kästner 也炫耀过他自己的诗集，Gauss 后来就用赞美 Kästner 是数学家中最好的诗人和诗人中最好的数学家的话作为回敬.

3. Abel 关于用根式解方程的工作

Abel 读了 Lagrange 和 Gauss 关于方程论的著作，当他还是中学学生时，就按 Gauss 对二项方程的处理方法着手探讨高次方程可解性的问题. 起初，Abel 以为他已经解决了用根式解一般的五次方程的问题，但是很快就认识到他的错误，后来，他就试图证明这样一个解答是不可能的(1824—1826). 首先他成功地证明了下述定理：可用根式求解的方程的根能以这样的形式给出，出现在根的表达式中的每个根式都可表成方程的根和某些单位根的有理函数. 然后 Abel 用这个定理证明了①高于四次的一般方程用根式求解的不可能性.

由于不知道 Ruffini 的工作(第 25 章第 2 节)，Abel 的证明是迂回而又不必要地复杂. 他的文章在函数分类中还有一个错误，幸亏这个错误对论证不是本质性的. 后来他发表了两个更精心的证明. 一个简单、直接而又严密的证明是 1879 年由 Kronecker 根据 Abel 的思想作出的②.

---

① *Jour. für Math.*, 1, 1826, 65～84 = *Œuvres*, 1, 66～94.

② *Monatsber. Berliner Akad.*, 1879, 205～229 = *Werke*, 4, 73～96. Kronecker 的证明由 James Pierpoint 作了说明，见"On the Ruffini-Abelian Theorem", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 2, 1895～1896, 200～221.

这样,高于四次的一般方程的求解问题由 Abel 解决了.他还考虑了一些特殊的方程.他做了[①]分割双纽线的问题(解 $x^n-1=0$ 等价于分一个圆成 n 个等弧的问题),并且得出一类代数方程,现在叫 Abel 方程,它们是能用根式求解的.分圆方程(1)是 Abel 方程的一例.更一般地说,如果一个方程的全部根都是其中一个根的有理函数,就是说,若全部根为 x_1, $\theta_1(x_1)$, $\theta_2(x_1)$, $\cdots$, $\theta_{n-1}(x_1)$,其中 θ_i 是有理函数,这样的方程就称为 Abel 方程.还有条件:对 α, β 的从 1 到 $n-1$ 的全部值,$\theta_\alpha(\theta_\beta(x_1))=\theta_\beta(\theta_\alpha(x_1))$.

在最后的这一工作中,他引进了两个概念(虽然没有术语),即域和在给定域中不可约的多项式.同后来 Galois 一样,他所说的数域是指这样的数集,这个数集中的任何两个数的和、差、积、商(除去用零作除数外)仍在集合中.例如有理数、实数和复数都形成域.一个多项式称为在一个域中(通常它的系数属于此域)是可约的,如果它能表成低次的,系数在此域中的两个多项式的乘积.如果这个多项式不能这样表出,就称为不可约的.

Abel 然后着手探讨刻画能用根式求解的全部方程的特性的问题,并在 1829 年他临死以前,把一些结果通知了 Crelle 和 Legendre.

4. Galois 的可解性理论

在 Abel 的工作之后,情况是这样:虽然高于四次的一般方程不能用根式求解,但仍有很多特殊的方程,如二项方程 $x^p=a$ (p 为素数)和 Abel 方程都可用根式求解.现在的任务是确定哪些方程可用根式求解.刚刚由 Abel 开始的这个任务由 Evariste Galois (1811—1832)担当起来了.由于出身富裕并有受过教育的双亲,他在 15 岁时就进入巴黎的一所有名的公立中学,并开始研究数学.

① *Jour. für Math.*, 4, 1829, 131 ~ 156 = *Œuvres*, 1, 478~507.

这个学科成了他的爱好，他仔细研究了 Lagrange，Gauss，Cauchy 和 Abel 的著作，别的学科他都忽视了. Galois 曾想进多科工艺学校，但可能由于在考场上口头回答问题失误，或考试的教授不了解他，两次尝试都遭落选，因此他进了预备学校（这个名字是对正规学校讲的，那时是一所低等的学校）. 1830 年革命时，革命把 Charles X 从王位上赶走，而任命了 Louis Philippe. Galois 公开批评他那所学校的学监对革命不支持而被开除. 他两次因为政治罪而被捕，在狱中度过了他的半生和最后一年的大部分时间，并在 1832 年 5 月 31 日的一次决斗中被杀了.

在学校的第一年，Galois 发表了四篇文章. 1829 年，他把解方程的两篇文章呈送科学院. 这些文章被托给了 Cauchy，他把它们遗失了. 1830 年 1 月，他交给科学院另外一篇仔细写成的关于他的研究的文章. 该文送到 Fourier 那里，之后不久 Fourier 就死了，因而这篇文章也被遗失了. 在 Poisson 提议下，Galois 就他的研究写了(1831)一篇新文章《关于用根式解方程的可解性条件》①. 这篇文章是他在方程的解的理论方面仅有的一篇完成了的文章，被 Poisson 作为难以理解而退回，并劝告他应写一份较详尽的阐述. 在 Galois 死的前夜，他为他的研究起草了一份匆忙写成的说明，托给了他的朋友 August Cheralier. 这个说明被保存下来了.

1846 年，Liouville 在《数学杂志》②上编辑出版了 Galois 的部分文章，其中包括 1831 年文章的一个修订. 后来 Serret 的 1866 年的《高等代数教程》(*Cours d'algèbre supérieure*)第三版对 Galois 的思想作了一个叙述. 对 Galois 理论第一个全面而清楚的介绍是 Camille Jordan 于 1870 年在他的书《置换和代数方程专论》(*Traité des substitutions et des équations algébriques*)中给出的.

Galois 是通过改进 Lagrange 的思想去探讨可用根式求解的

---

① *Œuvres*, 1897, 33～50.

② *Jour. de Math.*, 11, 1846, 381～444.

方程的特性问题的，虽然他也从 Legendre，Gauss，Abel 的著作中得到一些启发. 他提出考虑一般方程，这当然就是

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{4}$$

同 Lagrange 的著作中一样，其中的系数必须是独立的或完全任意的. 他还提出考虑特殊的方程，如

$$x^4 + px^2 + q = 0, \tag{5}$$

其中仅有两个系数是独立的. Galois 的主要思想是要绕开构造这给定多项式的 Lagrange 预解式(第 25 章第 2 节)，这种构造需要很高的技巧并且没有明确的成套方法.

和 Lagrange 一样，Galois 用了根的置换或排列的概念. 例如，设 x_1，x_2，x_3，x_4 是一个四次方程的四个根，则在包含这些 x_i 的任何表达式中交换 x_1 和 x_2 就是一个置换，这个特别的置换用

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

来表示，另一个置换由

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

表示. 实行第一个置换后进行第二个置换，等价于实行第三个置换

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

因为，例如由第一个置换，x_1 换成 x_2；由第二个置换，x_2 又换成 x_4；而由第三个置换，x_1 直接就变到 x_4. 我们就说头两个置换按上述顺序作成的**乘积**就是第三个置换. 总共有 4! 个可能的置换. 因为置换集合中任何两个置换的乘积仍是原集合的成员，所以置换的集合就说是形成一个群. 这个概念，当然还不是抽象群的正式定义，它是属于 Galois 的.

为了掌握 Galois 的思想，让我们考虑方程[①]

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

这里 p 和 q 是独立的. 令 R 是由 p 和 q 的有理表达式所形成的域，这些表达式的系数在有理数域中，一个典型的表达式是 $(3p^2 - 4q)/(q^2 - 7p)$. 按 Galois 的说法，R 是由添加字母或未知数 p, q 到有理数中而得到的域. 这个域 R 是给定方程的系数域或有理整环，这个方程就说是属于这个域 R. 和 Abel 一样，Galois 没有用域或有理整环这术语，但他确实用了这概念.

我们恰好知道这四次方程的根是

$$x_1 = \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}.$$

于是，系数在 R 中的两个关系

$$x_1 + x_2 = 0, \; x_3 + x_4 = 0$$

对这些根成立. 由于我们的方程是四次的，因而有根的 24 个可能置换. 下面八个置换：

$$E = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \; E_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \; E_5 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \; E_7 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

---

① 由于 Galois 自己对他的思想介绍是不清楚的，并且他引进了那么多的新概念，所以我们将借助于 Verriest 提出的一个例子(看本章末尾的书目)来弄清楚 Galois 理论.

使在 R 中这两个关系保持成立①. 可以证明,这八个置换是 24 个置换中使根之间在 R 中的全部关系都不变的仅有的置换. 这八个置换便是这方程在 R 中的群. 他们是整个群的一个子群. 就是说,一个方程相对于域 R 的群是根的置换的群或子群,这些置换使给定方程(不管一般或特殊的)的根之间带有 R 中的系数的全部关系不变. 我们能说,使 R 中全部关系不变的置换的数目是我们对根的无知程度的一个尺度,因为在这八个置换之下我们不能把它们区分开来.

现在考虑 $x_1^2 - x_3^2$,它等于 $\sqrt{p^2 - 4q}$. 添加这个根式到 R 中,形成一个域 R',即我们形成包含 R 和 $\sqrt{p^2 - 4q}$ 的最小的域. 于是

$$x_1^2 - x_3^2 = \sqrt{p^2 - 4q} \tag{6}$$

是 R' 中的一个关系. 由于 $x_1 + x_2 = 0$ 和 $x_3 + x_4 = 0$,我们还有

$$x_1^2 = x_2^2 \quad 和 \quad x_3^2 = x_4^2.$$

于是由最后这两件事实,我们能说,上面八个置换的前四个使 R' 中的关系(6)保持成立,但后四个则不行. 于是这四个置换,如果它们使根之间的每个在 R' 中正确的关系保持不变,就是方程在 R' 中的群. 这四个置换是八个置换的一个子群.

现设我们添加量 $\sqrt{(-p-D)/2}$ 到 R' 中,这里 $D = \sqrt{p^2 - 4q}$,并形成域 R'',则

$$x_3 - x_4 = 2\sqrt{\frac{-p-D}{2}}$$

是 R'' 中的一个关系. 这个关系仅在头两个置换 E 和 E_1 下保持不变,而在八个置换的其余置换下不这样. 倘若根之间的每个在 R''

① 对一般的 n 次方程,即,以 n 个独立的量作为系数的方程,根的一个函数在根的一个置换下是不变的,或不被这个置换改变,当且仅当它保持同原来的函数恒等. 如果系数全是数值,则一个函数是不变的,如果它保持数值上相同. 例如对 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$,根是 $x_1 = -1$, $x_2 = \mathrm{i}$ 和 $x_3 = -\mathrm{i}$. 考虑 x_2^2. 用 x_3 代替 x_2,给出 x_3^2. 这同 x_2^2 有相同的数值. 于是 x_2^2 在这个置换下不变. 如果系数包含一些数值和一些独立的量,则根的一个函数在根的置换下保持不变,如果函数对独立的量的所有的值(这些量的定义域中的)和对根的所能取到的数值在数值上相同的话.

中的关系在这两个置换下都保持不变，则方程在 R''中的群由这两个置换组成. 这两个置换是那四个置换的一个子群.

设我们添加量$\sqrt{(-p+D)/2}$ 到 R''中，又得到 R'''. 在 R'''中我们有

$$x_1 - x_2 = 2\sqrt{\frac{-p+D}{2}}.$$

现在恰有 E 是使 R'''中全部关系保持正确的仅有的置换；因而这是方程在 R'''中的群.

从上面的讨论可以看到，方程的群是它的可解性的关键，因为这个群表示出根的不可区分的程度. 它告诉我们，关于根有哪些东西我们还不知道.

存在许多群，或严格地说是一个置换群和依次包含如上的一些子群. 现在一个群(或子群)的阶就是其中元素的个数. 于是我们就有了阶为 24, 8, 4, 2, 1 的群. 子群的阶总能整除母群的阶(第 6 节). 一个子群的**指数**是它所在的群的阶被子群的阶除所得的商. 例如那个 8 阶子群的指数就是 3.

上面的概要仅仅表明 Galois 所论述的思想. 他的工作如下进行：给了一个一般的或特殊的方程，他首先说明如何能找到这个方程在系数域中的群 G，即根的置换的群，而这些置换使根之间的系数在该域中的全部关系保持不变. 当然我们必须在不知道根的情况下找到这个方程的群. 在上面的例子中，四次方程的群是 8 阶的，而系数域是 R. 在找到了方程的群 G 后，下一步是找 G 的最大的子群 H. 在我们的例子中，这是一个四阶子群. 假如有两个或多个最大子群，可任取一个. H 的确定是纯粹群论的事，是能够做到的. 找到 H 后，可以用一套仅含有理运算的手续来找到根的一个函数 ϕ，它的系数属于 R，并且在 H 的置换下，它不改变值，但在 G 的所有别的置换 T 下，就要改变值. 在我们上面的例子中，这个函数是 $x_1^2 - x_3^2$. 实际上可得到无穷多个这样的函数. 当然我们必须

在不知道根的情况下找出这样一个函数. 存在一种方法构造 R 中的一个方程,使它的一个根就是这个函数 ϕ. 这个方程的次数是 H 在 G 中的指数. 这个方程称为一个部分预解式①. 在我们的例子中,这方程是 $t^2-(p^2-4q)=0$, 它的次数是 8/4 或 2.

接着必须能从这个部分预解式解出根 ϕ. 在我们的例子中,ϕ 是$\sqrt{p^2-4q}$. 添加$\sqrt{p^2-4q}$ 到R 中,得到一个新的域 R'. 于是可以证明,原来方程关于域 R'的群是 H.

我们现在重复这个步骤. 在我们的例子中我们有群 H,是四阶的,以及域 R'. 下一步找 H 的最大子群. 在我们的例子中,它是 2 阶子群,称这个子群为 K. 现在能得到原方程的根的一个函数,它的系数属于 R',它的值在 K 的每个置换下不变,而在 H 的其他置换下要改变. 在我们上面的例子中这方程是 $t^2-2(-p-\sqrt{p^2-4q})=0$. 这方程的次数是 K 关于 H 的指数,即 4/2 或 2. 这方程是第二个部分预解式.

接着必须解出这个预解式方程,得到一个根,即函数 ϕ_1;把这个值添加到 R'中,从而形成域 R''. 对于 R'',方程的群是 K.

再重复这个过程,找到 K 的最大子群 L. 在我们的例子中这恰是恒等置换 E. 我们找根的一个函数(系数在 R''中),它在 E 下保持值不变,而在 K 的别的置换下改变它的值. 在我们的例子中,这样一个函数是 x_1-x_2. 为了在不知道根的情况下得到这个 ϕ_2,我们必须构造 R''中的一个方程,以函数 ϕ_2 为一个根. 在我们的例子中,这方程是 $t^2-2(-p+\sqrt{p^2-4q})=0$. 这方程的次数是 L 关于 K 的指数,在我们的例子中是 2/1 或 2. 这方程是第三个部分预解式. 我们必须解这个方程,以找到值 ϕ_2.

在添加这个根到 R''中以后,得到 R'''. 假设我们已到了最后一步,这里,原方程在 R'''中的群是恒等置换 E.

---

① 预解式这词的这个用法与 Lagrange 的用法不同.

接着 Galois 证明了，当一个方程关于给定域的群恰是 E 时，那么方程的各个根都是属于那个域. 因此，根在域 R''' 中. 又因 R''' 是由已知域 R 用逐次添加已知量得到的，我们就知道了根所在的这个域. 其次有一个用 R''' 中有理运算来直接找根的步骤.

Galois 给出了一个方法来找给定方程的群，逐次的预解式以及方程关于逐次扩大了的系数域的群，即原来群的逐次的子群，而扩大的系数域是由添加这些逐次的预解式的根到原来的系数域而得到的. 这些步骤包含了可观的理论，但正如 Galois 指出的，他的工作不打算成为解方程的一个实际方法.

接着 Galois 把上面的理论运用到以有理运算和根式解多项式方程的问题. 这里他引进了群论的另一个概念. 设 H 是 G 的一个子群，如果用 G 的任一元素 g 乘 H 的所有置换，则得到一个新的置换集合，用 gH 表示，这符号表示先实行置换 g，然后再应用 H 的任一元素. 如果对 G 中的每个 g 有 $gH = Hg$，则称 H 为 G 的一个正规子群(自共轭或不变)子群.

我们回忆 Galois 的解方程的方法需要找寻和求解逐次的预解式. Galois 证明了当作为约化方程的群(比如说由 G 约化到 H)的预解式是一个素数次 p 的二项方程 $x^p = A$ 时，则 H 是 G 的一个正规子群(且有指数 p)；反之，如 H 是 G 的一个正规子群，且具有素指数 p，则相应的预解式是 p 次二项方程，或能化简到这样的方程. 如所有的逐次预解式都是二项方程，则由 Gauss 关于二项方程的结果，我们能用根式解原来的方程. 因为我们知道，我们能从最初的域通过逐次添加根式的方法过渡到根所在的最后的域. 反之，如果一个方程能用根式求解，则预解式方程组必定存在，而且它们都是二项方程.

如此，可用根式求解的理论与前面所给的求解理论在一般轮廓上是相同的；不同的只是在子群序列

$$G, H, K, L, \cdots, E$$

中,必须每一个都是前一个群的极大正规子群(不是任何较大的正规子群的子群). 这样的序列叫做合成序列. H 对 G 的指数,K 对 H 的指数,如此等等,叫做合成序列的指数. 若这些指数都是素数,则这方程就能用根式求解,而若这些指数不是素数,则这方程就不能用根式求解. 当我们找极大正规子群序列时,可能有选择;即在一个给定的群或子群中最高阶的极大正规子群可能多于一个,我仍可选任何一个,虽然由此而得的子群可能不同,但将产生完全相同的指数集合,虽然这些指数出现的次序可以不同(参看下面的 Jordan Hölder 定理). 包含一个素数指数的合成序列的群 G 称为可解的.

Galois 理论是如何证明当 $n>4$ 时一般的 n 次方程不能用根式求解,而 $n\leqslant 4$ 时又都能求解呢? 对一般的 n 次方程,这个群由 n 个根的全部 $n!$ 个置换组成. 这个群称为 n 级对称群. 它的阶当然是 $n!$. 对每个对称群,不难找到合成序列. 这里极大正规子群(称为交错子群)具有阶 $n!/2$. 这个交错群仅有的正规子群是恒等元素. 因此指数是 2 和 $n!/2$. 但对 $n>4$, 数 $n!/2$ 决不是素数. 因此次数大于 4 的一般方程不能用根式求解. 另一方面,二次方程可以借助单独一个预解式方程而解出. 合成序列的指数恰由单个数 2 组成. 一般的三次方程,为了求解,需要两个预解式方程,其形式为 $y^2=A$ 和 $z^3=B$. 这些当然是二项预解式,合成序列的指数是 2 和 3. 一般的四次方程能够求解,因为它有四个二项预解式方程,一个三次的、三个二次的,因而合成序列的指数是 2, 3, 2, 2.

对于数字系数的方程,与带有独立的文字系数的方程不同,Galois 给出了一个与上述相似的理论. 然而,判定可用根式求解的手续更复杂,虽然基本原理是相同的.

Galois 还证明了一些特殊的定理. 如果有一个素数次的不可约方程,它的系数在一个域 R 中,它的根全部是其中两个根的带有 R 中系数的有理函数,则此方程可用根式求解. 他还证明了逆

定理：每个可用根式求解的素数次的不可约方程，具有性质：每个根都是其中两个根的带有 R 中系数的有理函数. 这样的方程现在叫做 Galois 方程. Galois 方程的最简单的例子是 $x^p - A = 0$. 这个概念是 Abel 方程的推广.

附带说一下，Hermite① 和 Kronecker 在给 Hermite 的一封信② 及后来的一篇文章③ 中，用椭圆模函数解出了一般的五次方程，这类似于用三角函数来解不可约的三次方程.

5. 几何作图问题

18 世纪的数学家们怀疑一些著名的作图问题能被解决. Galois 的工作提供了可作图的一个判别法，这个判别法解决了一些著名的问题.

用圆规、直尺作图的每一步都需要找一个交点，或者是属于两条直线的，或者是一直线和一圆的，或者是两个圆的. 由于引进了坐标几何，人们认识到，用代数术语说，这样的步骤意味着同时求解两个线性方程，或一个线性和一个二次方程，或两个二次方程. 在任何一种情况下，可能遇到的最坏情况，在代数上是一个平方根. 因此，由相继的步骤或作图所找到的量，最坏的结果是施加于给定量上的一串**平方根**. 因此，可以作图的量必须位于如下一些域中，这些域是由包含给定量的域仅仅添加给定量的平方根或后来作出的量的平方根而得到. 我们称这样的扩张域为二次扩张域.

在进行相继的作图时，有几个限制必须注意. 例如，某些步骤允许用任意的直线或圆. 譬如在二等分线段时，我们能用大于线段一半的圆. 我们必须在给定元素的域中在可作图的扩张域中选择

---

① *Comp. Rend.*, 46, 1858, 508 ~ 515 = *Œuvres*, 2,5~12.

② *Comp. Rend.*, 46,1858, 1 150 ~ 1 152 = *Werke*, 4,43~48.

③ *Jour. für Math.*, 59,1861, 306 ~ 310 = *Werke*, 4,53~62.

这个圆. 这是能做到的.

还有,扩张域可以包含复元素,因为,譬如说,负坐标的平方根可能出现. 这些复元素是可作图的,因为所出现的复量的实部和虚部的每一个都是一个实方程的根;而这些根是可作图的.

给了一个作图问题,首先要建立一个代数方程,它的解是所要求的量. 这个量必须属于给定量的域的某个二次扩张域. 在正 17 边形的情况里,这方程是 $x^{17}-1=0$, 而给定的量可以取成单位圆的半径. 相关的不可约方程是 $x^{16}+x^{15}+\cdots+1=0$. 用 Galois 理论的术语说,一个方程能用平方根求解的必要和充分条件是方程的 Galois 群的阶是 2 的方幂. 方程 $x^{16}+x^{15}+\cdots+1=0$ 正是这种情况,合成序列是 2, 2, 2, 2. 这意思是说,预解式是次数为 2 的二项方程,从而仅有平方根被添加到原来的由单位圆的给定半径所确定的有理域中. 由 Galois 的这个判别法我们能证明 Gauss 的结论,即素数 p 边的正多边形能用直尺和圆规作图当且仅当素数 p 具有形式 $2^{2^n}+1$, 即当 $p=3, 5, 17, 257, \cdots$ 时,而对 $p=7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, \cdots$ 则不行. Galois 理论还能用来证明三等分任意角或倍立方体的问题都是不可解的.

但 Galois 的判别法完全不适用于化圆为方的问题. 这里,给定量是圆的半径,要解的方程是 $x^2=\pi r^2$. 虽然这个方程本身恰为二次,但下述事实不对,即它的解属于由给定量确定的域的二次扩张域,这是因为 π 不是一个代数无理数(第 41 章第 2 节). 因此, Galois 的工作不仅完全回答了哪些方程可用代数运算求解的问题,而且给了一个一般的判别法来判定几何图形利用直尺和圆规的可作图性.

就著名的作图问题而言,应该注意,在应用 Galois 理论以前, Gauss 和 Wantzel 已经确定了哪些正多边形可以作图(第 2 节),而且 Wantzel 在 1837 年的文章①中证明了一般的角不能三等分,

---

① *Jour. de Math.*, 2,1837,366～372.

给定的立方体也不能加倍. 他证明了每个可作图的量必须满足一个 2^n 次的方程,而这对刚才说到的两个问题是不成立的.

6. 置换群理论

Lagrange 在他关于方程可解性的著作中(第 25 章第 2 节)引进了 n 个根的一些函数作为他的分析的关键,这些函数在根的某些排列下取相同的值. 因此他就在这些文章中着手研究函数,目的是确定它们在 n 个变数(根)的 $n!$ 种排列下引起的 $n!$ 个可能值中能取到的不同的值. Ruffini, Abel, Galois 的后继工作使这个课题增加了重要性. n 个字母的一个有理函数在根的排列或置换的某个集合下取同样的值,这个事实表明,正如我们已经看到的,这个集合是整个对称群的子群. Ruffini 在他的《方程的一般理论》(*Teoria generale delle equazioni*, 1799)中对这件事作了明显的考察. 因此,Lagrange 所开创的是研究置换群的子群的一种方法. 当然,更直接的方法是研究置换群本身,并确定它的子群. 研究置换群结构或组成的两种方法都成了活跃的课题,即使不顾及它同方程可解性的联系,它本身还是被追求作为一种兴趣. 置换群或排列群的理论是最终产生抽象群论的第一个重要的研究. 这里我们将指出在 19 世纪中获得的有关置换群的一些具体定理.

Lagrange 自己肯定了一个重要结果,用近代语言叙述就是,子群的阶整除群的阶. 这个定理的证明是由 Pietro Abbati(1768—1842)在 1802 年 9 月 30 日的一封信中通知 Ruffini 的,此信已发表①.

Ruffini 在他 1799 年的书中引进了传递性和本原性的概念,虽然有一些模糊. 如果一个排列群的每个字母在群的各排列下被每一个别的字母所代替,则称这群为传递群. 如果 G 是一个传递

① *Memorie della Società Italiana delle Scienze*, 10, 1803, 385~409.

群，设 n 个符号或字母可分成 r 个不同的子集 σ_i，$i=1,2,\cdots,r$，每个子集包含 s_i 个符号，使得 G 的任一个排列或是将 σ_i 的符号在自己中间排列，或是用 σ_j 来代替 σ_i，此事对每个 $i=1,2,\cdots,r$ 都成立，则称 G 为非本原的. 如果 n 个符号不能这样分拆，则这传递群称为一个本原群. Ruffini 还证明了，在一个 n 阶的群中，对所有 k，不存在 k 阶子群.

受 Lagrange 和 Ruffini 的工作的鼓励，Cauchy 写了一篇关于置换群的重要文章①. 以方程论为背景，他证明了，不存在 n 个字母(n 次)的群，使得它对 n 个字母的整个对称群的指数小于不超过 n 的最大素数，除非这个指数是 2 或 1. Cauchy 用函数值的语言叙述这个定理：n 个字母的非对称函数的不同的值的数目不能小于比 n 小的最大素数，除非它是 2.

Galois 在引进置换群的概念和定理方面迈出了最大的一步. 他的最重要的概念是正规(不变或自共轭)子群的概念. 属于Galois的另一个群论概念是两个群之间的同构的概念. 这是两个群的元素之间的一一对应，使得如果在第一个群中有 $a\cdot b=c$，则对第二个群的对应元素，有 $a'\cdot b'=c'$. 他还引进了单群和合成群的概念. 一个没有不变子群的群是单群；否则是合成群. 关于这些概念，Galois 表述了一个猜想②，即阶是合成数的最小单群是 60 阶的群.

遗憾的是在 Liouville 1846 年发表 Galois 的部分著作以前，人们不知道 Galois 的著作，甚至那些发表的材料也不容易读懂. 另一方面，Lagrange 和 Ruffini 关于置换群的著作是人们熟知的，这些著作是用 n 个文字的函数所能取的函数值的语言表达的. 因此，方程求解的课题失去了重要性，因而当 Cauchy 转到方程论时，他集中全力于置换群. 在 1844 年到 1846 年间，他写了一大批

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 10, 1815, 1～28 = *Œuvres*, (2), 1, 64～90.

② *Œuvres*, 1897 ed., 26.

文章. 在其中一篇主要的文章①中,他把早先的很多结果系统化,并证明了许多关于传递的、本原的和非本原的群,关于非传递群的特殊定理. 特别地,他证明了 Galois 的断言,即每个有限(置换)群,如果它的阶可被一个素数 p 除尽,就必定至少包含一个 p 阶子群. 这篇主要文章之后又发表了大量的其他文章,刊载在 1844—1846 年②的巴黎科学院的《报告》上. 这工作的大部分是涉及 n 个字母的函数在字母交换下所能取的形式值(即非数字值)以及找出函数使其取给定数目的值.

在 Liouville 发表了 Galois 的一些著作后,Serret 在巴黎大学理学院作了演讲,并在他的《教程》的第三版中给了 Galois 的理论一个较好的教科书式的叙述. 此后,澄清 Galois 关于方程可解性的思想和建立置换群理论就齐头并进了. Serret 在他的教科书中对 Cauchy 1815 年的结果给了一个改进的形式. 如果 n 个字母的一个函数有少于 p 个值,其中 p 是小于 n 的最大素数,则此函数不能有两个以上的值.

Serret 在 1866 年的教科书中强调的问题之一是,找出由 n 个字母所能形成的全部的群. 这个问题早已吸引了 Ruffini 的注意,他,Cauchy 和 Serret 本人在 1850 年③的一篇文章中给出了许多部分性的结果,就像 Thomas Penyngton Kirkman(1806—1895)所做的一样. 尽管有这许多努力和成百个有局限性的结果,这问题还是未能解决.

在 Galois 以后,Camille Jordan(1838—1922)是使 Galois 理论显著增色的第一个人. 1869 年④他证明了一个基本结果. 设 G_1 是 G_0 的极大自共轭(正规)子群,G_2 是 G_1 的极大自共轭子群,如

---

① *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, 3, 1844, 151 ~ 252 = *Œuvres*, (2), 13, 171~282.

② *Œuvres*, (1), Vols. 9 与 10.

③ *Jour. de Math.*, (1), 15, 1850, 45~70.

④ *Jour. de Math.*, (2), 14, 1869, 129 ~ 146 = *Œuvres*, 1, 241~248.

此等等,直到这序列终止于恒等元素. 这个子群序列称为 G_0 的合成序列. 若 G_{i+1} 是 G_i 中阶为 r 的任一自共轭子群,G_1 的阶为 p,则 G_i 可分解成 $\lambda = p/r$ 个类. 两个元素,若其中一个是另一元素和 G_{i+1} 的一个元素的积,则属于同一类. 若 a 是一个类的任一元素,而 b 是另一类的任一元素,则其积将在同一个第三类中. 这些类形成一个群,以 G_{i+1} 为它的恒等元素,这个群就称为 G_i 在 G_{i+1} 下的商群或因子群,用 G_i/G_{i+1} 表示,这是 Jordan 在 1872 年引进的符号. 商群 G_0/G_1, G_1/G_2, …,称为 G_0 的合成因子群,它们的阶称为合成因子或合成指数. G_0 中可能有多于一个合成序列. Jordan 证明了,除了出现的次序以外,合成因子的集合是不变的,莱比锡大学的教授(Ludwig)Otto Hölder(1859—1937)证明了①,商群本身是与合成序列无关的;就是说,对任何合成序列,将有同样的商群的集合. 这两个结果合称为 Jordan-Hölder 定理.

(有限)置换群的知识及其与 Galois 关于方程理论的联系直到 1870 年才由 Jordan 组织到他的《置换和代数方程专论》(*Traité des substitutions et des équations algébriques*, 1870)这本名著中. 在这本书中,Jordan 和几乎所有他的前人一样,把置换群定义成置换的这样一种集合,即集合中任两成员的积仍属于这集合. 我们今天在群的定义中作为公设提出的其他性质(第 49 章第 2 节)是被使用了,但或是作为这种群的明显性质,或是作为附加的条件,而不是在定义中指定.《专论》提供了新结果,并对置换群明白地建立了同构和同态的概念,后者是两个群之间的多一对应,使得 $a \cdot b = c$ 蕴含 $a' \cdot b' = c'$. Jordan 添加了关于传递群和合成群的基本结果. 书中还包含了 Jordan 对 Abel 提出的问题的解答,即确定一个给定次数的能用根式求解的方程,以及识别一个给定的方程是否属于这个类. 可解方程的群都是交换群,Jordan 称它们为 Abel 群,而 Abel 群这个术语此后也就用于交换群了.

---

① *Math. Ann.*, 34,1889,26~56.

关于置换群的另一个重要的定理是在《专论》出现以后不久由一个挪威数学教授 Ludwig Sylow(1832—1918)证明的. Cauchy 曾经证明,阶可被一个素数 p 整除的每一个群,必包含一个或多个 p 阶子群. Sylow[①] 推广了 Cauchy 的定理. 如果一个群的阶可被 p^{α} 整除,但不被 $p^{\alpha+1}$ 整除,而 p 是素数,则此群包含一组且仅仅一组共轭的 p^{α} 阶子群[②]. 在同一篇文章中 Sylow 还证明了,每个 p^{α} 阶的群是可解的,即,极大不变子群序列的指数都是素数.

对置换群以及最终对更一般群的完全另外的探索是受纯物理的研究的启发的. 物理学家和矿物学家 Auguste Bravais(1811—1863)研究了运动群[③],以确定晶体的可能结构. 这个研究在数学上等价于查明行列式为+1 和−1 的三个变量的线性变换

$$x_i' = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z,\ i = 1,\ 2,\ 3 \tag{7}$$

的群,它引导 Bravais 到晶体中可能出现的 32 类对称的分子结构.

Bravais 的工作给 Jordan 以深刻的印象,他着手研究他称之为群的解析表示,以及现代称之为群的表示理论. 实际上,Serret 在他 1866 年出版的《教程》中已经考虑了用形如

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{8}$$

的变换来表示置换. 但各类群的更为有用的表示是由 Jordan 引进的. 他探索用形式为

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{9}$$

的线性变换来表示置换. 由于置换群是有限的,所以必须对变换加上一些限制,以使这个变换群有限. Galois 曾经考虑过这样的变换[④],且以系数和变数在一个素数阶的有限域上取值来限制它们.

---

① *Math. Ann.*, 5,1872,584~594.

② 设 H 是 G 的子群而 g 是 G 的任一元素,则 $g^{-1}Hg$ 是一个共轭于 H 的子群. H 和它的所有的共轭称作 G 的子群的共轭系或子群的完全共轭集.

③ *Jour. de Math.*, 14,1849,141~180.

④ *Œuvres*, 1897 ed., 21~23,27~29.

Jordan 在 1878 年[①]陈述了有限周期 p 的线性齐次置换(9)可以线性地变换到标准型

$$y_i' = \varepsilon_i y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

这里 ε_i 是 p 次单位根. 这定理很多人证明过[②]. 这件事成为一个大量研究的开端,即对给定的阶确定二元型和三元型(两个变数和三个变数)的所有可能的线性置换的群. 还有,对给定的线性置换群确定子群以及确定在群或子群的全部成员下保持不变的代数式,这些问题也引起了很多研究.

注意到 Bravais 的文章后,Jordan 立即进行了关于**无限群**的第一个重要的研究. 在他的文章《关于运动群的研究报告》中[③],Jordan 指出,确定全部的运动群(他仅考虑了平移和转动)等价于确定全部可能的分子系统,使得任一个群的每一个运动将对应的分子系统变换到它自己. 由此他研究了各种类型的群,并将它们分类. 这个结果不如下列事实的意义显著,即他的文章开创了在群的标题下研究几何变换,而且几何学家很快就挑选了这条思想路线(第 38 章第 5 节).

19 世纪中叶的另一个发展既值得注意又有启发性. 很受 Cauchy 工作影响的 Arthur Cayley 认识到,置换群的概念可以推广. 在三篇文章中[④],Cayley 引进了**抽象群**的概念. 他把一个一般的算子符号 θ 用于一组元素 $x, y, z, \cdots$,并说如此应用的 θ 产生 $x, y, z, \cdots$ 的一个函数 $x', y', z', \cdots$,他指出,特别地,θ 可以是一个置换. 抽象群包含很多算子 $\theta, \phi, \cdots$,而 $\theta\phi$ 是两个算子的复合(乘积),复合是可结合的,但不一定是可交换的. 他的群的一般定

① *Jour. für Math.*, 84,1878,89~215, p. 112 in particular = *Œuvres*, 2,13~139, p. 36 in particular.

② 看 E. H. Moore, *Math. Ann.*, 50,1898,215.

③ *Annali di Mat.*, (2),2,1868/1869,167~215 和 322 ~ 345 = *Œuvres*, 4,231~302.

④ *Phil. Mag.*, (3),34,1849, 527 ~ 529 = *Coll. Math. Papers*, 1,423~424 和(4),7,1854,40~47 和 408 ~ 409 = *Papers*, 2,123~130 和 131~132.

义要求算子 1, α, β, …的一个集合,它们全不相同,使得其中任两个算子在任何一个次序下的积和任一个算子同它自己的积都属于该集合[1]. 他举出矩阵在乘法下以及四元数(在加法下)构成群. 很遗憾,Cayley 对抽象群概念的引进这时没有引起注意. 这部分地是由于矩阵和四元数是新的,不为人们所熟知,而能符合群的概念的很多其他数学系统或者还有待于发展,或者未被认识到可以这样归类. 过早的抽象落到了聋子的耳朵里,无论它们是属于数学家们的还是属于大学生们的.

参考书目

Abel, N. H.: *Œuvres complètes* (1881), 2 vols., Johnson Reprint Corp., 1964.

Bachmann, P.: "Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1911, 455～518. Also in Gauss's *Werke*, 10, Part 2, 1～69.

Burkhardt, H.: "Endliche discrete Gruppen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903～1915, Ⅰ, Part 1, 208～226.

Burkhardt, H: "Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini", *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, Heft 6, 1892, 119～159.

Burns, Josephine E.: "The Foundation Period in the History of Group Theory", *Amer. Math. Monthly*, 20, 1913, 141～148.

Dupuy, P.: "La Vie d'Evariste Galois", *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (2), 13, 1896, 197～266.

Galois, Evariste: "Œuvres", *Jour. de Math.*, 11, 1846, 381～444.

Galois, Evariste: *Œuvres mathématiques*, Gauthier-Villars, 1897.

Galois, Evariste: *Ecrits et mémoires mathématiques* (ed. by R. Bourgne and J.-P. Azra), Gauthier-Villars, 1962.

Gauss, C. F.: *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), *Werke*, Vol. 1, König. Ges. der Wiss., zu Göttingen, 1870, English translation by Arthur A. Clarke, S. J., Yale

---

① *Papers*, 2, 124.

University Press, 1966.

Hobson, E. W. : *Squaring the Circle and Other Monographs*, Chelsea (reprint), 1953.

Hölder, Otto: "Galois'sche Theorie mit Anwendungen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1898～1904, Ⅰ, Part 1, 480～520.

Infeld, Leopold: *Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois*, McGraw-Hill, 1948.

Jordan, Camille: *Œuvres*, 4 vols., Gauthier-Villars, 1961～1964.

Jordan, Camille: *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870), Gauthier Villars (reprint), 1957.

Kiernan, B. M. : "The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin", *Archive for History of Exact Sciences*, 8, 1971, 40～154.

Lebesgue, Henri: *Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan*, Gauthier-Villars, 1923. Also in Lebesgue's *Notices d'histoire des mathématiques*, pp. 44～65, Institut de Mathématiques, Genève, 1958.

Miller, G. A. : "History of the Theory of Groups to 1900", *Collected Works*, Vol. 1, 427～467, University of Illinois Press, 1935.

Pierpont, James: "Lagrange's Place in the Theory of Substitutions", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 1, 1894/1895, 196～204.

Pierpont, James: "Early History of Galois's Theory of Equations", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 4, 1898, 332～340.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, 232～252, 253～260, 261～266, 278～285.

Verriest, G. : *Œuvres mathématiques d'Evariste Galois* (1897 ed.), 2nd ed., Gauthier-Villars, 1951.

Wiman, A. : "Endliche Gruppen linearer Substitutionen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1898～1904, Ⅰ, Part 1, 522～554.

Wussing, H. L. : *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB Deutscher Verlag der Wiss., 1969.

第32章

四元数,向量和线性结合代数

Hamilton 做了确实非常出色的工作,之后,四元数就诞生了;虽然美妙而富有创造性,但对于以任何方式接触过它们的那些人来说曾经是一个纯粹的邪念……向量是无用的幸存物或四元数的无价值的支流,对任何创造,从未有过最微细的应用.

Lord Kelvin

1. 关于型的永恒性的代数基础

Galois 关于可用代数步骤求解的方程的工作结束了代数的一章,虽然他引进了诸如群和有理整环(域)等概念(它们将结出果实),但这些概念的充分开发必须等待其他概念的发展.下一个重要的代数创造,由 William R. Hamilton 所创始,揭开了全新的领域,打破了对于"数"所必须遵循的规则的古老信念.

为了评价 Hamilton 工作的独创性,我们必须考察在 19 世纪前半期所普遍理解的普通代数的逻辑. 1800 年,数学家们自由地使用各类实数以至复数,但是既没有这些不同类型的数的精确定义,也没有关于数的运算的任何逻辑检验.对这种情况不满的表示是很多的,但被淹没于代数和分析的大量新创造中.最大的不安似乎产生于下述事实:使用文字时就好像它们具有整数的性质,然而当文字被任何数代替时这些运算的结果却都有效.由于各种类型的数的逻辑没有建立,所以不可能理解它们具有同正整数相同形式的性质,从而不可能理解只代表任一类实数或复数的文字表达

式必然具有相同的性质——即通常的代数恰是一般化的算术. 似乎文字表达式的代数具有自己的逻辑,它说明文字表达式的有效性和正确性. 因此在 18 世纪 30 年代数学家们就着手解决用文字或符号表达式进行运算的正确性问题.

这个问题首先被剑桥大学的数学教授 George Peacock (1791—1858) 考虑到. 为了说明用文字表达式进行运算的正确性,这些表达式要能代表负数、无理数和复数,他区分了算术代数和符号代数. 前者是处理表示正整数的符号,所以有坚实的基础. 这里仅有导致正整数的运算才被允许. 符号代数采用算术代数的规则,但取消限于正整数的限制. 在算术代数中推出的全部结果与符号代数中的结果都一样;但算术代数中的表达式在形式上是普遍的,在值上是特殊的,而符号代数中的表达式,在值上和在形式上都是普遍的. 例如,在算术代数中 $a^m a^n = a^{m+n}$ 当 m 和 n 是正整数时成立,因而在符号代数中它对所有 m 和 n 都成立. 同样地, $(a+b)^n$ 当 n 是正整数时的级数,如果用不带末项的一般形式来显示,就对所有 n 成立. Peacock 的论证被称为型的永恒性原理.

这个原理的明白的叙述,见于 Peacock 的《关于分析的某些分支的新近成就和现状的报告》[1],在其中他不仅作了报告,而且还作了武断的肯定. 关于符号代数,他说:

> 1. 符号在值和表现上都是无限的.
> 2. 无论是什么符号,在它们上作运算,对所有情况都能进行.
> 3. 符号组合的法则属于这样一类法则,即当符号是算术量时,且当它们所受到的运算用算术代数中同样的名字来称呼时,它与算术代数的法则普遍符合.

从这些原理出发,他相信他能推出型的永恒性原理:"无论什

---

① *Brit. Assn. for Adv. of Sci.*, Rept. 3,1833,185～352.

么代数的型，当符号在形式上是普遍的，而在值[正整数]上是特殊的时候是等价的，则当符号在值上和形式上都是普遍的时候同样是等价的."Peacock 特地用这个原理证明用复数运算是合理的.他试图用"当符号在形式上是普遍的时候"来保护他的结论.这样就不能在符号形式中陈述特殊整数的特定性质以及坚持这些符号的陈述是普遍的.例如：复合整数分解成素数的乘积，虽然是用符号表达的，却不能作为符号代数的陈述来接受.这个原理用命令来批准经验上显然正确但尚未在逻辑上建立的东西.

Peacock 在他的《代数论著》(*Treatise on Algebra*)[①]的第二版中重新肯定了这个原理，但他还在那里引进了正式的代数科学，Peacock 在这本论著中叙述说，代数和几何一样，是演绎的科学.代数的步骤必须根据法则条文的一个完全的陈述，这些法则支配着步骤中用到的运算.至少对于代数这门演绎科学而言，运算的符号除了法则给以它的意义而外没有其他意义.例如加法不过是表示服从代数中加法法则的任一步骤.他的法则是，例如加法和乘法的结合律和交换律，以及如 $ac = bc$ 而 $c \neq 0$，则 $a = b$ 这个法则.

这里型的永恒性原理是从所采用的公理推出来的.这种处理方式为代数中更抽象的思想铺平了道路，尤其是影响了 Boole 关于逻辑代数的思想.

经过 19 世纪大部分时间，由 Peacock 肯定的代数观点被接受了.这个观点受到例如 Duncan F. Gregory(1813—1844)的支持，他是 17 世纪的 James Gregory 的重重孙. Gregory 在一篇文章《论符号代数的真正性质》[②]中写道：

> 于是，我用以考虑符号代数的见解是，它是处理运算的组合的科学，这些运算不是由它们的性质确定的，即不是由

① 1842～1845; 1st ed., 1830.

② *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 14, 1840, 208～216.

> 它们是什么或它们做什么来确定的,而是由它们所服从的组合的法则来确定的……的确,这些法则在很多情况下已由数的许多已知运算法则提出来了(正如 Mr. Peacock 已经适当地称谓的),但是从算术代数到符号代数所取的步骤是,不考虑我们用符号所代表的运算的性质,而假设服从同样法则的一类未知运算的存在. 这样我们就能够证明不同的运算类之间的某些关系,当这些运算在符号之间表达出来时,它们就称为代数定理.

在这篇文章中,Gregory 强调了交换律和分配律,这术语是由 François-Joseph Servois(1767—1847)①引进的.

代数理论作为符号及其组合法则的科学进一步由 Augustus De Morgan 推进,他写了几篇关于代数结构的文章②. 他的《三角学和双重代数》(*Trigonometry and Double Algebra*, 1849)也包含着他的见解. 双重代数这个词的意思是复数的代数,而单个代数是指负数. 在单个代数以前是普通算术,它包括正实数的代数,De Morgan 主张代数是无意义的符号以及符号的运算的集合. 符号是 0, 1, +, −, ×, ÷, $()^{()}$ 和文字. 代数的法则就是这些符号所服从的法则,例如交换律,分配律,指数律,负数乘正数是负数, $a-a=0$, $a\div a=1$, 和一些导出法则. 基本法则是任意选择的.

19 世纪中叶,普遍接受的代数公理是:

1. 等量各加上第三个量得到等量.
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. $a+b=b+a$.
4. 等量加等量给出等量.
5. 等量加不等量给出不等量.

---

① *Ann. de Math.*, 5,1814/1815,93~140.

② *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 1841,1842,1847.

6. $a(bc)=(ab)c$.

7. $ab=ba$.

8. $a(b+c)=ab+ac$.

型的永恒性原理就建立在这些公理上.

对于我们来说,要看出这个原理究竟是什么意思是困难的.它把未经证明的东西作为假定来论证为什么不同类型的数具有与整数相同的性质.但 Peacock,Gregory 和 De Morgan 企图从代数中建立一门科学,与实数和复数的性质无关,从而认为代数是不加解释的符号和它们的组合法则的科学.实际上是要使这一假定合理化,即同样的基本性质对所有类型的数都具备.这个基础不仅是含糊的,而且是僵硬的.人们坚持算术代数和一般代数之间的相似性是如此僵硬以至于如果再继续下去,就要破坏代数的一般性.他们似乎未体会到,一个公式对符号的一种解释是对的,但对另一种解释可能不对.

型的永恒性原理,是一种任意的宣言,不可能作为代数的牢固基础.实际上,我们在这一章中将要处理的事物都伤害了它,第一步是由 Hamilton 做出的,在他把复数的逻辑建立在实数性质的基础上的时候,这第一步只是在涉及复数时避免了对这个原理的需要.

虽然在 1830 年时,复数在直观上被很好地建立了,这是通过表示成平面上的点或有向线段来建立的,但 Hamilton 关心算术的逻辑,他不满足于只是直观的基础. Hamilton 在他的文章《共轭函数及作为纯粹时间的科学的代数》[①]中指出,复数 $a+bi$ 不是 $2+3$ 意义上的一个真正的和,加号的使用是历史的偶然,而 bi 不能加到 a 上去.复数 $a+bi$ 只不过是实数的有序偶(a, b).由 i 或$\sqrt{-1}$在复数的运算中引进来的特殊性质,Hamilton 把它组织在以有序偶作运算的定义中.例如,设 $a+bi$ 和 $c+di$ 是两个复

---

① *Trans. Royal Irish Academy*, 17,1837, 293 ~ 422 = *Math. Papers*,3,3~96.

数,则

$$(a,\ b)\pm(c,\ d)=(a\pm c,\ b\pm d),$$
$$(1)\qquad (a,\ b)\cdot(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc),$$
$$\frac{(a,\ b)}{(c,\ d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

通常的结合律、交换律和分配律现在都能推导出来.在对复数的这个看法下,不仅这些数逻辑地建立在实数的基础上,而且至今还有点神秘的$\sqrt{-1}$也完全免除了.当然,在实践上,用 $a+bi$ 这个形式并记住$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1$ 还是方便的.附带地说一下,Gauss 在 1833 年给 Wolfgang Bolyai 的一封信中确实说过,他在 1831 年就已经有了有序偶的概念.但是 Hamilton 文章的发表才给了数学界以有序偶的概念.

2. 三维"复数"的寻找

向量的概念,即可以代表力、速度或加速度的大小和方向的有向线段的概念,平静地进入了数学. Aristotle 就知道力可以表示成向量,两个力的组合的作用可以用著名的平行四边形法则来得到,即由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$(图 32.1)形成的平行四边形的对角线给出合力的大小和方向. Simon Stevin 在静力学问题中应用平行四边形法则,而 Galileo 清楚地叙述了这个定律.

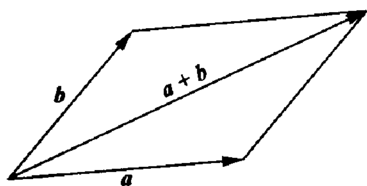


图 32.1

在稍微熟悉了由 Wessel, Argand 和 Gauss 提供的复数的几何表示之后,数学家们认识到复数能用来表示平面上的向量和研究向量.例如,设两个向量分别由 3+2i 和 2+4i 代表,则这两个复数的和,即 5+6i 代表了用平行四边形法则相加的向量的和.复数

对于平面向量所做的事情,就是提供了表示向量及其运算的一个代数.人们不一定要几何地作出这些运算,但能够代数地研究它们,很像曲线的方程能用来表示曲线和研究曲线.

复数用于表示平面上的向量,在 1830 年时就是熟知的了,然而,复数的利用是受限制的.设有几个力作用于一物体,这些力不一定在一个平面上.代数上为了处理这些力需要复数的一个三维类似物,我们能用点的通常的笛卡儿坐标(x, y, z)来代表从原点到该点的向量,但不存在三元数组的运算来表现向量的运算.这些运算和复数的情况一样,表面上看来必须包括加法、减法、乘法和除法,而且要服从通常的结合律、交换律和分配律,使代数的运算能自由而有效地运用.数学家们开始寻找所谓三维的复数以及它的代数.

Wessel,Gauss,Servois,Möbius 和其他人继续研究了这个问题.Gauss[①] 关于空间的运算写了一篇未发表的短文(注明 1819 年).他把复数想像为位移;$a+bi$ 是沿一固定方向移动 a 个单位,接着在一垂直方向移动 b 个单位.由此他试图建立一个三分量的数的代数,其中第三个分量代表 $a+bi$ 平面的垂直方向上的位移.他得到了一个非交换代数,但它不是物理学家所需要的有效的代数,而且由于未发表,这篇著作影响不大.

复数的有用的空间类似物的创造属于 William R. Hamilton (1805—1865).仅次于 Newton,Hamilton 是最伟大的英国数学家,并且和 Newton 一样,他作为一个物理学家甚至比作为一个数学家更伟大.5 岁时,Hamilton 就能读拉丁文、希腊文和希伯来文;8 岁时,添了意大利文和法文;10 岁时又能读阿拉伯文和梵文;而 14 岁时还能读波斯文.同快速计算器的一次接触,激励他去研究数学.1823 年他进了都柏林的三一学院,他是一个出色的学生.1822 年,他 17 岁时准备了一篇关于焦散曲线的文章,1824 年在爱

① *Werke*, 8,357~362.

尔兰皇家科学院宣读,但未发表. Hamilton 被劝告去重做和发展它. 1827 年他呈送给这科学院一篇题为《光线系统的理论》的修改稿,该文建立了几何光学的科学. 这里他引进了所谓光学特征函数. 该文于 1828 年发表在《爱尔兰皇家科学院学报》上①.

1827 年,当他还是一个大学生时,就被任命为三一学院的天文教授,用此职位就赢得了爱尔兰皇家天文学家的头衔. 他作为教授的任务是演讲科学和管理天文观察. 他对后一工作没做很多事,但他是一个好教师.

从 1830 年到 1832 年他对于《光线系统的理论》发表了三个补充. 在第三篇文章②中,他指出在双轴晶体中按某一特殊方向传播的光线将产生折射光线的一个圆锥. 这个现象被他的朋友和同事 Humphrey Lloyd 用实验证实了. 后来 Hamilton 把他关于光学的思想归入到动力学中,并在动力学领域中写了两篇很著名的文章(30 章),文中他用了在光学中建立的特征函数的概念. 他还对物体系统的运动的微分方程给出了一组完全而严密的积分. 他的主要数学工作是四元数这个科目,我们将简短地讨论它. 他把他的这项工作的最后形式介绍在他的《四元数讲义》(*Lectures on Quaternions*, 1853)和死后出版的两卷《四元数基础》(*Elements of Quaternions*, 1866)中.

Hamilton 善于利用对比去从已知论证未知. 虽然他有很好的直观,但他没有伟大的思想灵感,他长期而勤奋地对特殊问题进行工作以求看出一般性的东西. 在解决许多特定的例子时他耐心而有条不紊,并且情愿作大量的计算去检查和证明一个论点. 然而,在他的出版物中,却只有推敲和压缩了的一般结果.

他笃信宗教,这方面的兴趣对他来说是最重要的. 其次是玄学(形而上学)、数学、诗、物理和一般文学. 他还写诗. 他认为,在他那

---

① *Trans. Royal Irish Academy*, 15,1828, 69 ~ 174 = *Math. Papers*,1,1~106.

② *Trans. Royal Irish Academy*, 17,1837, 1 ~ 144 = *Math. Papers*, 1,164~293.

个时代创造出的几何概念,Poncelet 和 Chasles(第 35 章)的著作中使用的无限元素和虚元素都和诗类似. 虽然他是一个谦虚的人,但他承认且甚至强调,喜爱名望会推动和振奋大数学家.

Hamilton 澄清了复数的概念,这使他能更清楚地思考引进三维类似物以代表空间的向量. 但是直接的效果使他的努力失望. 当时数学家们所知道的全部数都具有乘法交换性,因而对于 Hamilton 来说也自然地相信他要寻找的三维或三分量的数应同样具有这个性质,同时具有实数和复数的其他性质. 经过一些年的努力之后,Hamilton 发现自己被迫应作两个让步. 第一个是他的新数包含四个分量,而第二个是他必须牺牲乘法交换律. 两个特点对代数学都是革命性的. 他称这新的数为四元数.

事后来认识,我们能看到在几何的基础上,新的"数"必须包含四个分量. 把这个新数看成一个算子,期望对一个给定的向量绕空间中一给定轴进行转动并将它进行伸缩. 为此目的需要两个参数(角度)来固定转动轴,需要一个参数来规定转动角度,还需要第四个参数来规定给定向量的伸长和缩短.

Hamilton 自己描述了他的四元数的发现①:

> 明天是四元数的第 15 个生日. 1843 年 10 月 16 日,当我和 Lady Hamilton 步行去都柏林途中来到布鲁厄姆(Brougham)桥的时候,它们就来到了人世间,或者说出生了,发育成熟了. 这就是说,此时此地我感到思想的电路接通了,而从中落下的火花就是 I, J, K 之间的基本方程;恰恰就是我此后使用它们的那个样子. 我当场抽出笔记本,它还在,就将这些做了记录,同一时刻,我感到也许值得花上未来的至少 10 年(也许 15 年)的劳动. 但当时已完全可以说,这是因我感觉到一个问题就在那一刻已经

① *North British Review*, 14, 1858, 57.

解决了,智力该缓口气了,它已经纠缠住我至少 15 年了.

1843 年他在爱尔兰皇家科学院会议上宣告了四元数的发明,为发展这个课题他付出了余生,并且为它写了许多文章.

3. 四元数的性质

四元数是下面形式的一个数:

$$3+2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 起着 i 在复数中所起的作用. 实数部分(如上面的 3)称为四元数的数量部分,而其余是向量部分. 向量部分的三个系数是点 P 的笛卡儿直角坐标,而 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 是定性的单元,几何上其方向是沿着三根坐标轴. 两个四元数相等的准则是,它们的数量部分相等以及它们的 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 单元的系数分别相等. 两个四元数相加是将它们的数量部分相加,且将 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 单元的每个系数相加,以形成这些单元的新系数. 于是两个四元数的和本身也是四元数.

四元数进行乘法运算时,乘法的所有熟知的代数规则都假定有效,除了在形成单元 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的积时,放弃了交换律,而具备下列规则:

$$\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{kj}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{ki}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{ik}=-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{ij}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{ji}=-\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1.$$

例如设 $\boldsymbol{p}=3+2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{q}=4+6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$,

则
$$\boldsymbol{pq}=(3+2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})(4+6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})$$
$$=-111+24\boldsymbol{i}+72\boldsymbol{j}+35\boldsymbol{k},$$

而
$$\boldsymbol{qp}=(4+6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})(3+2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})$$
$$=-111+28\boldsymbol{i}+24\boldsymbol{j}+75\boldsymbol{k}.$$

Hamilton 证明了乘法是可结合的,这是第一次使用这个术语①.

---

① *Proc. Royal Irish Academy*, 2,1844, 424 ~ 434 = *Math. Papers*, 3,111~116.

四元数被另一四元数除也能实现，但乘法不交换蕴含了用四元数 $\boldsymbol{q}$ 除四元数 $\boldsymbol{p}$，可以意味着找 $\boldsymbol{r}$ 使 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{qr}$ 或 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{rq}$. 这个商 $\boldsymbol{r}$ 在这两种情况下不必相同. 除法的问题最好通过引进 $\boldsymbol{q}^{-1}$ 或 $1/\boldsymbol{q}$ 来处理. 设 $\boldsymbol{q} = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$，定义 $\boldsymbol{q}'$ 为 $a - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k}$，并定义 $N(\boldsymbol{q})$（称为 $\boldsymbol{q}$ 的模）为 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. 于是 $N(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{qq}' = \boldsymbol{q}'\boldsymbol{q}$. 定义 $\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}'/N(\boldsymbol{q})$，因而如 $N(\boldsymbol{q}) \neq 0$，则 $\boldsymbol{q}^{-1}$ 存在. 还有 $\boldsymbol{qq}^{-1} = 1$ 和 $\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q} = 1$，现在要找 $\boldsymbol{r}$ 使 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{qr}$，我们就有 $\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{qr}$ 或 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{p}$；要找 $\boldsymbol{r}$ 使 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{rq}$，我们就有 $\boldsymbol{pq}^{-1} = \boldsymbol{rqq}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{pq}^{-1}$.

立刻能表明哪个四元数能用来旋转、伸长或缩短一个给定的向量成另一个给定的向量. 我们仅需证明，能确定 a, b, c 和 d 使

$$(a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}.$$

把左边乘开成四元数并使左右两边对应系数相等，就得到未知数 a, b, c 和 d 的四个方程. 这四个方程足以确定未知数.

Hamilton 还引进了一个重要的微分算子. 符号 ∇，它是 Δ 的倒转——Hamilton 称它为“nabla”，因为它像古代一个同名的希伯来乐器——代表算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4}$$

当应用于数量点函数 $u(x, y, z)$ 时，它产生向量

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{5}$$

这个向量是随着空间的点而变化的，现在称为 u 的梯度. 它代表 u 的最大的空间增长率的大小和方向.

还令 $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ 表示一个连续的向量点函数，这里 v_1, v_2, v_3 是 x, y, z 的函数，Hamilton 引进

$$\nabla \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}) \tag{6}$$

$$= -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$
$$+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

于是把∇作用到向量点函数 $\boldsymbol{v}$ 上的结果是产生一个四元数;这四元数的数量部分(除去负号)我们现在称它为 $\boldsymbol{v}$ 的散度,而向量部分称为 $\boldsymbol{v}$ 的旋度.

Hamilton 对他的四元数具有无限的热情.他相信这个创造和微积分同等重要,将会是数学物理中的关键工具.他自己对几何、光学和力学作了一些应用.他的思想得到了他的朋友 Peter Guthrie Tait(1831—1901)的热情支持. Tait 是皇后学院的数学教授,后来又是爱丁堡大学的自然历史教授. Tait 在很多文章中鼓励物理学家采用四元数作为基本工具.他甚至卷入了同 Cayley 的长期争论中,Cayley 对四元数的用途取消极观点.但物理学家们无视四元数而继续使用方便的笛卡儿坐标来工作.然而,正如我们将看到的,Hamilton 的工作确实间接地引向一个向量代数和向量分析,这都是物理学家们渴望采用的.

Hamilton 的四元数证明对代数学具有不可估量的重要性.一旦数学家们体会到可以构造一个有意义的、有用的"数"系,它可以不具有实数和复数的交换性,那他们就觉得可较为自由地考虑甚至更偏离实数和复数的通常的性质的创造.这个体会在向量代数和向量分析建立之前是必要的,因为向量比四元数违反更多的通常的代数法则(第 5 节).更一般地,Hamilton 的工作引向线性结合代数的理论(第 6 节). Hamilton 本人开始研究包含 n 个分量或 n 元数组的超复数①,但是正是他的关于四元数的工作推动了线性代数的这个新研究.

---

① *Trans. Royal Irish Academy*, 21,1848, 199 ~ 296 = *Math. Papers*, Ⅲ, 159 ~226.

4. Grassmann 的扩张的演算

正当 Hamilton 建立他的四元数时，另一个数学家 Hermann Günther Grassmann(1809—1877)，正在建立复数的一个更为大胆的推广. 他在年轻时没有表现出数学才能，并且没有受过大学的数学教育，但是后来成了德国斯德丁(Stettin)城的中学数学教师，同时又是梵文权威. Grassmann 在 Hamilton 以前就有了他的想法，但直到 1844 年，即 Hamilton 宣告他的四元数的发现后一年才发表. 那一年他发表了他的《线性扩张论》(*Die lineale Ausdehnungslehre*). 由于覆上了神秘的教义以及叙述抽象，比较关心实践的数学家和物理学家发现此书含混不清和不好读，结果这本著作虽然高度独创，但很多年仍然很少为人知道. 1862 年 Grassmann 发行了修订版，称做《扩张论》(*Die Ausdehnungslehre*). 书中，他简化和详述了原来的工作，但他的文风和有欠清楚明了仍使读者厌恶.

虽然 Grassmann 的叙述和几何概念有着几乎不可分割的联系——他实际上是在涉及 n 维几何——但我们将抽取其代数的概念，它被证明是具有永恒的价值. 他的基本概念，他称为扩张的量(*extensive Grösse*)，是一种有 n 个分量的超复数. 为研究他的思想，我们讨论 $n=3$ 的情况.

考虑两个超复数

$$\alpha=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3,\ \beta=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3,$$

这里，α_i 和 β_i 是实数，而 e_1，e_2 和 e_3 是原始的或定性的单元，几何上用单位长度的三个有向线段来代表，它们从原点出发，顺序确定一个右手直角坐标系. 这些 α_ie_i 是原始单元的倍数，且几何上由相应轴上长度 α_i 来代表，而 α 由空间中的一个有向线段来代表，它在各轴上的投影正好是长度 α_i. 同样的事对 β_i 和 β 也成立. Grass-

mann 称这样的有向线段或线向量为 Strecke(线段).

这些超复数的加减法由下式定义：

$$(7) \qquad \alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1)e_1 + (\alpha_2 \pm \beta_2)e_2 + (\alpha_3 \pm \beta_3)e_3.$$

Grassmann 引进了两类乘法，内积和外积. 对内积，他假设

$$(8) \qquad e_i \mid e_i = 1,\ e_i \mid e_j = 0,\ i \neq j.$$

对外积他假设

$$(9) \qquad [e_ie_j] = -[e_je_i],\ [e_ie_i] = 0.$$

这些方括弧称为二阶单元，它们未被 Grassmann 化简成一阶单元，即 e_i(而 Hamilton 做了)，而是用 $[e_1e_2] = e_3$ 等等把它们当作好像是等价于一阶单元来处理.

从这些定义推出 α 和 β 的内积 $\alpha \mid \beta$ 由下式给定：

$$\alpha \mid \beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \quad 和 \quad \alpha \mid \beta = \beta \mid \alpha.$$

一个超复数 α 的数值或大小 a 定义为 $\sqrt{\alpha \mid \alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$. 这样，$\alpha$ 的大小在数值上就等于几何上表示它的线向量的长度. 若 θ 表示线向量 α 和 β 之间的夹角，则

$$\alpha \mid \beta = ab\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{ab} + \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} + \frac{\alpha_3\beta_3}{ab}\right) = ab\cos\theta.$$

借助于外积规则(9)，超复数 α 和 β 的外积 P 可以表示为

$$(10) \qquad P = [\alpha\ \beta] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[e_2e_3] + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)[e_3e_1] + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[e_1e_2].$$

这个积是二阶的超复数，并且是用二阶的独立的单元表示出来的. 它的大小 $|P|$ 是借助于两个二阶超复数的内积的定义得到的，就是

$$(11) \qquad |P| = \sqrt{P \mid P}$$
$$= \{(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= ab\left\{1 - \left(\frac{\alpha_1\beta_1}{ab} + \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} + \frac{\alpha_3\beta_3}{ab}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = ab\sin\theta.$$

因此，外积 $[\alpha\beta]$ 的大小 $|P|$ 就在几何上被表示成一个平行四边形的面积，这个平行四边形是由几何上代表 α 和 β 的线向量构成的.

这个面积,连同和它垂直的一个单位线向量一起,就是现在所称的向量面积,那个单位线向量的方向要选择成当 α 绕此线向量转到 β 时,它的方向将指向从 α 转到 β 的右手螺旋方向. Grassmann 的术语是 Plangrösse(平面量).

两个初始的三维超复数的 Grassmann 内积等价于两个向量的 Hamilton 的四元数乘积的数量部分的负值;在三维情况下,当我们用 e_1 代替 $[e_2e_3]$ 等等,Grassmann 外积就正好是两个向量的 Hamilton 的四元数乘积. 然而,在四元数理论中,向量是四元数的辅助部分,而在 Grassmann 代数中向量是作为基本的量出现的.

Grassmann 的另外一种乘积是这样形成的,将一个超复数 γ 同两个超复数 α 和 β 的外积 $[\alpha\beta]$ 作内积,这个积在三维的情形是

$$\begin{aligned} Q &= [\alpha\ \beta]\gamma \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\gamma_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\gamma_3. \end{aligned}$$

表成行列式形状就是

$$Q = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

结果,Q 能够几何地解释成由 α, β 和 γ 的线向量构成的平行六面体的体积. 这个体积可正可负.

Grassmann 不仅考虑了(对 n 分量超复数)上面所说的两种乘积,而且还考虑了高阶乘积. 在 1855 年的一篇文章[①]中,他对超复数给出了 16 种不同类型的乘积. 他还给出了这些乘积的几何意义,并对力学、磁学、晶体学作了应用.

初看起来,Grassmann 关于有 n 个部分的超复数的讨论似乎是不必要的一般,因为至少到目前为止超复数的有用的例子最多

---

① *Jour. für Math.*, 49,1855,10~20 与 123 ~ 141 = *Ges. Math. und Phys. Werke*, 2, Part Ⅰ, 199~217.

包含四个部分. 可是 Grassmann 的思想却有助于引导数学家们进入张量理论(第 48 章),因为正如我们将要看到的,张量就是超复数. 其他几何的和不变性的概念在张量来到以前就已闻名于数学界了. 虽然关于超复数的思想引向了各种推广,但 Grassmann 的 n 维超复数的分析(例如微积分)终究未建立起来. 理由是简单的,即没有发现这样的分析的应用. 正如我们将要看到的,对张量有一个扩张的分析,但是这些在 Riemann 几何中有它们的来源.

5. 从四元数到向量

Grassmann 的工作暂时仍被忽视,但正如我们已指出的,四元数几乎立刻就吸引了很大的注意力,然而它们完全不是物理学家所要的东西. 他们要寻找一个概念,它不脱离笛卡儿坐标,而是比四元数更紧密地联系于笛卡儿坐标. 在这样一种概念的方向上,第一步是 James Clerk Maxwell(1831—1879)做的,他是电磁理论的发现者,最伟大的数学物理学家之一,是剑桥大学的物理教授.

Maxwell 知道 Hamilton 的工作;他虽然听到过 Grassmann 的工作,但未看到过. 他区分出 Hamilton 的四元数的数量部分和向量部分,并且把重点放在这些分开来的概念上①. 然而,在他的有名的《论电和磁》(*A Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873)中,他对四元数作了较大的让步,并且更多地谈到四元数的数量部分和向量部分,虽然他是把这些部分作为分开的实体处理的. 他说(p. 10),要规定一个向量需用三个量(分量),这三个量能解释成沿三个坐标轴的长度. 这个向量概念是 Hamilton 的四元数的向量部分,Maxwell 就是这样说的. Hamilton 曾引入 x, y 和

① *Proc. London Math. Soc.*, 3,1871,224~232 = *The Scientific Papers*, Vol. 2,257~266.

z 的向量函数 $\boldsymbol{v}$,其分量为 v_1, v_2 和 v_3,并对它应用算子 $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 而得到结果(6). 这样,$\nabla\ \boldsymbol{v}$ 是一个四元数. 但 Maxwell 把数量部分和向量部分分开,并用 $S\ \nabla\ \boldsymbol{v}$($\nabla\ \boldsymbol{v}$ 的数量部分)和 $V\ \nabla\ \boldsymbol{v}$($\nabla\ \boldsymbol{v}$ 的向量部分)表示. 他称 $S\ \nabla\ \boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{v}$ 的聚度,因为这个表达式在流体动力学中出现过多次,并且当 $\boldsymbol{v}$ 是速度时它有通量的意义,或每单位时间内通过包围一点的一块小面积的每单位体积所含的纯流量. 他又称 $V\ \nabla\ \boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{v}$ 的旋转或旋度,因为这个表达式在流体动力学中也已出现过,它是流体在一点的旋转率的两倍,Clifford 后来称 $-S\ \nabla\ \boldsymbol{v}$ 为散度.

然后 Maxwell 指出,算子 ∇ 重复进行就给出

$$\nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

他称这算子为 Laplace 算子. 他允许这算子作用于数量函数以产生一个数量,作用于向量函数产生一个向量①.

Maxwell 在他 1871 年的文章中说明了一个数量函数的梯度的旋度和向量函数的旋度的散度永远是零. 他还说,一个向量函数 $\boldsymbol{v}$ 的旋度的旋度是 $\boldsymbol{v}$ 的散度的梯度减去 $\boldsymbol{v}$ 的 Laplace 算子(这仅在直角坐标中成立).

Maxwell 经常用四元数作为基本的数学实体,或至少经常提到四元数,也许是为了帮助他的读者. 然而他的工作清楚地表明,向量是物理思想的真正的工具,而不像某些人所主张的那样,仅仅是书写的缩减方案. 于是在 Maxwell 所处的时代,由于分开处理

① 因为在向量分析中 $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$,于是 $\nabla^2 q$ 在物理上表示梯度的散度,或 q 的最大空间变化率的散度. 然而这个物理意义从下述事实来看更为明显,即满足 $\nabla^2 q = 0$ 的函数 q 使 Dirichlet 积分取最小值(看第 28 章的(34)). 这个积分是遍布于某个体积上的梯度量的平方. 因此 $\nabla^2 q = 0$ 或者意味着极小梯度发生在任何一点,或者意味着偏离均匀度的差是一个极小值. 如果 $\nabla^2 q$ 不是 0,就必定存在某个偏离均匀度的差,因而将有一个恢复力. 在数学物理中,包含 $\nabla^2 q$ 的这个或那个内容的各种方程实际上都是断言:自然界的行为永远是要恢复均匀.

代替 ∇^2 的记号 Δ 是 Robert Murphy 在 1833 年引进的.

四元数的数量部分和向量部分,而创造了大量的向量分析.

一个新的独立的课题,三维向量分析的开创,以及同四元数的正式分裂,在19世纪80年代初期由 Josiah Willard Gibbs 和 Oliver Heaviside 所独立建立. Gibbs(1839—1903)是耶鲁(Yale)学院的数学物理教授,最初是物理化学家,曾在他的学生中私人传播过小册子(1881和1884)《向量分析基础》(*Elements of Vector Analysis*)[1]. 在介绍性的说明中叙述了他的观点:

> 下述分析的一些基本原理都是在稍微不同的形式下为四元数的学生们所熟悉的. 建立这一课题的方法与处理四元数的方法有些不同,只是给出一个适当的记法来表达向量之间或向量与数量之间的那些关系,这个记法看来是非常重要的,它非常容易地引导到解析变换,并阐明一些这样的变换. 作为不同于四元数处理的先例可以引用 Clifford 的《静力学》(*Kinematics*). 在这方面还应提到 Grassmann 这个名字,下述方法与他的系统的联系,在某些方面要比与 Hamilton 系统的联系更紧密.

Gibbs 关于向量分析的小册子虽然是为私人交流而印刷的,但却变成广为知道的书. 这个材料最后被编进了 E. B. Wilson 所写的书中,他根据于 Gibbs 的讲义. 这本书,Gibbs 和 Wilson 的《向量分析》(*Vector Analysis*),出现于1901年.

Oliver Heaviside(1850—1925)早期的科学经历是电报和电话工程师. 他在1874年隐退到乡村生活,专心于写作,主要是写电学和磁学的课题. Heaviside 曾从 Hamilton 的《基础》学过四元数,但受阻于很多特殊的定理. 他感到学习四元数对一个忙碌的工程师是太难了,因此他建立他的向量分析,对他来说,这不过是通常笛卡儿坐标的速记形式. 19世纪80年代,他

---

① *The Scientific Papers*, 2,17~90.

在杂志《电学家》(*Electrician*)上写的文章中自由地运用了这个向量分析. 后来在他的三卷著作《电磁理论》(*Electromagnetic Theory*, 1893, 1899, 1912)的第一卷中给出向量代数的很多内容. 第三章约 175 页专门用于向量方法. 他对这个课题的发展结果本质上与 Gibbs 的相融合,虽然他不喜欢 Gibbs 的记法,而采取了他自己的记法,这根据于 Tait 的四元数的记法.

按照 Gibbs 和 Heaviside 所提出的,一个向量不过是四元数的向量部分,但独立于任何四元数. 这样,向量 $\boldsymbol{v}$ 是

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k},$$

这里,$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别是沿 x, y, z 轴的单位向量,系数 a,b 和 c 是实数,称为分量. 两个向量是相等的,如果相应的分量都相等;两个向量的和是一个向量,其各分量分别是被加项的相应分量之和.

引进了两种类型的乘法,两者都对物理有用. 第一种类型称为数量乘法,是这样定义的:把 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}' = a'\boldsymbol{i} + b'\boldsymbol{j} + c'\boldsymbol{k}$ 像通常的多项式一样相乘,用"点"作为乘法的符号,令

$$\text{(13a)} \qquad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = 0.$$

这样,$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' = aa' + bb' + cc'$. 这个乘积不再是向量而是一个实数或数量,称为数量积. 它具有新的代数特点,因为两个实数或复数或四元数的积,永远是我们所从出发的同一类数. 数量积的另一奇怪性质是当两个因子没有一个是零时它可以是零. 例如向量 $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{v}' = 6\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$ 的积就是零.

两个向量的数量积在代数上新奇的还有另一方面——它不允许逆过程. 就是说,永远不能找到一个向量或数量 q 使 $\boldsymbol{v}/\boldsymbol{v}' = q$. 比如说,假如 $\boldsymbol{q}$ 是一个向量,$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}'$ 就会是一个数量,因而不等于向量 $\boldsymbol{v}$. 另一方面,假如 q 是一个数量,则虽然 $q\boldsymbol{v}$ 是定义成 $qa'\boldsymbol{i} + qb'\boldsymbol{j} + qc'\boldsymbol{k}$, 却很少有 $qa' = a$, $qb' = b$ 及 $qc' = c$, 这里 a, b 和 c 是 $\boldsymbol{v}$ 的系数. 尽管缺乏商,数量积仍是有用的.

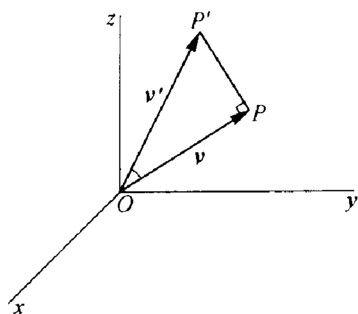


图 32.2

数量积的物理意义直接显示如下:设 $\boldsymbol{v}'$ 是一个力(图 32.2),它的方向和大小用由 O 到 P'的线段表示,则这个力推动 O 点的物体在一个方向(比如说在 OP 方向)上的效应(这里 OP 代表向量 $\boldsymbol{v}$),是 OP'在 OP 上的投影或 $OP'\cos\phi$,这里 ϕ 是 OP' 和 OP 间的夹角. 当 OP 是单位长度时,OP'的投影正好是乘积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'$的值.

向量的第二类型的乘积,称为向量积,定义如下:我们仍像多项式一样将 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$相乘,但这时令

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,$$

$$\text{(13b)}\qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

于是这乘积,用 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}'$ 表示,便是

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}'=(bc'-b'c)\boldsymbol{i}+(ca'-ac')\boldsymbol{j}+(ab'-b'a)\boldsymbol{k}.$$

两个向量的向量积是一个向量,不难证明它的方向是垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$的方向,且指向是当 $\boldsymbol{v}$ 通过较小的角度转到 $\boldsymbol{v}'$时右手螺旋所指的方向. 两个平行向量的向量积是零,虽然没有一个因子是零. 此外,这乘积像四元数乘积一样不可交换. 进一步,它甚至不是结合的,例如,$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}$ 可以表示 $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$ 或 $\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\times 0=0$.

向量乘法没有逆,因为如果 $\boldsymbol{v}$ 用 $\boldsymbol{v}'$除的商是一个向量 $\boldsymbol{q}$,我们就必然会有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{q}.$$

而无论 $\boldsymbol{q}$ 是什么,这都需要 $\boldsymbol{v}'$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$,但这可能不是出发时的情况. 假如 q 是一个数量,那么偶然才会有 $qa'\boldsymbol{i}+qb'\boldsymbol{j}+qc'\boldsymbol{k}$ 等

于 $\boldsymbol{v}$.

像数量积一样,向量积是由物理情况提出的. 设图 32.3 中的 OP 和 PP' 是 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 的长度和方向. 设 $\boldsymbol{v}'$ 是一个力,它的大小和方向同 PP' 的一样,力 $\boldsymbol{v}'$ 绕 O 的力矩的量度是 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}'$ 的长度,其方向通常取 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}'$ 的方向.

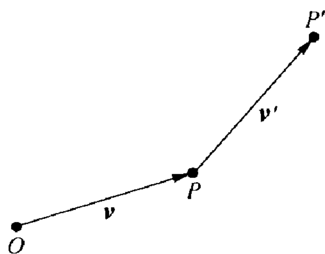


图 32.3

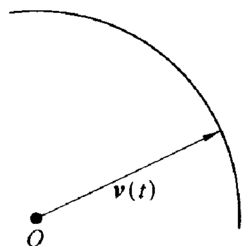


图 32.4

向量代数被推广到变向量和向量微积分. 例如,变向量 $\boldsymbol{v}(t) = a(t)\boldsymbol{i} + b(t)\boldsymbol{j} + c(t)\boldsymbol{k}$ 是一个向量函数,这里 $a(t)$, $b(t)$ 和 $c(t)$ 都是 t 的函数. 由 t 的不同值得到的各向量,如果都以 O 作为原点画出来(图 32.4),则这些向量的终点描出一条曲线. 因此数量变量 t 的向量函数所起的作用类似于通常的函数,比如说,

$$y = x^2 + 7,$$

对这些向量函数建立的向量微积分完全和通常函数的一样.

梯度 u 的概念,

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{14}$$

这里 u 是 x, y 和 z 的一个数量函数,向量函数 $\boldsymbol{v}$ 的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \tag{15}$$

这里 v_1, v_2 和 v_3 是 $\boldsymbol{v}$ 的分量. $\boldsymbol{v}$ 的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}, \tag{16}$$

都从四元数抽象出来.

分析的很多基本定理能用向量形式表示.例如在求解热的偏微分方程的过程中,Ostrogradsky①利用了体积分到曲面积分的下列转换:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S (P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\mathrm{d}S,$$

这里 P, Q, R 都是 x, y 和 z 的函数,并且都是一个向量的分量,而 λ, μ 和 ν 是曲面 S 的法线的方向余弦,S'是在左边积分中的立体 V 的边界.这个定理称为散度定理(也称 Gauss 定理和 Ostrogradsky 定理),它能表成向量形式:设 $\boldsymbol{F}$ 是向量,它的分量是 P, Q, R,而 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的法线方向,则

$$\iiint \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\iint \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{17}$$

同 Stokes 的定理(它是 1854 年②剑桥大学作为 Smith 奖的一次考试的题目,由他首先叙述)一样,用数量形式表述为

$$\iint\limits_S \left\{\lambda\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\nu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}S$$
$$=\int_C\left(P\frac{\partial x}{\partial s}+Q\frac{\partial y}{\partial s}+R\frac{\partial z}{\partial s}\right)\mathrm{d}s,$$

这里 S 是曲面的任一部分,C 是 S 的边界曲线,而 $x(s)$, $y(s)$和 $z(s)$是 C 的参数表示式.用向量形式,Stokes 定理可写成

$$\iint \mathrm{curl}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s, \tag{18}$$

这里 $\boldsymbol{r}(s)$是向量,它的分量是 $x(s)$, $y(s)$和 $z(s)$.

当 Maxwell 写出电磁学的一些表达式和方程,特别是现在以他命名的方程时,他常常把 grad $\boldsymbol{u}$, div $\boldsymbol{v}$ 和 curl $\boldsymbol{v}$ 中涉及的向量的分量写出来.然而 Heaviside 把 Maxwell 方程写成向量形式(第

---

① *Mém. Acad. Sci. St. Peters.*, (6),1,1831,39～53.

② 此定理是 Lord Kelvin 1850 年 7 月在给 Stokes 的一封信中叙述的.

28 章(52)).

的确,向量和向量函数的演算通常是依靠笛卡儿分量来做的,但特别重要的是还要用向量作为单独的实体来思考,用梯度、散度和旋度来思考.这些都有直接的物理意义,更不必说有如下的事实,复杂的技术步骤能直接用向量来实现,如像人们把 $\nabla\cdot(\boldsymbol{u}(x, y, z)\times\boldsymbol{v}(x, y, z))$ 换成它的等价的式子 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}$ 一样.还有,梯度、散度和旋度的积分已被定义,这些定义使这些概念与任何坐标定义无关.这样,代替(14)我们有,例如

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{u}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_S u\boldsymbol{n}\,dS,$$

这里 S 是体积元 $\Delta\tau$ 的边界,而 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的曲面元 dS 的法线.

正当向量分析创立的时候及其后,在四元数的拥护者和向量的拥护者之间对究竟哪一个更为有用的问题有很多争论.四元数主义者迷信四元数的价值,而向量分析的提倡者同样是派性的人.一方在 Tait 这些四元数的领头的支持者们之下结成联盟,另一方是结盟于 Gibbs 和 Heaviside 之下.关于争论,Heaviside 讽刺地评论说,对四元数的处理,四元数是最好的工具.而 Tait 则描述 Heaviside 的向量分析为“组合了 Grassmann 和 Hamilton 的记法的一种阴阳怪物.”Gibbs 的书在促进向量的产生方面证明有不可估量的价值.

这争论最后以有利于向量而解决了.工程师欢迎 Gibbs 和 Heaviside 的向量分析,虽然数学家们不是这样.20 世纪开始时,物理学家也完全信服向量分析是他们所要的东西.有关这课题的教科书立刻在所有国家出现,而且现在是标准化的了.最后,数学家们也跟着适应了,并把向量方法引进到分析和解析几何中来.

应当指出物理学对促进创立这样的数学对象,如四元数、Grassmann 超复数和向量的影响,这些创造变成数学的一部分,但它们的意义远远超出这些新课题的添加.这几种量的引进揭开了

新的数学前景——不是只有一个实数和复数的代数,而是有很多个不相同的代数.

6. 线性结合代数

从纯粹代数的观点看,四元数是令人兴奋的,因为它提供了一个除了乘法的交换性而外具有实数和复数性质的代数的例子. 19 世纪后半期,为了看到能创造出些什么样的变种,同时又要保持实数和复数的许多性质,许多超复数系统被大量探索出来了.

Cayley① 给出了实四元数的一个八单元推广,他的单元是 1, $e_1, e_2, \cdots, e_7$,具有性质

$$e_i^2=-1,\ e_ie_j=-e_je_i,\ j=1,2,\cdots,7 \text{ 且 } i\neq j,$$

$$e_1e_2=e_3,\ e_1e_4=e_5,\ e_1e_6=e_7,\ e_2e_5=e_7,\ e_2e_4=-e_6,$$

$$e_3e_4=e_7,\ e_3e_5=e_6,$$

以及对三足标的每一个集合循环地进行排列,从这后 7 个方程得到的 14 个方程,例如 $e_2e_3=e_1$; $e_3e_1=e_2$.

一个一般的(八元数)数 x 定义为

$$x=x_0+x_1e_1+\cdots+x_7e_7,$$

这里 x_i 是实数. x 的模 $N(x)$定义为

$$N(x)=x_0^2+x_1^2+\cdots+x_7^2.$$

积的模等于模的积. 乘法的结合律一般不成立(和乘法的交换律一样). 右除及左除,除去用零除以外,总是可能的并且是唯一的. 这件事 Cayley 没注意到,而是由 Leonard Eugene Dickson②证明的. Cayley 在以后的文章中给出了另外的超复数的代数,和上面的一个有些不同.

---

① *Phil. Mag.*, (3),26,1845,210~213 和 30,1847,257~258 = *Coll. Math. Papers*, 1, 127 和 301.

② *Amer. Math. Soc. Trans.*, 13,1912,59~73.

Hamilton 在他的《四元数讲义》① 中还引进了拟四元数，即带有复系数的四元数. 他指出乘积定律对这些拟四元数不成立；即两个非零的拟四元数相乘可以为零.

伦敦的大学学院的数学和力学教授 William Kingdon Clifford(1845—1879)，创立了另一类型的超复数②，他也称之为拟四元数. 设 q 和 Q 是实四元数，又设 ω 满足 $\omega^2=1$，且 ω 与每个实四元数交换，则 $q+\omega Q$ 是一拟四元数. Clifford 的拟四元数满足乘法的乘积定律，但这乘法不是结合的. Clifford 在后来的工作中引进了以他的名字命名的代数. Clifford 代数具有单元 $1, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$，每个单元的平方满足 $e_i^2=-1$ 而 $e_ie_j=-e_je_i(i\neq j)$. 两个或多个单元的每一乘积是一个新的单元，所以有 2^n 个不同的单元. 所有乘积是可结合的，一个型就是一个数量乘上一个单元，而一个代数就由型的和与积生成.

新的超复数系统继续涌现，种类是大量的. 哈佛大学数学教授 Benjamin Peirce(1809—1880)在一篇 1870 年宣读而在 1871 年③以石印形式发表的文章《线性结合代数》中定义并给出一份当时已经知道的线性结合代数概要. 线性这个词意味着任何两个原始单元的积可化简成这些单元之一，就像四元数中 $\boldsymbol{i}$ 乘 $\boldsymbol{j}$ 用 $\boldsymbol{k}$ 代替一样，而结合这个词意味着乘法是结合的. 在这些代数中，加法具有实数和复数的通常性质. 在这篇文章中 Peirce 引进了幂零元的概念，即元素 A 对某正整数 n 满足 $A^n=0$，也引进了幂等元的概念，即元素 A 对某个 n 满足 $A^n=A$. 他还证明了：一个代数如果在其中至少有一个非幂零元，则必具有一个幂等元.

就在数学家们创立特定的代数的同一期间，在各种这样的代数中能有多大自由度的问题也已经出现在他们面前. Gauss 深信

① 1853, p. 650.

② *Proc. Lond. Math. Soc.*, 4, 1873, 381～395 = *Coll. Math. Papers*, 181～200 与 *Amer. Jour. of Math.*, 1, 1878, 350～358 = *Coll. Math., Papers*, 266～276.

③ *Amer. Jour. of Math.*, 4, 1881, 97～229.

(*Werke*. 2,178),保持复数基本性质的复数的扩张是不可能的.有意义的是,当 Hamilton 找寻一个三维的代数来表达空间的向量而建立了没有交换性的四元数时,他不能证明三维交换代数不存在. Grassmann 也没有这样一个证明.

在这个世纪的后期,精确的定理才建立起来. 1878 年, F. Georg Frobenius(1849—1917)[①]证明了:具有有限个原始单元的,有乘法单位元素的实系数(原始单元的)线性结合代数,如服从结合律,那就只有实数、复数和实四元数的代数. 这个定理也由 Charles Sanders Peirce(1839—1914)在他父亲的文章的附录[②]中独立地加以证明. Weierstrass1861 年得到另一关键结果:有有限个原始单元的,实或复系数(原始单元的)线性结合代数,如服从乘积定律和乘法交换律,就是实数的代数和复数的代数. 大约 1870 年 Dedekind 获得了同样的结果. Weierstrass 的结果发表于 1884 年[③]而 Dedekind 发表在下一年[④].

1898 年 Adolf Hurwitz(1859—1919)[⑤]证明了实数、复数、实四元数和 Clifford 拟四元数是仅有的满足乘法定律的线性结合代数.

·这些定理是有价值的,因为它们告诉我们,在推广复数系统时,如果我们希望至少保持它的某些代数性质,那么我们能期望得到什么结果. 如果 Hamilton 知道这些定理的话,他就会节省找寻三维向量代数的好些年劳动.

---

① *Jour. für Math.*, 84,1878,1～63 = *Ges. Abh.*, 1,343～405.

② *Amer. Jour. of Math.*, 4,1881,225～229.

③ *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1884,395～410 = *Math. Werke*, 2, 311～332.

④ *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1885,141～159 与 1887,1～7 = *Werke*, 2, 1～27.

⑤ *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1898,309～316 = *Math. Werke*, 2, 565～571.

具有有限个或甚至无限个生成(原始)单元以及具有或不具有除法的线性代数的研究,几乎到20世纪还继续成为一个活跃的课题,如Leonard Eugene Dickson和J. H. M. Wedderburn那样的人对这个课题作了许多贡献.

参 考 书 目

Clifford, W. K.: *Collected Mathematical Papers* (1882), Chelsea (reprint), 1968.

Collins, Joseph V.: "An Elementary Exposition of Grassmann's *Ausdehnungslehre*", *Amer. Math. Monthly*, 6, 1899, several parts; and 7, 1900, several parts.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, pp. 252~264.

Crowe, Michael J.: *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, 1967.

Dickson, Leonard E.: *Linear Algebras*, Cambridge University Press, 1914.

Gibbs, Josiah W., and E. B. Wilson: *Vector Analysis* (1901), Dover (reprint), 1960.

Grassmann, H. G.: *Die lineale Ausdehnungslehre* (1844), Chelsea (reprint), 1969.

Grassmann, H. G.: *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, 3 vols., B. G. Teubner, 1894~1911; Vol. 1, Part Ⅰ, 1~319 contains *Die lineale Ausdehnungslehre*; Vol, 1, Part Ⅱ, 1~383 contains *Die Ausdehnungslehre*.

Graves, R. P.: *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 vols., Longmans Green, 1882~1889.

Hamilton, Sir Wm. R.: *Elements of Quaternions*, 2 vols., 1866, 2nd ed., 1899~1901, Chelsea (reprint), 1969.

Hamilton, Sir Wm. R.: *Mathematical Papers*, Cambridge University Press, 1967, Vol. 3.

Hamilton, Sir Wm. R.: "Papers in Memory of Sir William R. Hamilton", *Scripta Math.*, 1945; also in *Scripta Math.*, 10, 1944, 9~80.

Heaviside, Oliver: *Electromagnetic Theory*, Dover (reprint), 1950, Vol. 1.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert*, Chelsea (reprint), 1950, Vol. 1, pp. 167~191; Vol. 2, pp. 2~12.

Maxwell, James Clerk: *The Scientific Papers*, 2 vols., Dover (reprint), 1965.

Peacock, George: "Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis", *British Assn. for Advancement of Science Report for* 1833, London, 1834.

Peacock, George: *A Treatise on Algebra*, 2 vols., 2nd ed., Cambridge University Press, 1845; Scripta Mathematica (reprint), 1940.

Shaw, James B.: *Synopsis of Linear Associative Algebra*, Carnegie Institution of Washington, 1907.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2, pp. 677~696.

Study, E.: "Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1898. Ⅰ. 147~183.

第 33 章

行列式和矩阵

这就是结构好的语言的好处，它的简化的记法常常是深奥理论的源泉.

P. S. Laplace

1. 引　　言

虽然行列式和矩阵在 19 世纪受到很大的注意，而且写了成千篇关于这两个课题的文章，但它们在数学上并不是大的改革. 向量的概念，从数学的观点来看不过是有序三元数组的一个集合，然而它以力或速度作为直接的物理意义，并且数学上用它能立刻写出物理上所说的事情. 向量用于梯度、散度、旋度就更有说服力. 同样，虽然 dy/dx 在数学上不过是一个符号，表示包括 $\Delta y/\Delta x$ 的极限的长式子，但导数本身是一个强有力的概念，能使我们直接而创造性地想象物理上发生的事情. 因此，虽然表面上看，数学不过是一种语言或速记，但它的大多数生动的概念能对新的思想领域提供钥匙. 相反地，行列式和矩阵却完全是语言上的改革. 对于已经以较扩展的形式存在的概念，它们是速记的表达式. 它们本身不能直接说出方程或变换所没有说出的任何东西，当然，方程和变换的表达方式是冗长的. 尽管行列式和矩阵用作紧凑的表达式，尽管矩阵在领悟群论的一般定理方面具有作为具体的群的启发作用，但它们都没有深刻地影响数学的进程. 然而已经证明这两个概念是高度有用的工具，现在是数学器具的一部分.

2. 行列式的一些新应用

行列式出现于线性方程组的求解(第 25 章第 3 节). 这个问题和消元法、坐标变换、多重积分中的变数替换、解行星运动的微分方程组、将三个或多个变数的二次型及二次型束(一个束是 $A+\lambda B$, 这里 A, B 是指定的型,而 λ 是参数)化简成标准型,全都引起行列式的各种新应用. 19 世纪的工作直接继承于 Cramer, Bezout, Vandermonde, Lagrange 和 Laplace 的工作.

行列式这个词(Gauss 用以指二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 的判别式)是 Cauchy 把它用于已经出现在 18 世纪著作中的行列式的. 把元素排成方阵并采用双重足标的记法也是属于他的.[①] 例如一个三阶的行列式写成(两条竖线是 Cayley 在 1841 年引进的)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

在这篇文章中,Cauchy 给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理. 主要结果之一是行列式的乘法定理. Lagrange[②] 已经对三阶行列式给出了这个定理,但因为他的行列式的行是一个四面体的顶点的坐标,他未被引向普遍化. 按 Cauchy 的说法(用现代记号表达),一般定理为

$$|a_{ij}|\,|b_{ij}| = |c_{ij}|, \tag{2}$$

这里 $|a_{ij}|$ 和 $|b_{ij}|$ 代表 n 阶行列式,而 $c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$. 就是说,在乘积的第 i 行第 j 列的项是 $|a_{ij}|$ 的第 i 行和 $|b_{ij}|$ 的第 j 列的对应元素的乘积之和. 这个定理在 1812 年曾由 Jacques P. M. Binet (1786—1856)叙述过但没有令人满意的证明[③]. Cauchy 还改进了

---

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, 10,1815,29～112 = *Œuvres*, (2),1,91～169.

② *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773,85～128 = *Œuvres*, 3,577～616.

③ *Jour. de l'Ecole Poly.*, 9,1813,280～302.

Laplace 行列式展开定理,并给了一个证明(第 25 章第 3 节).

Heinrich F. Scherk(1798—1885)在他的《数学论文》(*Mathematische Abhandlungen*, 1825)中给出了行列式的几个新的性质.他建立了只有一行(或列)不同的两个行列式相加的规则和一常数乘行列式的规则.他还叙述了,当一个方阵的某一行是另两行或几行的线性组合时,其行列式为零,以及三角行列式(主对角线以上或以下的所有元素是零)的值是主对角线上的元素的乘积.

在 50 多年内行列式理论的始终不渝的作者之一是 James Joseph Sylvester(1814—1897).在赢得剑桥大学数学荣誉会考一等第二名后,他仍然被禁止在剑桥大学任教,因为他是犹太人.从 1841 年起到 1845 年,他是弗吉尼亚(Virginia)大学的教授.后来他回到伦敦,并从 1845 年起到 1855 年担任书记官和律师,他接受了在英格兰伍尔芝(Woolwich)军事科学院的比较低的教授职位,并在那里任职到 1871 年.经过一些年的多方活动以后成为霍普金斯(Hopkins)大学的教授,在那里自 1876 年起演讲不变量理论,他开创了合众国的纯数学的研究,并创办了《美国数学杂志》.1884 年他回到英格兰,70 岁时成为牛津大学教授,并保持职位到去世.

Sylvester 是一个活泼、敏感、兴奋、热情甚至容易激动的人.他的谈话是出色而机敏的,他用火一般的热情介绍他的思想.在他的文章中,他使用热烈的语言.他引进了很多新术语,开玩笑地把自己比做 Adam(Adam 曾给野兽和花起名字).虽然他同力学和不变量理论等许多不同的领域相联系,但他不爱好系统而彻底地做出理论.实际上他频繁地发表猜想,虽然其中许多是出色的,但其余的是不正确的.他忧伤地承认,他的大陆的朋友们"在损害他的判断力的条件下恭维他的预见力".他的主要贡献是组合的思想和从较具体的发展中进行抽象.

Sylvester 的重要成就之一是改进了从一个 n 次的和一个 m

次的多项式中消去 x 的方法,他称这为析配消元法(dialytic method)①. 例如,为消去方程

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,$$
$$b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

中的 x,他形成五阶行列式

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

这个行列式为零是这两个方程有公共根的必要充分条件. Sylvester 没有给出证明. 这方法,如 Cauchy 所证明的②,引导到 Euler 和 Bezout 方法的同样结果.

当行列式的元素是 t 的函数时,它的导数的公式首先由 Jacobi 在 1841 年给出③. 设 a_{ij} 是 t 的函数,A_{ij} 是 a_{ij} 的余子式,D 是行列式,则

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}}=A_{ij},$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\sum_{i,j}A_{ij}a'_{ij},$$

这里撇表示对 t 的微商.

行列式被应用到另一方面,即应用到多重积分的变数替换中. 首先由 Jacobi(1832 和 1833 年)找到一些特殊的结果. 后来 Eugène Charles Catalan(1814—1894)在 1839 年④给出今天大学生

① *Phil. Mag.*, 16, 1840, 132～135 和 21, 1842, 534～539 = *Coll. Math. Papers*, 1, 54～57 和 86～90.

② *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, 1, 1840, 385～422 = *Œuvres*, (2), 11, 466～509.

③ *Jour. für Math.*, 22, 1841, 285～318 = *Werke*, 3, 355～392.

④ *Mémoires, couronnés par l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 14, 1841.

所熟悉的结果.例如二重积分

$$\iint F(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

在变数替换

$$x = f(u, v), y = g(u, v) \tag{5}$$

下成为

$$\iint G(u, v)\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{6}$$

这里 $G(u, v) = F(x(u, v), y(u, v))$. (6)中的行列式称为 x, y 关于 u, v 的 Jacobi 行列式或函数行列式.

Jacobi 对于函数行列式专门有一篇重要文章①. 在此文中,Jacobi 考虑了 n 个函数 u_1, u_2, $\cdots$, u_n, 其中每一个都是 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的函数;他提出问题,问什么时候从这 n 个函数能消去 x_i 使得这些 u_i 用一个方程联系起来. 如果这不可能,就称函数 u_i 是无关的. 答案是,如果 u_i 关于 x_i 的 Jacobi 行列式是零,则函数不是无关的,反之也对. 他还给出了 Jacobi 行列式的乘积定理,即如果 u_i 是 y_i 的函数,而 y_i 是 x_i 的函数,则 u_i 关于 x_i 的 Jacobi 行列式是 u_i 关于 y_i 的 Jacobi 行列式和 y_i 关于 x_i 的 Jacobi 行列式的乘积.

3. 行列式和二次型

将二次曲线和二次曲面的方程变形,选有主轴方向的轴作为坐标轴以简化方程的形状,这个问题是在 18 世纪中引进的. 当方程是标准型即主轴是坐标轴时,二次曲面用二次项的符号来进行分类,这是 Cauchy 在他的《几何中无穷小演算的应用教程》(*Leçonssur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*,

① *Jour. für Math.*, 22,1841,319～359 = *Werke*, 3,393～438.

1826)①中给出的.然而,那时并不清楚,在化简成标准型时,总得到同样数目的正项和负项. Sylvester 回答了这个问题,利用了他关于 n 个变数的二次型的惯性定律②. 早已知道,

$$(7)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

总能用具有非零行列式的实线性变换

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

化成 r 个平方项的和③:

$$(8)\qquad y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_{r-s}^2.$$

Sylvester 定律说,正项的个数 s 以及负项的个数 $r-s$ 总是不变的,不管用的是什么实变换. Sylvester 把这定律看成是自明的,没有给出证明.

这定律被 Jacobi 重新发现和证明了④. 设一个二次型对变数的所有非零的实值都取正值,就称它为正定的;如对上述变数它能取正值或零,就称为半定的;而当取值永远是负的或 0 时就称为负定的,这些术语是 Gauss 在他的《算术研究》中加以引进的(第 271 节).

二次型化简的进一步研究涉及二次型或行列式的特征方程的概念. 三个变数的二次型在 18 世纪和 19 世纪前半期通常是写成

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

而在近代则写成

$$(9)\quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

在二次型的后一种记法中曾把它同行列式

---

① *Œuvres*, (2),5,244~285.

② *Phil. Mag.*, (4),1852,138~142 = *Coll. Math. Papers*, 1,378~381.

③ r 是型的秩,即系数矩阵的秩,秩的概念见第 4 节.

④ *Jour. für Math.*, 53,1857,265~270 = *Werke*, 3,583~590;也看 593~598.

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ a_{ij}=a_{ji}$$

相联系. 二次型或行列式的特征方程或本征方程是

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

满足这个方程的值 λ 称为特征根或本征根. 由 λ 的这些值能立刻获得主轴的长度①.

特征方程的概念隐含地出现在 Euler 的化三个变数的二次型到它们的主轴上去的著作中②,虽然他对特征根的实性缺乏证明. 特征方程的概念首先明确地出现在 Lagrange 关于线性微分方程组的著作中③,也出现于 Laplace 在同一领域的著作中④.

Lagrange 在处理他那时代已经知道的六大行星的运动微分方程组时,涉及到这些行星相互作用的长期微扰. 他的特征方程(也称长期方程)联系于一个六阶行列式,而 λ 的值确定了微分方程组的解. 他会分解这六次方程并且获得了根的情况. Laplace 在他的《天体力学》中证明了,如果这些行星都沿同一方向运动,则这六个特征根是实数且各不相同. 三个变数的二次型的特征值的实性是由 Hachette, Monge 和 Poisson 建立的⑤.

Cauchy 从 Euler, Lagrange 和 Laplace 的著作中认识了共同

① 型(9)可以通过一个线性变换 $x'_i=\sum_j m_{ij}x_j\ (i,j=1,2,3)$ 化简成 $\sum_{j=1}^{3}\lambda_j x_j'^2$, 这里 λ_j 是(11)的特征根. 用矩阵语言说,变换的矩阵 M 是正交的;即 M 的转置等于 M 的逆.

② 他的 *Introductio*(1748)的附录的第五章 = *Opera*, (1), 9, 379～392.

③ *Misc. Taur.*, 3, 1762～1765 = *Œuvres*, 1, 520～534, 与 *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1774 = *Œuvres*, 6, 655～666.

④ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1772, pub. 1775 = *Œuvres*, 8, 325～366.

⑤ Hachette 与 Monge: *Jour. de l'Ecole Poly.*, 4, 1801～1802, 143～169; Poisson 与 Hachette, *ibid.*, 170～172.

的特征值问题. 在他 1826 年的《教程》①中着手研究化简三个变数的二次型的问题,并证明了特征方程在直角坐标系的任何变换下是不变的. 三年后在他的《数学练习》(*Exercices de mathématiques*)②中,他开始研究行星轨道的长期不等式的问题. 在这工作的过程中,他证明了 n 个变数的两个二次型

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad B = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$$

(Cauchy 的 B 是平方和)能用一个线性变换

$$x_1 = c_{11}x_1' + \cdots + c_{1n}x_n',$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = c_{n1}x_1' + \cdots + c_{nn}x_n'$$

同时化成平方和. 他还解决了对任何多个变数的二次型找主轴的问题,在这工作中,他再次用到特征根的概念.

他的工作总括如下:设 A 和 B 是任两个给定的二次型,于是能考虑二次型束 $uA + vB$,这儿 u 和 v 是任意参数. 束的本征根是比 $-u/v$ 的一些值,这些值使束的行列式 $|uA + vB|$ 为零. Cauchy 证明了束的本征根在如下的特殊情况下全为实数,即当其中一个二次型对变数的所有非零实数值是正定的情况. 因 $uA + vB$ 的行列式是对称的($d_{ij} = d_{ji}$),而 B 可以是单位行列式($b_{ij} = 0$ 对 $i \neq j$,而 $b_{ii} = 1$). Cauchy 证明了,任何阶的任何一个实对称行列式都有实特征根. Cauchy 的结果在 1834 年由 Jacobi③ 所重复,排除了有相等本征根的情况. 特征方程这个术语是属于 Cauchy 的④.

相似行列式的概念也产生于变换的研究. 两个行列式 A 和 B 是相似的,如果存在一个非零行列式 P 使 $A = P^{-1}BP$. Cauchy 考

---

① *Œuvres*, (2),5,244~285.

② 4,1829,140~160 = *Œuvres*, (2),9,174~195.

③ *Jour. für Math.*, 12,1834,1~69 = *Werke*, 3, 191 ~ 268.

④ *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, 1,1840,53 = *Œuvres*, (2),11,76.

察了相似变换,在 1826 年的《教程》①中,他证明了它们有相同的特征值.相似变换的重要性在于将投影变换分类(第 38 章第 5 节),这是一个长期以来被综合处理的问题.设一个图形 F 是用线性变换 A 同图形 G 相联系,并设另一个这样的变换 B 变 F 到 F',变 G 到 G',则变 F' 到 G' 的变换 C 将和 A 有同样的性质.变换 $C=BAB^{-1}$,这是由于 B^{-1} 变 F' 到 F,A 变 F 到 G,而 B 变 G 到 G' 的缘故.

1858 年 Weierstrass②对同时化两个二次型成平方和给出了一个一般的方法.他还证明了,如果二次型之一是正定的,那么,即使某些特征根是相等的,这个化简也是可能的. Weierstrass 对此问题的兴趣是由围绕平衡位置的小振动的动力学问题引起的,他用他关于二次型的工作证明了稳定性并不因该系统的相等周期的出现而受到破坏,这与 Lagrange 和 Laplace 的假设相反.

Sylvester 在 1851 年③研究二次曲线和二次曲面的切触和相交时需要考虑这种二次曲线和二次曲面束的分类.特别地,他找寻任何束的标准型,把束写成形式 $A+\lambda B$,这里

$$A = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy,$$

$$B = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy,$$

他考察了行列式

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} a+\lambda A & f+\lambda F & e+\lambda E \\ f+\lambda F & b+\lambda B & d+\lambda D \\ e+\lambda E & d+\lambda D & c+\lambda C \end{vmatrix}.$$

他的分类方法引进了初等因子的概念. $A+\lambda B$ 的行列式的元素是 λ 的多项式. Sylvester 证明了,如果 $|A+\lambda B|$ 的任一阶的全部子式有一个公共因子 $\lambda+\varepsilon$,则当 A 和 B 经它们变数的一个线性变换同时变换以后,这个因子将仍是同样子式组的公共因子.他还证

---

① *Œuvres*, (2), 5, 244~285.

② *Monatsber. Berliner Akad.*, 1858, 207~220 = *Werke*, 1, 233~246.

③ *Phil. Mag.*, (4), 1, 1851, 119~140 = *Coll. Math. Papers*, 1, 219~240.

明了,如果全部 i 阶子式有因子 $(\lambda+\varepsilon)^{\alpha}$,则 $(i+h)$ 阶子式将包含因子 $(\lambda+\varepsilon)^{(h+1)\alpha}$. 对每个 i,i 阶子式的最大公因子 $D_i(\lambda)$中所出现的各线性因子的方幂是 $|A+\lambda B|$ 的或任何一般行列式 A 的初等因子. 对每个 i,$D_i(\lambda)$被 $D_{i-1}(\lambda)$所除的商称为 $|A+\lambda B|$ 的不变因子. Sylvester 没有证明不变因子组成两个二次型的不变量的完全集.

Weierstrass①完成了二次型的理论并将其推广到双线性型,双线性型是

$$a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+\cdots+a_{nn}x_ny_n.$$

用 Sylvester 初等因子的概念,Weierstrass 得到束 $A+\lambda B$ 的标准型,这里 A 和 B 不一定是对称的,但服从于 $|A+\lambda B|$ 不恒等于零的条件. 他还证明了属于 Sylvester 的一个定理的逆. 这逆定理说,如 $A+\lambda B$ 的行列式同 $A'+\lambda B'$ 的行列式的初等因子一致,则能找到一对线性变换同时将 A 变到 A',将 B 变到 B'.

在行列式的大量的定理中,有一些涉及到 n 个未知数 m 个线性方程的解. Henry J. S. Smith(1826—1883)②引进了增广矩阵和非增广矩阵的术语,例如,来讨论方程组

$$\begin{cases}a_1x+a_2y=f\\ b_1x+b_2y=g\\ c_1x+c_2y=h\end{cases}$$

的解的存在性和个数. 增广矩阵和非增广矩阵是

$$\left\|\begin{matrix}a_1 & a_2 & f\\ b_1 & b_2 & g\\ c_1 & c_2 & h\end{matrix}\right\| \text{和} \left\|\begin{matrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{matrix}\right\|.$$

有很多人,包括 Kronecker 和 Cayley 在内,作出的一系列结果引导到现在用矩阵来叙述的一般结果,但在 19 世纪中叶它们是用增

① *Monatsber. Berliner Akad*, 1868,310～338 = *Werke*, 2,19～44.

② *Phil. Trans.*, 151,1861,293～326 = *Coll. Math. Papers*, 1,367～409.

广和非增广行列式来叙述的. 关于 n 个未知数 m 个方程, m 可以大于、等于或小于 n, 方程可以是齐次的(常数项为零), 或非齐次的, 其一般结果叙述在(例如)Charles L. Dodgson(Lewis Carroll, 1832—1898)的《行列式的初等理论》(*An Elementary Theory of Determinants*, 1867)中. 在上面的课本中可发现现代的条件: 为使 n 个未知数的 m 个非齐次线性方程的方程组是相容的, 必要而充分的是, 在非增广和增广矩阵中的最高阶非零行列式是同阶的, 用矩阵的语言来说就是两个矩阵的秩相同.

整个 19 世纪都得到行列式的新结果. 作为一个例证, 可举 Hadamard 在 1893 年[①]证明的一个定理, 虽然这定理在此以前及以后有很多人知道和证明过. 设行列式 $D = |a_{ij}|$ 的元素满足条件 $|a_{ij}| \leqslant A$, 则

$$|D| \leqslant A^n \cdot n^{n/2}.$$

行列式的以上各定理只是已建立的大量定理中很少的样本. 在一般行列式的大量其他定理之外, 还有成百个有关特殊形式行列式的其他定理, 这些特殊形式中有对称行列式($a_{ij} = a_{ji}$), 斜对称行列式($a_{ij} = -a_{ji}$), 正交行列式(正交坐标变换的行列式), 加边行列式(由添加一些行和列扩大而成的行列式), 复合行列式(元素本身是行列式), 以及其他很多特殊类型的行列式.

4. 矩　阵

可以说矩阵这个课题在诞生之前就发展得很好了. 我们知道, 行列式的研究开始于 18 世纪中叶以前. 行列式包括一个数字方阵, 通常总是涉及这个方阵的值, 就是由行列式的定义所给出的值. 然而从行列式的大量工作中明显地表现出来的是, 对于很多目的, 方阵本身都可以研究和使用, 不管行列式的值是否与该问题有

---

① *Bull. des Sci. Math.*, (2), 17, 1893, 240～246 = *Œuvres*, 1, 239～245.

关.于是,仍然需要认识方程本身应该有与行列式无关的本性.方阵本身称为矩阵.矩阵这个词是 Sylvester①首先使用的,这是发生在他实际上希望引用数字的矩形阵列而又不能再用行列式这个词的时候,虽然那时他仅仅涉及到由矩形阵列的元素所能形成的那些行列式.后来,如我们在上一节中看到的,在根本没有说到矩阵时增广矩阵就自由地使用了.矩阵的基本性质,如我们将要看到的,也是在行列式的发展中建立起来的.

确实如像 Arthur Cayley 所坚持的(在下面引证的 1885 年的文章中)那样,在逻辑上,矩阵的概念先于行列式的概念,而在历史上次序正相反.这就是为什么在矩阵引进的时候它的基本性质就已经清楚了的原因.因此,当数学家们预言矩阵概念的可能的用途时,有一个普遍的印象是错误的,即矩阵是由纯数学家发明的有高度创见的独立创造.由于矩阵的应用已很好地建立,这使 Cayley 想起要把它们作为不同的实体引进.他说:"我决然不是通过四元数而获得矩阵概念的;它或是直接从行列式的概念而来,或是作为一个表达方程组

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

的方便的方法而来的."就这样他引进了矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

它代表了这个变换的主要信息.因为 Cayley 是首先指出矩阵本身的,而且关于这个题目首先发表了一系列文章,所以他一般地被归功为矩阵论的创立者.

Cayley 1821 年生于一个古老而有才能的英国家庭,在学校中他就显示了数学才能.他的老师说服他的父亲送他到剑桥,而不要让他做家务.在剑桥他是数学荣誉会考的一等第一名,并获得

① *Phil. Mag.*, (3), 37,1850,363～370 = *Coll. Math. Papers*, 1,145～151.

Smith 奖. 他当选为剑桥的三一学院的研究员和助理导师，但 3 年后由于必须担任圣职而离开. 他转向法律并在这个职业上花费了后来的 15 年. 这期间他用了可观的时间搞数学，并发表了近 200 篇文章. 也是在这时，他和 Sylvester 开始了长期的友谊和合作.

1863 年，他被任命为剑桥新创立的 Sadler 数学教授. 除去 1882 年受 Sylvester 的聘请在霍普金斯大学以外，他一直在剑桥，直到 1895 年逝世为止. 他在各个课题上都是多产的作者和创造者，特别是在 n 维解析几何、行列式理论、线性变换、斜曲面和矩阵论方面. 同 Sylvester 一起，他是不变量理论的奠基人. 由于这大量的贡献，他获得很多荣誉.

和 Sylvester 不一样，Cayley 是一个性情温和、冷静判断和沉着的人，他慷慨地帮助和鼓励别人. 在法律方面的良好工作和数学上的巨大成就以外，他还找时间培养兴趣于文学、旅行、绘画和建筑学.

同研究线性变换下的不变量(第 39 章第 2 节)相结合，Cayley 首先引进矩阵以简化记号[①]. 这里他给出一些基本概念. 接着是他关于这个课题的头一篇重要文章《矩阵论的研究报告》[②].

为简单起见，我们就 2×2 矩阵或 3×3 矩阵来叙述 Cayley 的一些定义，虽然这些定义是用于 $n\times n$ 矩阵并在某些情况下用于长方形矩阵的. 两个矩阵相等，如果他们的对应元素相等. Cayley 定义零矩阵和单位矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

定义两个矩阵的和为这样的矩阵，它的元素是两个相加矩阵的对应元素之和. 他注意到这个定义可用于任何两个 $m\times n$ 矩阵，且加

① *Jour. für Math.*, 50, 1855, 282～285 = *Coll. Math. Papers*, 2, 185～188.

② *Phil. Trans.*, 148, 1858, 17～37 = *Coll. Math. Papers*, 2, 475～496.

法是可结合和可调换的(交换的). 若 m 是一个数而 A 是一个矩阵,则 mA 被定义为这样的矩阵,它的每一个元素都是 A 的对应元素的 m 倍.

Cayley 直接从两个相继变换的效应的表示作出两个矩阵乘法的定义. 例如,设变换

$$x' = a_{11}x + a_{12}y,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y,$$

后跟着变换

$$x'' = b_{11}x' + b_{12}y',$$
$$y'' = b_{21}x' + b_{22}y',$$

则 x'', y''和 x, y 之间的关系由下式给出:

$$x'' = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y,$$
$$y'' = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y.$$

因此 Cayley 定义两个矩阵的积为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

即元素 c_{ij} 是左边因子的第 i 行元素和右边因子的第 j 列对应元素乘积之和. 乘法是可结合的,但一般不可交换. Cayley 指出, $m \times n$ 矩阵只能用 $n \times p$ 矩阵去乘.

在同一篇文章中,他叙述了

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

的逆为

$$\frac{1}{\nabla}\begin{pmatrix} \partial_a\nabla, & \partial_{a'}\nabla, & \partial_{a''}\nabla \\ \partial_b\nabla, & \partial_{b'}\nabla, & \partial_{b''}\nabla \\ \partial_c\nabla, & \partial_{c'}\nabla, & \partial_{c''}\nabla \end{pmatrix},$$

这里 ∇ 是矩阵的行列式,而 $\partial_x\nabla$ 是 x 在这行列式中的余子式,即 x 的子式带上适当的符号. 一个矩阵和它的逆的乘积是单位矩阵,用 I 表示.

当 $\nabla=0$ 时,矩阵是不定的(用现代术语来说,是奇异的),因而没有逆. Cayley 断言,两个矩阵的乘积可以是零,而无须其中有一个为零,只须其中之一是不定的. 实际上,Cayley 是错的;两个矩阵都必须是不定的才行. 因为假如 $AB=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$. 且仅 A 是不定的,那么 B 的逆,即 B^{-1} 存在,因而 $ABB^{-1}=0\cdot B^{-1}=0$. 但 $BB^{-1}=I$, 因此 $AI=0$ 或 $A=0$.

折转矩阵(转置或共轭)定义为这样的矩阵,矩阵中行和列对换. 给出陈述说(但没有证明) $(LMN)'=N'M'L'$, 这里撇(′)表示转置. 如果 $M'=M$, 则 M 称为是对称的;如果 $M'=-M$, 则 M 是斜对称的(或交错的). 任何一个矩阵可表成一个对称矩阵和一个斜对称矩阵的和.

从行列式理论中带来的另一个概念是方阵的特征方程. 对于矩阵 M,它定义为

$$|M-xI|=0,$$

这里 $|M-xI|$ 是矩阵 $M-xI$ 的行列式,而 I 是单位矩阵. 例如设

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

则特征方程(Cayley 不用这术语,虽然它是由 Cauchy 引进用于行列式的[第 3 节])是

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0. \tag{13}$$

这方程的根是矩阵的特征根(特征值).

在 1858 年的文章中,Cayley 宣告了一个结果,现在称为任意阶方阵的 Cayley-Hamilton 定理. 这定理说,在(13)中用 M 代替 x,则得到的矩阵是零矩阵. Cayley 说他曾对 3×3 情况验证了这定理,又说进一步的证明是不必要的. Hamilton 与这定理的关系是根据下述事实,即在他的《四元数讲义》①中在引进向量 $\boldsymbol{r}$ 的线性向量函数 $\boldsymbol{r}'$ 的概念时,涉及到从 x, y 和 z 到 x', y' 和 z' 的一个

① 1853, p. 566.

线性变换.他证明这个变换的矩阵满足它的特征方程,虽然他不想正式用矩阵语言来表述.

别的数学家发现了一些矩阵类的特征根的特殊性质. Hermite[①] 证明了,如矩阵 $M = M^*$,则特征根是实数,这里 M^* 是将 M 的每个元素用它的共轭复数代替后,再转置得到的矩阵(这样的矩阵 M 现在称为 Hermite 矩阵). 1861 年 Clebsch[②] 从 Hermite 定理推导出,实斜对称矩阵的非零特征根是纯虚数.后来 Arthur Buchheim[③](1859—1888)证明了,若 M 是对称的,且元素是实数,则特征根是实数,虽然 Cauchy[④]已对行列式建立了这个结果. Henry Taber(1860—?)在另一篇文章[⑤]中作为显然的事实断言:设

$$x^n - m_1 x^{n-1} + m_2 x^{n-2} - \cdots \pm m_n = 0$$

是任一方阵 M 的特征方程,则 M 的行列式是 m_n,如果把矩阵的主子式理解为这样的子式的行列式,这些子式的对角线是矩阵 M 的主对角线的一部分,则 m_i 是 i 阶主子式的和.于是特别地,m_1 是主对角元的和,它也是特征根的和.这个和称为矩阵的迹. Taber 的断言是由 William Henry Metzler(1863—?)[⑥]给出证明的.

Frobenius[⑦] 对于特征方程提出了一个问题,他要找最小多项式,即矩阵所满足的次数最低的多项式.他说,它是由特征多项式的因式所形成的,而且是唯一的.直到 1904 年[⑧], Kurt Hensel (1861—1941)才证明了 Frobenius 的唯一性的结论.在同一篇文章中, Hensel 还证明了,如 $f(x)$ 是矩阵 M 的最小多项式,而 $g(x)$

---

① *Comp. Rend.*, 41,1855,181～183 = *Œuvres*, 1,479～481.

② *Jour. für Math.*, 62,1863,232～245.

③ *Messenger of Math.*, (2),14,1885,143～144.

④ *Œuvres*, (2),9,174～191.

⑤ *Amer. Jour. of Math.*, 12,1890,337～396.

⑥ *Amer. Jour. of Math.*, 14. 1891/1892,326～377.

⑦ *Jour. für Math.*, 84,1878,1～63 = *Ges. Abh.* 1,343～405.

⑧ *Jour. für Math.*, 127,1904,116～166.

是矩阵满足的任一其他的多项式,则 $f(x)$ 整除 $g(x)$.

矩阵的秩的概念是由 Frobenius①在 1879 年引进的,虽然是联系到行列式而说的. 一个 m 行 n 列矩阵(阶为 $m\times n$)有所有 k 阶(从 1 阶(A 的元素本身)到包括两个整数 m 和 n 中的较小者在内的所有的阶)子式. 一个矩阵的秩为 r 当且仅当它至少有一个 r 阶子式其行列式不为零,而所有高于 r 阶的子式的行列式都为零.

两个矩阵 A 和 B 可用各种方式相联系. 如果存在两个非奇异矩阵 U 及 V 使 $A = UBV$, 则称它们等价. Sylvester②曾在他的关于行列式的著作中证明:B 的 i 行子式的行列式的最大公因子 d_i' 等于 A 的 i 行子式的行列式的最大公因子 d_i. 后来 H. J. S. Smith③在研究整数元素的矩阵时,证明了:每个秩为 ρ 的矩阵 A 等价于对角矩阵,其元素沿主对角线向下排列是 $h_1, h_2, \cdots, h_\rho$, 且 h_i 整除 h_{i+1}. 商 $h_1 = d_1, h_2 = d_2/d_1, \cdots$,称为 A 的不变因子. 进一步设

$$h_i = p_1^{l_{i1}} p_2^{l_{i2}} \cdots p_k^{l_{ik}}$$

(这里 p_i 是素数),这些不同的方幂 $p_j^{l_{ij}}$ 是 A 的初等因子. 不变因子确定初等因子,反之亦然.

不变因子和初等因子的概念,是从 Sylvester 和 Weierstrass 的行列式的工作中产生的(如早先指出的),它们是被 Frobenius 在 1878 年的文章中带到矩阵中来的. 不变因子和初等因子的意义在于:矩阵 A 等价于矩阵 B 当且仅当 A 和 B 有相同的初等因子或不变因子.

Frobenius 在 1878 年的文章中对不变因子做了进一步的工作,然后以合乎逻辑的形式整理了不变因子和初等因子的理论④.

---

① *Jour. für Math.*, 86, 1879, 146～208 = *Ges. Abh.* 1, 482～544.

② *Phil. Mag.*, (4), 1, 1851, 119～140 = *Coll. Math. Papers*, 1, 219～240.

③ *Phil. Trans.*, 151, 1861～1862, 293～326 = *Coll. Math. Papers*, 1, 367～409.

④ *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1894, 31～44 = *Ges. Abh.*, 1, 577～590.

1878年文章中的工作使 Frobenius 能给出 Cayley-Hamilton 定理的第一个一般性的证明，且对矩阵的本征根（特征根）有一些是相等的情况修改了这个定理. 在这篇文章中，他还证明了：当 $AB^{-1} = B^{-1}A$ 时，这时有确定的商 A/B，则 $(A/B)^{-1} = B/A$，还证明了 $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$，这里 A^{T} 是 A 的转置.

正交矩阵这个课题曾受到很大的注意. 虽然这术语在1854年[①]就由 Hermite 使用了，但直到1878年才由 Frobenius 发表正式的定义（看前面的参考书目）. 矩阵 M 是正交的，如果它等于它的转置的逆，即如果 $M = (M^{T})^{-1}$. 除定义外，Frobenius 证明了，如 S 表示一个对称矩阵，T 表示一个斜对称矩阵，则正交矩阵总能写成形式 $(S-T)/(S+T)$，或更简单地写为 $(I-T)/(I+T)$.

像矩阵论的许多其他概念一样，相似矩阵的概念，起源于行列式的早期研究工作，早至 Cauchy 的工作. 两个方阵是相似的，如果存在一个非奇异矩阵 P 使 $B = P^{-1}AP$. 两个相似矩阵的特征方程是相同的，因而有相同的不变因子和初等因子. 对复元素的矩阵，Weierstrass 在他1868年的文章中证明了这个结果（虽然是对行列式做的）. 由于一个矩阵代表一线性齐次变换，所以相似矩阵可看成代表同一个变换，只是参考于两个不同的坐标系.

用相似矩阵和特征方程的概念，Jordan[②]证明了矩阵可变到标准型. 设矩阵 J 的特征方程是

$$f(\lambda) = \lambda^{n} + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n = 0,$$

且设

$$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{l_k},$$

这里 λ_i 是互不相同的，则令

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

---

① *Cambridge and Dublin Math. Jour.*, 9, 1854, 63～67 = *Œuvres*, 1, 290～295.

② *Traité des substitutions*, 1870, Book Ⅱ, 88～249.

表示一个 l_i 阶矩阵. Jordan 证明了 J 可以变换到一个相似矩阵，它具有形式

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}.$$

这就是矩阵的 Jordan 标准型或法式.

Frobenius 在他 1878 年的文章中用逆步变换的名称处理了 A 到 B 的相似变换. 在同一论述中他处理了合同矩阵或同步矩阵的概念. 这告诉我们，如果 $A = P^{\mathrm{T}}BP$，则 A 与 B 合同，写成 $A \overset{\mathrm{C}}{=} B$. 例如将矩阵 A 的同样的行和列同时进行对换，所得到的矩阵 A 的变换就是合同变换. 还有，秩为 r 的对称矩阵 A 可以用合同变换化简成同秩的对角矩阵；即

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

关于合同变换，有很多基本的定理. 例如，设 S 是对称的，而 S_1 合同于 S，则 S_1 是对称的；设 S 是斜对称的，则 S_1 也是斜对称的.

Metzler 于 1892 年发表在《美国数学杂志》上的文章中引进了矩阵的超越函数，把每个这样的函数写成矩阵的幂级数. 他对 e^M，e^{-M}，$\log M$，$\sin M$ 和 $\sin^{-1}M$ 建立了级数. 例如

$$\mathrm{e}^M = \sum_{n=0}^{\infty} M^n/n!.$$

矩阵论的分支是很多的. 矩阵已用来表示二次型和双线性型. 这样的型化简成简单的标准型是关于矩阵不变量工作的核心. 它

们还与超复数紧密联系,而Cayley在他1858年的文章中建立了把超复数当作矩阵来看待的思想.

行列式和矩阵两者都已经被推广到了无限阶.无限阶行列式已出现在Fourier的工作中,用以确定一个函数的Fourier级数展开的系数(第28章第2节),也已出现在Hill关于常微分方程的解的工作中(第29章第7节).关于无限阶行列式的零星的文章写于这两篇杰出的19世纪的研究工作之间,但重要的活动推迟到Hill的时候.

无限阶矩阵隐含地及明显地包含在Fourier,Hill和Poincaré的著作中,Poincaré完成了Hill的工作.可是研究无限矩阵的巨大动力是来自积分方程的理论(第45章).我们不能给无限阶行列式和矩阵提供篇幅了①.

在矩阵的初等的工作中,元素是通常的实数,虽然为了数论的好处,限制于整数元素做了大量的工作.然而,它们可以是复数并且的确可以是许多别的量.自然,矩阵本身所具有的性质依赖于元素的性质.19世纪末和20世纪初的研究已经专门针对元素属于抽象域的矩阵的性质.近代物理的数学机械中的矩阵论的重要性在这儿不能再谈了,但关于这一方面联系到Tait所作的预言是有趣的,他说:"Cayley正为未来的一代物理学家锻造武器."

参考书目

Bernkopf, Michael: "A History of Infinite Matrices," *Archive for History of Exact Sciences*, 4, 1968, 308～358.

Cayley, Arthur: *The Collected Mathematical Papers*, 13 vols., Cambridge University Press (1889～1897), Johnson Reprint Corp., 1963.

Feldman, Richard W., Jr.: (Six articles on matrices with various titles), *The Mathe*

① 见本章末尾书目中Bernkopf的文献.

matics Teacher, 55,1962,482～484,589～590,657～659;56,1963,37～38,101～102,163～164.

Frobenius, F. G.: *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols., Springer-Verlag, 1968.

Jacobi, C. G. J.; *Gesammelte Werke*, Georg Reimer, 1884, Vol. 3.

MacDuffee, C. C.: *The Theory of Matrices*, Chelsea, 1946.

Muir, Thomas: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (1906～1923), 4 vols., Dover (reprint), 1960.

Muir, Thomas: List of writings on the theory of matrices, *Amer. Jour. of Math.*, 20,1898,225～228.

Sylvester, James Joseph: *The Collected Mathematical Papers*, 4 vols., Cambridge University Press, 1904～1912.

Weierstrass, Karl: *Mathematische Werke*, Mayer und Müller, 1895, Vol. 2.

第 34 章

19 世纪的数论

> Fourier 确实有过这样的看法，认为数学的主要目的是公众的需要和对自然现象的解释；但是像他这样一个哲学家应当知道，科学的唯一目的是人类精神的光荣，而且应当知道，在这种观点之下，数[论]的问题和关于世界体系的问题具有同等价值.
>
> C. G. J. Jacobi

1. 引　　言

直到 19 世纪，数论还只是一系列孤立的结果，虽然这些结果常常是光辉的. 一个新的纪元是从 Gauss 的《算术探讨》(*Disquisitiones Arithmeticae*)① 开始的，这部书是他 20 岁时写的. 这部伟大的著作曾在 1800 年寄到法国科学院而被拒绝，但 Gauss 自己把它发表了. 在这部书中，他把记号标准化了，把现存的定理系统化并推广了，把要研究的问题和攻题的已知方法进行了分类，还引进了新的方法. 在 Gauss 关于数论的著作中有三个主要思想：同余的理论，代数数的引进，以及作为 Diophantine 分析的指导思想的型的理论. 这部著作不仅是现代数论的开始，而且还确定了直到目前为止有关这一课题的工作方向.《探讨》难读，但 Dirichlet 作了解释.

在 19 世纪另一重要的发展是解析数论，它除了应用代数去处理涉及整数的问题外，还用了分析. 这一革新的领导人是 Dirichlet 和 Riemann.

---

① 发表于 1801 年 — *Werke*, 1.

2. 同 余 理 论

虽然同余的概念不是从 Gauss 开始的——它出现在 Euler, Lagrange 和 Legendre 的著作中——但是 Gauss 在《探讨》的第一节引进了同余的记号,并在此后系统地应用了它. 基本思想是简单的. 数 27 以 4 为模同余于 3,

$$27 \equiv 3 \text{ modulo } 4,$$

因为 27－3 恰被 4 整除. (字 modulo 常常简写为 mod.)一般地说, 当 a, b 和 m 是整数时,如果 $a-b$ (恰)被 m 整除,或者如果 a 和 b 被 m 除时具有相同的余数,那么

$$a \equiv b \text{ modulo } m.$$

这时就说 b 是 a 的模 m 剩余,或者 a 是 b 的模 m 剩余. 正如 Gauss 所指出的,对固定的 a 和 m,以 m 为模的 a 的一切剩余由 $a+km$ 给出,这里 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

关于相同模的同余式,在某些范围内能像方程式那样处理. 这种同余式可以相加、相减和相乘. 也可以求包含未知量的同余式的解. 例如,x 的什么值满足

$$2x \equiv 25 \text{ modulo } 12?$$

这个方程没有解,因为 $2x$ 是偶数而 $2x-25$ 是奇数,所以 $2x-25$ 不可能是 12 的倍数. 多项式同余式的基本定理已由 Lagrange① 建立了,Gauss 在第二节对它重新作了证明. 一个 n 次同余式

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Mx + N \equiv 0 \text{ modulo } p$$

不可能有多于 n 个互不同余的根,其中模 p 是素数,它不能整除 A.

在第三节 Gauss 开始处理幂的同余式. 在这里他用同余式的术语给了 Fermat 小定理一个证明; Fermat 小定理用同余式的术

① *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 24,1768,192ff., pub. 1770=*Œuvres*, 2,655～726.

语叙述就是:若 p 是素数而 a 不是 p 的倍数,则

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ modulo } p.$$

这个定理从他对高次同余式,即对

$$x^n \equiv a \text{ modulo } m$$

的研究中推出,这里 a 和 m 是互素的. 这个题目被 Gauss 之后的许多人继续研究着.

《探讨》的第四节讨论平方剩余. 如果 p 是一个素数,而 a 不是 p 的倍数,并且如果存在一个 x,使得 $x^2 \equiv a \bmod p$, 则 a 是 p 的平方剩余;否则 a 是 p 的平方非剩余. 在证明了一些关于二次同余式的次要的定理之后,Gauss 给出了二次反转定律的第一个严密证明(第 25 章第 4 节). 虽然 1783 年,Euler 在他的《分析短论》的一篇论文中已经给出了像 Gauss 一样完全的叙述,但是 Gauss 在他的《探讨》的论文第 151 条中说,没有一个人以他那样简单的形式提出过这个定理. 他参考了 Euler 的其他著作,其中包括《短论》中的别的论文,还参考了 Legendre1785 年的著作. 关于这些论文,Gauss 正确地指出,证明都是不完全的.

据推测,Gauss 在 1796 年当他 19 岁时已经发现了这个定律的证明. 在《探讨》中他给出了另一个证明,以后他又发表了四个别的证明. 在他未发表的论文中还找到另外两个证明. Gauss 说他找了许多证明,因为他希望找出一个能够建立双二次反转定律的证明(见下面). 二次反转定律是同余式中的一个基本结果,Gauss 把它誉为算术中的宝石. 在 Gauss 给出他的各个证明之后,后来的数学家给出了 50 个以上的其他证明.

Gauss 还讨论了多项式的同余式. 如果 A 和 B 是 x 的两个多项式,不妨设是实系数的,那么人们知道,可以唯一地找到多项式 Q 和 R,使得

$$A = B \cdot Q + R,$$

式中 R 的次数比 B 的次数低. 这时就能说,多项式 A_1 和 A_2 以第

二个多项式 P 为模是同余的,只要它们被 P 除时具有相同的余式 R.

Cauchy 用这种思想① 通过多项式的同余式去定义复数. 如果 $f(x)$ 是一个实系数多项式,用 x^2+1 去除它,因为余数要比除数的次数低,这时就有

$$f(x) \equiv a + bx \bmod x^2 + 1.$$

根据除法的步骤知道,这里的 a 和 b 一定是实数. 如果 $g(x)$ 是另一个那样的多项式,则

$$g(x) \equiv c + dx \bmod x^2 + 1.$$

现在 Cauchy 指出,如果 A_1, A_2 和 B 是多项式,而且如果

$$A_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{和} \quad A_2 = BQ_2 + R_2,$$

则 $\quad A_1 + A_2 \equiv R_1 + R_2 \bmod B \quad$ 和 $\quad A_1A_2 \equiv R_1R_2 \bmod B$.

现在我们立刻可以看出

$$f(x) + g(x) \equiv (a+c) + (b+d)x \bmod x^2 + 1,$$

并且因为 $x^2 \equiv -1 \bmod x^2+1$, 还有

$$f(x)g(x) \equiv (ac - bd) + (ad + bc)x \bmod x^2 + 1.$$

于是,数 $a + bx$ 和 $c + dx$ 像复数一样结合起来了;也就是说,它们具有复数的形式上的性质,x 取代了 i 的位置. Cauchy 还证明了,每一个模 x^2+1 不同余于 0 的多项式 $g(x)$ 都有逆,即存在多项式 $h(x)$ 使得 $h(x)g(x)$ 模 x^2+1 同余于 1.

Cauchy 确实引进了 i 去代替 x,对他来说 i 是一个实的未定量. 然后他证明了对任何

$$f(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots$$

都有 $\quad f(i) \equiv a_0 - a_2 + a_4 - \cdots + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)i \bmod i^2 + 1.$

因此任何包含复数的表达式看起来就同 $c + d$i 这种形式一样,而人们是拥有对复数奏效的一切必需的工具的. 于是对 Cauchy 而

---

① *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, 4, 1847, 84 ff. = *Œuvres*, (1), 10, 312～323 与 (2), 14, 93～120.

言,以他对 i 的理解,i 的多项式取代了复数,并且人们可以把对模 i^2+1 有相同余式的所有多项式归入同一类. 这些类就是复数.

有趣的是,在 1847 年 Cauchy 还对$\sqrt{-1}$怀有疑惧. 他说:"在代替了虚数论的代数等价论中,字母 i 不再表示符号$\sqrt{-1}$,我们完全拒绝了这个符号,并且我们能够毫无遗憾地放弃它,因为人们既不知道这个想像的符号表示什么,也不知道它意味着什么. 相反,我们用字母 i 表示一个实的但却是未定的量,并且在用符号$\equiv$代替$=$的同时,我们把所谓虚方程变换为对于变量 i 和对于除数 i^2+1 的代数等价关系. 因为这个除数在一切公式中都一样,所以可以不写它."

在这个世纪的 20 年代 Gauss 着手研究可应用于高次同余式的反转定律. 这些定律又涉及到同余式的剩余. 例如对于同余式

$$x^4 \equiv q \bmod p,$$

如果存在 x 的一个整值满足这个方程,人们就可以定义 q 作为 p 的一个双二次剩余. 他得到了双二次反转定律(见下面)和三次反转定律. 这方面的许多工作出现在从 1808—1817 年的论文中,而关于双二次剩余的正式定理是在 1828 年和 1832 年①的论文中给出的.

为了使他的三次和双二次剩余的理论优美而简单,Gauss 使用了复数,即形如 $a+b$i 的数,其中 a 和 b 是整数或 0. 在 Gauss 关于双二次剩余的著作中,必须考虑模 p 是形如 $4n+1$ 的素数的情形,形如 $4n+1$ 的素数能分解成复的因数,Gauss 需要这些因数. 为了获得这些因数,Gauss 认识到,必须超出通常的整数域而引进复整数. 虽然 Euler 和 Lagrange 已经把这种整数引入了数论,但正是 Gauss 建立了它们的重要性.

在通常的整数论中,可逆元素是$+1$和-1,而在 Gauss 的复

---

① *Comm. Soc. Gott.*, 6, 1828, 和 7, 1832 = *Werke*, 2, 65～92 和 93～148; 也见 pp. 165～178.

整数论中,可逆元素却是±1 和±i. 一个复整数叫做合数,如果它是两个非可逆元素的复整数的乘积. 如果那种分解是不可能的,则该整数叫做一个素数. 例如 $5=(1+2i)(1-2i)$, 所以是合数,而 3 却是一个复素数.

Gauss 证明了复整数在本质上具有和普通整数相同的性质. Euclid 证明了(第 4 章第 7 节),每一个整数可唯一地分解为素数的乘积. 这个唯一分解定理常被称为算术基本定理,Gauss 证明了,只要不把四个可逆元素作为不同的因数,唯一分解定理对复整数也成立. 这就是,如果 $a=bc=(ib)(-ic)$, 则这两种分解是一样的. Gauss 还指出,求两个整数的最大公约数的 Euclid 法可应用于复整数.

普通素数的许多定理可转化为复素数的定理. 例如 Fermat 定理转化为如下形式:如果 p 是一个复素数 $a+bi$, 而 k 是任何一个不能被 p 整除的复整数,则

$$k^{Np-1} \equiv 1 \text{modulo } p,$$

式中 Np 是 p 的模 a^2+b^2. 对复整数也有二次反转定律,这点 Gauss 在他 1828 年的论文中已陈述过.

通过复数,Gauss 能够把双二次反转定律叙述得相当简单. 把不能被 $1+i$ 整除的整数定义为非偶整数. 准素非偶整数是那种非偶整数 $a+bi$, 其中 b 是偶数, $a+b-1$ 也是偶数. 例如 -7 和 $-5+2i$ 是准素非偶整数. 双二次剩余的反转定律可叙述为:如果 α 和 β 是两个准素非偶素数, A 和 B 是它们的模,则

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4=(-1)^{(1/4)(A-1)(1/4)(B-1)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_4.$$

符号 $(\alpha/\beta)_4$ 具有下述意义:如果 p 是任何一个复素数, k 是任何一个不能被 p 整除的双二次剩余,则 $(k/p)_4$ 是 i 的幂 i^c,它满足同余式

$$k^{(Np-1)/4} \equiv 1 \text{modulo } p,$$

式中 Np 表示 p 的模.这个定律等价于下列说法:两个准素非偶素数之间的两个双二次特征是相同的,也就是 $(\alpha/\beta)_4 = (\beta/\alpha)_4$,只要每个素数模 4 同余于 1;但是如果没有一个素数满足这个同余条件,则这两个双二次特征就互反,即 $(\alpha/\beta)_4 = -(\beta/\alpha)_4$.

Gauss 陈述了这一互反性定理,但是没有发表他的证明.定理的证明是 Jacobi 于 1836—1837 年在哥尼斯堡(Königsberg)的演讲中给出的. Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823—1852) 是 Gauss 的学生,他发表了这一定理的五个证明,其中前两个出现于 1844 年①.

Gauss 发现,对于三次互反性他能得到一个运用"整数" $a+b\rho$ 的定律,这里 ρ 是 $x^2+x+1=0$ 的一个根,a 和 b 是通常的(有理)整数,但是 Gauss 没有发表这个结果.那是他死后在他的论文中发现的.三次反转定律首先为 Jacobi② 所陈述,并由他在哥尼斯堡的演讲中证明.第一个发表出来的证明是属于 Eisenstein 的③.看到这个证明 Jacobi 就声称④,这正是他在他的演讲中给出的,但是 Eisenstein 愤怒地否认了有任何剽窃⑤.还存在高于四次的同余式的反转定律.

3. 代 数 数

复整数的理论是代数数论这一巨大课题发展方向上的一个阶段.无论 Euler 或 Lagrange 都没有预想到他们关于复整数的工作所打开的丰富可能性. Gauss 也没有想到.

这个理论产生于要证明 Fermat 关于 $x^n+y^n=z^n$ 的断言的企图之中. $n=3$, 4 和 5 的情况已经讨论过了(第 25 章第 4 节).

① *Jour. für Math.*, 28,1844,53~67 和 223~245.

② *Jour. für Math.*, 2,1827,66~69 = *Werke*, 6,233~237.

③ *Jour. für Math.*, 27,1844,289~310.

④ *Jour. für Math.*, 30,1846,166~182, p. 172 = *Werke*, 6,254~274.

⑤ *Jour. für Math.*, 35,1847,135~274(p. 273).

Gauss 试图证明 $n=7$ 时的断言,但失败了.或许因为他厌恶自己的失败,他在 1816 年给 Heinrich W. M. Olbers(1758—1840)的一封信中说:"我的确承认,Fermat 定理作为一个孤立的命题对我没有多少兴趣,因为可以容易地立出许多那样的命题,人们既不能证明它们也不能否定它们."$n=7$ 的特殊情况由 Lamé 在 1839 年予以解决①,而 Dirichlet 建立了 $n=14$ 的论断②.但是,一般命题没有被证明.

这个问题由 Ernst Eduard Kummer(1810—1893)接续下来,他从神学转向数学并做了 Gauss 和 Dirichlet 的学生,后来在布雷斯劳(Breslau)和柏林做教授.虽然 Kummer 的主要工作是在数论方面,但他在几何学方面还做出了漂亮的发现,这起源于光学问题;他在大气对光的反射的研究中也做出了重要的贡献.

Kummer 把 x^p+y^p(p 为素数)分解成

$$(x+y)(x+\alpha y)\cdots(x+\alpha^{p-1}y),$$

这里 α 是一个虚的 p 次单位根.也就是,α 是

$$\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}+\cdots+\alpha+1=0 \tag{1}$$

的一个根.这就引导着他把 Gauss 的复整数理论推广到由(1)那样的方程所引进的代数数,即形如

$$f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{p-2}\alpha^{p-2}$$

的数,其中每一个 a_i 是通常的(有理)整数.(因为 α 满足(1),所以 α^{p-1} 的项能用低次幂的项来替换.)Kummer 把这样的数 $f(\alpha)$ 叫做复整数.

在 1843 年 Kummer 对整数、素整数、可除性以及类似东西给出了适当的定义(我们将马上给出标准定义),然后错误地假定了在他所引进的那类代数数中唯一因子分解成立.在 1843 年,当他把他的手稿寄给 Dirichlet 的时候,他指出,这个假定对证明 Fer-

① *Jour. de Math.*, 5,1840,195~211.

② *Jour. für Math.*, 9,1832,390~393 = *Werke*, 1,189~194.

mat 定理是必需的. Dirichlet 通知他,唯一因子分解仅对某些素数 p 成立. 附带说一句,对代数数假定唯一因子分解,Cauchy和Lamé也犯了同样的错误. 在 1844 年,Kummer①认识到 Dirichlet 批评的正确性.

为了重建唯一因子分解,Kummer 在 1844 年②开始的一系列论文中创立了理想数的理论. 为理解他的思想起见,我们来考虑 $a+b\sqrt{-5}$ 所生成的域,这里 a, b 是整数. 在这个域中

$$6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}),$$

而且容易证明这四个因子都是素整数. 这时唯一因子分解不成立. 对这个域,让我们引进理想数 $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta_1=(1+\sqrt{-5})/\sqrt{2}$, $\beta_2=(1-\sqrt{-5})/\sqrt{2}$. 我们看到, $6=\alpha^2\beta_1\beta_2$. 这样,6 现在唯一地被表示为四个因子的乘积,就域 $a+b\sqrt{-5}$ 而论,这四个因子全是理想数③. 通过这些理想数和其他素数,在这个域中因子分解是唯一的(除去构成可逆元素的因子). 借助于理想数,人们可以证明,在预先缺乏唯一因子分解的所有域中,普通数论的一些结果成立.

Kummer 的理想数虽是普通的数,但是不属于他所引进的代数数类. 而且,理想数也不是以一般方式定义的. 就 Fermat 定理来说,Kummer 用他的理想数确实成功地证明了它对许多素数是正确的. 在前 100 个整数中,只有 37, 59 和 67 不为 Kummer 的证明所包括. 然后,Kummer 在 1857 年的一篇论文中④将他的结果扩展到这些例外素数. 这些结果又进一步地为 Dimitry Mirimanoff(1861—1945)所扩展,他是日内瓦大学的教授,完善了 Kummer 的方法⑤. Mirimanoff 证明了对于直到 256 的每一个 n,

---

① *Jour. de Math.*, 12,1847,185～212.

② *Jour. für Math.*, 35,1847,319～326,327～367.

③ 引进这些理想数后,2 和 3 不再是不可分解的了,因为 $2=\alpha^2$ 而 $3=\beta_1\cdot\beta_2$.

④ *Abh. König. Akad. der Wiss. Berlin*, 1858,41～74.

⑤ *Jour. für Math.*, 128,1905,45～68.

Fermat 定理是正确的,只要 x, y 和 z 与指数 n 互素.

Kummer 是研究由单位根形成的代数数,而 Gauss 的学生 Richard Dedekind(1831—1916)却以全新而有启发性的方式探讨唯一因子分解的问题,他在德国的高等技术学校作为一名教师花费了一生中的 50 个年头. Dedekind 在他所编辑的 Dirichlet 的《数论》(*Zahlentheorie*, 1871)的第二版的附录 10 中,发表了他的结果. 在同一书①的第三版和第四版的附录中他扩展了这些结果. 就是在这里他创立了现代代数数的理论.

Dedekind 的代数数的理论是 Gauss 的复整数和 Kummer 的代数数的一般化,但是这个一般化与 Gauss 的复整数多少有些差别. 一个数 r,若它是方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{2}$$

的根,而不是次数比 n 低的这种方程的根,则称它是一个 n 次代数数,式中 a_i 是普通整数(正的或负的). 如果在(2)中 x 的最高次幂的系数是 1,则所有的解叫做 n 次代数整数. 代数整数的和、差、积仍是代数整数,并且,如果一个代数整数是有理数,则它是普通整数.

我们应当注意到在新定义之下,一个代数整数可以包括普通分数. 例如 $(-13+\sqrt{-115})/2$ 是一个二次代数整数,因为它是 $x^2+13x+71=0$ 的根. 反之,$(1-\sqrt{-5})/2$ 是一个二次代数数而不是代数整数,因为它是 $2x^2-2x+3=0$ 的根.

Dedekind 接着引进了数域的概念. 这是一个实数或复数的集合 F,满足这样的条件:如果 α, β 属于 F,则 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ 属于 F,而且如果 $\beta\neq 0$, 则 α/β 也属于 F. 每一个数域都包含有理数,因为如果 α 属于这数域,则 α/α 即 1 也属于它,因此 1+1, 1+2 等也都属于它. 不难证明,一切代数数的集合形成一个域.

如果人们从有理数域出发,而 θ 是一个 n 次代数数,则 θ 同自

① 4th ed., 1894 = *Werke*, 3, 2~222.

身及有理数在四种运算之下结合起来所形成的集合也是 n 次域. 这个域也可以说成是包含有理数和 θ 的最小域. 它也称为有理数的扩域. 这样的域不包含所有的代数数,而是一个特殊的代数数域. 现在通常记为 $R(\theta)$. 虽然人们可以期望 $R(\theta)$ 中的数是商 $f(\theta)/g(\theta)$,其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是任何具有有理系数的多项式,人们还是能够证明,如果 θ 是 n 次的,则 $R(\theta)$ 的任何一个数 α 能表成形式

$$\alpha = a_0\theta^{n-1} + a_1\theta^{n-2} + \cdots + a_{n-1},$$

这里 a_i 是普通的有理数. 此外,存在着这个域的 n 个代数整数 θ_1, θ_2, …, θ_n,使得这个域中的所有代数整数都有形式

$$A_1\theta_1 + A_2\theta_2 + \cdots + A_n\theta_n,$$

这里 A_i 是普通的正的或负的整数.

环,是 Dedekind 引进的概念,本质上是这样一个集合,即如果 α 和 β 属于这个集合,则 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ 和 $\alpha\beta$ 也属于这个集合. 所有代数整数的集合形成一个环,任何一个特殊代数数域中的一切代数整数也形成环.

说代数整数 α 能被代数整数 β 整除,如果存在一个代数整数 γ 使得 $\alpha=\beta\gamma$. 如果 j 是一个代数整数,它能整除代数数域中的每一个其他整数,则称 j 是这个域的一个可逆元素. 这些可逆元素,其中包括 $+1$ 和 -1,是普通数论中的可逆元素 $+1$ 和 -1 的一般化. 如果代数整数 α 不是零或可逆元素,而且如果它分解为 $\beta\gamma$,其中 β 和 γ 属于这同一个代数数域,就蕴含着 β 或 γ 是这个域的可逆元素,则称 α 是一个素数.

现在让我们来看看算术基本定理成立的范围. 在一切代数整数所形成的环中没有素数. 让我们考虑在特殊的代数数域 $R(\theta)$ 中的整数环,譬如域 $a+b\sqrt{-5}$, 其中 a 和 b 是普通的有理数. 在这个域中唯一因子分解不成立. 例如

$$21=3\cdot 7=(4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5})=(1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5}).$$

最后这四个因子中的每一个在如下意义下是素数，即它不能表为形如 $(c+d\sqrt{-5})(e+f\sqrt{-5})$ 的乘积，其中 c，d，e 和 f 是整数.

另一方面让我们考虑域 $a+b\sqrt{6}$，其中 a 和 b 是普通的有理数. 如果对这些数实行四种代数运算，则仍得到这种数. 如果限定 a 和 b 是整数，则得到这个域的(2 次)代数整数. 在这个域中我们可将可逆元素的等价定义取为：若 $1/M$ 也是代数整数，则代数整数 M 就是可逆元素. 于是 1，-1，$5-2\sqrt{6}$ 和 $5+2\sqrt{6}$ 都是可逆元素. 每个整数都可被任一可逆元素整除. 进而，这个域中的一个代数整数如果仅能被它自己和可逆元素整除，则它是素的. 现在

$$6=2\cdot 3=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}.$$

看来仿佛不存在素因数的唯一分解. 但是上面所展示的因数不是素数. 事实上，

$$\begin{aligned}6&=2\cdot 3=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\\&=(2+\sqrt{6})(-2+\sqrt{6})(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6}).\end{aligned}$$

最后四个因数中的每一个都是这个域中的素数，而唯一分解在这个域中确实是成立的.

在特殊代数数域里的整数环中，代数整数分解为素因数总是可能的，但是唯一分解一般不成立. 事实上，对形如 $a+b\sqrt{-D}$ 的域，其中 D 可取不为平方数整除的任何正整数值，至少对直到 10^9 的 D，仅当 $D=1$，2，3，7，11，19，43，67 和 163 时唯一因子分解定理才是合理的①. 因此代数数本身不具有唯一因子分解的性质.

4. Dedekind 的理想

将代数数的概念一般化之后，Dedekind 立刻用一个和

---

① H. M. Stark 已经证明 D 的上述值是唯一的一种可能，见他的《论复二次域中的唯一因子分解问题》，*Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*，Ⅻ，41～56，Amer. Math. Soc.，1969.

Kummer的十分不同的方案去着手重建代数数域中的唯一因子分解.他引进了代数数类去代替理想数,为了纪念Kummer的理想数,他把它们称为理想.

在定义Dedekind的理想之前让我们注意根本思想.考虑普通的整数.代替整数2,Dedekind考虑整数$2m$的类,这里m是任何整数.这个类由一切可被2整除的整数构成.类似地,3由一切可被3整除的整数$3n$的类代替.积6就变成了一切数$6p$的集合,其中p是任何整数.这时积$2\cdot 3=6$用下述断语代替:类$2m$"乘"类$3n$等于类$6p$.进而言之,类$2m$是类$6p$的因子,而不管在实际上是前者包含后者.这些类是普通整数环中的Dedekind称之为理想的例子.为了领会Dedekind的工作,人们必须使自己习惯于用数类的术语去思考.

更一般地,Dedekind把他的理想定义如下:设K是一个特殊的代数数域,说K的整数A的集合形成一个理想,如果当α和β是这个集合中的任何两个整数时,则整数$\mu\alpha+\nu\beta$也属于这个集合,这里μ和ν是K中的任何其他代数整数.或者这样说,理想A是由K中的代数整数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$产生的,如果$A$是由一切和

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n$$

所构成,这里λ_i是域K中的任何整数.这个理想用$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$来表示.零理想只含有数0,相应地用(0)来表示.单位理想是由数1产生的,记为(1).如果理想A只是由一个整数α产生的,就称它为主理想,所以(α)是由一切被α整除的代数整数构成的.在普通的整数环中每一个理想都是主理想.

由整数2和$1+\sqrt{-5}$所产生的理想是代数数域$a+b\sqrt{-5}$中的理想的一个例子,这里a和b是普通的有理数.这个理想由所有形如$2\mu+(1+\sqrt{-5})\nu$的整数构成,这里μ和ν是这个域中的任意整数.考虑到$(1+\sqrt{-5})2$必定属于2所产生的理想这一事实,这个理想是仅由一个数2所产生的,所以它恰巧也是主

理想.

如果理想$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$中的每一个成员也是理想$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q)$的成员,反之也对,则两理想相等. 为了处理因子分解的问题,我们必须首先考虑两个理想的乘积. K 中的理想$A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 和理想 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_t)$ 的乘积定义为理想

$$AB = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1, \cdots, \alpha_i\beta_j, \cdots, \alpha_s\beta_t).$$

很明显,这个乘积是可交换的和可结合的. 凭借这个定义,如果存在一个理想 C 使得 $B = AC$, 我们就可以说 A 整除 B,记为 $A|B$,并称 A 是 B 的因子. 正像上面普通整数的例子已经启示的,B 的元素被包含在 A 的元素之中,并且普通的可除性由类的包含所代替.

类似于通常素数的理想称为素理想. 这样的理想 P 定义为除去自身和理想(1)外不含有其他因子的理想,所以 P 不被包含在 K 的任何其他理想之中. 由于这个理由,素理想也被称做是最大的. 所有这些定义和定理都导致关于代数数域 K 的理想的基本定理. 任何一个理想仅能被有限个理想所整除,并且如果一个素理想整除(同一个数类的)两个理想的乘积 AB,则它整除 A 或 B. 最后,理想论中的基本定理是,每一个理想能唯一地分解为素理想.

在关于形如 $a + b\sqrt{D}$ (D 为整数)的代数数域的最早的例子中,我们发现,有些代数数域允许有这些域的代数整数的唯一因子分解,另一些则不允许. 允许或不允许这一问题的答案是由下述定理给出的:代数数域 K 的整数能唯一地分解为素因子的充要条件是,K 中所有的理想都是主理想.

从 Dedekind 著作中的这些例子可以看出,他的理想的理论实际上是普通整数的一般化. 特别是,他的著作提供了代数数域的概念和性质,使别人能够去建立唯一因子分解定理.

Leopold Kronecker(1823—1891)是 Kummer 的得意门生,他接替 Kummer 在柏林大学任教授. 他继续研究代数数的问题,并

沿着类似于 Dedekind 的路线发展了它. Kronecker 的博士论文《论复可逆元素》是他在这个论题上的第一项工作. 这篇论文写于1845年,但直到很晚才发表①. 论文中讨论在 Gauss 所创立的代数数域中可能存在的所有可逆元素.

Kronecker 创立了另一种域论(有理性域)②. 由于他考虑了任意个变量(未定量)的有理函数域,他的域的概念比 Dedekind 的更一般. 特别地,Kronecker 引进了(1881)添加于域的未定量的概念,未定量恰是一个新的抽象量. 用增加未定量去推广域的这种思想,成为他的代数数的理论的基石. 在这里他用了由 Liouville, Cantor 和其他数学家所建立的关于代数数与超越数的差别的知识. 特别是他注意到,如果 x 是域 K 上的一个超越数(x 是一个未定量),则由添加未知量 x 于 K 而得到的域 $K(x)$,也就是包含 K 与 x 的最小域,同构于系数在 K 中的一个变量的有理函数所生成的域 $K[x]$③. 他确实强调过,这个未定量仅是一个代数元素,而不是一个分析意义下的变量④. 然后他在1887年⑤证明了,对每一个普通素数 p,在具有有理系数的多项式环 $Q(x)$ 中存在一个相应的素多项式 $p(x)$,它在有理域 Q 中是不可约的. 两个多项式若以给定的素多项式 $p(x)$ 为模同余就认为相等,据此,在 $Q(x)$ 中一切多项式的环就变成了同余类的域,这个域与由添加 $p(x)=0$ 的一个根 δ 于域 K 而产生的代数数域 $K(\delta)$ 具有相同的代数性质. 在这里他用了 Cauchy 曾经用过的思想,即用多项式关于模 x^2+1 同余而引进虚数. 在这同一部著作中他说明了,代数数的理论独立于代数基本定理和完备的实数系的理论.

---

① *Jour. für Math.*, 93,1882, 1～52 = *Werke*, 1,5～71.

② "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen," *Jour. für Math.*, 92,1882, 1～122 = *Werke*, 2,237～387; 也被 G. Reimer 出版, 1882.

③ *Werke*, 2,253.

④ *Werke*, 2,339.

⑤ *Jour. für Math.*, 100,1887, 490～510 = *Werke*, 3,211～240.

在他的域论中(在"Grundzüge"中),其元素是从域 K 出发然后添加未定量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 而形成的,Kronecker 引进了模系的概念,这相当于 Dedekind 理论中的理想. 对 Kronecker 而言,一个模系是 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式的一个集合 M,具有下述性质:如果 P_1 和 P_2 属于这个集合,则 $P_1 + P_2$ 也属于这个集合. 如果 P 属于这个集合,而 Q 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任一多项式,则 QP 也属于这个集合.

模系 M 的一组基(basis)是指 M 的多项式 $B_1, B_2, \cdots$ 的任何一个集合,使得 M 的每一个多项式都可表为形式

$$R_1 B_1 + R_2 B_2 + \cdots,$$

这里 $R_1, R_2, \cdots$ 是常数或多项式(不必属于 M). 在 Kronecker 的一般域中,可除性理论是依据模系定义的,很像 Dedekind 用理想来定义.

代数数论的工作在 19 世纪以 Hilbert 的"论代数数"的著名报告[①]为顶峰. 这个报告主要是记述那个世纪内所做的工作的. 但是,Hilbert 重新整理了所有这些早期的理论,并且给出了获得这些结果的新颖、漂亮而强有力的方法. 从大约 1892 年起,他在代数数论中已开始创立的新概念以及关于 Galois 数域的一个新创造也一并组织进这个报告中了. 其后,Hilbert 和许多其他人大大地扩展了代数数论. 但是,这些后来的发展,相对于 Galois 域,相对于 Abel 数域和类域,都刺激着 20 世纪的大量工作,这些都主要是专家们所关心的.

代数数论,本来是研究古老数论中的问题的解的一种方案,自身却变成了一个目的. 它终于在数论和抽象代数之间占据了一席之地. 而现在,数论和近世高等代数也被吸收到代数数论之中了. 当然,代数数论在普通数论中也产生了新的定理.

---

① "Die Theorie der algebraischen Zahlkörper"(代数数域的理论),*Jahres. der Deut. Math. Ver.*,4,1897,175～546 = *Ges. Abh.*,1,63～363.

5. 型的理论

数论中的另一类问题是整数的型表示. 表达式

$$(3)\qquad ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

其中 a, b 和 c 是整数,是一个二元型,因为它包含着两个变数;它又是一个二次型,因为它是二次的. 一个数 M 称为用型表出,如果对于 a, b, c, x 和 y 的特殊整数值,上一表达式等于 M. 一个问题是要找一组数,它们能被已给的型或一类型所表出. 逆问题是,已给 M 与已给 a, b 和 c 或某些类的 a, b 和 c,要找能表出 M 的 x 和 y 的值,这也是同等重要的. 后一问题属于 Diophantine 分析,而前一问题也一样可以看成是这一课题的一部分.

在这些问题方面 Euler 得到了一些特殊的结果. Lagrange 却作出了关键性的发现:如果一个数能被一个型所表出,它就能被许多另外的型所表出;他称这些型是等价的. 后者可从原始型用变数变换

$$(4)\qquad x = \alpha x' + \beta y',\ y = \gamma x' + \delta y'$$

来得到,这里 α, β, γ 和 δ 都是整数,并且 $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. [①]特别是, Lagrange 阐明了,对于一个已给的判别式(discriminant, Gauss 使用了 determinant) $b^2 - ac$, 存在着有限个型,使得具有这一判别式的每一个型等价于这有限个型中的一个. 从而所有具有已给判别式的型可被划分归类,每一类由等价于那个类中的一个成员的一切型所构成. 这一结果以及由 Legendre 归纳地得出的一些结果引起了 Gauss 的注意. Gauss 迈出了大胆的一步,从 Lagrange 的著作中抽象出了型的等价的概念,并致力于此. 他的《探讨》的第五节,一个出乎寻常的最大的一节,就是专注于这一课题的.

---

① *Nouv Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773, 263～312; 与 1775, 323 ff. = *Œuvres*, 3, 693～795.

Gauss 系统化了并扩展了型的理论. 他首先定义了型的等价. 设用(4)把

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

变换为型 $$F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2.$$

那么 $$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

如果现在 $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$, 这两个型的判别式就相等了. 于是变换(4)的逆变换将同样包含整系数(根据 Cramer 法则), 并将 F' 变换为 F. F 和 F' 称为是等价的. 如果 $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, 则 F 和 F' 称为固有等价; 如果 $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, 则 F 和 F' 称为非固有等价.

Gauss 证明了一系列关于型的等价的定理. 例如, 如果 F 等价于 F', 而 F' 等价于 F'', 则 F 等价于 F''. 如果 F 等价于 F', 则一个数 M 能被 F 表出就能被 F' 表出, 并且表出的方法的个数也一样多. 然后他说明, 在 F 和 F' 等价的条件下, 如何去找从 F 变换为 F' 的所有变换. 在 x 和 y 的值是互素的情况, 他也找到了已知数 M 被型 F 表出的一切表示.

由定义, 两个等价的型的判别式 $D = b^2 - ac$ 有相同的值, 然而两个有相等判别式的型却未必等价. Gauss 说明了所有具有一个已给 D 的型可以被划分归类; 任一类的成员都是彼此固有等价的. 虽然具有一个已给 D 的型的个数是无限的, 但是对于一个已给 D 的类的个数却是有限的. 在每一类中一个型可被取为代表, Gauss 给出了选择最简单代表的准则. 所有以 D 为判别式的型中最简单的型是 $a = 1$, $b = 0$, $c = -D$. 他称这样的型为主要型, 它所属的类为主要类.

接着, Gauss 着手研究型的复合(乘积). 如果型

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

在替换 $$X = p_1xx' + p_2xy' + p_3x'y + p_4yy',$$
$$Y = q_1xx' + q_2xy' + q_3x'y + q_4yy'$$

之下被变换为两个型

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ 和 } f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

的乘积，那么就称 F 可被变换为 ff'. 更进一步，如果六个数

$$p_1q_2 - q_1p_2,\ p_1q_3 - q_1p_3,\ p_1q_4 - q_1p_4,$$

$$p_2q_3 - q_2p_3,\ p_2q_4 - q_2p_4,\ p_3q_4 - q_3p_4,$$

没有公因数，则称 F 是型 f 和 f' 的复合.

于是 Gauss 就能证明一个重要定理：如果 f 和 g 属于同一类，而 f' 和 g' 属于同一类，则由 f 和 f' 所复合的型与由 g 和 g' 所复合的型属于同一类. 于是人们就可以谈到由两个(或更多)给定的型的类所复合的型的类. 在这种类的复合中，主要类起了单位类的作用，就是说，如果类 K 与主要类相复合，则得出的类仍将是 K.

Gauss 又转向处理三元二次型

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2,$$

这里系数都是整数，并且作了极类似于他对于二元型所作过的研究. 在二元型的情况，目标是整数的表示. Gauss 对三元型的理论未作深入研究.

关于型的理论的全部工作之目的，已如所述，就是要建立数论中的一些定理. Gauss 在他研究型的过程中表明，这一理论能怎样被用于证明任何多个关于整数的定理，其中包括许多早已被 Euler 和 Lagrange 等人证明过的定理. 例如，Gauss 证明了，任何形如 $4n+1$ 的素数能用一种而且仅是一种方法表示为平方和. 任何形如 $8n+1$ 或 $8n+3$ 的素数能用一种而且仅是一种方法表示为型 x^2+2y^2 (对正整数 x 和 y 而言). 他阐明了如何去找一个已知数 M 在已给型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 下的所有表示. 这里假定判别式 D 是一个正的非平方数. 更进一步，如果 K 是一个基本型(a, b 和 c 的值是互素的)，带有判别式 D，并且 p 是一个能除尽 D 的素数，那么不能被 p 整除而能被 F 表出的诸数或者都是 p 的二次剩余，或者都是 p 的二次非剩余.

在 Gauss 关于三元二次型的工作所引出的结果中有下述定

理的首次证明:每一个数能表示成三个三角数的和.我们记得,这些数是

$$1, 3, 6, 10, 15, \cdots, \frac{n^2+n}{2}, \cdots$$

他也重新证明了已被 Lagrange 证明过的定理:任何一个正整数能表示为四个数的平方和.谈到这个结果时值得顺便提一下,1815年 Cauchy 在巴黎科学院宣读了一篇论文,论文中建立了一个首先为 Fermat 所断言的一般性的结果:每一个整数是 k 或低于 k 的 k 角数之和①(一般 k 角数是 $n+(n^2-n)(k-2)/2$).

Gauss 提出的二元的和三元的二次型的代数理论有一个有趣的几何模拟,这是 Gauss 自己首先发端的.出现在 1830 年的《格丁根学报》② 上关于 Ludwig August Seeber 写的三元二次型的一本书的书评中,Gauss 概述了他的型和型类的几何表示③.这个工作是所谓数的几何理论的发展的一个开端. Hermann Minkowski (1864—1909)曾历任几个大学的数学教授,当他发表了他的《数的几何》(*Geometrie der Zahlen*, 1896)之后,这一理论才得到显著的地位.

在 19 世纪的数论中,型的理论成为一个主要的课题.关于二元的和三元的二次型以及多元的和高次的型,许多人作了进一步的研究④.

6. 解析数论

数论中的一个重要发展是解析方法和解析成果的导入,以表

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, (1), 14, 1813～1815, 177～220 = *Œuvres*, (2), 6, 320～353.

② *Werke*, 2, 188～196.

③ Felix Klein 在他的 *Entwicklung*(见本章末尾的参考书目), pp. 35～39, 阐明了 Gauss 的概述.

④ 进一步的细节见参考文献中 Smith 和 Dickson 的工作.

达和证明有关整数的事实. 实际上,Euler 已经在数论中用了分析(见下面),Jacobi 用椭圆函数得到了同余论和型的理论中的一些结果[1]. 然而 Euler 在数论中对分析的使用是很少的,Jacobi 的数论成果几乎是他的分析著作的偶然的副产品.

分析的第一个深刻的经过精心考虑的用途是由 Peter Gustav Lejeune-Dirichlet(1805—1859)为了处理一个看来是明白的代数问题而作出的. 他是 Gauss 和 Jacobi 的学生,在布雷斯劳和柏林当教授,后来在格丁根接替 Gauss. Dirichlet 的伟大著作《数论讲义》(*Vorlesungen über Zahlentheorie*)[2] 详细解释了 Gauss 的《探讨》,并给出了他自己的贡献.

引起 Dirichlet 去应用分析的问题是证明每一个算术序列

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \cdots,\ a+nb,\ \cdots$$

中包含无穷多个素数,这里 a 和 b 是互素的. Euler[3] 和 Legendre[4] 作出了这一猜想,在 1808 年 Legendre[5] 给出了一个证明,但含有错误,在 1837 年 Dirichlet[6] 给出了一个正确的证明. 这个结果推广了 Euclid 关于在序列 1, 2, 3, …中包含有无穷多个素数的定理,Dirichlet 的分析证明长而又繁. 特别是他用了 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$,现在被称为 Dirichlet 级数,其中 a_n 和 z 都是复数. Dirichlet 还证明了在序列 $\{a+nb\}$ 中的素数的倒数之和是发散的. 这就推广了 Euler 关于通常素数的结果(见下面). 在 1841 年[7],Dirichlet 证明了一个关于在复数 $a+bi$ 的级数中的素数的一个定理.

① *Jour. für Math.*, 37,1848,61～94 和 221～254 = *Werke*, 2,219～288.

② 发表于 1863 年,1871 年、1879 年和 1894 年的二、三、四版由 Dedekind 作了广泛的增补.

③ *Opuscula Analytica*, 2,1783.

④ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1785,465～559, pub. 1788.

⑤ *Théorie des nombres*, 2nd ed., p. 404.

⑥ *Abh. König. Akad. der Wiss.*, *Berlin*, 1837,45～81 和 108～110 = *Werke*, 1,307～342.

⑦ *Abh. König. Akad. der Wiss.*, *Berlin*, 1841,141～161 = *Werke*, 2,509～532.

围绕着引进分析的主要问题涉及到函数 $\pi(x)$，$\pi(x)$表示不超过 x 的素数的个数. 例如，$\pi(8)$是 4，因为 2，3，5 和 7 是素数，而 $\pi(11)$是 5. 当 x 增加时，增添的素数变得稀疏起来，问题是 $\pi(x)$的固有的分析表达式是什么？Legendre 证明了不存在有理表达式，他曾在一个时期内放弃了可能找到任何表达式的希望. 那时 Euler，Legendre，Gauss 和其他人都推测

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1. \tag{5}$$

Gauss 利用素数表（他事实上研究了直到 3 000 000 的一切素数）对 $\pi(x)$作了猜想，并推断[1] $\pi(x)$与 $\int_2^x \mathrm{d}t/\log t$ 的差是很小的. 他还知道

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_2^x \mathrm{d}t/\log t}{x/\log x}=1.$$

1848 年，彼得格勒大学的教授 Pafnuti L. Tchebycheff (1821—1894)继续研究小于或等于 x 的素数个数的问题，并在这一古老问题上迈出了一大步. 在一篇关键性的论文《论素数》[2]中，Tchebycheff 证明了

$$A_1<\frac{\pi(x)}{x/\log x}<A_2,$$

这里 $0.922<A_1<1$ 和 $1<A_2<1.105$，但是没有证明这个函数趋向于一极限. 这个不等式为许多数学家所改进，这些人中包括 Sylvester，他在 1881 年同其他一些人曾怀疑这个函数有极限. Tchebycheff 在他的著作中，使用了

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z},$$

我们现在把它叫做 Riemannζ 函数，可是，他是仅对 z 的实值应用

---

① *Werke*，2，444～447.

② *Mém. Acad. Sci. St. Peters.*，7，1854，15～33；也见 *Jour. de Math.*，(1)，17，1852，366～390 = *Œuvres*，1，51～70.

这个函数的.(这个级数是 Dirichlet 级数的一种特殊情况.)在同一篇论文中,他还顺便证明了,对 $n>3$,在 n 和 $2n-2$ 之间至少总有一个素数存在.

实 z 的 ζ 函数出现在 Euler① 的一本著作中,他在其中引进了

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)^{-1},$$

这里 p_n 都是素数. Euler 用这个函数去证明素数的倒数之和是发散的. 对 s 的偶的正整数值,Euler 知道 $\zeta(s)$ 的值(见第 20 章第 4 节). 然后在一篇宣读于 1749 年的论文② 中,Euler 断言对实的 s,

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

他说他验证这一方程一直到了对它无可怀疑的程度. 这个关系式是由 Riemann 在 1859 年的一篇下面将要提到的论文中建立的. Riemann 用了复数 z 的 ζ 函数去试图证明素数定理,即上面提到的(5)③. 他指出,要再深入一步研究,就应当知道 $\zeta(z)$ 的复零点. 实际上,当 $z=x+iy$ 时,$\zeta(z)$ 对 $x\leqslant 1$ 不收敛,而 ζ 在半平面 $x\leqslant 1$ 内的值是由解析开拓定义的. 他叙述了一个假设:ζ 在带形区域 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中的一切零点都位于 $x=\frac{1}{2}$ 这条线上. 这个假设一直还未被证明④.

在 1896 年,Hadamard⑤ 应用(一个复变量的)整函数的理论,以及证明当 $x=1$ 时 $\zeta(z)\neq 0$ 这一决定性的事实,终于证明了素

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9, 1737, 160～188, pub. 1744 = *Opera*, (1), 14, 216～244.

② *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 17, 1761, 83～106, pub. 1768 = *Opera*, (1), 15, 70～90.

③ *Monatsber. Berliner Akad.*, 1859, 671～680 = *Werke*, 145～155.

④ 1914 年 Godfrey H. Hardy 证明了 $\zeta(z)$ 有无穷多零点位于直线 $x=\frac{1}{2}$ 上(*Comp. Rend.*, 158, 1914, 1012～1014 = *Coll. Papers*, 2, 6～9).

⑤ *Bull. Soc. Math. de France*, 14, 1896, 199～220 = *Œuvres*, 1, 189～210.

数定理;他研究整函数的目的就在于证明这个素数定理. Charles-Jean de la Vallée Poussin(1866—1962)关于 ζ 函数得到同样的结果,并同时证明了素数定理①. 这个定理是解析数论的中心问题之一.

参考书目

Bachmann, P.: "Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1911,455～508;also in Gauss: *Werke*, 10_2,1～69.

Bell, Eric T.: *The Development of Mathematics*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1945, Chaps. 9～10.

Carmichael, Robert D.: "Some Recent Researches in the Theory of Numbers", *Amer. Math. Monthly*, 39,1932,139～160.

Dedekind, Richard: *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen* (reprint of the eleventh supplement to Dirichlet's *Zahlentheorie*), F. Vieweg und Sohn, 1964.

Dedekind, Richard: *Gesammelte mathematische Werke*, 3 vols., F. Vieweg und Sohn, 1930～1932, Chelsea (reprint), 1968.

Dedekind, Richard: "Sur la théorie des nombres entiers algébriques", *Bull. des Sci. Math.*, (1),11,1876,278～288;(2),1,1877,17～41,69～92,144～164,207～248 = *Ges. math. Werke*, 3,263～296.

Dickson, Leonard E.: *History of the Theory of Numbers*, 3 vols., Chelsea (reprint), 1951.

Dickson, Leonard E.: *Studies in the Theory of Numbers* (1930), Chelsea (reprint), 1962.

Dickson, Leonard E.: "Fermat's Last Theorem and the Origin and Nature of the Theory of Algebraic Numbers", *Annals. of Math.*, (2),18,1917,161～187.

Dickson, Leonard E. et al.: *Algebraic Numbers, Report of Committee on Algebraic Numbers*, National Research Council, 1923 and 1928; Chelsea (reprint), 1967.

Dirichlet, P. G. L.: *Werke* (1889～1897); Chelsea (reprint), 1969,2 vols.

---

① *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, (1),20 Part Ⅱ, 1896,183～256,281～397.

Dirichlet, P. G. L. and R. Dedekind: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4th ed., 1894 (contains Dedekind's Supplement); Chelsea (reprint), 1968.

Gauss, C. F.: *Disquisitiones Arithmeticae*, trans. A. A. Clarke, Yale University Press, 1965.

Hasse, H.: "Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper", *Jahres. der Deut. Math. -Verein.*, 35, 1926, 1～55 and 36, 1927, 233～311.

Hilbert, David: "Die Theorie der algebraischen Zahlkörper", *Jahres. der Deut. Math. Verein.*, 4, 1897, 175～546 = *Gesammelte Abhandlungen*, 1, 63～363.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert*, Chelsea (reprint), 1950, Vol. 1.

Kronecker, Leopold: *Werke*, 5 vols. (1895～1931), Chelsea (reprint), 1968. See especially, Vol. 2, pp. 1～10 on the law of quadratic reciprocity.

Kronecker, Leopold: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, G. Reimer, 1882 = *Jour. für Math.*, 92, 1881/1882, 1～122 = *Werke*, 2, 237～388.

Landau, Edmund: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, B. G. Teubner, 1909, Vol. 1, pp. 1～55.

Mordell, L. J.: "An Introductory Account of the Arithmetical Theory of Algebraic Numbers and its Recent Development", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 29, 1923, 445～463.

Reichardt, Hans, ed.: *C. F. Gauss, Leben und Werk*, Haude und Spenersche Verlagsbuchhandlung, 1960, pp. 38～91; also B. G. Teubner, 1957.

Scott, J. F.: *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, 1958, Chap. 15.

Smith, David E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, 107～148.

Smith, H. J. S.: Collected Mathematical Papers, 2 vols. (1890～1894), Chelsea (reprint), 1965. Vol. 1 contains Smith's *Report on the Theory of Numbers*, which is also published separately by Chelsea, 1965.

Vandiver, H. S.: "Fermat's Last Theorem", *Amer. Math. Monthly*, 53, 1946, 555～578.

第 35 章

射影几何学的复兴

> 纯粹几何学的学说往往会给出，而在许多问题中会给出一个简单而自然的办法来洞察诸真理的来源，去揭露那连接它们的神秘链索，去使它们独特地、明白地、完全地被认识.
>
> Michel Chasles

1. 对几何学的兴趣的恢复

在 Descartes 和 Fermat 引进解析几何学以后的百余年里，代数的和分析的方法统治了几何学，几乎排斥了综合的方法. 在这段时期，某些人，例如坚持尝试要使微积分严格地奠基于几何学的那些英国数学家，综合地得到过新结果. 几何的方法，优美而且直观上清晰，总是吸引住一些人. 特别是 Maclaurin，他喜爱综合的几何学胜过分析学. 因此，纯粹几何学即使不处在 17、18 世纪最生气勃勃的发展的中心，也还保持着一些活力. 19 世纪初，几位大数学家判定综合几何学过去是被不公平、不明智地忽视了，因而作出积极的努力来复兴和扩展它.

综合方法的新提倡者之一，Jean-Victor Poncelet，是承认旧的纯粹几何学的局限性的. 他说："解析几何学以其特有的方法提供通用而且一致的手段去解决出现的问题……它得出的结果其普遍性是无止境的，然而另一个[综合几何学]却碰巧才能前进；其办法完全依靠使用者的聪明，其结果几乎总是局限于所考虑的特定图形."但是，Poncelet 不相信综合方法必然这样局限，他提出要创造与解析几何学的威力相匹敌的新的综合方法.

Michel Chasles(1793—1880)是几何方法的另一位大支持者. 在他的《几何方法的起源和发展的历史概述》(*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837,这是一篇历史研究,其中 Chasles 声明他因不懂德文而未谈到德国作者)中,他说,当时的以及更早的数学家们曾宣称几何学是一种死的语言,将来不会再有用处和影响. Chasles 不但否定这种说法,而且引完全是分析学家的 Lagrange 为证. 当遇到天体力学中一个很难的问题时,60 岁的 Lagrange 说[①]:"虽然分析学也许比旧的几何学的(通常被不适当地称为综合的)方法要优越,但是在有一些问题中,后者却显得更优越,部分是由于其内在的清晰,部分是由于其解法的优美平易. 甚至还有一些问题,代数的分析有点不够用,似乎只有综合的方法才能制服."Lagrange 举出的例证是旋转椭球体对其表面或内部一点(单位质量)的引力这个很难的问题. 这个问题曾被 Maclaurin 用纯粹综合的方法解决过.

Chasles 还摘引了比利时天文学家兼统计学家 Lambert Adolphe Quetelet(1796—1874)给他的信. Quetelet 说:"我们的大多数年轻数学家这么轻视纯粹几何学,是不恰当的."他接着说,年轻人嫌其方法缺乏普遍性,他问道,这究竟是几何学的过错还是研究几何学的人的过错呢? 为了克服缺乏普遍性,Chasles 向未来的几何学家提出两条守则. 他们应当把特殊的定理推广成最普遍的(同时还应是最简单而自然的)结果. 其次,他们不应当满足于一个结果的证明,如果他不是一个一般方法或所从属的学说的一部分. 什么叫找到一个定理的真正基础呢? 他说,总是有一个主要的真理的,人们会认出它来,因为别的定理都将通过简单的变换或作为容易的推论而从它得出. 作为知识的基础的伟大的真理总具有简单和直观的特色.

---

① *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773,121～148, pub. 1775 = *Œuvres*, 3,617～658.

别的数学家用比较粗鲁的语言攻击分析方法. Carnot 希望“把几何学从分析学的画符样难懂的文字中解放出来”. 这个世纪后期, Eduard Study(1862—1922)称坐标几何学的机器似的过程为“坐标磨坊的嘎嘎声”.

对几何学中解析方法的反对不只是出于个人的偏好或口味. 首先, 一个真正的问题是, 到底解析几何学是不是几何学? 因为方法和结果的实质都是代数, 它们的几何意义都是隐蔽的. 此外, 正像 Chasles 所指出的, 分析学以其形式过程全部略去了几何学所不断采取的小步骤. 分析学的快速而且也许是渗透的步伐不显露已经完成了的事情的意义. 起点与最终结果之间的联系是不清楚的. Chasles 问道:“在一门科学的哲理性的、基础的研究中, 光知道某件事是对的却不知道它为什么对、不知道它在所属的真理系列中处于什么地位, 这难道够吗?”另一方面, 几何的方法可以得到简单的、直观上明显的证明和结论.

首先由 Descartes 提出的另一个论点, 在 19 世纪还引起共鸣. 几何学被认为是关于空间和现实世界的真理. 代数学和分析学本身, 连关于数和函数的重要真理都算不上. 它们不过是达到真理的方法, 而且还是矫揉造作的. 对于代数学和分析学的这种看法逐渐在消失. 然而在 19 世纪初这种批评还是强有力的, 因为分析的方法还不完善, 甚至逻辑上还不健全. 几何学家理直气壮地怀疑解析证明的正确性, 贬之为仅供参考的一些结果. 分析学家却只能回嘴说几何的证明是笨拙而不优美的.

论战的结局是纯粹几何学家重申他们在数学中的作用. 恰像是因解析几何学的创立使纯粹几何学被抛弃而向 Descartes 报仇似的, 19 世纪初的几何学家们以在几何学的竞赛中胜过 Descartes 作为他们的目标. 分析学家与几何学家之间的对抗如此激烈, 以至 Steiner (一位纯粹几何学家)曾威胁要停止为 Crelle 的《数学杂志》写稿, 如果 Crelle 继续发表 Plücker 的分析学的文章的话.

复兴综合几何学的刺激主要来自一个人——Gaspard Monge. 我们已经谈到过他对解析几何学和微分几何学的宝贵贡献以及他 1795 至 1809 年间在多科工艺学校的鼓舞人心的讲演. Monge 本人并不企图做更多的事,只不过是想把几何学带回到数学圈子里来,作为分析学结果的有启发性的途径和解释. 他只企图使两种思想方法并重. 然而,他自己的几何学研究和他对几何学的热情在他的学生们, Charles Dupin, François-Joseph Servois, Charles-Julien Brianchon, Jean-Baptiste Biot (1774—1862),Lazare-Nicholas-Marguerite Carnot 和 Jean-Victor Poncelet 之中激发起复兴纯粹几何学的强烈愿望.

Monge 对纯粹几何学的贡献是他的《画法几何学》(*Traité de géométrie descriptive*, 1799). 这门学科是讲怎样把三维物体正交投影到两个(一个水平的、一个垂直的)平面上,使得从这个表示法可以推断该物体的数学性质. 这种图解法适用于建筑学、堡垒设计、透视学、木匠业和石匠业,而且是第一次讨论三维图形到两个二维图形的投影. 画法几何学的思想和方法并没有成为通向几何学后来发展的道路,或者通向数学的任何别的部分的道路.

2. 综合的 Euclid 几何学

虽然 Monge 所鼓动起来的几何学家们去搞射影几何学了,但我们先停下来看看综合的 Euclid 几何学中的一些新成果. 这些成果,或许重要性不大,然而显示出这门古老学科的新的主题和几乎无穷无尽的丰富多彩. 实际上产生了数以百计的新定理,我们只能从中举几个例子.

每个三角形 ABC 有九个特别的点:各边的中点、三条高的垂足、以及各顶点与垂心连线的中点. 这九个点全在一个圆周上,叫

做九点圆. 这定理是Gergonne与 Poncelet 首先发表的[①]. 它常被归功于 Karl Wilhelm Feuerbach(1800—1834), 一位高中教师, 他的证明发表在《直边三角形的一些特殊点的性质》(*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*, 1822)里. 在这本书里, Feuerbach 添加了关于九点圆的另一个事实. 旁切圆是与一条边和另外二条边的延长线相切的圆. (旁切圆的圆心位于两个外角和较远的那个内角的分角线上.) Feuerbach 的定理说, 九点圆与内切圆以及三个旁边圆都相切.

在 1816 年出版的一本小书《平面直边三角形的一些性质》(*Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks*)中, Crelle 指出怎样在一个三角形内部求一点 P, 使得 P 与三角形的顶点的连线和三角形的边作成相等的角. 就是说, 在图 35.1 中 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. 还有另一点 P', 使得 $\angle P'AC = \angle P'CB = \angle P'BA$.

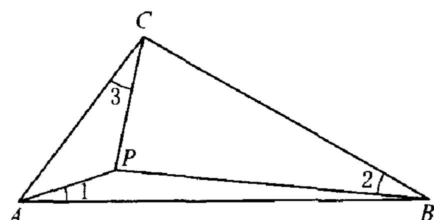


图 35.1

我们知道, 圆锥曲线曾被 Apollonius 看做是圆锥的截口而明确地讨论过, 后来在 17 世纪又被作为平面上的轨迹引进过. 1822 年 Germinal Dandelin(1794—1847)证明了关于圆锥曲线与圆锥的关系的一个十分有趣的定理[②]. 他的定理说, 如果两个球面内切于一个圆锥并且都与一个已知平面相切, 该平面与圆锥交于一条圆锥曲线, 那么球面与平面的接触点是圆锥曲线的焦点, 球面与圆锥相切的圆所在的平面同已知平面的交线是圆锥曲线的准线.

19 世纪时人们探讨的另一个有趣的主题是用纯几何的方法, 也就是不依靠变分法, 求解极大极小问题. 在 Jacob Steiner 用综

---

① *Ann. de Math.*, 11, 1820/1821, 205～220.

② *Nouv. Mém. de l'Acad. Roy. des Sci.*, Bruxelles, 2, 1822, 169～202.

合方法证明的几个定理中,最著名的结果是等周定理:在具有一定周长的所有平面图形中,圆周包围着最大的面积. Steiner 给出了各种各样的证明①. 可惜 Steiner 假定了存在着一条曲线它确实包围着最大的面积. Dirichlet 好几次试图说服他,说因此他的证明是不完全的;但是 Steiner 坚持说这是不证自明的. 然而有一次他的确写过(在 1842 年文章的第一篇中)②:"而如果假定有一个最大的图形,证明就是轻而易举的."

极大化曲线的存在性证明难住了数学家们好些年,直到 Weierstrass 在他 1870 年代的讲演中求助于变分法③解决了这个问题为止. 其后 Constantin Caratheodory(1873—1950)和 Study④在一篇合写的文章中不用变分法而严格化了 Steiner 的证明. 他们的证明(有两个)是直接的,不像 Steiner 的方法是间接的. 在偏微分方程和分析学中做过伟大的工作并曾在包括格丁根和柏林在内的几所大学当过教授的 Hermann Amandus Schwarz,对三维的等周问题给了一个严格的证明⑤.

Steiner 也证明了(在 1842 年文章的第一篇中)在具有一定周长的所有三角形中,等边三角形具有最大的面积. 他的另一个结果⑥说,如果 A, B, C 是给定的三点(图 35. 2)并且三角形 ABC 的每个角都小于 120°,那么使 $PA+PB+PC$ 最小的点 P 正好使 P 处的每个角都是 120°. 但是如果三角形的一个角,比方说角 A,等于或大于 120°,那么 P 与 A 重合. 这个结果很早以前 Cavalieri (《六道几何练习题》, 1647)就证明过,但 Steiner 一定不知道.

---

① *Jour. für Math.*, 18,1838,281～296;以及 24,1842,83～162,189～250;1842 年的文章收在他的 *Ges. Werke*, 2,177～308.

② *Ges. Werke*, 2,197.

③ *Werke*, 7,257～264,301～302.

④ *Math. Ann.*, 68,1909, 133～140 = Caratheodory, *Ges. math. Schriften*, 2,3～11

⑤ *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1884, 1～13 = *Ges. math. Abh*, 2,327～340.

⑥ *Monatsber. Berliner Akad.*, 1837, 144 = *Ges. Werke*, 2,93 和 729～731.

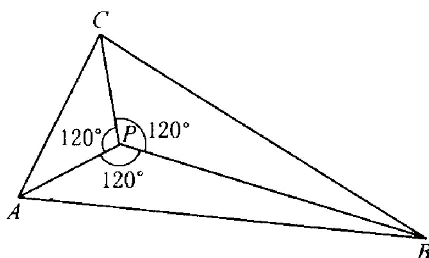


图 35.2

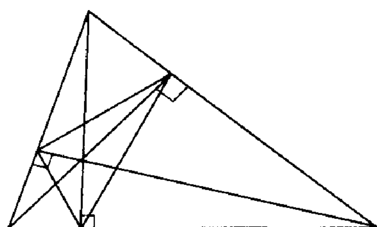


图 35.3

Steiner 也把这结果推广到 n 个点.

Schwarz 解决了下面的问题:已知一个锐角三角形,考虑所有这样的三角形,其每个顶点都在原来那个三角形的三条边上;问题是要找出周长最短的三角形. Schwarz 综合地证明了① 这个周长最短的三角形的三顶点就是已知三角形的三个高的垂足(图 35.3)②.

Euclid 几何学的一条新奇的定理,在 1899 年被约翰斯·霍普金斯大学数学教授 Frank Morley 所发现,后来许多人发表了它的证明③. 这定理说,如果画出一个三角形的每个顶角的三等分线,则相邻的三等分线就相交于一个等边三角形的顶点(图 35.4). 新奇处在于涉及角三等分线. 直到 19 世纪中叶,没有一个数学家会去考虑这些线,因为只有可以作图的那些元素和图形才被认为在 Euclid 几何学中是合法的. 可作图性保证了存在性. 然而,关于确立存在性的观念改变了,这一点当我们考察关于 Euclid 几何学的逻辑基础的研究工作时将看得更清楚.

沿着 Mohr 和 Mascheroni(第 12 章第 2 节)所开创的路线,为减少直尺和圆规的使用作了若干努力. Poncelet 在他 1822 年的

① 文章未发表, *Ges. Math. Abh.*, 2,344～345.

② Schwarz 的证明可以在 Richard Courant 与 Herbert Robbins 的 *What is Mathematics*? Oxford University Press, 1941, pp. 346～349 中找到. J. F. de Toschi di Fagnano(1715—1797)给出一个不用微积分的证明,见于 *Acta Eruditorum*, 1775, p. 297. 在 Schwarz 之前有过不那么优美的几何的证明.

③ 一个证明,以及已发表的证明的参考资料,见 H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley and Sons, 1961, pp. 23～25.

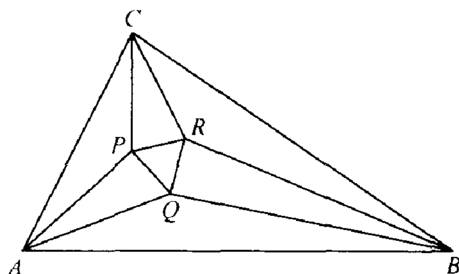


图 35.4

《论著》中证明了能用直尺和圆规做的所有的作图(除了作圆弧以外)都能只用直尺做到,只需事先给我们一个固定的圆及其圆心. Steiner 在一本小书《用直尺和一个定圆进行的几何作图》(*Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*)[①]中更优美地重新证明了这个结果. 虽然 Steiner 这本书是为教育的目的写的,但他在序言里宣称他将证明一位法国数学家表达过的一个猜想.

关于用综合方法证明的 Euclid 几何学定理的上述简短选讲,不应给读者留下解析几何的方法没有人用的印象. 事实上,Gergonne给出了许多几何定理的解析证明,发表在他创办的杂志《数学纪事》(*Annales de Mathématiques*)上.

3. 综合的射影几何学的复兴

Monge 和他的学生从事的主要领域是射影几何学. 这门学科在 17 世纪曾经有过相当活跃然而短暂的突进(第 14 章),但是被解析几何、微积分和分析学的兴起所淹没了. 我们已经提到过,Desargues 1639 年的主要工作被忽略至 1845 年,而 Pascal 关于圆锥曲线的主要论文(1639)一直没有找到. 只有 La Hire 的书可供使用, 其中采用了 Desargues 的某些结果. 19 世纪的人常错把从

① 1833 出版 = *Werke*, 1,461～522.

La Hire 的书中学到的东西归功于 La Hire. 但是,整个说来,这些几何学家不知道 Desargues 和 Pascal 的工作而不得不重做.

射影几何学的复兴始于 Lazare N. M. Carnot(1753—1823),他是 Monge 的学生,杰出的物理学家 Sadi Carnot 的父亲. 他的主要著作是《位置的几何学》(*Géométrie de position*, 1803),也写过《关于斜截理论》(*Essai sur la théorie des transversales*, 1806). Monge 赞成联合运用解析几何与纯粹几何,但是 Carnot 拒绝使用解析方法,并开始了纯粹几何学的奋斗. 我们即将充分讨论的想法有许多在 Carnot 的书中至少是提过的. 如 Monge 称之为偶然关系的原理(又通称为相关原理或者更常被称为连续性原理)那里面就有. 为了避免对不同大小的角和不同方向的直线用不同的图,Carnot 不使用他认为有矛盾的负数,却引进了一套复杂的图表,称为"正负号的对应".

19 世纪初期的射影几何研究者中,我们只提 François Joseph Servois 和 Charles-Julien Brianchon(1785—1864),他们两人都把他们的工作应用于军事问题. 虽然他们出了力重建、整理和扩充旧的结果,可是重要的新定理只有 Brianchon 的著名结果[①],即还是他在多科工艺学校当学生时证明的. 这定理说,如果一个圆锥曲线的六条切线(图 35.5)形成一个外切六边形,那么连结相对顶点的三条线通过同一点. Brianchon 用配极关系导出了这个定理.

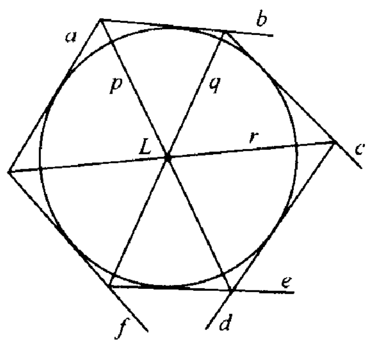


图 35.5

射影几何学的复兴从 Poncelet(1788—1867)得到主要的动力. Poncelet 是 Monge 的学生,他也从 Carnot 那里学了许多. 当他

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 6,1806,297~311.

在 Napoleon 的远征军中做军官时,他被俘并在俄国萨拉托夫(Saratoff)监狱里渡过了 1813—1814 年. 在那里,Poncelet 不借助任何书本,重作了他从 Monge 和 Carnot 那里学到的东西,然后着手创造新的结果. 后来他扩充并修订了这个工作,发表为《论图形的射影性质》(*Traité des propriétés projectives des figures*, 1822). 这个工作是他对于射影几何学和对于创立新学科的主要贡献. 在他后来的生涯中,不得已而把大量的时间用于政府事务,虽然在不长的时期内他还保持着教授的职位.

Poncelet 成了综合几何学的最热心的支持者,他甚至攻击分析学家. 他曾与分析学家 Joseph-Diez Gergonne(1771—1859)友好,并曾在 Gergonne 的《数学纪事》上发表过文章,但是他的攻击不久也指向 Gergonne 了. Poncelet 深信纯粹几何学的独立性和重要性. 虽然他承认分析学的威力,但他相信能够赋予综合几何学以同样的威力. 在 1818 年的一篇文章(发表在 Gergonne 的《纪事》上[①])里,他说,解析方法的威力不在于运用代数而在于它的普遍性,这个优越性产生于这样的事实:从一个典型的图形发现的度量性质,对于由这典型的或基本的图形派生出来的所有图形都仍然适用,顶多改变一下正负号. 这种普遍性在综合几何学里能由连续性原理(我们即将讲它)得到保证.

Poncelet 是充分认识到射影几何学具有独特方法和目标的新数学分支的第一位数学家. 17 世纪的射影几何学家讨论特殊问题,而 Poncelet 却考虑一般问题,探索几何图形任一投影的所有截影所共有的那些性质,亦即在投射与截影下保持不变的性质. 这就是他和他的后继者们研究的主题. 由于距离和角度在投影与截影下是会改变的,所以 Poncelet 选择并发展了对合与调和点列的理论,而不是交比的概念. Monge 在他的工作中用了平行投影;像

---

① *Ann. de Math.*, 8, 1817/1818, 141～155. 这篇文章重印在 Poncelet 的 *Applications d'analyse et de géométrie*(1862—1864)中,2,466～476.

Desargues, Pascal, Newton 和 Lambert 一样, Poncelet 用中心投影,即从一个点投影. Poncelet 把这个概念提高成为研究几何问题的一种方法. Poncelet 也考虑了从一个空间图形到另一个空间图形的射影变换,当然是用纯几何的方式. 这时他好像对射影性质失去了兴趣,而更关心这方法在浮雕和舞台设计中的运用.

他的工作以三个观念为中心. 第一个是透射的图形. 两个图形是透射的,如果一个能够从另一个经过一次投射与截影(这叫做透视对应)或一连串投影与截影(这叫做射影对应)得出. 他运用透射图形的方法是,对于一个给定的图形,找一个比较简单的透射的图形,研究后者以找出它在投射与截影下不变的性质,这样来获得原来那比较复杂的图形的性质. 这个方法的实质曾被 Desargues 和 Pascal 使用过, Poncelet 在他的《论图形的射影性质》里赞扬过 Desargues在这方面及其他方面的创见.

Poncelet 的第二个主导的观念是连续性原理. 在他的《论图形》里他是这样说的:"如果一个图形从另一个图形经过连续的变化得出,并且后者与前者一样地一般,那么可以马上断定,第一个图形的任何性质第二个图形也有."怎样判定这两个图形都是一般的呢? 他没有解释. Poncelet 的原理也断定,若一个图形退化了,譬如六边形的一边趋于零而退化成五边形,则原来图形的任何性质都会转化成关于那退化图形的一个适当措辞的命题.

这原理对 Poncelet 来说其实不是新的,在概括的哲学意义下,要追溯到 Leibniz,他在 1687 年说,当两件事的已知条件的差别能变得任意地小时,其结果的差别也能变得小于任意给定的量. 从 Leibniz 以来这原理一直得到承认和运用. Monge 开始用连续性原理来论证定理. 他想要证明一个普遍的定理,却采用图形的一个特殊位置来证它,然后声称这定理是普遍成立的,甚至当该图形里的某些元素变成虚的时候也成立. 例如,要证明关于线与曲面的一个定理,他就在线与曲面相交时证它,然后声称即使线与曲面不

相交,交点变成虚的时候,结论也成立. 无论 Monge 还是 Carnot (他也用过这原理)都没有为它提出过任何根据.

制造了"连续性原理"这个术语的 Poncelet,把这原理抬高成绝对的真理,并在他的《论图形》中大胆地应用. 为了"论证"它是可靠的,他举出圆的相交弦的两段之积相等这条定理,说,当交点移到圆外时,得出关于割线与其圆外段之积相等的定理. 还有,当一条割线变成切线时,切线与其圆外段变得相等,它们的积仍等于另一条割线与其圆外段的积. 这一切都是挺有道理的,但是 Poncelet 应用这原理来证明许多定理,并且像 Monge 一样,引申这原理去谈论虚的图形.(以后我们将提到一些例子.)

巴黎科学院的别的院士们批评这连续性原理,认为它只具有启发的意义. 特别是 Cauchy,他批评这原理,但遗憾的是他的批评指向 Poncelet 的应用,而在那里这原理确实是有效的. 批评者也指出,Poncelet 等人对这原理的信心其实是来源于它有代数上的依据. 事实上,Poncelet 在狱中的笔记表明他确曾用分析学来检验这原理的可靠性. 顺便说一下,这些笔记由 Poncelet 写好并由他分成两卷出版,题为《分析学与几何学的应用》(*Applications d'analyse et de géométrie*, 1862—1864),其实这是他 1822 年的《论图形》的修订版,而且在后面这一著作中他的确使用了解析方法. Poncelet 承认能够从代数上证明这原理,但他坚持认为这原理并不依赖于这样一个证明. 然而可以相当肯定的是,Poncelet 依靠了代数的方法去弄清事情的究竟,然后又以这原理为依据来肯定几何的结果.

Chasles 在他的《概述》里为 Poncelet 辩护. Chasles 的论点是,代数是这原理的事后诸葛亮的(由结果追溯原因的)证明. 然而,他留下伏笔,指出必须小心,不要把本质上依赖于元素的虚实的性质从一个图形转移到另一图形上去. 例如圆锥的一个截口可能是双曲线,因而它有渐近线. 当截口是一个椭圆时,渐近线就成

了虚的. 因此不应去证明一个只同渐近线有关的结果,因为渐近线依赖于截口的特殊种类. 也不应把抛物线的结果转移到双曲线上去,因为在抛物线的情形,截割平面并不在一般位置. 接着,他讨论了有公共弦的两个相交圆的问题. 当两圆不再相交时,公共弦成虚的. 他说,其实公共弦通过两个实点这件事是一种附带的或偶然的性质. 必须以某种办法来定义这条弦,要不依赖于当两圆相交时它通过实交点这件事,而要是任意位置的两个圆都恒有的性质. 例如可以定义它为(实的)根轴,意思是这条线上的任何点到那两个圆的切线长都相等;也可以利用这么个性质来定义它,即以这条线上任何点为圆心能画一个圆与那两个圆都垂直相交.

Chasles 也坚决主张连续性原理适用于处理几何里的虚元素. 他先解释几何里的虚是什么意思. 虚元素属于一个图形的某一种情形或状态,在其中某些成分不再存在,而在这图形的另一状态中这些成分是实的. 他接着说,因为,若不同时想想这些量是实量时的那些有关的状态,就不会有虚量的观念. 后面说的这些状态,他叫做"偶然的"状态,提供了理解几何里的虚元素的钥匙. 要证明关于虚元素的结果,只需取图形的一般位置,其中该元素是实的,然后,依据偶然关系原理或者说连续性原理,可以推断当该元素是虚的时候结果也成立. "这样就看出,虚元素的运用和考虑是完全正当的."19 世纪时,连续性原理被承认为直观上明显的,因而具有公理的地位. 几何学家们随意使用它,从来不认为它需要证明.

虽然 Poncelet 用连续性原理去断定关于虚点和虚线的结果,但他从未给出过这些元素的一般定义. 为了引进某些虚点,他给了复杂的、不十分清晰的几何意义. 当我们从代数的观点来讨论它们时,我们会更容易理解这些虚元素. 尽管 Poncelet 的方法缺乏清晰性,但引进圆上无穷远点的概念还得归功于他,那是任何两个圆都共有的、位于无穷远直线上的两个虚点①. 他还引进了任两球面

---

① *Traité*, 1,48.

都共有的球上无穷远圆. 他接着证明,两条不相交的实圆锥曲线有两条虚的公共弦,两条圆锥曲线交于四个点,或实或虚.

Poncelet 的工作中第二个主导观念是关于圆锥曲线的极点与极线的概念. 这概念起源于 Apollonius,并在 17 世纪的射影几何学工作中被 Desargues(第 14 章第 3 节)及其他人用过. Euler, Legendre, Monge, Servois 和 Brianchon 也已用过它. 但是 Poncelet 给出了从极点到极线和从极线到极点的变换的一般表述,并且在他 1822 年的《论图形》和他在 1824 年提交巴黎科学院的《论配极的一般理论》①中用作建立许多定理的方法.

Poncelet 研究关于圆锥曲线的配极的目的之一是要建立对偶原理. 射影几何的研究者们曾经注意到,涉及平面图形的定理如果把“点”换成“线”、“线”换成“点”重述一遍,不但话谈得通,而且竟是正确的. 这样重述所得出的定理为什么还成立? 其原因当时是不清楚的,并且 Brianchon 事实上还怀疑过这个原理. Poncelet 想,配极关系是其原因.

然而,这个配极关系需要一个圆锥曲线作中介. Gergonne② 坚决主张这对偶原理是一个普遍原理,适用于除了涉及度量性质者外的一切陈述和定理. 极点和极线是不必要的中间支撑物. 他引进了“对偶性”这个术语来表示原来定理与新定理之间的关系. 他也注意到在三维的情形中点与面是对偶的元素,而线与它自已对偶.

为了说明 Gergonne 对于对偶原理的理解,我们来考察他是怎样对偶化 Desargues 的三角形定理的. 首先我们应注意三角形的对偶是什么. 三角形由不在同一条直线上的三个点,以及连结它们的三条线组成. 对偶的图形则由不在同一个点上的三条线,以及连结它们的三个点(交点)组成. 这对偶的图形又是一个三角形,所

① *Jour. für Math.*, 4, 1829, 1~71.

② *Ann. de Math.*, 16, 1825~1826, 209~231.

以三角形称为是自对偶的. Gergonne 发明了把对偶的定理写成两栏的格式,把对偶的命题并排写在原来命题的旁边.

现在让我们考虑 Desargues 定理,这时两个三角形和点 O 在一个平面里,我们来看看把点与线对换会得出什么结果. Gergonne在刚才提到过的 1825—1826 年的文章中把这个定理及其对偶写成:

Desargues 定理	Desargues 定理的对偶
如果有两个三角形,连结对应顶点的线过同一个点 O,那么对应边相交的三个点在同一条线上.	如果有两个三角形,连结对应边的点在同一条线 O 上,那么对应顶点相连的三条线过同一个点.

这里,对偶定理是原来定理的逆定理.

Gergonne 对一般对偶原理的表述是有点含糊的、有缺陷的. 虽然他深信它是一个普遍的原理,但他不能证明它,而 Poncelet 正确地反对了这些缺陷. 他还与 Gergonne 争发现这原理的优先权(这实在是属于 Poncelet 的),甚至谴责 Gergonne 剽窃. 然而, Poncelet 确实要依靠配极,却不肯承认 Gergonne 在认识这原理的更广的应用方面前进了一步. 后来, Poncelet, Gergonne, Möbius, Chasles 和 Plücker 之间开展的讨论完全弄清了这原理. Möbius 在他的《重心计算》(*Der barycentrische Calcul*)中,后来还有 Plücker,都很好地说明了对偶原理与配极的关系:对偶的概念和圆锥曲线、二次型无关,但当后者能用时,就与配极一致. 这时期还没有得到一般对偶原理的逻辑证明.

Jacob Steiner(1796—1863)推进了射影几何的综合的发展. 他是接受法国的尤其是 Poncelet 的观念,偏爱综合方法以至嫌恶分析学的一个德国几何学派的第一个人. 他是一个瑞士农民的儿子,19 岁以前一直在农场干活. 虽然他大多是自学的,但他终于成

了柏林的教授. 他年轻时是裴斯泰洛齐学校的教师,深感培养几何直观之重要. 裴斯泰洛齐原则是在教师引导下,并采用 Socrates 方法(即问答法——译者注),让学生创造数学. Steiner 走到极端,他教几何不用图,在黑屋子里培养研究生. 在其后期的工作中,Steiner 把英国的及其他杂志上发表的定理和证明拿过来,在他自己的著作中从不声明他的成果已有人建树. 他早年做过好的创造性的工作,并企图维持他的多产的名声.

他的主要著作是《几何形的相互依赖性的系统发展》(*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischen Gestalten von einander*, 1832),他的主要原理是运用射影的概念从简单的结构(如点、线、线束、面、面束)建造出更复杂的结构. 他的结果不是特别新的,但他的方法是新的.

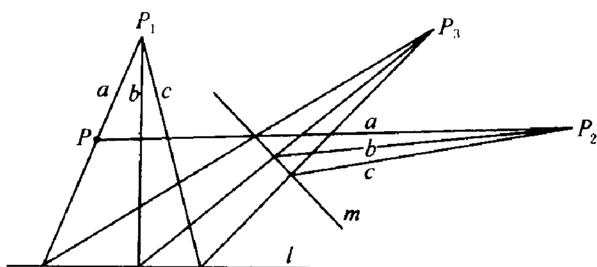


图 35.6

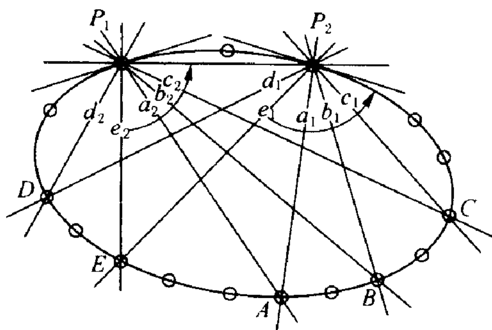


图 35.7

为解释他的原理,我们来考察他的定义圆锥曲线的射影方法,这现已成为标准的方法. 从两个线束(共点的线族)P_1, P_3 出发(图 35.6),设它们是通过线 l 上的点束透视相关的;设线束 P_3 与 P_2 是通过另一条线 m 上的点束透视相关的. 这时线束 P_1 与 P_2 就说是射影相关的. 以 P_1 为中心的线束和以 P_2 为中心的线束中标着 a 的线,是在两个线束 P_1 与 P_2 间的射影对应下互相对应的线的例子. 圆锥曲线现在就定义为两个射影相关的线束的所有各对对应线的交点的集合. 例如 P 是曲线上的一个点,而且,这曲线通过 P_1 和 P_2(图 35.7). 就这样,Steiner 用较简单的形、线束,造出了圆锥曲线或二次曲线. 但是,他并未证明他的曲线与圆锥的截口是一回事.

他也以类似的方式造出了直纹的二次曲面、单叶双曲面和双曲抛物面,用射影对应作为他的定义的基础. 实际上对整个射影几何来说他的方法还不够普遍.

在证明中他采用交比作为基本工具. 然而他不采用虚元素,称之为"幽灵"或者"几何的鬼影". 他也不采用带负号的量,虽然 Möbius(他的工作我们很快要讲)已经引进了它们.

Steiner 在他的工作中从一开头就使用对偶原理. 例如他把圆锥曲线的定义对偶化,得到一种新结构,称为线曲线. 如果从两个射影相关的(但非透视相关的)点束出发,那么连结这两个点束中对应点的线族(图 35.8)称为一个线圆锥曲线. 这样的线束也刻画

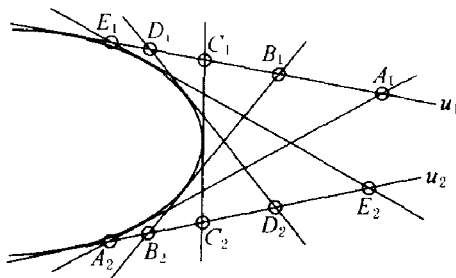


图 35.8

出一条曲线,为了区别起见,作为点的轨迹的通常的曲线称为点曲线. 点曲线的诸切线是一个线曲线,在圆锥曲线的情形就构成对偶曲线. 反过来,每个线圆锥曲线包络着一个点圆锥曲线,或者说它是一个点圆锥曲线的切线集体.

用 Steiner 的点圆锥曲线的对偶的概念,可以把许多定理对偶化. 让我们举 Pascal 定理来形成它的对偶命题. 我们把定理写在左边,新的命题写在右边.

Pascal 定理	Pascal 定理的对偶
在点圆锥曲线上取六个点 A, B, C, D, E, F,则 A, B 的连线与 D, E 的连线相交得一点 P;	在线圆锥曲线上取六条线 a, b, c, d, e, f,则 a, b 的交点与 d, e 的交点相连得一线 p;
B, C 的连线与 E, F 的连线相交得一点 Q;	b, c 的交点与 e, f 的交点相连得一线 q;
C, D 的连线与 F, A 的连线相交得一点 R.	c, d 的交点与 f, a 的交点相连得一线 r.
P, Q, R 三点在一条线 l 上.	p, q, r 三线通过同一点 L.

第 14 章的图 14.12 解说了 Pascal 定理. 其对偶就是 Brianchon 利用配极关系发现的定理(图 35.5). Steiner,像 Gergonne 一样,没有建立对偶原理的逻辑基础. 然而,他在前进过程中,通过把图形分类和注重对偶命题而系统地发展了射影几何学. 他还充分研究了二次曲线和二次曲面.

毕生献身于几何学的 Michel Chasles 继续 Poncelet 和 Steiner 的工作,虽然他个人并不知道 Steiner 的工作,因为我们曾经说过,Chasles 不能读德文. Chasles 在他的《论高等几何》(*Traité de géométrie supérieure*, 1852)和《论圆锥曲线》(*Traité des sec-*

tions coniques, 1865)中提出了他自己的想法. 由于 Chasles 的许多工作或者无意地重复了 Steiner 的,或者被更普遍的概念所更替,所以我们只讲应归功于他的少数主要结果.

Chasles 从他弄懂 Euclid 的失传的著作《衍论》(*Porisms*)的努力中得到交比的观念(虽然 Steiner 和 Möbius 已经重新引进了它). Desargues 也用过这概念,但是 Chasles 只知道 La Hire 写过的有关的东西. Chasles 不知什么时候还得知 Pappus 有这观念,因为在他的《概述》的札记 IX(p. 302)里他提到 Pappus 用了这观念. 这个领域中 Chasles 的结果之一[①]是,圆锥曲线上四个固定点与这圆锥曲线上的任意的第五点确定的四条线有相同的交比.

1828 年 Chasles[②] 给出了定理:已知两个共线点集成一一对应,使得一条线上任四点的交比等于另一条线上的对应点的交比,那么连结对应点的那些线是一个圆锥曲线的切线,那圆锥曲线与这两条已知线也相切. 这结果等价于 Steiner 的线圆锥曲线的定义,因为这里的交比条件保证了两个共线点集是射影相关的,连结对应点的那些线就是 Steiner 的线圆锥曲线的那些线.

Chasles 指出,从对偶原理来看,在平面射影几何学的发展中,线可以同点一样基本,并相信 Poncelet 和 Gergonne 对这一点是清楚的. Chasles 也引进了新的术语. 他把交比叫做非调和比. 他引进"单应"这个术语来描述平面到自身或到别的平面的、把点变成点、线变成线的变换. 这个术语包含了透射的或者射影相关的图形. 他加了一个条件,要求变换保持交比不变,但这件事是能够证明的. 把点变成线、线变成点的变换他叫做对射.

虽然 Chasles 为纯粹的几何学辩护,但他却是解析地思考然后几何地陈述他的证明和结果的. 这种方法称为"混合法",后来别人也使用.

---

① *Correspondance mathématique et physique*, 5,1829,6～22.

② *Correspondance mathématique et physique*, 4,1828,363～371.

1850 年前后,射影几何学与 Euclid 几何学相区别的一般概念和目的是清楚的;可是这两种几何学的逻辑关系并没有弄清楚.从 Desargues 到 Chasles,射影几何里用了长度的概念.事实上,交比的概念就是用长度定义的.但长度不是射影概念,因为它在射影变换下不是不变的.Karl Georg Christian von Staudt(1798—1867)是埃尔兰根(Erlangen)的教授,他对逻辑基础有兴趣,决心使射影几何摆脱对长度和叠合的依靠.他的方案在他的《位置的几何学》(*Geometrie der Lage*, 1847)中提出,实质上是在射影的基础上引进一种类似长度的东西.他的方案叫做"投的代数"(the algebra of throws).在直线上任选三个点,给它们指定符号 0, 1, ∞.然后用一种(来自 Möbius 的)几何作图法——"投",给任意一点 P 配上一个符号.

为了看看这作图法在 Euclid 几何里相当于什么,我们从直线上标着 0 和 1 的点(图 35.9)出发.过一条平行线上的一点 M 作 $0M$,然后,作 $1N$ 平行于 $0M$.再画出 $1M$,作 $N2$ 平行于 $1M$.显然 $01=12$,因为平行四边形对边相等.这样就用几何作图把 01 的长度转到 12 了.

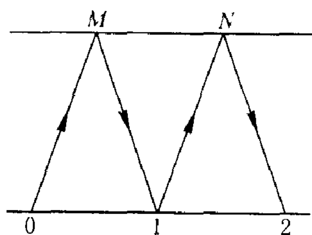


图 35.9

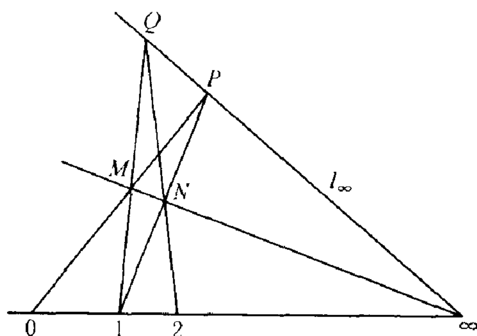


图 35.10

现在来看射影的情况.从三个点 0, 1, ∞(图 35.10)出发.点 ∞ 在无穷远直线 l_∞ 上,但在射影几何中这不过是一条普通的线.取一点 M,过 M 作一条"平行"于 01 的线.这意思是过 M 的那条

线应该与 01 在∞相交，所以我们画出 $M\infty$. 作 $0M$ 并延长它直到与 l_∞ 相交. 然后过 1 作 $0M$ 的“平行线”. 这意思是过 1 的那条“平行线”应该与 $0M$ 相交在 l_∞ 上. 这样我们得到 $1P$ 线，从而确定出 N 来. 再画出 $1M$ 并延长它直到与 l_∞ 相交于 Q. 过 N 而“平行”于 $1M$ 的线是 QN，我们就得到它与 01 的交点，标上 2.

用这种作图法能给 01∞线上的点配上“有理数坐标”. 要把无理数配给线上的点，必须引进连续性公理(第 41 章). 这概念当时尚未被很好地了解，因而 von Staudt 的工作不够严密.

Von Staudt 给线上的点指定坐标并未用长度. 他的坐标虽是通常的数的记号，却只是充当点的有系统性的识别符号. 所以要加或减这种“数”时，von Staudt 不能使用算术的法则. 他用几何作图来定义这些符号的运算，举例说，使得数 2 和 3 相加得数 5. 这些运算服从通常的数的一切规律. 这样，他的符号或坐标就能当作普通的数来处理，虽则它们是几何地造出来的.

给他的点配上这些标号以后，von Staudt 就能定义四个点的交比. 如果这四点的坐标是 x_1, x_2, x_3, x_4，那么交比定义为

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} \Big/ \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}.$$

这样，von Staudt 不依靠长度和叠合的概念就得到了建立射影几何的基本工具.

交比是 −1 的四点叫做调和集. 在调和集的基础上 von Staudt 给出基本定义：两个点束是射影相关的. 如果在一一对应之下调和集对应于调和集. 四条共点的线构成一个调和集，如果它们与任一斜截线的交点是一个调和点集. 于是两个线束的射影对应也能定义了. 利用这些概念，von Staudt 定义了平面到自身的直射变换为点到点、线到线的一一变换，并证明它把调和集变成调和集.

在他的《位置的几何学》里，von Staudt 的主要贡献是指出射

影几何学其实比 Euclid 几何学还基本. 它的概念从逻辑上看是前提. 这本书和他的《位置的几何学论丛》(*Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1856,1857,1860)显示了射影几何学是与距离无关的学科. 然而,他还是用了 Euclid 几何学的平行公理,从逻辑的观点看来这是个缺点,因为平行性不是射影不变的. 这个缺点是 Felix Klein① 消除的.

4. 代数的射影几何学

在综合几何学家们发展射影几何学的同时,代数几何学家们沿用自己的方法也研究这同一个学科. 新的代数概念中最早的是现在所称的齐次坐标. 方案之一是 Augustus Ferdinand Möbius (1790—1868)创立的,他像 Gauss 和 Hamilton 一样,是一个天文学家,但是他把大量的时间用于数学. 虽然 Möbius 没有参加综合方法与代数方法之争,但他的贡献却是在代数方面.

他用坐标表示平面上的点的方案,发表在他的主要著作《重心计算》②中. 他从一个固定的三角形出发,对这平面的任一点 P,考虑在三角形的三个顶点上各放多少质量能使这三个质量的重心在 P,就取这三个量作为 P 的坐标. 当 P 在这三角形外面时,坐标之一或之二可以是负的. 当这三个质量乘以同一个常数时 P 仍是重心. 所以在 Möbius 的方案中,点的坐标不是唯一的;三个坐标之比才是确定的. 这个方案用于空间的点时需要四个坐标. 在这个坐标系里写出的曲线和曲面的方程是齐次的,即所有各项的次数都相同. 稍后我们就会看到运用齐次坐标的例子.

Möbius 把从平面到平面或从空间到空间的变换分成类型. 如果对应的图形相等,变换就是叠合变换;如果对应的图形相似,变

---

① *Math. Ann.*, 6,1873,112～145 = *Ges. Abh.*, 1,311～343. 又见第38章第3节.

② 1827 发表 = *Werke*, 1,1～388.

换就是相似变换. 再普遍一些的是保持平行性但不保持长度和形状的变换,这类型称为仿射变换(Euler 引进的一个概念). 最普遍的是把直线变成直线的变换,他把它叫做直射变换. Möbius 在《重心计算》中证明每个直射变换是一个射影变换;就是说,它能从一连串透视变换得出. 他的证明假定变换是一对一而且连续的,但是连续性条件能够减弱. 他还给出这种变换的一种解析表示式. Möbius 指出,可以在上述的每一类型变换下考虑图形的不变性质.

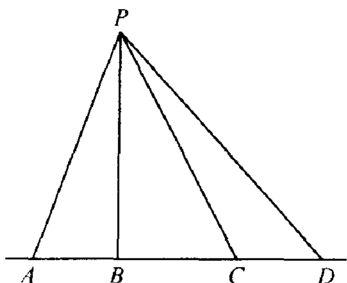


图 35.11

Möbius 在几何里不仅对线段而且对面积和体积,引进了带正负号的元素. 因此对于在同一线上四点的带正负号的交比这一概念他能给出完善的处理. 他还指出,线束中四条线的交比可以用顶点 P 处各角(图 35.11)的正弦表示为

$$\frac{\sin APB}{\sin APC}\bigg/\frac{\sin BPD}{\sin CPD},$$

并且这个比值与任何斜截线所截得的四点 A, B, C, D 的交比是相同的. 所以交比在投射与截影下不改变. Möbius 还缓慢地发展出许多别的观念,然而没有推进得很远.

赋予射影几何的代数方法以效率和活力的人是 Julius Plücker(1801—1868). 在好几所学校当数学教授之后,1836 年起,他一直是波恩的数学与物理学教授. Plücker 主要是一个物理学家,其实是一个实验物理学家,在那个领域里有许多有名的发现. 1863 年以后,他重新献身于数学.

Plücker 也引进了齐次坐标,但与 Möbius 的方式不同. 他的第一个概念是三线坐标①,也见于他的《解析几何的发展》(*Analy-*

① *Jour. für Math.*, 5, 1830, 1 ~ 36 = *Wiss. Abh.*, 1, 124~158.

tisch-geometrische Entwickelungen, 1828, 1831)的第二卷. 他从一个固定的三角形出发,任一点 P 的坐标取为从 P 到该三角形各边的带正负号的垂直距离;各距离可以乘以同一个常数. 后来在第二卷里他引进一个特殊情况,相当于把三角形的一条边看成无穷远直线. 这等价于把通常笛卡儿坐标 x 和 y 换成 $x = x_1/x_3$ 和 $y = x_2/x_3$,因而曲线的方程变得对 x_1, x_2, x_3 为齐次的. 后面这个概念是后来较广泛地采用的.

利用齐次坐标,并且利用关于齐次函数的 Euler 定理,即若 $f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^n f(x_1, x_2, x_3)$,则

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = nf(x_1, x_2, x_3),$$

Plücker 能够给几何观念以优美的代数表示. 例如若 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 是一个圆锥曲线的方程,其中(x_1, x_2, x_3)是这圆锥曲线上的点的坐标,那么方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2' + \frac{\partial f}{\partial x_3}x_3' = 0,$$

当把 x_1', x_2', x_3'看成流动坐标时,可以解释为点(x_1, x_2, x_3)处的切线方程,而当把 x_1, x_2, x_3 看成流动坐标时,则是任意点(x_1', x_2', x_3')相对于该圆锥曲线的极线的方程.

利用齐次坐标,Plücker 给出了无穷远线、圆上无穷远点及其他概念的代数表述. 在齐次坐标系(x_1, x_2, x_3)中,无穷远线的方程是 $x_3 = 0$. 这条线在射影几何里并不是异常的,但是在我们关于几何元素的直观模型中,Euclid 平面的每个寻常点落在一个有穷位置上,由 $x = x_1/x_3$ 与 $y = x_2/x_3$ 确定,因而我们不得不把 $x_3 = 0$ 上的点看成无穷远的.

在通过 $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$ 引进齐次笛卡儿坐标 x_1, x_2, x_3 之后,圆的方程

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

变成

$$(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = r^2 x_3^2.$$

由于无穷远线的方程是 $x_3=0$，所以这条线与圆的交点由

$$x_1^2+x_2^2=0,\ x_3=0$$

确定，而这乃是圆上无穷远点的方程. 这些点的坐标是(1, i, 0)和(1, −i, 0)，或者是正比于它们的三个数. 类似地，球面上的无穷远圆的方程是

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0,\ x_4=0.$$

如果我们把直线方程写成齐次形式(我们用 x, y, z 代替 x_1, x_2, x_3)

$$Ax+By+Cz=0,$$

并且要求该线通过点(x_1, y_1, z_1)和(1, i, 0)，那么所得的该线的非齐次方程是

$$x-x_0+\mathrm{i}(y-y_0)=0,$$

其中 $x_0=x_1/z_1$，$y_0=y_1/z_1$. 同样，通过(x_1, y_1, z_1)和(1, −i, 0)的线的方程是

$$x-x_0-\mathrm{i}(y-y_0)=0.$$

这两条线都与自身相垂直，因为斜率等于其负倒数. Sophus Lie 称它们为飘渺线；现在称为迷向线.

Plücker 从代数上处理对偶性的努力使他得到一个漂亮的观念，线坐标[①]. 如果一条直线在齐次坐标中的方程是

$$ux+vy+wz=0,$$

u, v, w 或与它们成比例的三个数就是这条线的坐标[②]. 于是正像方程 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 表示一些点的集体那样，$f(u, v, w)=0$ 表示一些线的集体，或者一个线曲线.

用这种线坐标的概念，Plücker 就能给对偶原理一个代数的表述和证明. 给定任一方程 $f(r, s, t)=0$，如果把 r, s, t 解释为点

---

① *Jour. für Math.*, 6, 1830, 107～146 = *Wiss. Abh.*, 1, 178～219.

② 译注：这一句原书为"如果一条直线在齐次坐标中的方程是 $ux+vy+wz=0$，又如果 x, y, z 是固定量，那么 u, v, w 或与它们成比例的三个数就是这平面上的一条线的坐标."当 x, y, z 是固定量时，Plücker 的原著说(Wiss. Abh., 1, 179)："方程 $au+bv+cw=0$ 表示一个点."

的齐次坐标 x_1, x_2, x_3,我们就得到一个点曲线的方程;如果把它们解释为 u, v, w,我们就得出对偶的线曲线. 用代数的过程证明的关于点曲线的任何一个性质都引出关于线曲线的对偶的性质,因为在变量的两种解释下,代数是相同的.

Plücker 在这 1830 年的第二篇文章和他的《发展》第二卷中还指出,看做点的集合的一条曲线同时也能看成这曲线的切线的集合,因为这些切线也像那些点一样确定了曲线的形状. 切线族是一条线曲线,在线坐标里有一个方程. 这个方程的次数叫做曲线的类数,而曲线在点坐标里的方程的次数叫做曲线的阶数.

5. 高次平面曲线和高次曲面

18 世纪的人对高于二次的曲线曾经做过一些工作(第 23 章第 3 节),但是从 1750 年到 1825 年这门学科处于休眠状态. Plücker 研究了三次和四次曲线,并且在这工作中放手使用了射影的概念.

在他的《解析几何的体系》(*System der analytischen Geometrie*, 1834)中,他采用了一个虽然方便却不很有根据的原理来建立曲线的标准型. 譬如说,为了证明一般的四阶(次)曲线能化成一种特定的标准型,他推理说,如果两种形式中常数的个数相同,就能把一种形式化成另一种. 这样,他推理说四阶的三元(三个变量的)形式总能化成

$$C_4 = pqrs + \mu\Omega^2$$

的形状,其中 p, q, r, s 是线性形式,Ω 是二次型,这是因为等式两边都包含 14 个常数. 在他的方程里 μ 和各系数都是实数.

Plücker 还研究了曲线的交点的个数,这是 18 世纪也做过的题目. 他用 Lamé 1818 年在一本书里引进的办法,把通过两条 n 次曲线 C_n' 和 C_n'' 的交点的所有曲线组成的曲线族表示出来. 通过

这些交点的任何曲线 C_n 都能表示成

$$C_n = C_n' + \lambda C_n'' = 0,$$

这是 λ 是参数.

用这个办法,Plücker 给 Cramer 诗论(第 23 章第 3 节)一个清楚的解释. 一条一般的曲线 C_n 被 $n(n+3)/2$ 个点所确定,因为这是它的方程中本质的系数的个数. 另一方面,由于两条 C_n 相交于 n^2 个点,过其中 $n(n+3)/2$ 个交点的会有无穷多条别的 C_n. Plücker 解释了这表面上的矛盾①. 任何两条 n 次曲线的确相交于 n^2 个点. 然而只有 $(n/2)(n+3)-1$ 个点是互相独立的. 换句话说,如果我们取两条 n 次曲线通过这 $(n/2)(n+3)-1$ 个点,那么过这些点的其他任何一条 n 次曲线,将通过它俩的 n^2 个交点中的其余 $(n-1)(n-2)/2$ 个. 例如当 $n=4$ 时,有 13 个点互相独立. 通过这 13 个点的任何两条曲线定出 16 个点,但是过这 13 个点的其他任何一条曲线一定通过其余那三个点.

然后 Plücker 研究了② m 次曲线与 n 次曲线的相交理论. 他把后者看成是固定的,交它的那条曲线是变动的. 采用缩写记号 C_n 表示 n 次曲线的表达式,别的曲线也用类似的记号,对于 $m>n$ 的情形,他写成

$$C_m = C_m' + A_{m-n}C_n = 0,$$

使得 A_{m-n} 是 $m-n$ 次多项式. 从这方程,Plücker 得到确定 C_n 与一切 m 次曲线的交点的正确方法. 由于根据这方程有 $m-n+1$ (A_{m-n} 中系数的个数)条线性无关的曲线通过 C_m' 与 C_n 的交点,Plücker 的结论是,在 C_n 上给定任意 $mn-(n-1)(n-2)/2$ 个点,C_n 与 C_m 的 mn 个交点中其余 $(n-1)(n-2)/2$ 个就确定了. 差不多同时 Jacobi③ 也得到这同一结果.

---

① *Annales de Math.*, 19, 1828, 97 ~ 106 = *Wiss. Abh.*, 1, 76~82.

② *Jour. für Math.*, 16, 1837, 47~54.

③ *Jour. für Math.*, 15, 1836, 285 ~ 308 = *Werke*, 3, 329~354.

Plücker 在他 1834 年的《体系》中，后来在他的《代数曲线论》(*Theorie der algebraischen Curven*, 1839)中更明确地给出了现在所谓的 Plücker 公式，把曲线的阶数 n 和类数 k 与简单奇点联系起来. 设 d 是二重点(一种奇点，在那里两条切线不相同)的个数，r 是尖点的个数. 在线曲线中，二重点对应于二重切线(一条二重切线其实是两个不同的点处的切线)，其个数设为 t. 尖点对应于密接切线(在拐点穿过曲线的切线)，其个数设为 w. Plücker 证明了下列对偶的公式：

$$k = n(n-1) - 2d - 3r,\quad n = k(k-1) - 2t - 3w,$$

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r,\quad r = 3k(k-2) - 6t - 8w.$$

每种元素的个数都包括实的和虚的在内.

于是，在 $n = 3$, $d = 0$, $r = 0$ 的情形，拐点的个数 w 该是 9. 到 Plücker 时，De Gua 和 Maclaurin 已证明了通过一般三次曲线的两个拐点的直线一定通过第三个拐点，而且从 Clairaut 的时候起就已假定了一般的 C_3 有三个实的拐点这件事. 在 1834 年的《体系》里，Plücker 证明了，每个 C_3 或者有一个或者有三个实的拐点；在后一种情况下，它们在一直线上. 他还得到把复的元素算在内的更一般的结果. 一般 C_3 有九个拐点，其中六个是虚的. 为了推导这个结果，他利用他的数常数个数的原理证明了

$$C_3 = fgh - l^3,$$

这里 f, g, h, l 都是线性形式，并且导出了 De Gua 和 Maclaurin 的结果. 然后他证明了(推理不完全)，C_3 的九个拐点三个三个在一条线上，一共就有 12 条这样的线. 在几所大学当过教授的 Ludwig Otto Hesse(1811—1874)补全了 Plücker 的证明[①]，并且指出那 12 条线可以分成四个三角形.

作为发现曲线一般性质的另一个例子，我们再考虑 n 次曲线 $f(x, y) = 0$ 的拐点问题. Plücker 把普通微积分中对于 $y = f(x)$

---

① *Jour. für Math.*, 28, 1844, 97～107 = *Ges. Abh.*, 123～135.

的拐点条件 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=0$ 表示成适用于 $f(x, y)=0$ 的形式,并得到一个 $3n-4$ 次的方程. 由于原曲线与新曲线必有 $n(3n-4)$ 个交点,故原曲线似乎该有 $n(3n-4)$ 个拐点. 因为这数太大了, Plücker 设想那 $3n-4$ 次方程的曲线与原曲线 $f=0$ 的 n 个无穷支中的每一支都有一个切接触,从而公共点中有 $2n$ 个不是拐点,这就得出正确的个数 $3n(n-2)$. Hesse 利用齐次坐标阐明了这件事①;他把 x 换成 x_1/x_3, y 换成 x_2/x_3,利用关于齐次函数的 Euler 定理,他证明了拐点的 Plücker 方程能写成

$$H=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}=0,$$

这里的下标表示偏导数. 这个方程是 $3(n-2)$ 次的,所以与 n 次方程 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 交于正确个数的拐点. 这行列式本身称为 f 的 Hesse 式,是 Hesse 引进的一个概念②.

Plücker,以及其他人,研究了四次曲线. 他第一个发现(《论代数曲线》,1839)这种曲线有 28 条二重切线,其中至多八条是实的. 后来 Jacobi③ 证明 n 阶曲线一般有 $n(n-2)(n^2-9)/2$ 条二重切线.

代数几何学的工作也包括空间中的图形. 虽然空间中直线的表示式已由 Euler 和 Cauchy 引进, Plücker 在他的《空间几何学的体系》(*System der Geometrie des Raumes*, 1846)里引进一种修改了的形式

$$x=rz+\rho,\ y=sz+\sigma,$$

这里的四个参数 r, ρ, s, σ 确定了该直线. 可以用线来造出整个空间,因为,举例说,平面无非是线的集合,而点是线的交点. 然后 Plücker 说,如果把线看做空间的基本元素,空间就是四维的,因为

① *Jour. für Math.*, 41, 1851, 272 ~ 284 = *Ges. Abh.*, 263~278.

② *Jour. für Math.*, 28, 1844, 68 ~ 96 = *Ges. Abh.*, 89~122.

③ *Jour. für Math.*, 40, 1850, 237 ~ 260 = *Werke*, 3, 517~542.

要用线来盖住全空间需要四个参数.他放弃了四维点空间的概念,认为它太形而上学了.维数依赖于空间元素,这是新的思想.

空间图形的研究包括了三次和四次曲面.直纹曲面是由一条直线按照某种规律运动而生成的.双曲抛物面(马鞍面)和单叶双曲面就是例子,螺旋面也是.如果一个二次曲面包含一条直线,它就包含无穷多条线,并且是直纹曲面.(这时它必定是锥面、柱面、双曲抛物面或单叶双曲面.)然而这对三次曲面不正确.

作为三次曲面的惊人的性质的例子,有 1849 年 Cayley 的发现①,每个三次曲线上恰存在 27 条直线.它们不一定全都是实的,但是对某些曲面它们全是实的.Clebsch 1871 年给过一个例子②.这些线有特别的性质.例如,每条与别的 10 条相交.有许多进一步的工作研究了三次曲面上的这些线.

在关于四次曲面的发现中,Kummer 的一个结果值得一提.他研究过表示光线的直线族,在考虑连带的焦曲面③时他引进了一个四次曲面(而且类数是四),有 16 个二重点和 16 个二重平面,它是一个二阶的光线族的焦曲面.这个曲面称为 Kummer 曲面,包含那表示各向异性介质中光传播的波前的 Fresnel 波曲面为特例.

19 世纪上半叶在综合的和代数的射影几何学上所作的工作,开辟了各种几何学研究的一个光辉灿烂的时期.综合的几何学家们统治着这个时期.他们力求从每一新的结果中发现某种普遍原理,这些原理常常不能从几何上得到证明,然而他们从这些原理得到的彼此联系着并同一般原理联系着的结论多如泉涌.幸而,代数的方法也被引进了,而且,如我们将看到的,终于统治了这个领域.可是我们要把射影几何的历史断开,去考虑一些革命性的新创造,

---

① *Cambridge and Dublin Math. Jour.*, 4,1849, 118～132 = *Math. Papers*, 1,445～456.

② *Math. Ann.*, 4,1871,284～345.

③ *Monatsber. Berliner Akad.*, 1864,246～260,495～499.

它们影响了几何学中以后的所有工作,实际上还根本改变了数学的面貌.

参 考 书 目

Berzolari, Luigi: "Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903~1915,III C4,313~455.

Boyer, Carl B.: *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, 1956, Chaps. 8~9.

Brill, A., and M. Noether: "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 3, 1892/1893, 109~566, 287~312 in particular.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, 2nd ed., Macmillan, 1919, pp. 286~302, 309~314.

Coolidge, Julian L.: *A Treatise on the Circle and the Sphere*, Oxford University Press, 1916.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, Book I, Chap. 5 and Book II, Chap. 2.

Coolidge, Julian L.: *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*, Dover (reprint), 1968.

Coolidge, Julian L.: "The Rise and Fall of Projective Geometry", *American Mathematical Monthly*, 41, 1934, 217~228.

Fano, G.: "Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907~1910, III AB4a, 221~288.

Klein, Felix: *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Macmillan, 1939; Dover (reprint), 1945, Geometry, Part 2.

Kötter, Ernst: "Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt", 1847, *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, Vol. 5, Part II, 1896 (pub. 1901), 1~486.

Möbius, August F.: *Der barycentrische Calcul* (1827), Georg Olms (reprint), 1968. Also in Vol. 1 of *Gesammelte Werke*, pp. 1~388.

Möbius, August F.: *Gesammelte Werke*, 4 vols., S. Hirzel, 1885—1887; Springer-Verlag (reprint), 1967.

Plücker, Julius: *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, 2 vols., B. G. Teubner, 1895～1896.

Schoenflies, A.: "Projektive Geometrie", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907～1910, III AB5, 389～480.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2, pp. 315～323, 331～345, 670～676.

Steiner, Jacob: *Geometrical Constructions With a Ruler* (a translation of his 1833 book), Scripta Mathematica, 1950.

Steiner, Jacob: *Gesammelte Werke*, 2 vols., G. Reimer, 1881～1882; Chelsea (reprint), 1971.

Zacharias, M: "Elementargeometrie and elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907～1910, III, AB9, 859～1172.

第 36 章

非 Euclid 几何

……因为那似乎是对的，很多事物仿佛都有那么一个时期，届时它们就在很多地方同时被人们发现了，正如在春季看到紫罗兰处处开放一样.

Wolfgang Bolyai

人们所推崇于数学真理的必然性，甚至归属于它的特殊的确定性，只是一种错觉.

John Stuart Mill

1. 引　言

在 19 世纪所有复杂的技术创造中间，最深刻的一个，非 Euclid 几何学，在技术上是最简单的. 这个创造引起数学的一些重要新分支，但它的最重要影响是迫使数学家们从根本上改变对数学的性质的理解，以及对它和物质世界的关系的理解，并引出关于数学基础的许多问题，这些问题在 20 世纪仍然进行着争论. 以下将看到，非 Euclid 几何是在 Euclid 几何领域中，一系列长期努力所达到的顶点. 这个工作到 19 世纪早期就成熟了，正是射影几何也在恢复和发展的同一年代，然而这两个领域在当时彼此并无关联.

2. 1800 年左右 Euclid 几何的情况

虽然希腊人已经承认抽象的或数学的空间是不同于感性认识

的空间,而 Newton 也强调指出了这一点[1],但直到 1800 年左右,所有的数学家都认为 Euclid 几何是物质空间和此空间内图形性质的正确理想化.实际上正如前已指出过的,很多人想把逻辑基础模糊的算术、代数和分析,建立在 Euclid 几何之上,从而保证这些分支的真理性.

很多人确实说出了绝对信任 Euclid 几何为真理的话.例如 Isaac Barrow 把他的数学包括微积分在内都建立在几何基础之上,对几何的肯定性列举了八项理由:概念清晰,定义明确,公理直观可靠而且普遍成立,公设清楚可信且易于想象,公理数目少,引出量的方式易于接受,证明顺序自然,避免未知事物.

Barrow 确曾提出问题:何以确知几何原理可应用于自然界?其回答是,这些原理来自内在理性(innate reason).感觉到的事物只是起了唤醒它们的作用物.再者几何原理早为长期经验所不断证实,并将继续如此,因为上帝创造的世界是万古不易的.于是几何是完备的与肯定无疑的科学.

17 世纪末和 18 世纪的哲学家也理所当然地提出:何以确知 Newton 科学所产生的大量知识是正确的.几乎所有的哲学家,著名的如 Hobbes,Locke 和 Leibniz 等人,都回答说,数学定律和 Euclid 几何一样,是宇宙设计中所固有的.诚然,Leibniz 在区分可能世界与真实世界时确实还留有怀疑的余地.但只有 David Hume 是个重要的例外,他在《人性论》(*Treatise of Human Nature*, 1739)中否认宇宙中的事物有一定法则或必然的先后顺序,他争辩说,这些先后顺序只是观察的结果,而人类却由此断定它们将永远以同样方式出现.科学是纯粹经验性的.特别是 Euclid 几何的定律未必是物理的真理.

Hume 的影响为 Immanuel Kant 所否定并实际上为 Kant 所取代,Kant 对于为什么确知 Euclid 几何能应用于物质世界这一

---

① *Principia*,卷Ⅰ,定义 8,Scholium.

问题的回答,写在他的《纯粹理性批判》(*Critique of Pure Reason*, 1781)书中,是一个特殊的答案.他主张我们的意识提供空间和时间的某些组织模式,他称之为直观,并认为经验按照此模式或直观被意识所吸收与组织.我们的意识是生来如此,迫使我们只按一种方式来观察外部世界.因此关于空间的某些原理是先于经验而存在的.这些原理及其逻辑推论 Kant 称之为先验综合真理,它们也就是 Euclid 的原理与推论.我们认识外部世界性质的唯一方式就是我们的意识迫使我们解释它的方式.据上述理由 Kant 断言,而其同时代人也承认,物质世界必然是 Euclid 式的.总之无论诉之于经验,或依赖于固有真理或者接受 Kant 的观点,都一致认为 Euclid 几何是唯一的与必然的.

3. 平行公理的研究

从公元前 300 年直到 1800 年间,人们虽始终坚信,Euclid 几何是物理空间的正确理想化,但是在那样长的几乎整个时期之内,数学家却始终对一件事耿耿于心.Euclid 用的公理对于物理空间和对该空间的图形,都应看作是不证自明的真理,而按照 Euclid 那样方式陈述的平行公理(第 4 章第 3 节)却被人认为有些过于复杂.虽说没有人怀疑它的真理性,却缺乏像其他公理那样说服力,即使 Euclid 自己,显然也不喜欢他对平行公理的那种说法,因为他只是在证完了无需用平行公理的所有定理之后才使用它.

关于在物质空间里是否可假定存在无限直线这个与此有关的问题,起初没有那么多人关心,但终于突出成为同样重要的问题.Euclid 只是小心地假设,可以按需要延长一条(有限)直线,因而甚至那延长后的直线也还是有限的.还有 Euclid 叙述平行公理的特别措辞,说两条直线将在截线的同旁内角之和小于两直角的一侧相交,这是为了避免直接说出两条直线无论怎样延长都不相交的

一种方式.然而Euclid确实含有无限直线存在的思想,因为假若直线都是有限的,则在任何情况下它们也不能按需要任意延长,而且他证明了平行线的存在性.

非Euclid几何的历史,开始于努力消除对Euclid平行公理的怀疑.从希腊时代到1800年间有两种研究途径.一种是用更为自明的命题来代替平行公理,另一种是试图从Euclid的其他九个公理推导出平行公理来.如果办到这一点,平行公理将成为定理,它也就无可怀疑了.我们将不给出这方面工作的细节,因为有关历史是容易查到的[①].

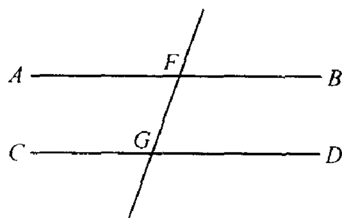


图36.1

第一个较大的尝试是Ptolemy在平行公设论文中给出的.他试图从Euclid的其他九个公理以及与平行公理无关的Euclid定理1到28,来证明平行公理.但Ptolemy不自觉地假设了两直线不能包围整个空间,并且假定若AB和CD平行(图36.1),则对FG一侧内角成立的东西也必在另一侧同样成立.

5世纪的评论家Proclus非常明显地反对平行公理.他说:"这个公理完全应从全部公理中剔除出去;因为它是一个包含许多困难的定理,Ptolemy在一本书中致力于解决它,证明需要一些定义和一些定理.它的逆定理确实由Euclid自己作为一个定理证明了."Proclus指出,我们诚然必须相信当截线一侧的内角之和小于二直角时,两直线必在这侧逐渐相接近,但这两直线确实在有限点处相交还不是很清楚的.这个结论只是容或可能.他继续说,因为有一些曲线彼此逐渐接近但并不确实相交.例如双曲线逐渐接近它的渐近线但不相交,那么Euclid公理的两直线难道不会出现这种情况吗?他于是说截线一侧两内角到达一定的和数,两直线可

① 例如,参看本章末文献中有关Bonala的书.

能一定相交,然而对于稍大一点儿而仍小于两直角的数值,两直线可能是渐近线.

Proclus 他自己的平行公设证明,是基于 Aristotle 用于证明宇宙有限的公理. 公理说:"如果从两直线成角的点出发无限延伸,则两直线间的相继距离[彼此向另一直线所作垂线]将最后超过任何有限的量."Proclus 的证明基本上是正确的,只是他把一个有问题的公理用另外一个来代替罢了.

Nasîr-Eddîn(1201—1274),Euclid 几何的波斯文编者,也同样给了一个 Euclid 平行公设的"证明",假定两条不平行直线在一个方向相互接近,在另一个方向相互远离. 具体说,若 AB 与 CD(图 36.2)是两直线被 GH, JK, LM, … 所截,如果它们与 AB 垂直,且若角 1, 3, 5, … 是钝角而 2, 4, 6, … 是锐角,则 $GH > JK > LM\cdots$. Nasîr-Eddîn 说,这个事实是显而易见的.

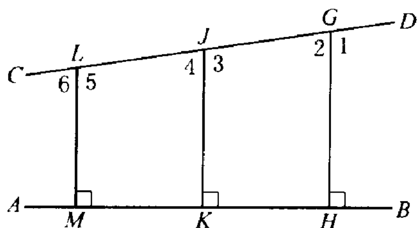


图 36.2

Wallis 在 1663 年也作了一些关于平行公理工作,于 1693 年发表①. 首先他重新发表了 Nasîr-Eddîn 关于平行公理的工作,这是牛津的一个阿拉伯语教授为他翻译的. 顺便说一句,这是 Nasîr-Eddîn 的平行公理工作为什么为欧洲所知道的原因所在. Wallis 于是评论了 Nasîr-Eddîn 的证明,并提出他自己对 Euclid 命题的证明. 他的证明根据一个明显假设,假设对于任意一个三角形,存在一个三角形与原三角形相似,两三角形的边长之比等于任何已给值. Wallis 相信这个公理比起任意小的划分和任意大的扩充都要明显得多. 他说,实际上以已给圆心和半径可作一圆的 Euclid 公理,就是先假定有如我们意愿的任意大半径. 于是恰好同样对直

① *Opera*, 2,669～678.

线形(如对一个三角形)可作类似的假设.

最简单的代替公理是在 1769 年由 Joseph Fenn 提出的,即两相交直线不能同时平行于第三条直线. 这个公理也出现在 Proclus 对 Euclid《几何原本》第一卷命题 31 的注释中. Fenn 的命题完全对等于在 1795 年 John Playfair(1748—1819)给出的公理:通过不在直线 l 上的一给定点 P,在 P 与 l 的平面上,只有一条直线不与 l 相交. 这是近代书中引用的公理(为了简便常说有"一条且只有一条直线……").

Legendre 在大约 20 年的时间内搞过平行公设问题. 他的结果出现于一些书和一些文章中,包括《几何原理》(*Eléments de géométre*)[①]的各次版本. 在研究这问题的一项工作中,在存在不同大小的相似三角形这一假设下,他证明了平行公设;实际上他的证明是解析的,但他假设长度的单位无关系. 于是他给出了一个证明,以如下假设为依据,即假设任意给定三个不共线的点,存在一个圆通过这三个点. 他又在另一方法中,除去平行公设外用了其他所有公设,证明了三角形的内角之和不能大于两个直角. 他于是指出在同样假设下,面积与亏值成正比,亏值是两直角减去三内角之和. 所以他试作一三角形两倍于已给三角形的大小,使得大三角形的亏值,将两倍于已给三角形的亏值. 用这种方法进行,他希望得到亏值愈来愈大的一些三角形,那么内角之和要趋于零. 他想这个结果必然荒谬,于是内角之和必然是 180°. 这个事实从而就蕴涵着 Euclid 的平行公理. 但是 Legendre 发现这套办法中最后需要证明:通过小于 60°的角内任意一点,恒可画一直线与角的两边相交. 而这件事不用平行公理是不能证明的. Legendre 翻译的 Euclid《几何原本》第 12 次版本中(第 12 版,1813),每次都有附录,认为已给出了平行公设的证明,但每次都有缺点,因为总是隐含地假设一些不应该假设的东西,或者假设了一个和 Euclid 公理同样有

① 第一版,1794 年.

问题的公理.

Legendre 在他的研究过程中①,应用除去平行公理以外的 Euclid 公理,证明了以下的重要定理:若一个三角形的内角之和是两直角,则每个三角形都是如此. 同样,若一个三角形的内角之和小于两直角,则每个三角形都是如此. 于是他给出证明,若任何一个三角形的内角之和是两直角,则 Euclid 平行公设成立. 关于三角形内角之和的这个工作也是无结果的,因为 Legendre 未能证明(不用平行公理或相当的公理),一个三角形的内角之和不能小于两直角.

上述这些工作,主要是试图寻求更加不证自明的代替公理,以代替 Euclid 的平行公理. 许多提出的公理在直观上似乎确实更加不证自明一些. 所以它们的创造者认为他们已经达到目标. 然而进一步检查看出这些代替公理不是真正更能令人满意的. 有些人作的论断,是关于发生在空间无限远之外的事. 例如,要求作一圆通过不在一直线上的三点,当这三个点趋于共线时圆越来越大. 另一方面,那些并不直接包含"无限远"的代替公理,例如,存在两个相似而不相等的三角形这样的公理,看来是更复杂的假设,并不比 Euclid 的平行公理更好些.

解决平行公理的第二类尝试,探索从其他九条公理推导出 Euclid 的论断. 推导可用直接法或间接法. Ptolemy 曾试过直接证明. 间接法是假设某些矛盾论断,以代替 Euclid 的命题,并试着从一组新的相继定理里导出矛盾来. 例如,因为 Euclid 平行公理相当于这样的公理,即过不在直线 l 上的一点 P 有一条且仅有一条直线平行于 l,所以对此公理有两样选择. 一种是过 P 没有与 l 平行的直线,另一种是过 P 有多于一条直线与 l 平行. 若取这两种选择的每一种以代替"一条平行线"公理,而可以证明新的一组将导致矛盾,那么这些选择就都必须排除,而"一条平行线"的论断即被

① *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 12,1833,367~410.

证明.

这方面最重要的努力是 Gerolamo Saccheri(1667—1733)进行的,他是一个耶稣会教士和帕维亚(Pavia)大学教授,他仔细研究了 Nasîr-Eddîn 与 Wallis 的工作,然后采用他自己的进行方法. Saccheri 从一个四边形 $ABCD$ 开始(图 36.3),其中 A 和 B 是直角,且 $AC = BD$. 容易证明 $\angle C = \angle D$. 现在 Euclid 平行公理便相当于角 C 与 D 是直角这个论断,于是 Saccheri 考虑两种可能选择:

(1) 钝角假设:$\angle C$ 和$\angle D$ 是钝角;

(2) 锐角假设:$\angle C$ 和$\angle D$ 是锐角.

在第一个假设的基础上(并用其他九条 Euclid 公理),Saccheri 证明角 C 和 D 必须是直角. 这样,在此假设下他导出了矛盾.

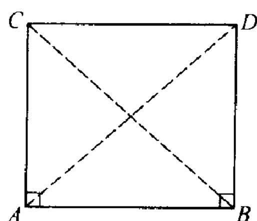


图 36.3

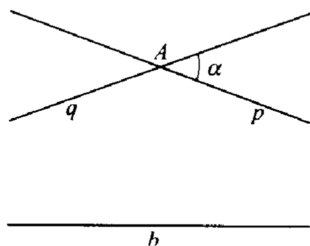


图 36.4

Saccheri 其次考虑了第二个假设并证明了许多有趣的定理. 他继续进行直到得出以下的定理:已给任一点 A 与一直线 b(图 36.4),在锐角假设下,在过 A 的直线束(族)中,有两直线 p 与 q,把直线束分成两部分. 第一部分包含与 b 相交的那些直线,第二部分包含的那些直线(在 α 角里面)将在直线 b 上某处和 b 有共同垂线. 直线 p 与 q 本身都渐近于 b. 从这个结果出发,经过冗长的一系列论证,Saccheri 推导出 p 与 b 在无穷远的公共点处必将有一公垂线. 虽则他没有得到任何矛盾,Saccheri 却发现这个结论与其他结论是太不合情理了,于是他判定锐角假设必然是不真

实的.

这就只剩下图 36.3 中的角 C 与 D 是直角的假设了. Saccheri 以前曾证明过,当 C 与 D 是直角时,任一三角形的内角之和都等于 180°,并证明这个事实蕴涵着 Euclid 平行公理. 所以他感到有理由断言 Euclid 的结论成立,因而他出版了他的书《Euclid 无懈可击》(*Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, 1733). 然而因为 Saccheri 没有从锐角假设中得出矛盾,平行公理问题仍然没有结束.

寻求另一个可接受的公理以替代 Euclid 公理,或者证明 Euclid 断言必然是一个定理,作这种工作的人是如此之多,又是如此徒劳无功,使得 1759 年 d'Alembert 把平行公理问题称之为"几何原理中的家丑".

4. 非 Euclid 几何的先兆

赫尔姆施泰特(Helmstädt)大学数学教授 Georg S. Klügel (1739—1812),他知道 Saccheri 的书,在他 1763 年的论文中,提出了引人注意的意见:人们接受 Euclid 平行公理的正确性是基于经验. 这个意见首次引进的思想是:公理的实质在于符合经验而并非其不证自明. Klügel 对 Euclid 平行公理能够证明表示怀疑. 他认识到 Saccheri 没有得出矛盾,但只是得到似乎异于经验的结果.

Klügel 的论文给 Lambert 提示了平行公理的研究. Lambert 的《平行线论》(*Theorie der Parallellinien*)一书写于 1766 年,出版于 1786 年[①],他有点儿像 Saccheri,考虑一个四边形,它的三个角是直角,并研究第四个角是直角、钝角和锐角的可能性. Lambert 放弃了钝角的假设,因为它导致矛盾. 然而,不像 Saccheri, Lambert 没有做出锐角假设得到矛盾的结论.

---

① *Magazin für reine und angewandte Mathematik*, 1786, 137～164, 325～358.

Lambert 从钝角和锐角假设分别推出的结论,即便前者确实导出矛盾,仍是有价值的. 他的最显著的结果是在任何一个假设之下,n 边形的面积,正比于其内角之和与 $2n-4$ 个直角的差.(Saccheri 对三角形已有此结果.)他也注意到钝角假设给出的定理,恰好和球面上图形成立的定理一样. 并且他猜想锐角假设得出的定理可以应用于虚半径球面上的图形. 这就引导他写成了一篇虚角三角函数的论文①,虚角即 iA,A 是实数且 $i=\sqrt{-1}$. 这实际上引出了双曲函数(第 19 章第 2 节). 以后我们将更加清楚地看到 Lambert 的意见意味着什么.

Lambert 的几何观点是十分先进的. 他认识到任何一组假设如果不导致矛盾的话,一定提供一种可能的几何. 这种几何是一种真的逻辑结构,虽然它或许对真实的图形作用很少,后者或可提示一种特别的几何,但不能限制逻辑上可能发展的千差万别的几何. Lambert 还没有达到 Gauss 稍后一些时候引出的更本质的结论.

Ferdinand Karl Schweikart(1780—1859),一个法学教授,业余研究数学,更迈进了一步. 他研究非 Euclid 几何,正当 Gauss 努力思考这个课题,但 Schweikart 独立得出他的结论. 然而他是受 Saccheri 和 Lambert 工作的影响的. 1816 年他写了一份备忘录,于 1818 年送交 Gauss 征求意见,其中 Schweikart 确实区分了两类几何:Euclid 几何与假设三角形三内角之和不是两直角的几何. 这后一种几何他称为星空几何,因为它可能在星空内成立. 它的定理都是 Saccheri 和 Lambert 根据锐角假设建立的定理.

Franz Adolf Taurinus(1794—1874),Schweikart 的外甥,继续其舅父的建议研究星空几何. 虽然在他的 *Geometriae Prima Elementa*(1826)一书中证实了一些新结果,特别是一些解析几何

① *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 24,1768,324~354, 1770 年出版 = *Opera Mathematica*, 2,245~269.

方面的结果,但他结论说,只有 Euclid 几何对物质空间是正确的,而星空几何只是逻辑上相容. Taurinus 也证明了,虚半径球面上成立的公式,恰好就是星空几何中所成立的.

Lambert, Schweikart 与 Taurinus 的工作在数学上所得的进展是理应扼要介绍的. 此三人及其他如 Klügel, Abraham G. Kästner(1719—1800)(格丁根教授),都承认 Euclid 平行公理不能证明,亦即和其他公理不相依赖. 再者 Lambert, Schweikart 和 Taurinus 相信,可能选取与 Euclid 平行公理相矛盾的另外公理以建立逻辑上相容的几何. Lambert 未能作出这种几何应用的可能性的论断; Taurinus 认为它不能应用于物质空间; 但是 Schweikart 相信它可能应用于星际空间. 此三人也都注意到实球面上的几何具有以钝角假设为基础的几何性质(若不顾后一几何所导致的矛盾性),而虚半径球面上的几何则具有以锐角假设为基础的几何性质. 这样,所有三人都认识到了非 Euclid 几何的存在性,但他们都失去一个基本点,即 Euclid 几何不是唯一的几何,在经验能够证实的范围内,来描述物质空间的性质的.

5. 非 Euclid 几何的诞生

任何较大的数学分支甚或较大的特殊成果,都不会只是个人的工作. 充其量,某些决定性步骤或证明可以归功于个人. 这种数学积累的发展特别适用于非 Euclid 几何. 如果非 Euclid 几何的诞生是指人们认识到除了 Euclid 几何之外还可以有他种几何的话,那么它的诞生应归功于 Klügel 与 Lambert. 如果非 Euclid 几何意味着,一系列包括异于 Euclid 平行公理的公理系统推论的技术性推导,那么最大的功绩必须归于 Saccheri,即便是他也利用了很多人寻求更易于接受的代换 Euclid 公理上的工作. 然而有关非 Euclid 几何最大的事实是它可以描述物质空间,像 Euclid 几何一样

地正确. 后者不是物质空间所必然有的几何;它的物质真理不能以先验理由来保证. 这种认识,不需要任何技术性的数学推导(因已有人做过),首先是由 Gauss 获得的.

Carl Friedrich Gauss(1777—1855)是德国不伦瑞克(Brunswick)城的一个瓦工之子,似乎注定要从事体力劳动. 但是他受初等教育的学校校长为 Gauss 的才能所感动,让他得到 Karl Wilhelm 公爵的照顾. 公爵送 Gauss 进一个中学,后在 1795 年到格丁根大学. 这时 Gauss 按照他的理想开始勤奋学习. 18 岁时他发明最小二乘法,在 19 岁时证明正 17 边形可以作图,这些成就使他相信应该从语言学转向数学. 1798 年他转到赫尔姆施泰特大学,在那里被 Johann Friedrich Pfaff 所注意,Pfaff 成为他的老师和朋友. 完成博士学位后,Gauss 回到不伦瑞克,在那里他写了他最有名的一些论文. 这个工作使他于 1807 年得到格丁根天文学教授和天文台台长职位. 除去一次到柏林参加科学会议外,其余一生都是住在格丁根. 据说他不喜欢教书,然而他爱好社交生活,结过两次婚,养活一家人.

Gauss 第一个较大的工作是他的博士论文,证明了代数基本定理,1801 年他出版了经典的《算术研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*). 他在微分几何方面的数学工作(《曲面的一般研究》,1827)是他对勘测、大地测量、绘制地图等感兴趣时的附带结果,是一个数学里程碑(第 37 章第 2 节). 他对代数学、复变函数以及位势理论作出了许多贡献. 在未发表的论文中他所纪录的创作研究分两大类:椭圆函数与非 Euclid 几何.

他对物理学的兴趣也是同样广泛,他为之花费大部分精力. 当 Giuseppe Piazzi(1746—1826)在 1801 年发现小行星谷神星(Ceres)时,Gauss 便进行确定它的轨道. 这是他对天文学研究的开始,这种活动十分吸引他,他致力于此约 20 年. 在这领域内的伟大著作之一是《天体运动理论》(*Theoria Motus Corporum Coelestium*,

1809). Gauss 还对理论磁学与实验磁学的研究获得很大的荣誉. Maxwell 在他的《电学与磁学》一书中说,Gauss 的磁学研究改造了整个科学,改造了使用的仪器,观察方法以及结果的计算. Gauss 关于地磁的论文是物理研究的模范,并提供了地球磁场测量的最好方法. 他对天文学和磁学的研究,开辟了数学与物理相结合的新的光辉的时代.

虽然 Gauss 和 Wilhelm Weber(1804—1891)并没有发明电报的想法,但他们在 1833 年用一个实际装置改进了早期技术,这个装置按照电流通过电线的方向,使得一根针向左或向右转动. Gauss 还研究光学,这在 Euler 时代以后已被忽视了,他在 1838—1841 年的研究为处理光学问题提供了一个完全新的基础.

由于 Gauss 同时代人已开始局限于专门问题的研究,所以 Gauss 研究活动的广泛性更加显得非凡了. 尽管公认 Gauss 至少是 Newton 以后的最大数学家,但与其说他是一个革新者,倒不如说,他是从 18 世纪到 19 世纪的过渡人物. 虽然他得出一些新观点,的确吸引其他数学家们,而他之面向过去更甚于面向未来. Felix Klein 用以下语言描绘了 Gauss 的地位:我们会得出一个数学发展的场面,如果我们把 18 世纪的数学家想象为一系列的高山峻岭,那么最后一个使人肃然起敬的峰巅便是 Gauss——那样一个广大的丰富的区域充满了生命的新元素. Gauss 同代人欣赏他的天才,在他 1855 年去世的时候,受到广泛的尊重,称他为"数学家之王".

Gauss 的工作发表得相对地少,因为他不管做什么工作都要琢磨修饰,既要求达到完美,又要求他的证明达到最大限度的简明而不失严密性,至少是当时的严密性. 至于非 Euclid 几何,他没有发表过权威性的著作. 他在 1829 年 1 月 27 日给 Bessel 的信上说,他永远不愿发表这方面的研究成果,因为怕受人耻笑,或者如他写的,他怕 Boeoti 人的嚷嚷,这是借喻希腊的愚笨部落来影射反对

他的人. Gauss也许过分小心,但人们应记得,虽然一些数学家逐渐到达非Euclid研究的顶峰,但大部分知识界还被Kant的教条所统治. 我们所知道的Gauss在非Euclid几何上的工作,是从他给朋友们的信中透露出来的,1816与1822年《格丁根学报》上的两篇短评和1831年的一些注记都是在他去世后遗稿中发现的①.

Gauss完全知道要证明Euclid平行公理的努力是白费的,因为在格丁根这已是常识,而且这些工作的全部历史,Gauss的老师Kästner是完全知道的. Gauss曾告诉他的朋友Schumacher说,早在1792年(Gauss当时15岁)他就已经掌握能够存在一种逻辑几何的思想,在其中Euclid几何平行公理不成立. 1794年Gauss已发现,在他的非Euclid几何的概念中四边形的面积正比于360°与四内角和的差. 虽然如此,稍后时间甚至到1799年Gauss仍然试图从其他更可信的假设之中推导Euclid平行公理,他仍认为Euclid几何是物质空间的几何. 然而在1799年12月17日Gauss写信给他的朋友匈牙利数学家Wolfgang Farkas Bolyai(1775—1856)说:

> 至于说到我,我在我的工作中已取得一些进展. 然而,我选择的道路决不能导致我们寻求的目标[平行公理的推导],而你让我确信你已达到. 这似乎反而迫使我怀疑几何本身的真理性. 诚然,我所得到的许多东西,在大多数人看来都可以认为是一种证明;而在我眼中它却什么也没有证明. 例如,如果我们能够证明可以存在一个直线三角形,它的面积大于任何给定面积的话,那么我就立即能绝对严密地证明全部[Euclid]几何.
>
> 大多数人肯定会把这个当作公理;但是我,不! 实际上,三角形的三个顶点无论取多么远,它的面积可能永远小于一定的极限.

---

① *Werke*, 8,157～268,包含以上所说的与下面讨论的书信.

这段话证明 1799 年 Gauss 有些相信平行公理不能从其余的 Euclid 公理推出来,他开始更认真地从事于开发一个新的又能应用的几何.

从 1813 年起 Gauss 发展他的新几何,最初称之为反 Euclid 几何(anti-Euclidean geometry),后称星空几何,最后称非 Euclid 几何. 他深信它在逻辑上是相容的,且有些确信它是能够应用的. 在 1816 与 1822 年的评论中和 1829 年给 Bessel 的信中,Gauss 再确认平行公理是不能在 Euclid 其他公理基础上证明的. 1817 年他给 Olbers 的信①是一个里程碑. 他在信中说,"我越来越深信我们不能证明我们的[Euclid]几何具有[物理的]必然性,至少不能用人类理智,也不能给予人类理智以这种证明. 或许在另一个世界中我们可能得以洞察空间的性质,而现在这是不能达到的. 直到那时我们决不能把几何与算术相提并论,因为算术是纯粹先验的,但可把几何与力学相提并论."

为检验 Euclid 几何和他的非 Euclid 几何的应用可能性, Gauss 实际测量了由 Brocken, Hohehagen 和 Inselsberg 三个山峰构成的三角形的内角之和,三角形三边为 69,85 与 197 公里. 他发现②内角和比 180°超出 14″. 85. 这个实验无所证明,因为实验误差远大于超出值,所以正确的和可能是 180°或甚至更小些. 如 Gauss 所认识到的,这个三角形还小,又因在非 Euclid 几何中,亏值与面积成正比,只有在大的三角形中才有可能显示出 180°与三角和有任何差距.

我们不讨论属于 Gauss 的非 Euclid 几何的个别定理,他没有写出过完整的推导,而他所证明的定理很像在 Lobatchevsky 和 Bolyai 工作中所出现的那样. 这两个人一般认为是非 Euclid 几何的创建者. 究竟什么是他们的功绩将在后面讨论,但他们确实在演

① *Werke*, 8,177.

② *Werke*, 4,258.

绎的综合基础上发表了有组织的文章,并充分理解这个新几何在逻辑上也如同Euclid几何一样合法.

Nikolai Ivanovich Lobatchevsky(1793—1856),俄国人,在喀山(Kazan)大学学习并从1827到1846年任该校教授和校长. 1826年于大学的数学物理系在一篇论文中提出了几何基础的观点. 然而论文从未出版并已遗失. 他在一系列论文中给出了他对非Euclid几何的研究,文章中的头两篇发表于喀山的杂志,第三篇发表于《数学杂志》①. 第一篇题为《论几何基础》,发表于1829—1830. 第二篇题为《具有平行的完全理论的几何新基础》(1835—1837),是Lobatchevsky思想的较好表达作品,他叫他的新几何为虚几何,理由或许已经显然,而以后将更清楚. 1840年他用德文出版了《平行理论的几何研究》(*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*)②. 在该书中他慨叹人们对他的著作兴趣微弱. 虽然他已失明,他却以口授写出一部他的几何的完全新的说明,并于1855年以书名《泛几何》(*Pangéométrie*)出版.

John (János) Bolyai(1802—1860),Wolfgang Bolyai之子,系匈牙利军官. 关于非Euclid几何,他称之为绝对几何,写了一篇26页的论文《绝对空间的科学》③. 本文出版时作为附录附于其父的书《为好学青年的数学原理论著》(*Tentamen Juventuten Studiosam in Elementa Matheseos*). 虽然这部包含两卷的书出版于1832—1833年因而在Lobatchevsky的书出版以后,但Bolyai似乎在1825年已建立起非Euclid几何的思想,并且在那时已相信新几何不是自相矛盾的. 在1823年11月23日给他父亲的信中,John写道,"我已得到如此奇异的发现,使我自己也为之惊讶不

---

① *Jour. für Math.*, 17,1837,295~320.

② 英文翻译见于Bonola. 参看本章末文献目录.

③ 英文翻译见于Bonola. 参看本章末文献目录.

止."Bolyai 的研究工作和 Lobatchevsky 的十分相像,当 Bolyai 第一次看到后者 1835 年的工作时,他认为那是抄袭他自己 1832—1833 出版的书. 另外,Gauss 读了 John Bolyai 的文章后,写信给 Wolgang① 说,他不能称赞那篇文章,因为如此做将是称赞他自己的工作.

6. 非 Euclid 几何的技术性内容

Gauss, Lobatchevsky 和 Bolyai 都认识到 Euclid 平行公理不能在其他九条公理基础上证明,也认识到附加平行公理是建立 Euclid 几何所必需的. 因为平行公理是独立的事实,于是至少从逻辑上讲有可能采取一个与此相矛盾的命题并从新的一组公理来推导出结论.

要研究这三人创建的专门内容,最好取 Lobatchevsky 的工作,因为三人所做的都一样. 众所周知,Lobatchevsky 发表了几次文章,只是在细节上有所不同,这里将用他 1835—1837 年的文章作为叙述的基础.

因和 Euclid 的《原本》一样,很多定理的证明可以不依赖于平行公理,这些定理在新几何中也是正确的. Lobatchevsky 在文章前六章中专致力于基本定理的证明,开始他假定空间是无限的. 于是他能证明两直线相交不能多于一个点,同一直线的两垂线不相交.

第七章中 Lobatchevsky 果敢地放弃 Euclid 平行公理,作出下面的假设:给出一条直线 AB 与一点 C(图 36.5),通过点 C 的所有直线关于直线 AB 而言可分成两类,一类直线与 AB 相交,另一类不相交. p 与 q 属于后一类,构成两类间的边界. 这两条边界线称为平行直线. 更确切地说,若 C 是与直线 AB 的垂直距离为 a 的

---

① *Werke*, 8,220～221.

一点,于是存在一个角① $\pi(a)$,使得所有过 C 的直线与 CD 所成的角小于 $\pi(a)$的将与 AB 相交;其他过 C 的直线不与 AB 相交②. 与 AB 成角 $\pi(a)$的两直线是平行线, $\pi(a)$称为平行角. 除平行线外,过 C 而不与 AB 相交的直线称为不相交直线,虽然在 Euclid 意义下,它们是与 AB 平行的,所以从这个意义上讲,在 Lobatchevsky 几何里,过 C 有无穷多条平行线.

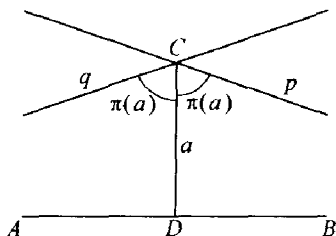


图 36.5

当 $\pi(a) = \pi/2$,则得出 Euclid 平行公理. 若 $\pi(a) \neq \pi/2$,则当 a 减小到 0 时, $\pi(a)$增加且趋于 $\pi/2$,而当 a 变成无限大时, $\pi(a)$将减小而趋于零. 三角形的内角之和恒小于 π,且随着三角形面积的增大而减小,当面积趋于零时,它就趋于 π. 若两三角形相似,则它们全等.

Lobatchevsky 现在转向他几何的三角学部分,第一步是确定 $\pi(a)$. 若全中心角为 2π,结果是③

$$\tan \frac{\pi(x)}{2} = e^{-x} , \tag{1}$$

由此得出 $\pi(0) = \pi/2$ 及 $\pi(+\infty) = 0$. 关系式(1)的重要之点在于,对每个长度 x 关联着一个定角 $\pi(x)$. 当 $x = 1$ 时,

$$\tan[\pi(1)/2] = e^{-1},$$

所以 $\pi(1) = 40°24'$. 这样,单位长度是平行角为 $40°24'$的长度. 这

① 记号 $\pi(a)$是标准的,所以用于此,实际上 $\pi(a)$中的 π 与数 π 无关.

② 与长度关联的特定角概念来自 Lambert.

③ 这是特殊公式;Lobatchevsky 在 1840 年工作中给出的就是近代教科书中通常给出的形式,Gauss 也有这形式,即

$$\tan \frac{1}{2}\pi(x) = e^{-x/k}, \tag{a}$$

其中 k 是一常数,叫做空间常数. 对于理论目的, k 的值是无关重要的. Bolyai 也给出过(a)式.

个单位长度没有直接的物理意义,物理上可以是一英寸或是一英里. 人可以选择物理解释,使得几何能有物理的应用①.

Lobatchevsky 于是导出他几何中平面三角形边与角的公式. 在 1834 年一篇论文中,他定义了实数 x 的 $\cos x$ 与 $\sin x$ 作为 e^{ix} 的实部与虚部. Lobatchevsky 的观点是要纯分析地给出三角学,以使它完全独立于 Euclid 几何. 他的几何中主要三角公式是(图 36.6)

$$\cot \pi(a) = \cot \pi(c)\sin A,$$
$$\sin A = \cos B\sin \pi(b),$$
$$\sin \pi(c) = \sin \pi(a)\sin \pi(b).$$

假若边长是虚数,这些公式在普通球面三角中成立. 就是说,若在球面三角的普通公式中,用 ia, ib 与 ic 以代替 a, b, c 即得到 Lobatchevsky 的公式. 因为虚角的三角公式能以双曲函数代替,人们会料到在 Lobatchevsky 公式中能看到双曲函数. 应用关系式 $\tan[\pi(x)/2] = e^{-x/k}$ 即可引进它们. 上面第一个公式将变成

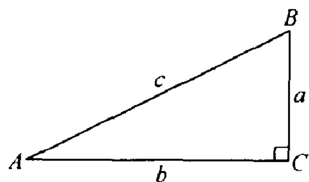


图 36.6

$$\sinh \frac{a}{k} = \sinh \frac{c}{k}\sin A.$$

在普通球面三角中,三个角为 A, B, C 的三角形面积是 $r^2(A+B+C-\pi)$,而在非 Euclid 几何中这面积是 $r^2[\pi-(A+B+C)]$,它相当于在普通公式中用 ir 代替 r.

根据对无穷小三角形的研究,Lobatchevsky 在第一篇文章(1829—1830)中导出了公式

$$ds = \sqrt{(dy)^2 + \frac{(dx)^2}{\sin^2\pi(x)}},$$

① 就关系 $\tan[\pi(x)/2] = e^{-x/k}$ 来说,选择 x 值,比如说对应于 $40°24'$的 x 值,就能确定 k.

作为曲线 $y=f(x)$ 上在点(x, y)处的弧微分. 于是可算出半径为 r 的圆周长为

$$C=\pi(e^{r}-e^{-r}).$$

并证明圆面积表达式为

$$A=\pi(e^{r/2}-e^{-r/2})^{2}.$$

他也给出了有关平面曲线区域的面积与立体体积的一些定理.

当度量很小时可以从非 Euclid 公式得出 Euclid 几何公式. 例如,若用

$$e^{r}=1+r+\frac{r^{2}}{2!}+\cdots,$$

并对小的 r 略去前两项后的其余各项,例如

$$C=\pi(e^{r}-e^{-r})\sim\pi\{1+r-(1-r)\}=2\pi r.$$

在第一篇论文(1829—1830)中 Lobatchevsky 也考虑到他的几何对物质空间应用的可能性. 他论据的要点是基于恒星的视差. 设 E_1 及 E_2(图 36.7)是地球相差 6 个月的位置,S 是一个星,S 的视差 p 是从垂线(比如说)E_1S'测得 E_1S 与 E_2S 方向上的差值. 如果 E_1R 是 E_2S 的 Euclid 平行线,那么因为 E_1SE_2 是等腰三角形,$\pi/2-\angle SE_1E_2$ 是星的方向改变的一半,即 $p/2$. 对于天狼星(Sirius),这个角是 1″. 24(Lobatchevsky 的值). 只要这个角不是零,从 E_1 到星的直线就不能平行于 TS,因为这直线交于 TS. 然而,如果对于所有星的不同视差有一个下界的话,则任何过 E_1 的直线,若它与 E_1S'所成的角小于这个下界,都可以作为过 E_1 点平行于 TS 的直线,并且这个几何就恒星的测量而言就会是同样有用

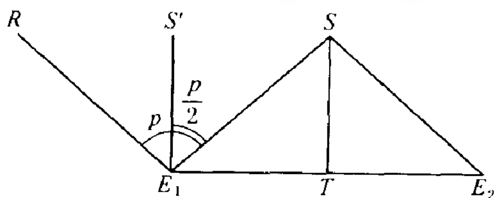


图 36.7

的. 但 Lobatchevsky 随即证明在他的几何中单位长度,在物理意义下,应该比地球半径百万倍的一半还要大. 换言之,Lobatchevsky 的几何只有在十分大的三角形中才可以应用.

7. Lobatchevsky 与 Bolyai 发明先后的争议

非 Euclid 几何的诞生,常用来作为一种思想如何在不同人中间几乎同时独立地发生的例子. 有时人们认为这纯粹是一种偶合,而有时则认为是时代精神在相隔遥远的角落里产生影响的证据. Gauss,Lobatchevsky 和 Bolyai 创建非 Euclid 几何,既不是同时创造的例子,也不能认为把伟大功绩归于 Lobatchevsky 与 Bolyai 是公允的. 已经指出,他们二人首先发表公然自称为非 Euclid 几何的文章是事实,在这举动上他们比 Gauss 表现了更大的勇气. 但是非 Euclid 几何的建立很难说是他们的贡献. 我们已经指出,即便在 Gauss 之前就已有 Lambert,Schweikart 与 Taurinus 是独立的创造者,并且 Lambert 与 Taurinus 发表了他们的工作. 再者新几何能够应用的认识则来自于 Gauss.

Lobatchevsky 与 Bolyai 都从 Gauss 那里得到许多启发. Lobatchevsky 在喀山的教师 Johann Martin Bartels(1769—1836)是 Gauss 的好友. 实际上,从 1805 年到 1807 年间 Gauss 和 Bartels 是在不伦瑞克共同度过的,嗣后还彼此保持通信. Bartels 不把 Gauss 有关非 Euclid 几何的进展告诉 Lobatchevsky(他留在喀山大学,和 Bartels 是同事),那是绝对不可能的,特别是 Bartels 一定知道 Gauss 对 Euclid 几何真理性的怀疑.

就 John Bolyai 说,他的父亲 Wolfgang 也是 Gauss 的一位至友,并且是 1796—1798 年在格丁根的同学. Wolfgang 与 Gauss 不仅彼此继续通信,并且讨论了平行公理的特别课题,如前面引文中指出的. Wolfgang 继续努力研究平行公理问题,并在 1804 年送给

Gauss一个所谓证明. Gauss向他指出证明是错误的. 在1817年Gauss肯定认为,不仅公理不能证明,而且逻辑上相容而物理上又能应用的非Euclid几何是能够构造的. 他除了在1799年的信上讲了这一点之外,还把他最近的思想坦率地告诉了Wolfgang. Wolfgang继续研究这个问题直到他1832—1833年的《原理论著》出版. 因为他要他的儿子继续研究他所从事的平行公理的工作,所以几乎可以肯定他会把自己所知道的一切传给他的儿子的.

有相反的观点. 数学家Friedrich Engel(1861—1941)认为虽说Lobatchevsky的教师Bartels是Gauss的朋友,但Lobatchevsky从这方面所获得的知识,不会超过Gauss对平行公理在物理上的正确性的怀疑. 但这事实本身是个关键. 然而,Engel甚至怀疑Lobatchevsky会从Gauss那里获得这一点知识. 因Lobatchevsky从1816年起就试图证明Euclid平行公理;后来,他在1826年创造新几何时,终于认识到这种努力是无希望的. John Bolyai直到1820年间也试图证明Euclid平行公理,然后转向构造新几何. 但是继续努力去证明平行公理并不意味着不知道Gauss的思想[①]. 因为无人(Gauss也没有)曾经证明Euclid的平行公理不能从其他九条公理推导出来,Lobatchevsky和Bolyai可能决定尝试解决这个问题. 失败之后,他们就更加能够赞赏Gauss对此所持观点的先见之明了.

至于说到Lobatchevsky和John Bolyai贡献的技术性内容,虽然他们可能是相互独立地并独立于他们的前辈而创立的,但是Saccheri和Lambert的工作,更不用说Schweikart和Taurinus的工作,在格廷根是众所周知的,Bartels和Wolfgang Bolyai肯定是知道的. 而当Lobatchevsky在他的1835—1837年文章中看到

---

① 然而可参看George Bruce Halsted, *Amer. Math. Monthly*, 6,1899,166～172与7,1900,247～252.

2000 年来在解决平行公理问题上的徒劳无功时，通过推断，他接受了早期工作的知识.

8. 非 Euclid 几何的重要意义

我们已经说过非 Euclid 几何的诞生，是自希腊时代以来数学中一个重大的革新步骤. 我们现在不讨论这个课题的全部重要意义. 我们将沿着事物的历史发展过程叙述. 这个创造的影响和它的意义的全面认识，都被推迟了，因为 Gauss 没有发表他的研究工作，而 Lobatchevsky 和 Bolyai 的工作约有 30 年之久为人所忽视. 虽然这三人是知道他们工作的重要性的，但是数学家们一般表现不愿意接受激进的思想，加之 19 世纪 30 年代与 40 年代几何的关键主题是射影几何，因而非 Euclid 几何的研究工作也就不吸引英、法、德等国的数学家们. 当 Gauss 关于非 Euclid 几何的通信与注记在 1855 年他去世之后出版时，人们的注意力才引向这个课题. 他的名字引起人们对非 Euclid 几何思想的重视，不久 Lobatchevsky 和 Bolyai 的工作被 Richard Baltzer(1818—1887)写进了 1866—1867 年的一本书中. 嗣后的发展最终使得数学家们认识到非 Euclid 几何的全部意义.

Gauss 确实看到非 Euclid 几何的最富于变革性的含义. 非 Euclid 几何诞生的第一步就在于认识到：平行公理不能在其他九条公理的基础上证明. 它是独立的命题，所以可以采取一个与之矛盾的公理并发展成为全新的几何，这是 Gauss 和其他人做的. 但是 Gauss 已经认识到 Euclid 几何并非必然是物质空间的几何，亦即并无必然的真理性，把几何和力学相提并论，并断言真理性的品质必须限于算术(及其在分析中的发展). 信任算术本身是奇怪的. 算术此时根本尚无逻辑基础. 确信算术代数与分析对物质世界提供真理性，那完全是根源于对经验的信赖.

非Euclid几何的历史以惊人的形式说明数学家受其时代精神(而不是他们所作的推理)影响的程度是多么厉害. Saccheri曾经拒绝过非Euclid几何的奇异定理,并且断定Euclid几何是唯一正确的. 但是在100年后,Gauss,Lobatchevsky和Bolyai满怀信心地接受了新几何,他们相信他们的几何在逻辑上是相容的,并且相信这个几何和Euclid几何一样正确. 但他们没有证明新几何的逻辑相容性. 虽然他们证明过许多定理,而且并未得出显明的矛盾,但是或许能导出矛盾的可能性还是存在的. 如果这一情况发生,他们的平行公理的假设便会不正确,于是正如同Saccheri所相信的一样,Euclid的平行公理将是其他公理的推论.

Bolyai和Lobatchevsky确实考虑到了相容性问题并且部分相信它,因为他们的三角学和虚半径球面上的三角学相同,而球面是Euclid几何的一部分. 但Bolyai并不满足于这个论据,因为三角学本身并不是完整的数学系统. 于是尽管缺少相容性的任何证明,或者是缺少新几何的可能应用性(这至少可作为使新几何能令人信服的论据),Gauss,Bolyai和Lobatchevsky接受了前人认为荒谬的东西. 这种接受是一个信仰行动. 非Euclid几何相容性的问题在其后40年仍然悬而未决.

有关非Euclid几何的创建还有一点值得注意与强调. 有一种普遍信念认为Gauss,Bolyai和Lobatchevsky是钻了牛角尖,只是为了满足理智上的好奇心而玩弄改变平行公理的游戏,所以创建了新几何. 但是因为这个创造已证明对科学异常重要——我们将要讨论的非Euclid几何的一种形式已经用于相对论——许多数学家争论说,只凭纯粹理智上的好奇心,就可以作为探索任何数学思想的充分理由,并且那种探索也几乎同样肯定地会像非Euclid几何那样对科学产生价值. 但是非Euclid几何的历史并不支持这种论点. 我们已经看到非Euclid几何的发生是在研究平行公理的几个世纪以后. 对于这个公理的考虑是基于这样的事实,即它

作为一个公理,应该是不证自明的真理,因为几何公理是我们关于物质空间的基本事实而且数学的和物理学的广大分支都使用 Euclid 几何的性质,数学家都想确知它们依赖于真理. 换言之,平行公理的问题不仅是真正的物理问题,而且是所能有的基本的物理问题.

参考书目

Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry*, Dover (reprint), 1955.

Dunnington, G. W.: *Carl Friedrich Gauss*, Stechert-Hafner, 1960.

Engel, F., and P. Staeckel: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, 2 vols. B. G. Teubner, 1895.

Engel, F., and P. Staeckel: *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, B. G. Teubner, 1899～1913, 2 vols. The first volume contains the translation from Russian into German of Lobatchevsky's 1829～1830 and 1835～1837 papers. The second is on the work of the two Bolyais.

Enriques, F.: "Prinzipien der Geometrie", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907～1910, III ABI, 1～129.

Gauss, Carl F.: *Werke*, B. G. Teubner, 1900 and 1903, Vol. 8, 157～268; Vol. 9, 297～458.

Heath, Thomas L.: *Euclid's Elements*, Dover (reprint), 1956, Vol. 1, pp. 202～220.

Kagan, V.: *Lobatchevsky and his Contribution to Science*, Foreign Language Pub. House, Moscow, 1957.

Lambert, J. H.: *Opera Mathematica*, 2 vols. Orell Fussli, 1946～1948.

Pasch, Moritz, and Max Dehn: *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2nd ed., Julius Springer, 1926, pp. 185～238.

Saccheri, Gerolamo: *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, English trans. by G. B. Halsted in *Amer. Math. Monthly*, Vols. 1～5, 1894～1898; also *Open Court Pub. Co.*, 1920, and Chelsea (reprint), 1970.

Schmidt, Franz, and Paul Staeckel: *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai*, B. G. Teubner, 1899; Georg Olms (reprint), 1970.

Smith, David E. : *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2, pp. 351～388.

Sommerville, D. M. Y. : *The Elements of Non-Euclidean Geometry*, Dover (reprint), 1958.

Staeckel, P. : "Gauss als Geometer", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1917, Beiheft, pp. 25～142. Also in Gauss: *Werke*, X_2.

von Walterhausen, W. Sartorius: *Carl Friedrich Gauss*, S. Hirzel, 1856; Springer-Verlag (reprint), 1965.

Zacharias, M. : "Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1914～1931, III AB9, 859～1172.

第 37 章

Gauss 和 Riemann 的微分几何

您，自然，是我的女神，我对您的规律的贡献是有限的……

Carl F. Gauss

1. 引　言

现在我们将着手讨论微分几何，特别是由 Euler 奠基并由 Monge 扩展的曲面论的发展线索. 这门学科的下一个重大步骤是由 Gauss 作出的.

Gauss 从 1816 年起就在大地测量和地图绘制方面做了非常大量的工作. 他亲身参加实际的物理测量，在这方面他发表了许多文章，激起了他对微分几何学的兴趣，并导致 1827 年他的决定性文章《关于曲面的一般研究》①. 然而，比他这篇关于三维空间中曲面的微分几何的决定性论述所作出的贡献更为重要的是，Gauss 提出了一个完全新的概念，即一张曲面本身就是一个空间. 这个概念嗣后为 Riemann 所推广，从而在非 Euclid 几何学中开辟了新的远景.

2. Gauss 的微分几何

Euler 早就提出了曲面上任一点的坐标 (x, y, z) 可以用两个参数 u 和 v 表示的思想（第 23 章第 7 节）；就是说，曲面的方程可以这样给出：

(1) $$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v).$$

① *Comm. Soc. Gott.*, 6, 1828, 99 ~ 146 = *Werke*, 4, 217~258.

Gauss 的出发点是运用这个参数表示来做曲面的系统研究. 从这些参数方程中我们有

(2) $dx = a du + a' dv,\ dy = b du + b' dv,\ dz = c du + c' dv.$

其中 $a = x_u$, $a' = x_v$ 等等. 为了方便,Gauss 引进行列式

$$A = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

和量

$$\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

他假设这个量不恒等于零.

在任何曲面上基本量是弧长元素,这在(x, y, z)坐标中便是

(3) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Gauss 用方程(2)把(3)写成

(4) $$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2,$$

其中

$$E = a^2 + b^2 + c^2,\ F = aa' + bb' + cc',\ G = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

曲面上两条曲线之间的夹角是另一个基本量. 曲面上的一条曲线由 u 和 v 之间的一个关系式确定,因为这样 x, y 和 z 就变成参数 u 或 v 的一个函数,而方程(1)则变成曲线的参数表示. 用微分的语言来说,在一点(u, v),从这点出发的曲线或曲线的方向由比 $du : dv$ 给定. 于是,如果我们有从(u, v)出发的两条曲线或两个方向,一个由 $du : dv$ 给定,另一个由 $du' : dv'$ 给定,并设 θ 是这两个方向之间的夹角,则 Gauss 证明

(5) $$\cos\theta = \frac{E du du' + F(du dv' + du' dv) + G dv dv'}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\sqrt{E du'^2 + 2F du' dv' + G dv'^2}}.$$

接着 Gauss 着手研究曲面的曲率. 他的曲率的定义,是 Euler 用于空间曲线和 Olinde Rodrigues① 用于曲面的标形对曲面的推广. 在曲面上的每一点(x, y, z)有一个带方向的法线. Gauss 考

① *Corresp. sur l'Ecole Poly.*, 3,1814～1816,162～182.

虑一个单位球面,并选定一条半径,它具有曲面上的有向法线的方向.选取的半径确定了球面上的一个点(X, Y, Z).然后,如果我们考虑曲面上围绕(x, y, z)的任一小区域,则在球面上有一个围绕(X, Y, Z)的对应区域.当这两块区域分别收缩到它们的对应点时,把球面上区域的面积与曲面上对应区域的面积之比的极限,定义为曲面在点(x, y, z)的曲率.首先,注意到球面在点(X, Y, Z)处的切平面平行于曲面在点(x, y, z)处的切平面,Gauss 计算了这个比值.由于这种平行性,两个面积之比等于它们分别在各自切平面上的射影之比.为了求得这后一个比值,Gauss 进行了惊人数量的微分,并获得了一个更加基本的结果,这就是曲面的(总)曲率 K 为

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{6}$$

其中

$$L = \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$N = \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

接着,Gauss 证明他的 K 就是 Euler 早就提出过的在(x, y, z)处的两个主曲率之乘积.作为两个主曲率的平均曲率的概念,是由 Sophie Germain 在 1831 年①提出的.

这时 Gauss 作了一个极其重要的考察.当曲面由参数方程(1)给定时,曲面的性质似乎依赖于函数 x, y, z.通过固定 u,譬如说 $u = 3$,并且让 v 变动,就在曲面上得到一条曲线.对于 u 的其他可能取定的值,得到一族曲线.同样地,固定 v 也得到一族曲线.这两族曲线是曲面上的参数曲线,使得曲面上的每一个点可以

① *Jour. für Math.*, 7,1831,1～29.

用一对数,譬如说是(c, d)给定,这里$u=c$和$v=d$是经过这点的参数曲线.这些坐标不一定比纬度和经度更表示距离.让我们想象一张曲面,在它上面已经以某种方式确定了参数曲线.于是 Gauss 断定,曲面的几何性质仅仅由 ds^2 的表达式(4)中的 E, F 和 G 确定.u 和 v 的这些函数正是事情的全部.

从(4)和(5)显然可以看出,曲面上的距离和角度完全由 E, F 和 G 确定.但是,上面关于曲率的 Gauss 的基本表达式(6),又依赖于另一些量 L, M 和 N.这时 Gauss 证明了

$$(8)\qquad K=\frac{1}{2H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{H}\frac{\partial G}{\partial u}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{H}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{H}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\right\},$$

其中 $H=\sqrt{EG-F^2}$,并且等于 Gauss 在上面定义的 Δ.方程(8)叫做 Gauss 特征方程,它表明曲率 K,以及从(6)来看特别是量 $LN-M^2$,仅仅依赖于 E, F 和 G.因为 E, F 和 G 仅仅是曲面上参数坐标的函数,所以曲率也仅仅是参数的一个函数,而完全与曲面是否在三维空间中或曲面在三维空间中的形态无关.

Gauss 已经注意到曲面的性质只依赖于 E, F 和 G.但是除曲率以外的许多性质包含着量 L, M 和 N,并且不是取方程(6)中的组合 $LN-M^2$ 的形式.Gauss 的论点的解析证明由 Gaspare Mainardi(1800—1879)[①]和 Delfino Codazzi(1824—1875)[②]独立地给出,他们两人都以微分方程的形式给出了两个附加关系,这些关系连同 Gauss 的特征方程一起,可以用 E, F 和 G 来限定 L, M 和 N,而 K 则取(6)中的值.

其后,Ossian Bonnet(1819—1892)在 1867 年[③]证明了一个定理:如果六个函数满足 Gauss 特征方程和两个 Mainardi-Codazzi

---

① *Giornale dell' Istituto Lombardo*, 9,1856,385～398.

② *Annali di Mat.*, (3),2,1868～1869,101～119.

③ *Jour. de l'Ecole Poly.*, 25,1867,31～151.

方程,则它们除了在空间的位置和定向以外唯一地确定一张曲面.具体地,如果给定了 u 和 v 的函数 E, F, G 和 L, M, N,它们满足 Gauss 特征方程和 Mainardi-Codazzi 方程,并设 $EG-F^2\neq 0$,则存在一张由 u, v 的三个函数 x, y, z 给定的曲面,其第一基本形式为

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

并且 L, M, N 和 E, F, G 有关系式(7). 这个曲面除它在空间的位置外是唯一确定的.(对于具有实坐标(u, v)的实曲面,必定有 $EG-F^2>0$, $E>0$ 和 $G\geqslant 0$.)Bonnet 的定理是和曲线的对应定理(第 23 章第 6 节)相类似的.

曲面的性质仅仅依赖于 E, F 和 G 这一事实有许多含意,其中有一些已经由 Gauss 在他的 1827 年的文章中揭示出来. 例如,如果一张曲面无伸缩地弯曲,则坐标曲线 $u=$ 常数和 $v=$ 常数将保持不变, 所以 ds 也将保持不变. 因此曲面的所有性质,特别是曲率,也将保持不变. 进一步说,如果两张曲面能够彼此建立一一对应,也就是说,如果 $u'=\phi(u, v)$, $v'=\psi(u, v)$,其中 u'和 v'是第二张曲面上的点的坐标,并且如果两张曲面在对应点的距离元素相同,即如果

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=E'du'^2+2F'du'dv'+G'dv'^2,$$

其中 E, F, G 是 u 和 v 的函数,E', F', G'是 u'和 v'的函数,则这两张曲面称为**等距的**,它们必然有相同的几何. 特别,正如 Gauss 所指出的,它们在对应点一定有相同的总曲率. 这个结果 Gauss 叫做"极妙的定理"(theorema egregium),它是一个极其优美的定理.

作为一个推论,由此推出,要能把曲面的一部分移到另一部分上(那意味着保持距离),一个必要条件是曲面有常曲率. 例如,球面的一部分可以无畸变地移到另一部分上,而在椭球面上就不能这样做.(但是,在等距映射下把一张曲面或曲面的一部分同另一

张曲面或另一部分拟合,是可以发生弯曲的.)如果两张曲面不是常曲率的,虽然在对应点它们的曲率相等,但它们并不一定有等距关系. 1839 年[①] Ferdinand Minding(1806—1885)证明:如果两张曲面确有相等的常曲率,则可以把一张曲面等距映射到另一张上面.

Gauss 在他 1827 年的文章中研究的另外一个极其重要的题目,是寻找曲面上的测地线.(测地线这一名词是 Liouville 在 1850 年引进的,取自大地测量学.)这个问题需要 Gauss 使用的变分法. 他通过 x, y, z 表示来研究这个问题,并证明 John Bernoulli 提出的一个定理:测地线的主法线垂直于曲面.(例如球面上的纬度圆,在其一点处的主法线位于这个圆所在的平面上,并不与球面垂直,而经度圆在任一点处的主法线都与球面垂直.)u 和 v 之间的任何一个关系都确定曲面上的一条曲线,给定测地线的这种关系由一个微分方程确定. 这个方程可以写成多种形式,Gauss 仅仅指出这是 u 和 v 的一个二阶方程,但是没有明确给出. 有一种形式是

$$\frac{d^2 v}{du^2} = n\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2m - \nu)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (l - 2\mu)\frac{dv}{du} - \lambda, \tag{9}$$

这里 $n, m, \mu, \nu, l, \lambda$ 是 E, F, G 的函数.

在作曲面上两点之间有唯一测地线存在这一假定时,必须非常小心. 球面上两个邻近的点有唯一的测地线连接它们,但是两个对径点却有无穷多条测地线连接它们. 类似地,在圆柱面的同一条直母线上的两点,被一条沿直母线的测地线所连接,但是还有无穷多条作为测地线的螺旋线连接这两个点. 如果在一区域内的两点之间只有一条测地线弧,则在这区域内这条弧给出两点之间的最短路线. 在特殊曲面上实际确定测地线的问题,有许多人做过研究.

---

① *Jour. für Math.*, 19,1839,370～387.

Gauss 在 1827 年的文章中,对于一个由测地线构成的三角形(图 37.1),证明了一条关于曲率的著名定理.设 K 是一个曲面的可变曲率.于是 $\iint_A K\,dA$ 是这个曲率在面积 A 上的积分.Gauss 的定理用于这三角形时说的是

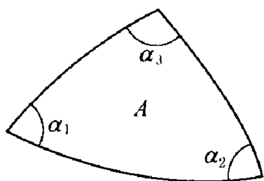


图 37.1

$$\iint_A K\,dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi;$$

这就是说,在一个测地三角形上曲率的积分等于三个角之和超过 180°之盈量,或在三角之和小于 180°时,等于三个角之和不足 180°之亏量.Gauss 说这个定理应该算是一个最精美的定理.这个结果推广了 Lambert(第 36 章第 4 节)的定理,后者断言球面三角形的面积等于它的球面盈量与半径平方之积,因为在一个球面三角形上 K 是常数且等于 $1/R^2$.

在 Gauss 的微分几何中还有一部分更为重要的工作必须提一提.Lagrange(第 23 章第 8 节)曾经论述了旋转面到平面的保角映射.1822 年,Gauss 以他关于求任一曲面保角变换到任何另一曲面上的解析条件问题的文章①,获得了丹麦皇家科学会的奖金.在两个曲面上对应点的邻域中成立的他的条件,相当于下列事实:设 T 和 U 是表示一个曲面的参数,t 和 u 是表示另一个曲面的参数,则 T 和 U 的一个函数 $P+iQ$ 是 $p+iq$ 的一个函数 f,这里 $p+iq$ 是参数 t 和 u 的对应的函数,并且 $P-iQ$ 是 $f'(p-iq)$,其中 f' 或者就是 f,或者是由 f 把其中的 i 换成 −i 所得到的函数.关于函数 $P+iQ$,我们将不作进一步的说明.这个函数 f 依赖于两个曲面之间的对应关系,这个对应关系是用 $T=T(t, u)$ 和 $U(t, u)$ 规定的.关于曲面的一个**有限部分**是否可能以及用什么方式保角

---

① *Werke*, 4,189~216.

映射到另一个曲面上的问题,Gauss并没有回答.这个问题,Riemann在他关于复值函数的工作中继续作了研究(第27章第10节).

Gauss在微分几何方面的工作本身就是一个里程碑.但是,它的含义比他自己的评价要深刻得多.在这个工作之前,曲面一直是被作为三维Euclid空间中的图形进行研究的.但是Gauss证明了,曲面的几何可以集中在曲面本身上进行研究.如果通过曲面在三维空间中的参数表示

$$x = x(u, v), \ y = y(u, v), \ z = z(u, v)$$

引进u和v坐标,并用以确定E, F和G,就得到这个曲面的Euclid性质.然而,在曲面上给定这些u和v坐标,以及以u和v的函数E, F和G表示的ds^2的表达式之后,曲面的所有性质就都能从这个表达式推导出来.这就提出两个极其重要的思想.第一个是,曲面本身可以看成是一个空间,因为它的全部性质被ds^2确定.人们可以忘掉曲面是位于一个三维空间中的这个事实.假如把曲面本身看成是一个空间,那么它具有哪一种几何呢?如果把测地线当成曲面上的"直线",则几何是非Euclid的.

这样,如果把球面本身当作一个空间来研究,那么它就有它自己的几何,并且即使取熟知的纬度和经度作为点的坐标,曲面的几何也不是Euclid的,因为"直线"或测地线是曲面上的大圆弧.然而,如果把球面看成三维空间中的一张曲面,球面的几何就是Euclid的.曲面上两点之间最短距离便是三维Euclid几何的线段(虽然它并不在曲面上).Gauss的工作意味着,至少在曲面上有非Euclid几何,如果把曲面本身看成一个空间的话.Gauss是否看到他的曲面几何的这种非Euclid的解释,那就不清楚了.

人们还可看得更远些.可以认为一张曲面所固有的E, F和G是由参数方程(1)确定的.但是,可以从曲面出发引进两族参数曲

线，然后几乎任意地选取 u 和 v 的函数 E，F 和 G. 于是曲面有这些 E，F 和 G 所确定的几何. 这个几何对于曲面是内蕴的，而与周围的空间没有关系. 结果是，随着 E，F 和 G 的不同的选取，同一张曲面可以有不同的几何.

含义是更为深刻的. 如果在同一张曲面上能够选取不同的 E，F 和 G 的组，从而确定不同的几何，那么为什么在我们的三维空间中不能选取不同的距离函数呢？当然，在直角坐标系中通常的距离函数是 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$，如果从 Euclid 几何出发，这是必然的，因为它恰好是勾股定理的解析表示. 然而，对于空间的点给定相同的直角坐标，可以选取 ds^2 的不同的表达式，从而得到该空间的完全不同的几何——一种非 Euclid 几何. 把 Gauss 在研究曲面中首先获得的这种思想推广到任何空间，是由 Riemann 继承并发展的.

3. Riemann 研究几何的途径

由 Gauss，Lobatchevsky 和 Bolyai 的工作引起的，关于物理空间的几何我们可以相信些什么，这个疑问推动了 19 世纪的重大创造之一——Riemann 几何的产生，创立者是最深刻的几何哲学家 Georg Bernhard Riemann. 虽然 Riemann 并不知道 Lobatchevsky 和 Bolyai 工作的细节，但 Gauss 是知道他们的，而 Riemann 肯定知道 Gauss 对 Euclid 几何的真实性和必然适用性的怀疑. 这样，在几何领域中 Riemann 追随 Gauss，虽然在函数论中他追随 Cauchy 和 Abel. 他对几何的研究也受心理学家 Johann Friedrich Herbart(1776—1841)教导的影响.

Gauss 给 Riemann 指定把几何基础作为他应该发表的就职演说的题目，这是大学讲师为取得大学教授资格所应作的演说. 这个讲演于 1854 年对格丁根的全体教员发表，有 Gauss 在场，并在

1868 年以《关于作为几何学基础的假设》为题出版①.

为竞争巴黎科学院的奖金，Riemann 在 1861 年写了一篇关于热传导的文章，这篇文章常常叫做他的《巴黎之作》(*Pariserarbeit*)，在文中 Riemann 发现必须进一步考虑他关于几何的思想，在这里他对他的 1854 年的文章作了某些技术性的加工. 1861 年的这篇没有获奖的文章，在他死后发表在 1876 年他的《文集》(*Collected Works*)②中. 在《文集》的第二版里，Heinrich Weber 在一篇注解中解释了 Riemann 的高度压缩了的题材.

Riemann 提出的空间的几何并不只是 Gauss 的微分几何的推广. 他重新考虑了研究空间的整个途径. Riemann 研究了上述关于物理空间我们究竟可以确信什么的问题. 在通过经验确定物理空间中成立的特殊公理之前，在真实的经验空间中什么条件或什么事实必须预先假定呢？Riemann 的目的之一是要证明，Euclid 的独特的公理，与其说如人们历来相信的那样是自明的真理，还不如说是经验性的. 他采用了解析的途径，因为在几何证明中，由于我们的感觉，我们可能错误地假定一些不是显然可以承认的事实. 这样，Riemann 的思想是：依靠分析我们可以从关于空间无疑是先验的东西出发，导出必然的结论. 于是就会知道空间的任何其他的性质都是经验的. Gauss 自己研究了完全相同的问题，但是仅仅发表了这个研究的论曲面的部分. Riemann 对于什么是先验的探讨导致他研究空间的局部性质；换句话说，就是采用微分几何的途径，这同在 Euclid 几何中或者在 Gauss，Bolyai 和 Lobatchevsky 的非 Euclid 几何中，把空间作为一个整体进行考虑是相对立的. 在作详细的考察之前，我们应该预先说明，表述在 1854 年的讲演

---

① *Abh. der Ges. der Wiss. zu Gott.*, 13, 1868, 1～20 = *Werke*, 第二版, 272～287. 英译本可在 W. K. Clifford 的 *Collected Mathematical Papers* 中找到. 在 *Nature*, 8, 1873, 14～36 和 D. E. Smith 的 *A Source Book in Mathematics*, 411～425 中也有.

② *Werke*, 第二版, 1892, 391～404.

以及在原稿中的 Riemann 的思想是模糊的. 一个原因是 Riemann 为了适应他的听众——格丁根的全体教员. 部分的模糊也和他文章开头的哲学考虑有关.

Gauss 关于 Euclid 空间中曲面的内蕴几何学,开辟了一个很大的领域,Riemann 对任一空间发展了一种内蕴几何. 虽然三维的情形显然是一种重要的情形,Riemann 还是宁可处理 n 维几何,并且他把 n 维空间叫做一个流形. n 维流形中的一个点,可以用 n 个可变参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一组指定的特定值来表示,而所有这种可能的点的总体就构成 n 维流形本身,正如在一个曲面上的点的全体构成曲面本身一样. 这 n 个可变参数就叫做流形的坐标. 当这些 x_i 连续变化时,对应的点就遍历这个流形.

因为 Riemann 认为我们只能局部地了解空间,所以他从定义两个一般点之间的距离出发,这两个点所对应的坐标只相差无穷小. 他假定距离的平方是

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,dx_i\,dx_j, \tag{10}$$

其中 g_{ij} 是坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数, $g_{ij} = g_{ji}$, 并且(10)的右边对 dx_i 的所有可能值总是正的. ds^2 的这个表示式是 Euclid 距离公式

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$

的推广. 他提到有可能假定 ds 是微分 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ 的一个四次齐次函数的四个根中的一个. 但是他没有深入研究这种可能性. 由于允许 g_{ij} 是坐标的函数,所以 Riemann 提供了空间的性质可以逐点而异的可能性.

虽然 Riemann 在他 1854 年的文章中没有明确地阐述下面的定义,但在他的心目中无疑是有的,因为它们与 Gauss 对曲面所做的是相同的. Riemann 流形上的一条曲线由 n 个函数

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \cdots,\ x_n = x_n(t) \tag{11}$$

给定.于是,在 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$ 之间的曲线的长度定义为

$$(12)\qquad l=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t.$$

在两个给定点 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$ 之间的最短曲线——测地线,随之可用变分法确定.用变分学的记号,这就是适合条件 $\delta\int_\alpha^\beta \mathrm{d}s=0$ 的曲线.于是,必须确定形如(11)的特定的函数,它给出两点之间的这条最短道路.取弧长 s 作为参数,测地线的方程可以证明是

$$\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{\lambda,\mu}\begin{Bmatrix}\lambda & \mu\\ & i\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_\lambda}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}=0,\ i,\lambda,\mu=1,2,\cdots,n.$$

这是 n 个二阶常微分方程的方程组①.

两条曲线在点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$处相交,一条曲线由方向 $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}s\ (i=1,2,\cdots,n)$ 确定,另一条由 $\mathrm{d}x_i'/\mathrm{d}s'\ (i=1,2,\cdots,n)$ 确定,其中撇表示属于第二个方向的值,这两条曲线在交点处的交角 θ 由公式

$$(13)\qquad \cos\theta=\sum_{i,i'\,1}^n g_{ii'}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_i'}{\mathrm{d}s'}$$

确定.仿照 Gauss 对曲面所用的那套方法,以上面的定义作基础,可以推出一种度量的 n 维几何.所有的度量性质由 $\mathrm{d}s^2$ 的表达式中的系数 g_{ij} 确定.

在 Riemann 1854 年的文章中的第二个重要的概念,是流形的曲率的概念.Riemann 企图通过它去刻画 Euclid 空间和更一般的空间,在这种空间中图形可以挪动而不改变其形状或大小.Riemann 关于任意 n 维流形的曲率的概念,是 Gauss 关于曲面的总曲率概念的推广.如同 Gauss 的概念一样,流形的曲率可用一些量定义,而这些量可以在流形自身上确定,从而无需把流形想象成位于某一更高维的流形中.

① 关于大括号记号的意义见下面的(19)式.Riemann 没有明确地给出这些方程.

在 n 维流形中给定一点 P，Riemann 考虑在这点的一个二维流形，这个二维流形在 n 维流形中. 这个二维流形由经过 P 点的无穷多条单参数测地线构成，这些测地线同流形的平面截口在 P 点相切. 现在一条测地线可以用点 P 和在该点的一个方向来描述. 设 dx_1', dx_2', …, dx_n'是一条测地线的方向，而 dx_1'', dx_2'', …, dx_n''是另一测地线的方向. 则在 P 点的单参数无穷多条测地线中，任一条的方向的第 i 个分量由下式给出：

$$dx_i = \lambda' dx_i' + \lambda'' dx_i''$$

(λ'和λ''要受条件$\lambda'^2 + \lambda''^2 + 2\lambda'\lambda''\cos\theta = 1$ 的限制，这个条件是由条件 $\sum g_{ij}(dx_i/ds)(dx_j/ds) = 1$ 导出的). 这一组测地线构成一个二维流形，它有一个 Gauss 曲率. 因为经过 P 点的这种二维流形有无穷多，所以在 n 维流形的一个点处就有无穷多个曲率. 但是，在这些曲率的测度中，可以从 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个推得其余的. 曲率的测度的一个显式现在可以推出来. 这是 Riemann 在他 1861 年的文章中就已做了的，在下面即将给出. 对于流形就是一个曲面的情形，Riemann 的曲率恰恰就是 Gauss 的总曲率. 严格地说，正如 Gauss 的曲率一样，Riemann 的曲率是一种加在流形上而非流形自身的度量性质.

Riemann 在完成了他的 n 维几何的一般研究，并说明如何引进曲率以后，进而考虑特定的流形，在这种流形上，有限的空间形式应当能够移动，而不改变其大小或形状，并且应当能够按任意方向旋转. 这就把他引到常曲率空间.

当在一点所有曲率的测度都相同，并且等于其他任何点的所有曲率的测度时，我们得到 Riemann 称之为常曲率的流形. 在这种流形上，可以讨论全等的图形. 在 1854 年的文章中 Riemann 给出下述结果但没有详说：如果 α 是曲率的测度，常曲率流形上无穷小距离元素公式变成(在一适当的坐标系中)

$$(14)\qquad ds^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} dx_i^2}{(1 + (\alpha/4)\sum x_i^2)^2}.$$

Riemann 认为曲率 α 必须是正的或是零,所以当 $\alpha > 0$ 时我们得到一个球面空间,而当 $\alpha = 0$ 时得到一个 Euclid 空间,反之亦然. 他还认为,如果一个空间是无限伸展的,其曲率必须为零. 然而,他确实提示过,可能有现实的常数负曲率曲面①.

对 $\alpha = a^2 > 0$, 且 $n = 3$ 的情形,由于 Gauss 的工作,我们得到一种三维的球面几何,虽然不能把它形象化. 这个空间在广度上有限但是无界;在其中所有的测地线都是定长,等于 $2\pi/a$,并且回到它们自身;空间的体积是 $2\pi^2/a^3$. 对于 $a^2 > 0$ 和 $n = 2$ 的情形,我们得到通常的球面的空间;测地线当然就是大圆并且是有限的;而且,任意两条测地线交于两点. 至于 Riemann 是否认为常数正曲率曲面上的测地线都交于一点或两点,实际上是不清楚的. 他可能倾向于后者. Felix Klein 后来指出(见下一章),这里涉及两种不同的几何.

Riemann 还指出空间的无界性(球的表面就是这种情形)和无限性之间的一种区别,这种区别后面还要讲到. 他说,无界性与任何其他由经验得来的事情,例如同无限广度相比,有更大的经验可信性.

Riemann 在他的文章结尾还指出,因为物理空间是一种特殊的流形,所以那种空间的几何不能只是从流形的一般概念推出来. 把物理空间同其他三维流形区别开来的那些性质,只能从经验得到. 他附带地说:"关于流形的这些假设,在何种程度上以及在哪一点上可以由经验肯定,这个认识问题尚待解决."特别,Euclid 几何的公理可能只是物理空间的近似写照. 同 Lobatchevsky 一样,

---

① Ferdinand Minding 已经知道这种曲面(*Jour. für Math.*, 19,1839,370～387,特别是 pp. 378～380),包括那一个后来叫做伪球面的曲面(见第 38 章第 2 节). 还可看 Gauss, *Werke*, 8,265.

Riemann 相信天文学将判定哪种几何符合于空间. 他以下面的预言性评论结束他的文章:"所以,或者作为空间基础的客体必须形成一个离散的流形,或者在作用于它上面的约束力之下,我们应当从它的外部寻找其度量关系的根据……这就把我们引到另一门科学——物理学的领域,我们的工作的宗旨不容许我们今天进入那个领域."

这个观点被 William Kingdon Clifford① 所发展.

> 事实上我认为:(1)空间的小部分有一种性质,类似于曲面上的小山,这曲面平均看起来是扁平的.(2)呈弯曲的或畸变的这种性质以波浪方式连续地从空间的一部分传到另一部分.(3)空间曲率的这种变化,确实如我们称之为物质运动的那种现象中所发生的情况一样,不管这种物质是有重量的还是像空气那样稀薄的.(4)在这个物理世界中,除了可能遵循连续性规律的这种变化之外,没有其他事情发生.

在曲率不仅逐点变化,而且由于物质的运动也随时间而变化的空间中,通常的 Euclid 几何法则是不成立的. 他接着又说,要想对物理规律作较为严格的研究,就不能忽视空间中的这些"小山". 这样,与其他的大多数几何学家不同,Riemann 和 Clifford 感到,为了确定什么是物理空间的真理,需要把物质和空间结合起来. 这个思路自然就引导到相对论.

Riemann 在他的《巴黎之作》(1861)中回到下述问题:一个度量为

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,dx_i\,dx_j \tag{15}$$

的给定的 Riemann 空间,在什么时候可以是一个常曲率空间,或

① *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2,1870, 157 ~ 158 = *Math. Papers*, 20~22.

者甚至是一个 Euclid 空间. 但是,他提出了更为一般的问题:在什么条件下,可以通过方程组

$$(16)\qquad x_i = x_i(y_1, y_2, \cdots, y_n),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

把如同(15)那样的度量变成一个给定的度量

$$(17)\qquad ds'^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\, dy_i dy_j ,$$

当然,这里应理解为 ds 等于 ds′,如此,两个空间的几何除了坐标的选取外将是相同的. 变换(16)并不总是可能的,因为正如 Riemann 指出的,在(15)中有 $n(n+1)/2$ 个独立函数,而可用以把 g_{ij} 变成 h_{ij} 的变换只能引进 n 个函数.

为了处理一般的问题,Riemann 引进了一些特殊的量 p_{ijk},我们将代之以更加熟悉的 Christoffel 记号,这里理解为

$$p_{ijk} = \begin{bmatrix} j & k \\ & i \end{bmatrix}.$$

表示成各种形式的 Christoffel 记号是

$$(18)\qquad \Gamma_{\alpha\beta,\lambda} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ & \lambda \end{bmatrix} = [\alpha\beta, \lambda] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}\right),$$

$$(19)\qquad \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ & \lambda \end{Bmatrix} = \{\alpha\beta, \lambda\} = \sum_i g^{i\lambda}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ & i \end{bmatrix},$$

其中 $g^{i\lambda}$ 是行列式 g 中 $g_{i\lambda}$ 的余子式除以 g. Riemann 还引进现在通称的 Riemann 四指标记号

$$(20)\qquad (\mu\lambda, jk) = R_{\lambda\mu,jk} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda j,\mu}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda k,\mu}}{\partial x_j} + \sum_{i,\alpha} g^{i\alpha}(\Gamma_{\lambda k,\alpha}\Gamma_{\mu j,i} - \Gamma_{\lambda j,\alpha}\Gamma_{\mu k,i}).$$

然后,Riemann 证明了 ds^2 可以变成 ds'^2 的一个必要条件是

$$(21)\qquad (\alpha\delta, \beta\gamma)' = \sum_{r,k,i,h} (rk, ih)\frac{\partial x_r}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial y_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial y_\gamma}\frac{\partial x_k}{\partial y_\delta},$$

其中左边的记号指的是对度量 ds' 所构造的量，并且对于每一个遍历 1 到 n 的 α, β, γ, δ 的所有值，(21)都成立.

Riemann 现在回到特殊的问题：在什么条件下给定的 ds^2 可以变成带常系数的. 他先导出关于流形曲率的一个显式. 在 1854 年的文章中已经给出的一般定义用到从空间的一点 O 出发的测地线. 设 d 和 δ 确定两个向量或从 O 点出发的两条测地线的方向（每一个方向由测地线的切线的分量规定）. 然后，考虑从点 O 出发并由 $\kappa\mathrm{d} + \lambda\delta$ 给定的测地线向量束，其中 κ 和 λ 是参数. 如果设想 d 和 δ 作用在表示任一曲线的 $x_i = f_i(t)$ 上，则二阶微分 $(\kappa\mathrm{d} + \lambda\delta)^2 = \kappa^2\mathrm{d}^2 + 2\kappa\lambda\,\mathrm{d}\delta + \lambda^2\delta^2$ 有意义. 于是 Riemann 构造

$$(22)\quad \Omega = \delta\delta\sum g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j - 2\mathrm{d}\delta\sum g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j + \mathrm{dd}\sum g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\,.$$

这里，理解为 d 和 δ 形式地作用在它们后面的表达式上（而且 d 和 δ 可交换），所以

$$(23)\quad \delta\delta\sum g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = \delta\Big[\sum(\delta g_{ij})\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j + \sum g_{ij}\big((\delta\mathrm{d}x_i)\mathrm{d}x_j + \mathrm{d}x_i\delta\mathrm{d}x_j\big)\Big]\,,$$

并且 $\delta g_{ij} = \sum_r(\delta g_{ij}/\partial x_r)\delta x_r$. 如果计算 Ω，就能发现包含一个函数的所有三阶微分的项都为零. 只剩下包含 δx_i, $\mathrm{d}x_i$, $\delta^2 x_i$, $\delta\mathrm{d}x_i$ 和 $\mathrm{d}^2 x_i$ 的项. 通过计算这些项并用记号

$$p_{ik} = \mathrm{d}x_i\delta x_k - \mathrm{d}x_k\delta x_i\,,$$

Riemann 得到

$$(24)\quad [\Omega] = \sum_{i,k,r,s}(ik,\ rs)p_{ik}p_{rs}\,.$$

现在令 $\quad 4\Delta^2 = \sum g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \cdot \sum g_{ij}\,\delta x_i\delta x_j - \big(\sum g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\delta x_j\big)^2$.

则 Riemann 流形的曲率 K 是

$$(25)\quad K = -\frac{[\Omega]}{8\Delta^2}\,.$$

全部结论是：若要给定的 ds^2 能够回到形式（对 $n = 3$）

$$(26)\quad ds'^2 = c_1\,\mathrm{d}x_1^2 + c_2\,\mathrm{d}x_2^2 + c_3\,\mathrm{d}x_3^2\,,$$

其中 c_i 都是常数,其必要充分条件是,所有的记号$(\alpha\beta, \gamma\delta)$都为零. 在 c_i 全是正的情况下,ds'^2 可以化成 $dy_1^2+dy_2^2+dy_3^2$,即空间是 Euclid 空间. 正如我们能从$[\Omega]$的值看到的,当 K 是零时,空间实质上是 Euclid 的.

值得注意的是,一个 n 维流形的 Riemann 曲率,在曲面的情形就化为 Gauss 总曲率. 事实上,当

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2$$

时,16 个记号$(\alpha\beta, \gamma\delta)$中的 12 个是零,对其余的 4 个我们有

$$(12, 12) = -(12, 21) = -(21, 12) = (21, 21).$$

于是 Riemann 的 K 化成

$$k = \frac{(12, 12)}{g}.$$

通过(20),可以证明这个表达式等于曲面总曲率的 Gauss 的表达式.

4. Riemann 的继承者

当 Riemann 1854 年的文章在他逝世后两年(即 1868 年)刊行时,激起了强烈的兴趣,许多数学家忙着去充实他所概述的思想并加以推广. Riemann 的直接继承者是 Beltrami, Christoffel 和 Lipschitz.

Eugenio Beltrami(1835—1900),是波洛尼亚(Bologna)和意大利其他大学的数学教授,他知道 Riemann 1854 年的文章,但是不知道他 1861 年的文章,他还在研究把 ds^2 的一般表达式化成形式(14)的证明问题①,而形式(14)是 Riemann 已对常曲率空间给出了的. 除这个结果以及证明了 Riemann 的其他几个论断以外,Beltrami 还研究了将在下节考虑的微分不变量的课题.

---

① *Annali di Mat.*, (2), 2, 1868~1869, 232~255 = *Opere Mat.*, 1, 406~429.

Elwin Bruno Christoffel(1829—1900)先是苏黎世后是斯特拉斯堡的数学教授,他推进了 Riemann 那篇文章中的思想. Christoffel 在他的两篇关键性文章① 中主要关心的是重新考虑和详细论述 Riemann 在他 1861 年文章中已经稍为粗略地讨论过的题目,那就是一个形式

$$F = \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$$

在什么时候能够变成另一个形式

$$F' = \sum_{i,j} g_{ij}' \mathrm{d}y_i \mathrm{d}y_j .$$

Christoffel 寻找它的必要充分条件. 在这篇文章中,他附带地引进了 Christoffel 记号.

让我们首先考虑二维的情形,在这里

$$F = a(\mathrm{d}x)^2 + 2b\mathrm{d}x\mathrm{d}y + c(\mathrm{d}y)^2 ,$$
$$F' = A(\mathrm{d}X)^2 + 2B\mathrm{d}X\mathrm{d}Y + C(\mathrm{d}Y)^2 ,$$

并假定 x 和 y 可以表示成 X 和 Y 的函数,使得在这变换下 F 变成 F'. 当然, $\mathrm{d}x = (\partial x/\partial X)\mathrm{d}X + (\partial x/\partial Y)\mathrm{d}Y$. 现在,当 F 中的 x, y, $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 代以相应的 X 和 Y 的表达式,并让 F 的这个新形式中的系数和 F' 的对应系数相等时,就得到

$$a\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + 2b\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial X} + c\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 = A,$$

$$a\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial x}{\partial Y} + b\left(\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)$$
$$+ c\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} = B,$$

$$a\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right) + c\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2 = C.$$

对于 x 和 y 作为 X 和 Y 的函数,有三个微分方程. 如果它们能够解出来,那我们就知道如何把 F 变成 F' 了. 然而,其中只含有两个

① *Jour. für Math.*, 70,1869,46～70 和 241 ～ 245 = *Ges. Math. Abh.*, 1, 352 ff., 378 ff.

函数. 于是,以 a, b 和 c 为一方,以 A, B 和 C 为另一方,它们之间必定有某些关系. 通过微分上面三个方程和一些代数步骤,就发现这关系是 $K = K'$.

对于 n 元的情形,Christoffel 用的是同一个方法. 他从

$$F = \sum g_{rs} dx_r dx_s,$$

$$F' = \sum g'_{rs} dy_r dy_s$$

出发. 变换是

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \cdots, y_n), \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

他让 $g = |g_{rs}|$. 如果 Δ_{rs} 是 g_{rs} 在行列式里的余子式,就让 $g^{pq} = \Delta_{pq}/g$. 像 Riemann 一样,他独立地引进了四指标记号(没有逗点)

$$(gkhi) = \frac{\partial}{\partial x_i}[gh, k] - \frac{\partial}{\partial x_h}[gi, k] + \sum_p (\{gi, p\}[hk, h] - \{gh, p\}[ik, p]).$$

然后他推出关于 x_i 作为 y_i 的函数的 $n(n+1)/2$ 个偏微分方程. 有代表性的一个是

$$\sum_{r,s} g_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_s}{\partial y_\beta} = g'_{\alpha\beta}.$$

这些方程是使 $F = F'$ 的变换存在的必要充分条件.

部分是为了讨论这组方程的可积性,部分是由于 Christoffel 愿意考虑 dx_i 的高于两次的形式,所以他作了许多微分和代数推导,证明了

$$(27) \qquad (\alpha\delta\beta\gamma)' = \sum_{g,h,i,k} (gkhi) \frac{\partial x_g}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_h}{\partial y_\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\gamma} \frac{\partial x_k}{\partial y_\delta},$$

其中 α, β, γ 和 δ 取 1 到 n 的所有值. 总共有 $n^2(n^2-1)/12$ 个这种形式的方程. 这些方程是两个四阶微分形式等价的必要充分条件. 确实,设 $d^{(1)}x$, $d^{(2)}x$, $d^{(3)}x$, $d^{(4)}x$ 是 x 的四组微分,对 y 也照样有四组微分. 如果有四线性形式

$$G_4 = \sum_{g,k,h,i} (gkhi) d^{(1)}x_g d^{(2)}x_k d^{(3)}x_h d^{(4)}x_i,$$

则关系式(27)是 $G_4 = G_4'$ 的必要充分条件,其中 G_4'是诸 y 变元的类似于 G_4 的形式.

这个理论可以推广到 μ 重微分形式. 事实上,Christoffel 引进了

$$(28) \qquad G_\mu = \sum_{i_1, \cdots, i_\mu} (i_1 i_2 \cdots i_\mu) \underset{1}{\partial} x_{i_1} \underset{2}{\partial} x_{i_2} \cdots \underset{\mu}{\partial} x_{i_\mu},$$

其中括号里的项几乎与四指标记号一样是用 g_{rs} 来定义的,记号$\underset{i}{\partial}$是用来把 x_i 的微分组同以$\underset{j}{\partial}$作用所得的微分组区别开来. 然后他证明

$$(29) \qquad (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\mu)' = \sum (i_1 \cdots i_\mu) - \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_\mu}}{\partial y_{\alpha_\mu}},$$

并得到 G_μ 可以变成G_μ'的必要充分条件.

接着,他给出从一个 μ 重形式G_μ 导出 -个 $(\mu+1)$ 重形式的一般方法. 关键的一步是引进.

$$(30) \quad (i_1 i_2 \cdots i_\mu i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(i_1 i_2 \cdots i_\mu) - \sum_\lambda [\{ii_1, \lambda\}(\lambda i_2 \cdots i_\mu) + \{ii_2, \lambda\}(i_1 \lambda i_3 \cdots i_\mu) + \cdots].$$

这些 $(\mu+1)$ 指标记号是 $G_{\mu+1}$ 形式的系数. Christoffel 在这里用的方法,就是后来 Ricci 和 Levi-Civita 所谓的协变微分(第 48 章).

Christoffel 关于 Riemann 几何只写了一篇关键性的文章,而波恩大学的数学教授 Rudolph Lipschitz,从 1869 年起在《数学杂志》上却写了大量文章. 虽然他对 Beltrami 和 Christoffel 的工作做了某些推广,但主要的题目和结果跟他们两人是相同的. 关于 Riemann和 Euclid n 维空间的子空间他却给出了某些新的结果.

由 Riemann 创始并由他的三位直接继承者所发展的思想,在 Euclid 微分几何和 Riemann 微分几何两方面都提出了大批新问题. 特别,在三维 Euclid 情形已经得到的结果,被推广到 n 维

中的曲线、曲面和较高维的形式.在这许多结果中我们将只引述一个.

1886年,Friedrich Schur(1856—1932)证明了一个后来以他名字命名的定理①.根据Riemann提出曲率概念的思路,Schur讲到空间的一个定向的曲率.这种定向由一束测地线$\mu\alpha+\lambda\beta$确定,其中α和β是从一点出发的两条测地线的方向.这个束构成一个曲面并且有一个Gauss曲率,Schur称之为这个定向的Riemann曲率.他于是断言,如果空间的Riemann曲率在每一点都同定向无关,则Riemann曲率在全空间是常数.因此,这种流形是一个常曲率空间.

5. 微分形式的不变量

由于研究了ds^2的一个给定表达式,什么时候可以通过形如

(31) $$x_i = x_i(x_1', x_2', \cdots, x_n'),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

的变换,变成另一个这种表达式而保持ds^2的值不变这一问题,人们便清楚地知道流形可以有不同的坐标表示.然而,流形的几何性质,必须同用以表示和研究它的坐标系的选取无关.从分析上来说,这些几何性质将由不变量表示,所谓不变量就是一个表达式,其形式在坐标变换下不变,因此,在不同的坐标系中它在一个给定点有相同的值.在Riemann几何中有兴趣的不变量,不仅包括含有微分dx_i和dx_j的基本二次形式,而且还可以包含系数的导数和其他函数的导数.所以它们被称为微分不变量.

以二维情形为例,设

(32) $$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

是一个曲面的距离元素(的平方),则Gauss曲率K由上面的公式(8)给出.现在,如果坐标变成

① *Math. Ann.*, 27,1886,167~172和537~567.

(33) $$u' = f(u, v),\ v' = g(u, v),$$

而 $E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$ 变成 $E'\mathrm{d}u'^2 + 2F'\mathrm{d}u'\mathrm{d}v' + G'\mathrm{d}v'^2$，则有定理说 $K = K'$，其中 K' 与(8)的表达式相同，不过是用带撇的变量. 因此曲面的 Gauss 曲率是一个纯量不变量. 不变量 K 也说成是属于形式(32)的不变量，它只包含 E, F, G 和它们的导数.

微分不变量的研究实际上是由 Lamé 在一个较局限的范围内开始的. 他感兴趣的是三维空间中，从一个正交曲线坐标系到另一个这种坐标系的变换之下的不变量. 对直角 Descartes 坐标他证明了①

(34) $$\Delta_1\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2,$$

(35) $$\Delta_2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

是微分不变量(他称之为微分参数). 譬如，如果 ϕ 在一正交变换(转轴)下变成了 $\phi'(x', y', z')$，同一点在原坐标系和新坐标系中的坐标分别是 (x, y, z) 和 (x', y', z')，则在这点处有

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi'}{\partial z'}\right)^2,$$

对于 $\Delta_2\phi$ 类似的方程成立.

对于 Euclid 空间中的直交曲线坐标系，$\mathrm{d}s^2$ 具有形式

(36) $$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\mathrm{d}u_1^2 + g_{22}\mathrm{d}u_2^2 + g_{33}\mathrm{d}u_3^2,$$

Lamé 证明了[见《曲线坐标讲义》(*Leçons sur les coordonnees curvilignes*), 1859，参阅前面第 28 章第 5 节]，在直角坐标系中，由上面 $\Delta_2\phi$ 给定的 ϕ 的梯度的发散量具有不变形式

$$\Delta_2\phi = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right].$$

---

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 14, 1834, 191～288.

在同一著作中，Lamé 顺便给出了关于由(36)给定的 ds^2 何时确定 Euclid 空间中一个曲线坐标系的条件，以及如果这样做了，又如何把它变成直角坐标.

Beltrami 第一个对曲面论的不变量作了研究①. 他给出了下列这两个微分不变量

$$\Delta_1\phi = \frac{1}{EG-F^2}\left\{E\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)^2\right\},$$

$$\Delta_2\phi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\phi_u - F\phi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-F\phi_u + E\phi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\}.$$

这些量都有几何意义. 例如对 $\Delta_1\phi$，如果 $\Delta_1\phi = 1$，则曲线 $\phi(u, v) =$ 常数是曲面上测地线族的正交轨线.

寻找微分不变量的工作随后转到对 n 个变量的二次微分形式. 其理由仍旧是这些不变量与坐标的选取无关，它们代表流形本身的内蕴性质. 譬如 Riemann 曲率就是一个纯量不变量.

Beltrami 用 Jacobi 给出的方法②，成功地把 Lamé 不变量转到了 n 维 Riemann 流形③. 设 g 照例是 g_{ij} 的行列式，g^{ij} 是 g 中 g_{ij} 的余子式除以 g，则 Beltrami 证明了 Lamé 的第一个不变量变成

$$\Delta_1(\phi) = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}.$$

这就是 ϕ 的梯度的平方的一般形式. 对于 Lamé 的第二个不变量，Beltrami 得到

$$\Delta_2(\phi) = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\sum_j g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right).$$

---

① *Gior. di Mat.*, 2, 1864, 267～282，后来的文章在 Vols. 2 和 3 = *Opere Mat.*, 1, 107～198.

② *Jour. für Math.*, 36, 1848, 113 ～ 134 = *Werke*, 2, 193～216.

③ *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, (2), 8, 1868, 551 ～ 590 = *Opere Mat.*, 2, 74～118.

他还引进了混合微分不变量

$$\Delta_1(\phi\psi)=\sum_{i,j}g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}.$$

这就是 ϕ 和 ψ 的梯度的数量积的一般形式.

当然,形式 ds^2 本身在坐标变换下是一个不变量. 由此,正如我们在前节看到的,Christoffel 推出的他的高阶微分形式 G_4 和 G_μ,也是不变量. 而且他说明了如何从 G_μ 导出 $G_{\mu+1}$,而 $G_{\mu+1}$ 也是不变量. 对这种不变量的构造,Lipschitz 也作了研究,不变量的数量和种类是繁多的. 正如我们将要看到的,这个微分不变量理论对于张量分析是一种启示.

参考书目

Beltrami, Eugenio: *Opere matematiche*, 4 vols., Ulrico Hoepli, 1902～1920.

Clifford, William K.: *Mathematical Papers*, Macmillan, 1882; Chelsea (reprint), 1968.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, pp. 355～387.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III, Teil 3, various articles, B. G. Teubner, 1902～1907.

Gauss, Carl F.: *Werke*, 4, 192～216, 217～258, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1880. A translation, "General Investigations of Curved Surfaces", has been reprinted by Raven Press, 1965.

Helmholtz, Hermann von: "Über die tatsächlihen Grundlagen der Geometrie", *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 2, 610～617.

Helmholtz, Hermann von: "Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 15, 1868, 193～221; *Wiss. Abh.*, 2, 618～639.

Helmholtz, Hermann von: "Über den Ursprung Sinn und Bedeutung der geometrischen Sätze"; English translation, "On the Origin and Significance of Geometrical Axioms", in Helmholtz: *Popular Scientific Lectures*, Dover (reprint), 1962, 223～

249. Also in James R. Newman: *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, 1956, Vol. 1,647～668.

Jammer, Max: *Concepts of Space*, Harvard Univ. Press, 1954.

Killing, W.: *Die nicht euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, B. G. Teubner, 1885.

Klein, F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Chelsea (reprint), 1950, Vol. 1,6～62; Vol. 2,147～206.

Pierpont, James: "Some Modern Views of Space", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 32, 1926,225～258.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd ed., Dover (reprint), 1953, pp. 272～287 and 391～404.

Russell, Bertrand: *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897), Dover (reprint), 1956.

Smith, David E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2,411～425,463～475. This contains translations of Riemann's 1854 paper and Gauss's 1822 paper.

Staeckel, P.: "Gauss als Geometer", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1917, Beiheft, 25～140; also in *Werke*, 10_2.

Weatherburn, C. E.: "The Development of Multidimensional Differential Geometry", *Australian and New Zealand Ass'n for the Advancement of Science*, 21, 1933, 12～28.

第 38 章

射影几何与度量几何

> 但总应要求一个数学主题变成直观上显然，才可认为研究到头了……
>
> Felix Klein

1. 引　　言

当研究非 Euclid 几何之时和之前，射影几何的研究是主要的几何活动. 再者，从 von Staudt 的著作中(第 35 章第 3 节)，显然的是，射影几何在逻辑上是先于 Euclid 几何的，因为它所处理的是构成几何图形的最根本的定性方面的和描述方面的性质，而并没有用到线段与角的度量. 这个事实提示出 Euclid 几何可能是射影几何的特例. 现就非 Euclid 几何而言，至少就常曲率空间的非 Euclid 几何而言，也可能是射影几何的特例. 于是射影几何与非 Euclid 几何间的关系成为研究的主题，而后者是度量几何，因为它以距离作为基本概念. 弄清射影几何与 Euclid 以及与非 Euclid 几何之间的关系，是我们将进行考查的一个很大的研究成果. 同等重要的是证明基本非 Euclid 几何的相容性.

2. 作为非 Euclid 几何模型的曲面

继 Riemann 工作之后，最重要的几何要算是常曲率空间的几何了. Riemann 自己在他 1854 年论文中指出，只要把球面上的测地线取作"直线"，就能够在球面上实现一个二维的正的常曲率空

间. 这种非 Euclid 几何,现在称为二重椭圆几何,理由以后将会明白. 在 Riemann 的工作以前,Gauss,Lobatchevsky 和 Bolyai 的非 Euclid 几何,后来 Klein 称为双曲几何,是在平面上的几何,引进普通直线(自然是无穷直线)作为测地线. 这种几何和 Riemann 几何的关系是不清楚的. Riemann 和 Minding[①] 曾考虑到负的常曲率的曲面,但他们两人都未指出与双曲几何的关系.

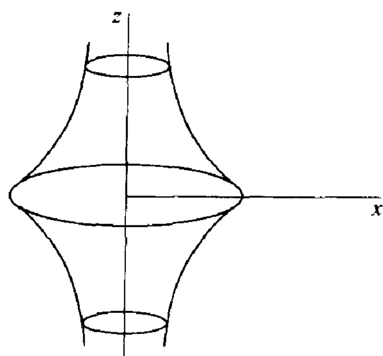


图 38.1

Beltrami 不依赖于 Riemann 而独自认识到[②]常曲率的曲面是非 Euclid 几何空间. 他在曲面上给出双曲几何的有限表示法[③],这证明了双曲平面有限部分的几何在负的常曲率的曲面上成立,只要把曲面上的测地线看作直线. 曲面上的长度和角度就是普通 Euclid 几何曲面上的长度和角度. 一个这样的曲面名为伪球面(图 38.1),它是由一条名为曳物线(tractrix)的曲线绕渐近线旋转而成的,曳物线方程是

$$z = k\log\frac{k+\sqrt{k^2-x^2}}{x} - \sqrt{k^2-x^2},$$

曲面方程为

$$z = k\log\frac{\sqrt{k^2-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{k^2-x^2-y^2}.$$

曲面的曲率为 $-1/k^2$. 于是伪球面是 Gauss, Lobatchevsky 和 Bolyai 的平面有限部分的模型. 在伪球面上的一个图形可以移动并适当弯曲使之与曲面吻合,正如同一个平面图形可以弯曲使之

① *Jour. für Math*, 19, 1839, 370～387.

② *Annali di Mat.*, 7, 1866, 185～204 = *Opere Mat.*, 1, 262～280.

③ *Gior. di Mat.*, 6, 1868, 248～312 = *Opere Mat.*, 1, 374～405.

与圆柱面吻合一样.

Beltrami 证明一块 Lobatchevsky 平面可以在负常曲率曲面上实现. 然而没有负常曲率的正则解析曲面使得**全部** Lobatchevsky 几何在其上成立. 所有这种曲面有一条奇异曲线——切平面经过它时不连续——所以经过此曲线的曲面的延拓不能使代表 Lobatchevsky 几何的图形连续. 这是 Hilbert 得出的结果①.

这方面还值得指出的是, Heinrich Liebmann(1874—1939)② 证明了球面是唯一正的常曲率封闭解析曲面(无奇异点), 从而是唯一能用来作为二重椭圆几何的 Euclid 模型.

这些模型的发展帮助数学家了解并看出基本非 Euclid 几何的意义. 必须记住, 这些二维的非 Euclid 几何基本上就是平面几何, 其中的直线与角是 Euclid 几何中通常的直线与角. 双曲几何虽是以这种方式来论述的, 但数学家似仍感其结论奇异, 只是勉强承认它们属于数学. Riemann 以微分几何观点提出的二重椭圆几何, 甚至还没有像平面几何的公理推导. 于是数学家只能从球面上的几何所提供的线索来看出它的一点意义. 只是通过为寻求 Euclid 几何与射影几何的关系, 人们才从另一方面的研究, 对这些非 Euclid 几何的性质获得好得多的理解.

3. 射影几何与度量几何

Poncelet 虽引进图形的射影和度量性质间的区别, 并在他的 1822 年的书 *Traité* 中说道, 射影性质在逻辑上是更基本的, 但开

---

① *Amer. Math. Soc., Trans.*, 2, 1901, 86～99 = *Ges. Abh.*, 2, 437～448. 证明与进一步历史细节见于 David Hilbert 的 *Grundlagen der Geometrie* 7th ed., B. G. Teubner, 1930 的附录 V. 定理假设双曲几何的直线是曲面上的测地线, 长度与角度是曲面上 Euclid 的长度与角度.

② *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1899, 44～55; *Math. Ann.*, 53, 1900, 81～112; 和 54, 1901, 505～517.

始在与长度和角的大小无关的基础之上建立射影几何的人却是 von Staudt(第 35 章第 3 节). 在 1853 年法兰西学院教授 Edmond Laguerre(1834—1886)虽然起初关心的是研究射影变换下角度如何变化的情况,却以给予角的度量提供射影基础,实际上提出了根据射影概念来建立 Euclid 几何度量性质的这一目标[①].

求两已给相交直线之间夹角的度量,可考虑通过原点分别与此两已知直线平行的两直线. 设过原点的直线方程(非齐次坐标)为 $y = x\tan\theta$, $y = x\tan\theta'$. 设 $y = \mathrm{i}x$ 及 $y = -\mathrm{i}x$ 为过原点到无穷远圆点,即到$(1, \mathrm{i}, 0)$与$(1, -\mathrm{i}, 0)$两点的两直线(虚的). 令此四直线分别为 u, u', w 及 w'. 设 ϕ 为 u 与 u' 间的夹角,则 Laguerre 的结果为

$$\phi = \theta' - \theta = \frac{\mathrm{i}}{2}\log(uu', ww'), \tag{1}$$

其中(uu', ww')是四直线的交比[②]. (1)式的意义是它可以作为用交比这一射影概念来定义角的大小. 对数函数自然是纯数量性的,故可在任何几何中引进.

与 Laguerre 无关,Cayley 独立地迈进了第二步. 他从代数观点研究几何. 实际上他的兴趣在于代数形式(齐次多项式型)的几何解释. 这是我们将在第 39 章内讨论的主题. 为了要证明度量概念能够用射影语言来表达,他专心致力于 Euclid 几何与射影几何的关系,我们要描述的工作是他的《关于代数形式的第 6 篇论文》(Sixth Memoir upon Quantics)[③].

Cayley 的工作实际是 Laguerre 的思想的推广. 后者用无穷远圆点定义平面角,虚圆点实际是退化的二次曲线. 在二维时 Cay-

---

① *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 12,1853, 57 ~ 66 = *Œuvres*, 2,6~15.

② 交比本身是一个复数,系数 $\mathrm{i}/2$ 保证直角的大小为 $\pi/2$. 此交比的计算可在射影几何教科书中见到. 例如参看:William C. Graustein: *Introduction to Higher Geometry*, Macmillan, 1933, Chap. 8.

③ *Phil. Trans.*, 149,1859, 61 ~ 91 = *Coll. Math. Papers*, 2,561~606.

ley 用任一二次曲线代替虚圆点,而在三维时他引进任何二次曲面.这些图形他称之为绝对形.Cayley 断言图形所有的度量性质,无非就是加上了绝对形或者关于绝对形的射影性质.他于是证明这个原则怎样使我们能导出角的新表达式与两点间距离的表达式.

他从平面上点可用齐次坐标表示的事实出发,这些坐标不看作距离或者距离的比,而作为既定的基本概念,无需乎也不能给予任何解释.为定义距离与角度大小,他引入二次型

$$F(x,\ x)=\sum_{i,\ j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij}=a_{ji}$$

与双线性型
$$F(x,\ y)=\sum_{i,\ j=1}^{3}a_{ij}x_iy_j\ .$$

方程 $F(x,\ x)=0$ 定义一条二次曲线,即 Cayley 的绝对形.绝对形的线坐标方程为

$$G(u,\ u)=\sum_{i,\ j=1}^{3}A^{ij}u_iu_j=0,$$

其中 A^{ij} 是 F 的系数行列式 $|a|$ 中 a_{ij} 的余因子.

Cayley 用下列公式定义 x 与 y 两点间的距离 δ,其中 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 及 $y=(y_1,\ y_2,\ y_3)$:

(2) $$\delta=\arccos\frac{F(x,\ y)}{[F(x,\ x)F(y,\ y)]^{1/2}}.$$

线坐标为 $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ 及 $v=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ 的两直线的夹角 ϕ 定义为

(3) $$\cos\phi=\frac{G(u,\ v)}{[G(u,\ u)G(v,\ v)]^{1/2}}.$$

若取特殊二次曲线 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 为绝对形,则上述两个一般公式就变得简单.这时,若 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 与 $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 是两点的齐次坐标,则它们之间的距离由下式给出:

$$(4)\qquad \arccos\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

若两直线的齐次线坐标为(u_1, u_2, u_3)与(v_1, v_2, v_3)，则它们之间的夹角ϕ由下式给出：

$$(5)\qquad \cos\phi=\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}.$$

关于距离的表达式，若用简短写法$xy=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$，并设$a=(a_1, a_2, a_3)$，b与c是直线上三点，则

$$\arccos\frac{ab}{\sqrt{aa}\sqrt{bb}}+\arccos\frac{bc}{\sqrt{bb}\sqrt{cc}}$$
$$=\arccos\frac{ac}{\sqrt{aa}\sqrt{cc}}.$$

即距离的相加法则照样成立. 取绝对形二次曲线为无穷远圆点(1, i, 0)及(1, −i, 0)，Cayley证明距离与角度的公式将化成普通的Euclid公式.

读者注意，长度和角度的表达式里包含绝对形的代数表达式. 一般，任一Euclid度量性质的解析表达式包含着该性质与绝对形的关系式. 度量性质不是图形本身的性质，而是图形相关于绝对形的性质. 这是Cayley以一般射影关系来决定度量的思想. 射影几何中度量概念的地位和前者更大的普遍性，用Cayley的话来说："度量几何是射影几何的一部分."

Cayley的思想为Felix Klein (1849—1925)所采纳，并将它推广到包括非Euclid几何. Klein是格丁根的教授，是19世纪后期到20世纪初期第一流德国数学家之一. 在1869～1870年间他学习了Lobatchevsky，Bolyai，von Staudt的研究工作；然而即使在1871年他还不知道Laguerre的结果. 他觉得利用Cayley的思想有可能把非Euclid几何、双曲几何与二重椭圆几何都包括在射影

几何里面. 他在1871 年[①]的一篇论文中概略叙述了他的思想,并发展成为两篇文章[②]. Klein 是第一个认识到无需用曲面来获得非 Euclid 几何的模型的人.

Klein 首先指出 Cayley 没有说清楚他心目中的坐标究竟有什么意义. 它们或者是没有几何解释的变量,或者是 Euclid 几何的距离. 但要从射影几何中推导出度量几何,必须在射影基础上建立坐标. von Staudt 曾证明(第 35 章第 3 节)用他的投射代数(algebra of throws)可能给点规定以数. 但他用了 Euclid 平行公理. 看来 Klein 清楚地认识到这个公理能够去掉,并在 1873 年的论文中证明了这是能做到的. 于是四个点的、四条直线的或者四个平面的坐标和交比,都可以在纯粹射影的基础上定义.

Klein 的主要思想是把 Cayley 绝对形二次曲面(若考虑三维几何)的性质具体化,就能证明依赖于绝对形性质的 Cayley 度量将产生双曲几何与二重椭圆几何. 当二次曲面是实椭球面或实椭球抛物面,或实双叶双曲面时,便得到 Lobatchevsky 的度量几何;而当二次曲面是虚的时,便得到 Riemann 非 Euclid 几何(正的常曲率). 如果绝对形是球面虚圆,其齐次坐标方程为 $x^2+y^2+z^2=0$, $t=0$,则得出普通的 Euclid 度量几何. 于是度量几何成为射影几何的特例.

我们用二维几何来领悟 Klein 的思想. 在射影平面内选取一个二次曲线;此二次曲线将为绝对形. 其点坐标方程为

$$F=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j=0, \tag{6}$$

其线坐标方程为

$$G=\sum_{i,j=1}^{3} A^{ij} u_i u_j=0. \tag{7}$$

---

① *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1871, 419 ~ 433 = *Ges. Math. Abh.*, 1,244~253.

② *Math. Ann.*, 4,1871,573~625;又 6,1873, 112 ~ 145 = *Ges. Math. Abh.*, 1,254~305,311~343.

要推导 Lobatchevsky 几何,二次曲线必须是实的,即其平面齐次坐标方程为 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$;对正的常曲率曲面上的 Riemann 几何来说,二次曲线是虚的,例如 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$;对 Euclid 几何,二次曲线退化成两根重合直线,齐次坐标用 $x_3=0$ 表示,并在此轨迹上选取两个虚点,其方程为 $x_1^2+x_2^2=0$,即无穷远圆点,它的齐次坐标为 $(1, i, 0)$ 及 $(1, -i, 0)$. 在各种情况下二次曲线都是实方程.

为了说得具体起见,设二次曲线如图 38.2 所示. 若 P_1 与 P_2 为一直线的两点,此直线与绝对形相遇于两点(实的或虚的). 则距离取作

$$d=c\log(P_1P_2, Q_1Q_2), \tag{8}$$

括号中的量表示四个点的交比,c 是一常量. 此交比可用点的坐标表示. 再者,若有三点 P_1, P_2, P_3 在此直线上,立即可以证明

$$(P_1P_2, Q_1Q_2)\cdot(P_2P_3, Q_1Q_2)=(P_1P_3, Q_1Q_2),$$

故得 $P_1P_2+P_2P_3=P_1P_3$.

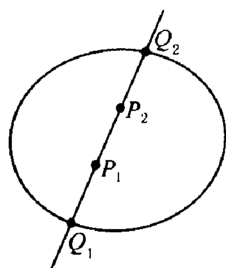


图 38.2

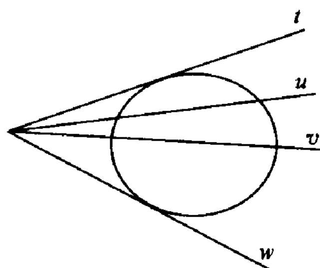


图 38.3

同样,若 u 及 v 是两直线(图 38.3),考虑过此两直线交点到绝对形的切线 t 与 w(切线可以是虚线),则 u 及 v 的夹角定义为

$$\phi=c'\log(uv, tw),$$

其中 c' 是常量,括号中的量表示四直线的交比.

为解析地给出 d 和 ϕ 值的表达式,并证明它们与绝对形的选取有关,设绝对形的方程为如上所给的 F 与 G. 由定义

$$F_{xy} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j.$$

现能证明：若 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 与 $y = (y_1, y_2, y_3)$ 为 P_1 与 P_2 的坐标，则

$$d = c \log \frac{F_{xy} + \sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}}}{F_{xy} - \sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}}}.$$

同样，若 (u_1, u_2, u_3) 与 (v_1, v_2, v_3) 为两直线的坐标，则用 G 能证明

$$\phi = c' \log \frac{G_{uv} + \sqrt{G_{uv}^2 - G_{uu}G_{vv}}}{G_{uv} - \sqrt{G_{uv}^2 - G_{uu}G_{vv}}}.$$

常量 c' 一般取为 $i/2$，使得 ϕ 是实的，且全中心角是 2π.

Klein 应用角与距离的上述对数表达式，并证明如何能从射影几何导出度量几何来. 于是若从射影几何开始，则选取绝对形并应用以上距离与角的表达式，便能得到 Euclid 的、双曲的和椭圆的几何作为其特例. 度量几何的性质则由绝对形的选择而固定. 附带地说一下，Klein 的距离和角度表达式能够证明等于 Cayley 的表达式.

若作射影平面到它本身的射影变换(即线性变换)，它把绝对形变到本身(虽然绝对形的点变到其他点)，则因为在线性变换下交比是不变的，距离和角度将不改变. 使绝对形不变的那些线性变换就是由绝对形所确定的特殊度量几何的刚体运动或者全等变换. 一般的射影变换不能使绝对形不变. 于是射影几何本身在它所允许的变换中是更为一般的.

Klein 对非 Euclid 几何的另一项贡献是这样的研究结果，即他观察到有两种椭圆几何，据他说这结果于 1871 年① 第一次得到，但发表于 1874 年②. 在二重椭圆几何中，两个点并不总是确定

---

① *Math. Ann.*, 4, 1871, 604. 也可参看 *Math. Ann.*, 6, 1873, 125; 及 *Math. Ann.*, 37, 1890, 554～557.

② *Math. Ann.*, 7, 1874, 549～557; 9, 1876, 476～482 = *Ges. Math. Abh.*, 2, 63～77.

唯一的直线.在球面模型中当两个点在直径相对两端时这是很明显的.第二种椭圆几何称为单重椭圆几何,在这种几何中两个点永远确定唯一的一条直线.从微分几何观点来看,正的常曲率曲面上微分型 ds^2(用齐坐标)是

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\{1 + (a^2/4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\}^2}.$$

在两种情况下都是 $a^2 > 0$.然而,在第一类中测地线是有限长度 $2\pi/a$ 的曲线,若半径为 R,则此有限长度为 $2\pi R$,并且是封闭的(回到它们自己).在第二种类型中,测地线长为 π/a 或 πR,并且仍然是封闭的.

有单重椭圆几何性质的一个曲面模型是 Klein 提出的①,这是个半球面,包括其边界.然而,边界上直径相对两端的任两点必须看作是一个点.在半球面上的大圆弧是"直线"或是这个几何的测地线,曲面上的普通角是这种几何的角.于是单重椭圆几何(有时称为椭圆几何,那时二重椭圆几何称为球面的几何)也可在正的常曲率空间实现.在这个模型中,至少在三维空间内我们不能把视为等同的这样两点实际连成一点.这种曲面将自交,并且曲面上重合于自交交点处的点将看作是不同的点.

现在我们能看出为什么 Klein 把 Lobatchevsky 几何称作是双曲的,把正的常曲率曲面上的 Riemann 几何称作是椭圆的,把 Euclid 几何称作是抛物的.这种名称来自下述事实:即普通双曲线与无穷远直线相交于两点,而相对应地在双曲几何中每一条直线交绝对形于两个实点.普通椭圆与无穷远直线没有实的公共点,同样在椭圆几何中每条直线与绝对形没有实的公共点.普通抛物线与无穷远直线只有一个实公共点,而在 Euclid 几何中(作为射影几何中的一种几何),每条直线与绝对形只有一个实的公共点.

---

① 参看脚注 p.335 注①的参考文献.

从 Klein 的研究工作中逐渐出现的意义就是,射影几何在逻辑上实在是独立于 Euclid 几何的. 再者,非 Euclid 和 Euclid 几何也可看作射影几何的特例或子几何. 确实,射影几何公理化基础的纯逻辑的或严密的研究工作以及其与子几何的关系还有待后人去做(第 42 章). 但弄清楚了射影几何的基本地位之后,Klein 便铺平了公理化发展的道路,这就能从射影几何出发并由它推出几种度量几何.

4. 模型与相容性问题

早在 19 世纪 70 年代几种基本的非 Euclid 几何,如双曲几何与两种椭圆几何,已经为人引进并大力进行研究. 但为使这些几何成为数学的合法分支,还得回答一个基本问题,即它们是否相容. 如果有人证明在这些几何中矛盾是固有的,则仍可证明 Gauss, Lobatchevsky, Bolyai, Riemann 和 Klein 等人的工作将是毫无意义的.

说实在的,二维二重椭圆几何相容性的证明是现成有的,可能 Riemann 已经认识到这个事实,虽然他没有明确说出. Beltrami 曾经指出① Riemann 正的常曲率二维几何可在球面上实现. 这个模型使得二维二重椭圆几何相容性的证明成为可能. 这种几何的公理(此时尚未明确提出)与定理完全可以应用到球面上的几何,只要把二重椭圆几何的直线解释为球面上的大圆. 若在二重椭圆几何内有矛盾的定理,则在球面的几何内也必然有矛盾的定理. 现因球是 Euclid 几何的一部分,故若 Euclid 几何是相容的,则二重椭圆几何也必然如此. 对 19 世纪 70 年代的数学家来说,Euclid 几何的相容性几乎是没有问题的,因为除去如 Gauss, Bolyai, Lo-

---

① *Annali di Mat.*, (2), 2, 1863～1869, 232～255 = *Opere Matematiche*, 1, 406～429.

batchevsky 以及 Riemann 等几个人的观点外，Euclid 几何是物质世界必然的几何，而在物质世界上会有矛盾的性质那是不可能想像的. 然而，特别是根据后来的发展，重要的一点是认识到二重椭圆几何相容性的证明依赖于 Euclid 几何的相容性.

证明二重椭圆几何相容性的方法不能用于单重椭圆几何或用于双曲几何. 单重几何的半球面模型不能在三维 Euclid 几何中实现，虽然它能在四维 Euclid 几何中实现. 如果愿意相信后者的相容性，则可以接受单重椭圆几何的相容性. 然而，尽管 n 维几何已经由 Grassmann, Riemann 以及其他一些人考虑过，19 世纪 70 年代的任何数学家是否愿意肯定四维 Euclid 几何的相容性却是很值得怀疑的.

双曲几何的相容性是不能根据任何这种理由来建立的. Beltrami 曾给出过伪球面解释，伪球面是 Euclid 几何空间的一个曲面，但这只作为双曲几何有限区域的模型，所以不能用来建立全部几何的相容性. Lobatchevsky 与 Bolyai 曾考虑过这个问题(第 36 章第 8 节)，但未能解决它. 事实上，Bolyai 虽自豪地发表了他的非 Euclid 几何，但有证据他怀疑它的相容性，因为在他死后发现他的文章中还继续试图证明 Euclid 平行公理.

双曲几何与单重椭圆几何的相容性是用新的模型建立的. 双曲几何模型是 Beltrami① 给出的. 然而，用于这个模型的距离函数则归功于 Klein，并且经常有人认为这个模型也是他给出的. 我们来考虑二维情况.

在 Euclid 平面内(它是射影平面的一部分)选取一个实二次曲线，可取为圆(见图 38.4). 根据双曲几何的这种表示法，几何的点是圆的内点，几何的直线是圆的弦，比如说弦 XY(但不包含 X 与 Y). 若取任一点 Q 不在 XY 上，则能找到任何条数的直线通过

---

① *Annali di Mat.*, 7,1866, 185 ~ 204 = *Opere Mat.*, 1,262～280; *Gior. di Mat.*, 6,1868, 284 ~ 312 = *Opere Mat.*, 1,374～405.

Q 而不与 XY 相交. 这些直线的两条,如 QX 和 QY,把过 Q 的直线分成两类,一些直线与 XY 相交,一些直线则不与 XY 相交. 换言之,双曲几何的平行公理为圆内的直线(弦)与点所满足. 再者两直线 a 与 b 的夹角大小是

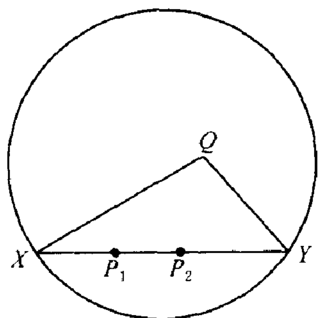


图 38.4

$$\angle(a, b) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\log(ab, mn),$$

其中 m 与 n 是从角顶点到圆所作的共轭虚切线,(ab, mn) 是 a, b, m 与 n 四直线的交比. 常数 $1/2\mathrm{i}$ 保证直角的度量为 $\pi/2$. 两点间的距离由公式(8)定义,即 $d = c\log(PP', XY)$,c 一般取作 $k/2$. 根据这一公式,当 P 或 P' 趋于 X 或 Y 时,距离 PP' 变成无穷大,于是由于这种距离,弦是双曲几何的无限直线.

这样,以距离与角的大小的射影定义,圆内部的点、弦、角与其他图形就满足双曲几何的公理. 于是双曲几何的定理也可应用于圆内部的图形. 在这个模型中,双曲几何的公理和定理实际就是 Euclid 几何中对于一些特殊图形与概念(例如,由双曲几何方式定义的距离)的论断. 因为所说这些公理与定理能应用于当作属于 Euclid 几何的图形与概念,则所有双曲几何的论断都是 Euclid 几何的定理. 于是,如果在双曲几何中有矛盾的话,这个矛盾将是 Euclid 几何之内的矛盾;因而**如果 Euclid 几何是相容的**,则双曲几何也必须是相容的. 这样,双曲几何的相容性归结为 Euclid 几何的相容性.

双曲几何相容的事实蕴涵着 Euclid 平行公理与其他 Euclid 公理无关. 假若不然,即如果 Euclid 平行公理可以从其他公理导出,它也将是双曲几何的一个定理,因为除去平行公理以外,Euclid 几何的其他公理和双曲几何的公理是相同的. 但是这个定理

将与双曲几何的平行公理相矛盾，从而双曲几何将不会相容. 二维单重椭圆几何的相容性也像双曲几何一样可用同样方式证明，因为这种椭圆几何也可以在射影平面中实现，且有距离的射影定义.

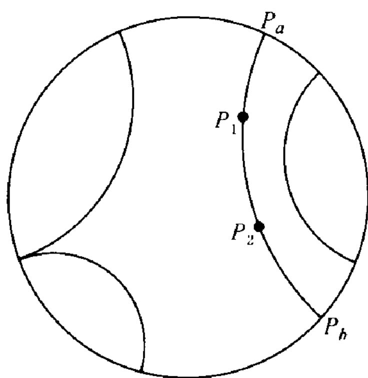


图 38.5

Poincaré① 联系自守函数的研究，独立地给出另外一个模型，也建立了双曲几何的相容性. 双曲平面几何的这个 Poincaré 模型能够表达的一种形式②是把圆取作绝对形(图 38.5). 在绝对形之中几何的直线是与绝对形成正交的圆弧和通过绝对形中心的直线. 任一线段 P_1P_2 的长度由 $\log(P_1P_2,\ P_aP_b)$ 给出，其中 $(P_1P_2,\ P_aP_b) = (P_1P_b/P_2P_b)(P_1P_a/P_2P_a)$，$P_a$ 与 P_b 是过 P_1 与 P_2 的圆弧与绝对形的交点，P_1P_b，P_2P_b 等长度都是弦. 模型中两相交"直线"间的角就是两弧间的通常 Euclid 角. 在绝对形点处相切的圆弧是平行"直线". 因为在这个模型中双曲几何的公理和定理也是 Euclid 几何的特殊定理，以上关于 Beltrami 模型的论证，也可在此应用以建立双曲几何的相容性. 以上类似的高维模型也是正确的.

5. 从变换观点来看待几何

Klein 成功地把各种度量几何归纳为射影几何之后，使他寻求刻画各种几何的特征，不只是基于非度量的和度量的性质以及

---

① *Acta Math.*, 1, 1882, 1～62 = *Œuvres*, 2, 108～168；参看论文 p. 8 及 p. 52.

② 属于 Poincaré 的这种形式是和 *Bull. Soc. Math. de France*, 15, 1887, 203～216 = *Œuvres*, 11, 79～91 中给出的接近. 此处描述的模型似由 Joseph Wellstein (1869—1919) 首先给出的，见 H. Weber 和 J. Wellstein, *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik*, 2, 1905, 39～81.

各种度量间的区分，而是基于更广泛的观点，即基于这些几何与那些早已有的几何所要完成的目标是什么，来刻画它们的特征. 他给出这种刻画是在 1872 年的一次演说："近代几何研究的比较评述"(Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen)①. 这是他被接纳进入埃尔兰根大学教授会时的演讲，这次演说中所表达的观点后来以埃尔兰根纲领之称闻名于世.

Klein 的基本观点是，每种几何都由变换群所刻画，并且每种几何所要做的实际就是在这个变换群下考虑其不变量，再者一个几何的子几何是在原来变换群的子群下的一族不变量. 在此定义下相应于给定变换群的几何的所有定理仍然是子群几何中的定理.

虽然 Klein 在他论文中没有用解析式子来陈述他所讨论的变换群，为了明显起见我们要用一些解析式子. 根据他的几何概念，射影几何(比如说是二维的)是研究从一个平面上的点到另一个平面上的点或者到同一平面上的点(直射变换)的变换群下的不变量. 每个变换形式为

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\
x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

其中设为齐次坐标，a_{ij} 是实数. 系数行列式必须不为零. 非齐次坐标的变换用下式表示：

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},\\
y' &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

同样 a_{ij} 的行列式必须不为零. 射影变换群下的不变量，举例说有：

---

① *Math. Ann.*, 43, 1893, 63～100 = *Ges. Math. Abh.*, 1, 460～497. 英译文见于 *N. Y., Math. Soc. Bull.*, 2, 1893, 215～249.

线性、共线性、交比、调和集和保持为圆锥曲线不变等.

射影群的一个子群是一族仿射变换①. 这个子群定义如下:设在射影平面上固定任一直线 l_∞, l_∞ 上的点称为理想点或无穷远点, l_∞ 称为无穷远直线. 射影平面上其他点与直线称为寻常点,这些都是 Euclid 平面上通常的点. 直射变换仿射群是射影群的子群,使 l_∞ 不变(但该线上的点无需保持不变),仿射几何是在仿射变换下不变的那批性质与关系. 二维齐次坐标的仿射变换,其代数表示为以上的方程(9),但在其中 $a_{31} = a_{32} = 0$,并有相同的行列式条件. 非齐次坐标的仿射变换表示为

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

在仿射变换下直线变到直线,平行直线变到平行线. 然而,长度与角的大小要改变. 仿射几何由 Euler 首先注意到而后由 Möbius 在其《重心坐标计算》一书中指出. 它在形变力学的研究中有用.

任何度量几何群,除了上面行列式的值必须是 +1 或 −1 外,和仿射群相同. 第一个度量几何是 Euclid 几何. 要定义这种几何群,我们从 l_∞ 开始,并假设在 l_∞ 上有固定的对合变换. 我们要求这个对合变换没有实的二重点,而以∞处的圆点作为(虚的)二重点. 现考虑所有那样的射影变换,它们不仅使 l_∞ 不变而且把对合的任何点变到对合的对应点,此即蕴涵每个虚圆点变到自身. Euclid 群的这些变换,代数地表达成非齐次(二维)坐标为

$$x' = \rho(x\cos\theta - y\sin\theta + \alpha), \quad y' = \rho(x\sin\theta + y\cos\theta + \beta), \quad \rho = \pm 1.$$

不变的是长度、角的大小、任何图形的大小与形状.

用这种分类法的术语来讲,Euclid 几何就是在这类变换下的一组不变量. 这类变换是:旋转、平移和反射. 要得到关于相似形的不变量,我们引进仿射群的子群,名为抛物度量群. 这个群定义为

---

① Klein 没有找出这个子群.

一族射影变换,它使得 l_∞ 上的对合不变,这就意味着每一对相应的点变到相应的另一对点. 非齐次坐标的抛物度量群的变换具有形式

$$x' = ax - by + c,$$
$$y' = bex + aey + d,$$

其中 $a^2 + b^2 \neq 0$,且 $e^2 = 1$. 这些变换保持角的大小不变.

要刻画双曲度量几何,我们再回到射影几何,在射影平面上考虑一个任意的、实的、非退化的二次曲线(绝对形). 射影群的子群使这个二次曲线不变的(但不必要求逐点不变)叫做双曲度量群,相应的几何叫做双曲度量几何. 其中的不变量是与迭合有关的那些量.

单重椭圆几何是一种几何,对应于射影变换的子群,使得射影平面上一个确定的虚椭圆(绝对形)不变. 椭圆几何平面是实射影平面,且其不变量是与迭合有关的那些量.

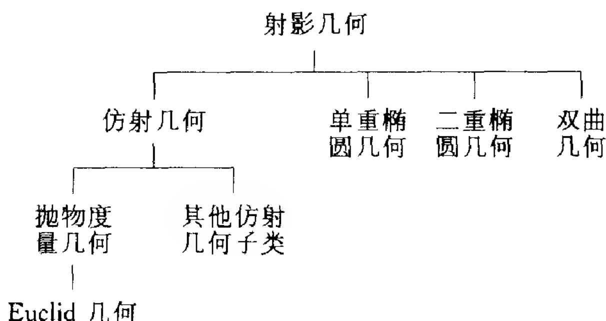
即使二重椭圆几何也能包括在这种变换观点之内,但我们必须从三维变换群出发来刻画二维的这种度量几何. 变换的子群由那些三维射影变换构成:它们把空间的有限部分的一个定球(曲面)S 变换到自身,球面 S 就是二重椭圆几何的"平面". 同样,不变量是与叠合有关的那些量.

在四种度量几何(即 Euclid 几何、双曲几何和两类椭圆几何)之中,相应子群中允许的变换就是通常说的刚体运动,而且只有这些几何允许刚体运动.

Klein 引进若干中间分类,我们将不在此重复,以下的表格表示主要几何间的关系.

Klein 又考虑了比射影几何更一般的几何. 这时(1872)代数几何作为独立的学科渐露头角,他引进三维的变换以刻画这种几何,用非齐次坐标写为

$$x' = \phi(x, y, z),\ y' = \psi(x, y, z),\ z' = \chi(x, y, z).$$



要求函数 ϕ, ψ 与 χ 是有理的与单值的,并能解出 x, y, z 作为 x', y', z'的单值有理函数. 这种变换称为 Cremona 变换,在其变换下的不变量是代数几何的主题(第 39 章).

Klein 也提出对一一对应连续变换下具有连续逆变换的不变量进行研究,这是现代叫做同胚的一类变换,在这类变换下不变量的研究是拓扑学的主题(第 50 章). 虽然 Riemann 在他曲面的研究中也曾考虑过今日认为是拓扑学的问题,但提出把拓扑学作为一门重大的几何学科,这在 1872 年是一个大胆的步骤.

在 Klein 时代以后,对 Klein 的分类已经有了增加分类与进一步细分的可能,但不是所有的几何都能纳入 Klein 的分类方案之中. 今日的代数几何和微分几何都不能置于 Klein 的方案之下①. 虽然 Klein 的几何观点不能证明无所不包,但它确能给大部分的几何提供一个系统的分类方法,并提示很多可供研究的问题. 他的几何"定义"指引了几何思想约有 50 年之久. 再者,他强调变换下的不变性,这个观点已超出数学之外而带到力学和一般的数学物理中去了. 变换下不变性的物理问题,或者物理定律的表达方式不依赖于坐标系的问题,在人们注意到 Maxwell 方程经 Lorentz 变换(仿射几何的四维子群)的不变性之后,在物理思想中都变得重要了. 这种思想路线引向狭义相对论.

我们这里仅提一下几何分类的进一步研究, 这些研究至少在

① 在微分几何的情形下,Klein 确曾谈及使 ds^2 表达式不变的变换群. 这导致微分不变量(*Ges. Math. Abh.*, 1, 487).

Helmholtz 和 Sophus Lie(1842—1899)他们那个时代引起很大注意. 他们寻求刻画刚体运动可能的几何. Helmholtz 的基本论文《论几何的一些基础事实》①证明了,若在一个空间内刚体运动是可能的,则在常曲率空间内 ds 的 Riemann 表达式是唯一的可能. Lie 探讨了同一问题,使用叫做连续变换群的理论(这在他研究常微分方程时已引进),他刻画了各种空间,在其中刚体运动是可能的,用的是这些空间所能允许的各类变换群②.

6. 非 Euclid 几何的现实

在 Klein 和 Lie 的研究工作之后,对经典综合非 Euclid 几何和射影几何的兴趣衰退了. 部分是因为这些结构的要点被变换观点显露得十分清楚. 就为了寻找更多的定理而言,数学家感到矿藏已经枯竭. 基础的严密化尚有待完成,而这是在 1880 年后不久几年内一个活跃的领域(第 42 章).

对非 Euclid 几何失去兴趣的另外一个原因是它们似乎缺乏与物质世界的关联. 很奇怪的是这个领域的首创者们,Gauss,Lobatchevsky 和 Bolyai 确曾想到在天文学中随着研究工作的深入,可能证明非 Euclid 几何是可以应用的. 但是在后一时期工作的数学家们无人相信这些基本的非 Euclid 几何必然有物理意义. Cayley,Klein 和 Poincaré,虽然他们考虑过这事,但他们确信我们从不需要改进或放弃 Euclid 几何. Beltrami 的伪球面模型使得非 Euclid 几何在数学(虽不是物理的)意义下是真实的,因为它给 Lobatchevsky 几何以立即可以看出的一个解释,但需把尺子边缘换成测地线作为交换条件. 类似地,Beltrami-Klein 和 Poincaré 模

---

① *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 15, 1868, 193～221 = *Wiss. Abh.*, 2, 618～639.

② *Theorie der Transformationsgruppen*, 3, 437～543, 1893.

型为了弄懂非 Euclid 几何,把直线的、距离的或者角的度量的概念或者三者一起,放在 Euclid 空间里来想象它们,但是在直线的通常解释下或者甚至在其他某种解释下,物质空间能够是非 Euclid 几何的思想是无人问津的.事实上,大多数的数学家把非 Euclid 几何当作逻辑上的珍奇玩艺.

Cayley 是 Euclid 空间的坚定支持者,他只接受那种能用新的距离公式在 Euclid 空间实现的非 Euclid 几何.1883 年他在不列颠科学进步协会的会长就职演说①中说道,非 Euclid 空间是一个先验性的错误思想,而非 Euclid 几何之所以能被人接受,那只是因为它们可以在 Euclid 空间中改变距离函数的结果而得出.他不承认非 Euclid 几何的独立存在性,但认为它们是一类特殊的 Euclid 结构或者是 Euclid 几何中表示射影关系的一种方式.他的观点是

> 按 Playfair 形式叙述的 Euclid 的第 12[第 10]公理,是不需要证明的,但它是我们空间概念的一部分,我们自己经验的物质空间的一部分,即为经验所熟知的空间,但它是所有外界经验作为其基础的那个表象.
>
> Riemann 的观点可以说成是:在理智之中有了更一般的空间概念(事实上是非 Euclid 空间的概念)之后,我们由经验知道,即使不是准确的,至少是高度近似的,空间(经验的物质空间)就是 Euclid 空间.

Klein 认为 Euclid 空间是必然的基本空间,其他的几何只是具有新的距离函数的 Euclid 几何.非 Euclid 几何实际上是从属于 Euclid 几何的.

Poincaré 的判断更灵活些.科学应该永远试用 Euclid 几何,

---

① *Collected Math. Papers*, 11,429~459.

并在必要处改变物理定律，Euclid 空间可能不真实，但它最方便. 一种几何并不能比另一种几何更真实些，只能是更方便些. 人创造几何，于是物理定律便与之适应，使得几何与定律拟合于世界. Poincaré 坚持说①，即使是要证明一个三角形的内角之和应大于 180°，我们最好仍假设 Euclid 几何能描述物质空间并且光线沿曲线前进，因为 Euclid 几何比较简单些. 自然，事实证明他是错的. 科学上认为重要的，不单独是在几何上简单，而是全部科学理论上的简单性. 显然 19 世纪的数学家在什么算是有物理意义的问题上，仍然束缚于他们的传统概念. 相对论的发现迫使对待非 Euclid 几何的态度有激烈的变化.

数学家的错觉以为他们当时所研究的工作是所能想象的最重要的课题，这种情况又可以他们对射影几何的态度作为例子. 我们在本章所考查的工作诚然证明射影几何是许多几何的基础. 然而，它显然不能包括有活力的 Riemann 几何和内容正在增长的代数几何. 然而 Cayley 在 1859 年他的论文中(第 3 节)确认"射影几何是所有的几何，反之亦然"②. Bertrand Russell 在他《几何基础论文集》(*An Essay on the Foundations of Geometry*, 1897)中，也相信射影几何必然是物质空间的任何几何的先验形式. Hermann Hankel，尽管他对历史的注意③，在 1869 年毫不犹豫地说，射影几何是走向所有数学的康庄大道. 已经记录的历史发展的考查清楚地证明数学家们很容易被他们的热情冲昏头脑.

---

① *Bull. Soc. Math. de France*, 15, 1887, 203～216 = *Œuvres*, 11, 79～91. 他又表达这个观点在论文"Les Géométries non-euclidiennes"中，见于 *Revue Générale des Sciences*, 2, 1891, #23. 英译文见 *Nature*, 45, 1892, 404～407. 又可参看他的 *Science and Hypothesis*, 第 3 章，见 *The Foundations of Science*, The Science Press, 1946.

② Cayley 用"画法几何"一词以代替射影几何.

③ *Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten* (最近几世纪来数学的发展), 1869; 第二版, 1884.

参考书目

Beltrami, Eugenio: *Opere matematiche*, Ulrico Hoepli, 1902, Vol. 1.

Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry*, Dover (reprint), 1955, pp. 129～264.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, pp. 68～87.

Klein, Felix: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Julius Springer, 1921～1923, Vols. 1 与 2.

Pasch, Moritz, and Max Dehn: *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2nd ed., Julius Springer, 1926, pp. 185～239.

Pierpont, James: "Non Euclidean Geometry. A Retrospect", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 36, 1930, 66～76.

Russell, Bertrand: *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897), Dover (reprint), 1956.

第 39 章

代 数 几 何

> 在这些日子里，拓扑这个天使和抽象代数这个魔鬼为各自占有每一块数学领域而斗争着.
>
> Hermann Weyl

1. 背　　景

当非 Euclid 几何与 Riemann 几何正在创建的时候，射影几何学家忙于研究它们的主题. 我们已经看到，这两领域由 Cayley 和 Klein 的工作而连接起来了. 在代数方法广泛应用于射影几何以后，寻求几何图形有哪些性质与坐标表示无关，这个问题吸引了人们的注意力，并促成对代数不变量的研究.

几何图形射影性质就是图形在线性变换下不变的那些性质. 当研究这些性质时，数学家们偶尔也考虑高次变换，并寻求在这些变换下曲线和曲面有哪些性质是不变的. 数学家的兴趣不久就从线性变换转到这类变换上来，称它们为双有理变换，因为这些变换的代数表达式是坐标的有理函数，其逆变换也是坐标的有理函数. 数学家之所以集中于研究双有理变换，无疑是由于这样的事实所造成：Riemann 曾用它们来研究 Abel 积分和 Abel 函数，并且事实上如我们以后要讲的，研究曲线的双有理变换的第一个大的步骤就是由 Riemann 的工作所引起的. 这两个主题在 19 世纪的后半叶构成代数几何的内容.

代数几何一语是不适当的，因为原来它所指的是从 Fermat 与 Descartes 时代起所有把代数用于几何的研究工作；在 19 世纪

后半叶把代数不变量和双有理变换的研究称为代数几何,而到 20 世纪它指的是后一领域.

2. 代数不变量理论

我们已经指出,通过坐标表示来确定要表示的与要研究的图形的几何性质,需要识别在坐标变换下保持不变的那些代数表达式.另外看到,用线性变换把一个图形变到另一个的射影变换保持图形的某些性质不变.代数不变量代表这些不变的几何性质.

代数不变量的问题先前产生于数论(第 34 章第 5 节),特别在研究二元二次型

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{1}$$

在 x 与 y 用线性变换 T 变换时是如何变换的,这里的 T 即

$$x = \alpha x' + \beta y',\ y = \gamma x' + \delta y', \tag{2}$$

其中 $\alpha\delta - \beta\gamma = r$. 将 T 应用于 f 得出

$$f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2. \tag{3}$$

在数论中,$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 诸量都是整数,且 $r = 1$. 然而,一般地说 f 的判别式 D 满足关系式

$$D' = r^2 D \tag{4}$$

是正确的.

射影几何的线性变换更一般些,因为二次型和变换的系数不限于整数.代数不变量一词用来把这更一般的线性变换下产生的不变量区别于数论中的模不变量,且就此而言,区别于 Riemann 几何的微分不变量.

讨论代数不变量的历史需要一些定义.单变量的 n 次型

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

在齐次坐标中变成二元型

$$f(x_1, x_2) = a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + \cdots + a_nx_2^n. \tag{5}$$

三个变量的叫三元型;四个变量的叫四元型等等.下面定义适用于 n 个变量的型.

设二元型受到(2)式的变换 T.在 T 下型 $f(x_1, x_2)$ 变换到型

$$F(X_1, X_2) = A_0X_1^n + A_1X_1^{n-1}X_2 + \cdots + A_nX_2^n.$$

F 的系数将与 f 的不同,$F = 0$ 的根将与 $f = 0$ 的根不同.f 的系数的任何函数 I 如果满足关系式

$$I(A_0, A_1, \cdots, A_n) = r^wI(a_0, a_1, \cdots, a_n),$$

就称为 f 的一个不变量.若 $w = 0$,此不变量称为 f 的绝对不变量.不变量的次数是系数的次数且权数是 w.二次型的判别式是一个不变量,如(4)所示.这时次数是 2,权数是 2.任一多项式方程 $f(x) = 0$ 的判别式的意义在于,它等于零就是 $f(x) = 0$ 有等根的条件,或者从几何上讲,$f(x) = 0$ 的轨迹(这是一系列的点)有两个重合点.这个性质显然与坐标系无关.

若两个(或多个)二元型

$$f_1 = a_0x_1^m + \cdots + a_mx_2^m,$$

$$f_2 = b_0x_1^n + \cdots + b_nx_2^n,$$

由 T 变换成

$$F_1 = A_0X_1^m + \cdots + A_mX_2^m,$$

$$F_2 = B_0X_1^n + \cdots + B_nX_2^n,$$

则系数的任何函数 I 如果满足关系式

$$I(A_0, \cdots, A_m, B_0, \cdots, B_n) = r^wI(a_0, \cdots, a_m, b_0, \cdots, b_n), \tag{6}$$

就叫做两个型的联合不变量.例如,线性型 $a_1x_1 + b_1x_2$ 与 $a_2x_1 + b_2x_2$ 以两式的结式 $a_1b_2 - a_2b_1$ 作为联合不变量.从几何上讲,结式等于零意味着两式表示相同的点(齐次坐标).两个二次型

$$f_1 = a_1x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + c_1x_2^2,$$

$$f_2 = a_2x_1^2 + 2b_2x_1x_2 + c_2x_2^2$$

有一个联合不变量

$$D_{12} = a_1c_2 - 2b_1b_2 + a_2c_1,$$

它的等于零表示 f_1 与 f_2 代表调和点偶.

除去单个型与一组型的不变量之外,还有协变量. f 的系数与变量的任何函数 C,若除去 T 的模数(行列式)的乘幂外是 T 下的不变量,则称它为 f 的协变量. 于是,二元型的一个协变量满足关系式

$$C(A_0, A_1, \cdots, A_n, X_1, X_2) = r^w C(a_0, a_1, \cdots, a_n, x_1, x_2).$$

绝对协变量和联合协变量的定义与不变量的定义类似. 协变量中系数的次数叫做它的次数,而其变量的次数叫做它的阶数. 这样,不变量就是零阶的协变量. 然而,有时不变量一词用于狭义的不变量或协变量.

f 的一个协变量代表某一图形,它不仅相关于 f 而且射影相关于 f. 例如两个二元二次型 $f(x_1, x_2)$ 与 $\phi(x_1, x_2)$ 的 Jacobi 行列式,即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

是两个型的权为 1 的联合协变量. 从几何上讲,令 Jacobi 行列式等于零就代表一对点,它与原来 f 与 ϕ 所代表的每一对点都是调和的. 调和性质是射影性质.

Hesse 引进的 Hesse 行列式①

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

是权 2 的协变量,它的几何意义过于复杂,这里限于篇幅,不详细介绍(参看第 35 章第 5 节). Hesse 行列式的概念和它的协变性适

---

① *Jour. für Math.*, 28, 1844, 68 ~ 96 = *Ges. Abh.*, 89~122.

用于 n 元的任何型.

代数不变量的工作由 George Boole(1815—1864)开始于 1841 年,他的结果①是有局限性的. 更值得一提的是 Cayley,他为 Boole 的工作所吸引而研究这个问题,并使 Sylvester 也对此感兴趣. 和他们一起作这研究的还有 George Salmon(1819—1904),他是 1840—1866 年都柏林三一学院的数学教授,后来成为该校的神学教授. 这三人在不变量方面作了如此多的工作,以至 Hermite 在一封信中称他们为不变量三位一体.

1841 年 Cayley 开始发表射影几何在代数方面的数学文章. Boole 1841 年的文章提示给 Cayley 以 n 次齐次函数的不变量的计算法. 他称这些不变量为导数,后又称为超行列式;不变量这个名词来自 Sylvester②. Cayley 利用 Hesse 和 Eisenstein 的行列式思想,建立了得出他"导数"的一套技巧. 后来从 1854—1878 年在《哲学汇刊》上发表了 10 篇关于代数形式的论文③. 代数形式是他用来称 2 个、3 个或多个变量的齐次多项式的名词. Cayley 对不变量的兴趣如此之大,以至使他竟然为不变量而研究不变量. 他也发明了一种处理不变量的符号方法.

就二元四次型特例

$$f = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4$$

说,Cayley 证明 Hesse 行列式 H 同 f 与 H 的 Jacobi 行列式都是协变量,并证明

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2$$

和

$$g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

① *Cambridge Mathematical Journal*, 3, 1841, 1～20 与 3, 1842, 106～119.

② *Coll. Math. Papers*, I, 273.

③ *Coll. Math. Papers*, 2, 4, 6, 7, 10.

都是不变量.对这些结果,Sylvester 和 Salmon 又增加了许多.

另一有贡献的人是 Ferdinand Eisenstein,他更关心的是数论,他早就发现二元三次型①

$$f = ax_1^3 + 3bx_1^2x_2 + 3cx_1x_2^2 + dx_2^3$$

的最简单的二次协变量是它的 Hesse 行列式 H,最简单的不变量是

$$3b^2c^2 + 6abcd - 4b^3d - 4ac^3 - a^2d^2,$$

它是二次 Hesse 行列式,也是 f 的判别式.又 f 和 H 的 Jacobi 行列式是阶数为 3 的另一协变量.后来,Siegfried Heinrich Aronhold(1819—1884)在 1849 年开始研究不变量,写过关于三元三次型不变量的文章②.

不变量理论奠基者所碰到的第一个较大的问题是特殊不变量的发现.这大约是从 1840 到 1870 年的工作方向.我们知道,这类函数能够构造出好多来,因为有些不变量如 Jacobi 行列式与 Hesse 行列式本身也是具有不变量的型,并且因为一些不变量与原来型合在一起成为新的一组型,它们就会有联合不变量.几十个大数学家(包括已经提到过的那几个人),计算过特殊的不变量.

不变量的不断计算引导到不变量理论的较大问题,这是在求得许多特别的或特殊的不变量后引起的;这就是求不变量的完备系.这就意味着对已给数目的变量和次数的一个型,求其最小可能个数的有理整不变量与协变量,使得任何其他的有理整不变量或协变量可以表成这个完备集合的具数值系数的有理整函数.Cayley 证明,Eisenstein 对二元三次式和他自己对二元四次式所求得的不变量与协变量,分别是两种情况下的完备系③.对其他种型的完备系的问题尚待解决.

---

① *Jour. für Math.*, 27,1844,89~106,319~321.

② *Jour. für Math.*, 55,1858,97~191 和 62,1863,281~345.

③ *Phil. Trans.*, 146,1856, 101 ~ 126 = *Coll. Math. Papers*, 2,250~275.

任何给定次数的二元型的基或有限完备系的存在性，首先由 Paul Gordan(1837—1912)证明，他的大半生都致力于这个问题. 他的结果①是：每个二元型 $f(x_1, x_2)$都具有一个以有理整不变量与协变量所组成的有限完备系. Gordan 用了 Clebsch 的定理，故所得结果名为 Clebsch-Gordan 定理. 它的证明冗长而繁难. Gordan 还证明了②二元型的任何有限组有不变量和协变量的一个有限完备系. Gordan 的证明给出如何计算完备系.

在嗣后 20 年间 Gordan 的结果得到各种有限的推广. Gordan 自己给出三元二次型③、三元三次型④，以及一组(含两个或三个)三元二次型⑤的完备系. 对于特殊的三元四次型 $x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$，Gordan 给出了 54 种基本型的完备系⑥.

在 1886 年 Franz Mertens(1840—1927)⑦用归纳法再次证明二元型组的 Gordan 定理. 他假设对任一已知二元型组，定理为真，然后证明当组中有一个型的次数增加 1 时定理必然仍是真的. 他没有明显给出独立不变量和协变量的有限集合，但他证明这个集合是存在的. 最简单的情况是一个线性型，是归纳法的起点，这种型只有本身乘幂作为它的协变量.

Hilbert 在 1885 年完成不变量的博士论文⑧后，在 1888 年⑨又再次证明 Gordan 的定理，即任何已给二元型组都有不变量与协变量的一个有限完备系. 他的证明是 Mertens 证明的修正. 两个证明都比 Gordan 的简单得多. 但 Hilbert 的证明也没有给出求完备系的步骤.

---

① *Jour. für Math.*, 69,1868,323～354.
② *Math. Ann.*, 2,1870,227～280.
③ R. Clebsch 与 F. Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, I,1876, p. 291.
④ *Math. Ann.*, 1,1869,56～89,90～128.
⑤ Clebsch-Lindemann, p. 288.
⑥ *Math. Ann.*, 17,1880,217～233.
⑦ *Jour. für Math.*, 100,1887,223～230.
⑧ *Math. Ann.*, 30,1887, 15 ～ 29 = *Ges. Abh.*, 2, 102～116.
⑨ *Math. Ann.*, 33,1889, 223 ～ 226 = *Ges. Abh.*, 2, 162～164.

在1888年Hilbert宣称能用一个完全新的途径来证明如下的问题而引起数学界的惊奇:次数与变量个数为已给的任何型以及任意多个变量的已给型系,都有独立的有理整不变量与协变量的一个有限完备系①.新途径的基本思想是暂时忘掉不变量而考虑这样的问题:若有限多个变量的有理整式的一个无穷系为已给,问在什么条件下存在有限多个这样的表达式,即一组基,使所有其他的表达式都可表成这组基的线性组合,组合的系数是原有变量的有理整函数.回答是总存在.更明确地说,Hilbert在不变量的结果之前得出的基的定理可叙述如下:代数型就是n个变量的有理齐次整函数,系数在某确定的有理域内(域).给定了n个变量的任何次的无穷多个型的集合,则存在有限多个(基)F_1, F_2, $\cdots$, F_m,使得集合中任一型F都可写成

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_mF_m,$$

其中A_1, A_2, $\cdots$, A_n是n个变量(不一定在无穷系中)的适当的型,其系数与无穷系的系数都在同一域内.

应用这个定理于不变量与协变量,Hilbert的结果是:对于任何一个型或一组型,都存在有限多个有理整不变量与协变量,使得每个其他的有理整不变量与协变量都可表示成这有限集合中不变量或协变量的线性组合.不变量与协变量的这个有限集合是不变量的完备系.

Hilbert的存在性证明比Gordan的基的繁难计算要简单得多,Gordan不由得吭声道:"这不是数学;是神学."然而在他重新考虑这个问题后说:"我终于相信神学也有其优点."事实上,他自己简化了Hilbert的存在性证明②.

在19世纪80年代和90年代不变量理论看来已统一了数学

① *Math. Ann.*, 36,1890, 473～534 = *Ges. Abh.*, 2,199～257 和直到1893年后发表的论文.

② *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1899,240～242.

的很多领域.这个理论是那个时代的"近世代数".Sylvester 在 1864 年说[①]:"正如俗语说,条条大道通罗马,所以至少就我自己情况说,代数上的所有研究迟早都要归宿到近世代数的大厦,在其闪闪发光的大门口铭刻着不变量论这几个字."不久这个理论本身成为研究的目标,而与其来自数论和射影几何的情况无关了.代数不变量的研究者坚持要证明每种类型的代数恒等式,而不管其有无几何意义.Maxwell 当年在剑桥求学时说过,那里有些人总是用 quintics 与 quantics(五次型与代数型)来看整个宇宙的.

另一方面,19 世纪后半叶的物理学家并不注意这个问题.实际上 Tait 有一次提到 Cayley 说:"这样一个杰出的人物把他的才能放在这种完全无用的问题上岂不是遗憾的事吗?"然而这个课题确实直接地或间接地,主要通过微分不变量对物理学产生影响.

尽管在 19 世纪后半叶有很多热心研究不变量理论的人,但就当时对这门学问所怀抱的希望和所追求的目标来说,它已失去其吸引力.数学家说 Hilbert 扼杀了不变量的研究,因为他已处理了所有的问题.Hilbert 确曾在 1893 年写信给 Minkowski 说他不愿再研究这个问题了,又在 1893 年的一篇论文中说,这个理论的最重要的总目标已经达到.然而事实远非如此.Hilbert 的定理没有证明如何计算给定的任何一个或一组型的不变量,因而不能提供个别重要的不变量.探索有几何意义的或有物理意义的特殊不变量仍是很重要的事,甚至对已知次数和已知变量个数的型来作基的计算也可能是一项有价值的工作.

"扼杀"这个 19 世纪意义下不变量理论的,也正是扼杀过许多一度为人所过分热情地追求的其他活动的种种普通因素.数学家是跟着带头人走的.Hilbert 的宣告和他自己放弃这个主题的研究这一事实,对其他人产生很大影响.还有,在许多易于立即得出的

---

① *Phil. Trans.*, 154,1864, 579 ~ 666 = *Coll. Math. Papers*. 2,376~479, p. 380.

结果弄到手之后,重要特殊不变量的计算就变得更加困难了.

不变量的计算并没有随着 Hilbert 的工作而告结束. Emmy Noether(1882—1935), Gordan 的学生,1907 年完成博士论文《三元双二次型的不变量完备系》①. 她还给出三元四次型的协变量型的一个完备系,共 331 个. 1910 年她把 Gordan 的结果推广到 n 个变量②.

代数不变量论以后的历史属于近世抽象代数. Hilbert 的一套方法把模、环和域的抽象理论带到显著地位. 用这种语言 Hilbert 证明了每个模系(n 个变量的多项式类中的一个理想)都有由有限个多项式组成的一个基,或者 n 个变量的多项式域中每个理想都有一个有限基,如若多项式系数域中每个理想都有一个有限基的话. 从 1911 到 1919 年 Emmy Noether 用 Hilbert 的方法和她自己的方法对不同情况的有限基写出许多论文. 在后来 20 世纪的发展中,抽象代数观点占了主导地位. 如 Eduard Study 在他的不变量论的教科书中抱怨说,人们只追求抽象方法而缺乏对特殊问题的关心.

3. 双有理变换概念

在第 35 章我们看到,主要是在 19 世纪 30 年代与 40 年代之间,射影几何的研究工作转向高次曲线. 然而,在这个工作进行得还不甚深入以前,研究的性质有了改变. 射影观点就是齐次坐标线性变换的观点. 二次与高次的变换逐渐起作用,重点转向双有理变换. 在两个非齐次坐标的情形,这个变换具有形式

$$x' = \phi(x, y), \ y' = \psi(x, y),$$

其中 ϕ 与 ψ 是 x, y 的有理函数,并且 x, y 可表为 x' 与 y' 的有理

---

① *Jour. für Math.*, 134,1908,23~90.

② *Jour. für Math.*, 139,1911,118~154.

函数. 齐次坐标 x_1, x_2 与 x_3 的变换式为

$$x_i' = F_i(x_1, x_2, x_3),\ i = 1, 2, 3,$$

其逆变换为

$$x_i = G_i(x_1', x_2', x_3'),\ i = 1, 2, 3,$$

其中 F_i 及 G_i 是各自变量的 n 次齐次多项式. 除了有限多个点可能各对应于一条曲线之外,对应是一对一的.

关于圆的反演,可以作为双有理变换的例子. 从几何上讲,这个变换(图 39.1)把 M 变到 M',或把 M'变到 M,定义它的方程是

$$OM \cdot OM' = r^2,$$

其中 r 是圆的半径. 从代数上讲,若在 O 点建立一个坐标系,则由 Pythagoras 定理导出

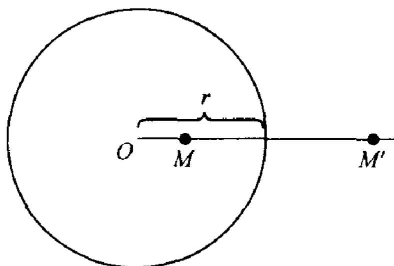


图 39.1

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2},\ y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}, \tag{7}$$

其中 M 是(x, y),M'是(x', y'). 在这个变换下圆变到圆或变到直线,并且可以反过来变. 反演是把全平面变到自身的变换,这样的双有理变换称为 Cremona 变换. 三个(齐次)变量的 Cremona 变换的例子是二次变换

$$x_1' = x_2 x_3,\ x_2' = x_3 x_1,\ x_3' = x_1 x_2, \tag{8}$$

其逆是 $\quad x_1 = x_2' x_3',\ x_2 = x_3' x_1',\ x_3 = x_1' x_2'.$

双有理变换这个术语也用于更广泛的意义,即把一曲线上的点变到另一曲线上的点的变换是双有理的,但在全平面的变换不必是双有理的. 例如:(非齐次坐标)变换

$$X = x^2,\ Y = y \tag{9}$$

在全平面不是一对一的,但是确实把 y 轴右边的任一曲线 C 以一对一的对应方式变到另一曲线.

反演变换是出现的第一个双有理变换. 在一定情况下 Poncelet 在他 1822 年的《论图形的射影性质》中曾用过它, 尔后又被 Plücker, Steiner, Quetelet 和 Ludwig Immanuel Magnus(1790—1861)等人用过. 它曾为 Möbius[①] 详尽地研究过, 其在物理上的应用为 Lord Kelvin[②] 及 Liouville 所认识[③], 后者把它称之为半径互为倒数的变换.

在意大利几个大学当数学教授的 Luigi Cremona(1830—1903), 在 1854 年引进一般的双有理变换(把全平面变到自身)并写过多篇有关的重要论文[④]. Max Noether(1844—1921)(Emmy Noether 的父亲), 证明了这样一个基本结果[⑤]: 一个平面 Cremona 变换可由一系列二次的及线性的变换构成. Jacob Rosanes (1842—1922)独立地发现这个结果[⑥], 还证明了所有平面上的一对一的代数变换必然是 Cremona 变换. Noether 和 Rosanes 的证明由 Guido Castelnuovo(1865—1952)[⑦] 加以完善.

4. 代数几何的函数-理论法

虽然双有理变换的本质是清楚的, 但作为在这种变换下不变量研究的代数几何, 其进展至少在 19 世纪是不能令人满意的. 几种处理方法用过了; 所获得的结果是不相联系的和零碎的; 大多数证明是不完全的; 并且很少获得重要定理. 处理方法的多样性造成用语的显著差异. 主题的目标也是模糊的. 虽然双有理变换下的不

---

① *Theorie der Kreisverwandschaft* (反演论), *Abh. König. Säch. Ges. der Wiss.*, 2, 1855, 529～565 = *Werke*, 2, 243～345.

② *Jour. de Math.*, 10, 1845, 364～367.

③ *Jour. de Math.*, 12, 1847, 265～290.

④ *Gior. di Mat.*, 1, 1863, 305～311 = *Opere*, 1, 54～61; 又 3, 1865, 269～280, 363～376 = *Opere*, 2, 193～218.

⑤ *Math. Ann.*, 3, 1871, 165～227, 特别是 p. 167.

⑥ *Jour. für Math.*, 73, 1871, 97～110.

⑦ *Atti Accad. Torino*, 36, 1901, 861～874.

变性曾是主导课题，但内容包括对曲线、曲面以及高维结构的性质的研究. 由于这些因素，没有出现很多中心结果. 我们给出所得结果的几个样本.

第一种处理方法是 Clebsch 创立的. (Rudolf Friedrich) Alfred Clebsch(1833—1872)从 1850—1854 年在哥尼斯堡跟 Hesse 研究. 他早期工作的兴趣在数学物理方面，从 1858 到 1863 年在 Karlsruhe 任理论力学教授，后又在 Giessin 和格丁根任数学教授. 他研究了 Jacobi 变分法中留下的问题和微分方程理论. 1862 年他出版《弹性学教程》(*Lehrbuch der Elasticität*). 然而他的主要工作是代数不变量和代数几何.

到 1860 年左右为止，Clebsch 研究三次和四次曲线和曲面的射影性质. 他在 1863 年遇到 Paul Gordan 并获悉 Riemann 在复变函数论方面的工作. Clebsch 于是把这个理论用到曲线的理论上去[①]. 这种方法叫做超越法. 虽然 Clebsch 使复变函数与代数曲线发生联系，但他在给 Gustav Roch 的一封信中承认他不能理解 Riemann在 Abel 函数方面的工作，也不懂 Roch 学位论文中的论著.

Clebsch 用以下方式重新解释复变函数论：函数 $f(w, z) = 0$，其中 z 和 w 是复变量，在几何上相应于 z 的一个 Riemann 曲面与一个 w 平面或其一部分，或者也可以说是：相应于这样的一个 Riemann 曲面，它上面每个点附有 z 和 w 的一对数值. 若只考虑 z 和 w 的实部，方程 $f(w, z) = 0$ 便表示实 Descartes 坐标平面的一条曲线. z 与 w 仍可有满足 $f(w, z) = 0$ 的复数值，但不能画图. 实曲线具有复数点这一观点在射影几何的工作中已经熟知. 平面曲线的双有理变换论对应于曲面的双有理变换论. 在上述的新解释下，Riemann 曲面的支点对应于曲线上那样的点，那里一条直线 $x =$ 常量与曲线相交于两个或多个相合的点，即它或者与曲

---

① *Jour. für Math.*, 63,1864,189～243.

线相切，或者过一个尖点. 曲线上的二重点相当于曲面上那样的点，在那里两叶曲面恰好相切而无其他相接点. 曲线上高阶重点也相当于 Riemann 曲面的其他奇点.

在以后的叙述中将采用下面的定义（参看第 23 章第 3 节）：n 次平面曲线的 $k>1$ 阶重点（奇点）P 是这样一个点，通过 P 的普通直线与曲线相交于 $n-k$ 个点. 若在 P 点的 k 条切线是相异的，这个重点是寻常点. 在计算一个 n 次曲线与 m 次曲线的交点数目时，每条曲线上重点的重数必须计算在内. 若交点 P 在曲线 C^n 上是 h 重的，而在 C^m 上是 k 重的，且在 P 点 C^n 的切线与 C^m 的切线不相同，则交点的重数是 hk. 一曲线 C' 称为伴随于曲线 C，若 C 的重点都是寻常点或尖点，且若 C 的每个 k 阶重点是 C' 的一个 $k-1$ 阶重点.

Clebsch① 是第一个用曲线术语来重新叙述第一类 Abel 积分定理（第 27 章第 7 节）的人. Abel 考虑一个固定的有理函数 $R(x, y)$，其中 x 与 y 由任一代数曲线 $f(x, y)=0$ 关联着，使得 y 是 x 的函数. 设（图 39.2）$f=0$ 为另一代数曲线

$$\phi(x, y, a_1, a_2, \cdots, a_k)=0$$

所截，其中 a_i 是 $\phi=0$ 中的系数. 设 $\phi=0$ 与 $f=0$ 的交点是 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_m, y_m).（这些点的个数 m 是 f 与 ϕ 的次数的乘积.）已知 $f=0$ 上一点 (x_0, y_0)，其中 y_0 属于 $f=0$ 的一个分支，则可考虑和式

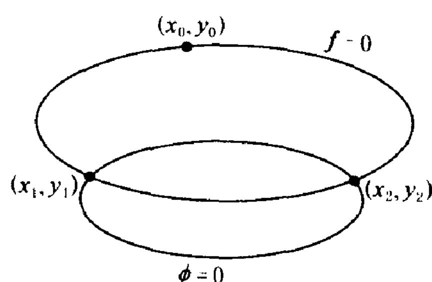


图 39.2

$$I=\sum_{i=1}^{m}\int_{x_0, y_0}^{x_i, y_i} R(x, y)\mathrm{d}x.$$

上限 x_i，y_i 全都在 $\phi=0$ 上，而积分 I 是上限的函数. 于是，这些上

① *Jour. für Math.*, 63, 1864, 189～243.

限有一个特征数 p，它应是其余上限的代数函数，数 p 只与 f 有关. 再者，I 能够表示成这 p 个积分与 x_i, $y_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 的有理函数与对数函数之和. 又，若曲线 $\phi = 0$ 随参量由 a_1 变到 a_k 而改变，则 x_i 也将变化，于是 I 通过 x_i 成为 a_i 的函数. a_i 的函数 I 将是 a_i 的有理函数，或者在最坏的情况下也只包括 a_i 的对数函数.

Clebsch 也把 Riemann 关于 Riemann 曲面上 Abel 积分(即形如 $\int g(x, y) \mathrm{d}x$ 的积分，其中 g 是有理函数且 $f(x, y) = 0$) 的概念用到曲线上. 为说明第一类积分，考虑一个无重点的四次平面曲线 C_4. 这里 $p = 3$ 且有三个处处有限的积分

$$u_1 = \int \frac{x\mathrm{d}x}{f_y},\ u_2 = \int \frac{y\mathrm{d}x}{f_y},\ u_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{f_y}.$$

适用于 C_4 的也可适用于 n 次任意代数曲线 $f(x, y) = 0$. 那时有 p 个积分代替三个处处有限的积分(其中 p 是 $f = 0$ 的亏格)，每个积分有 $2p$ 个周期模数(第 27 章第 8 节). 积分具有形式

$$\int \frac{\phi(x, y)}{\partial f / \partial y} \mathrm{d}x,$$

其中 ϕ 是一个(伴随的)多项式，恰为 $n - 3$ 次，且在 $f = 0$ 的重点处与尖点处为零.

Clebsch 的次一贡献[①]是引进亏格的思想作为对曲线进行分类的概念. 若曲线有 d 个二重点，则亏格 $p = (1/2)(n-1)(n-2) - d$. 以前有曲线的亏数概念(第 23 章第 3 节)，即 n 次曲线可能有的二重点最多个数 $(n-1)(n-2)/2$ 减去确实有的二重点数. Clebsch 证明[②]：只具有寻常重点(切线全不相同)的曲线，亏格(genus)与亏数(deficiency)相等，且亏格在把平面变到自己的双

① *Jour. für Math.*, 64, 1865, 43～65.

② *Jour. für Math.*, 64, 1865, 98～100.

有理变换下是一个不变量[①]. Clebsch 亏格的概念是与 Riemann 对 Riemann 曲面的连通数相关联的. 与亏格为 p 的曲线对应的 Riemann 曲面具有连通数 $2p+1$.

亏格的概念可以用来建立曲线的重要定理. Jacob Lüroth (1844—1910)证明了[②]亏格为 0 的曲线可用双有理变换变到一条直线. Clebsch 证明了一条亏格为 1 的曲线可用双有理变换变到三次曲线.

除去用亏格分类曲线外,Clebsch 还仿照 Riemann 的办法在每个亏格中引进类别. Riemann 考虑过[③]他的曲面的双有理变换,例如,若 $f(w, z)=0$ 是曲面的方程,并设

$$w_1=R_1(w, z), \quad z_1=R_2(w, z)$$

是有理函数,且逆变换是有理函数,则 $f(w, z)$ 可以变换成 $F(w_1, z_1)=0$. 两个代数方程 $F(w, z)=0$(或它们的曲面)仅当它们有相同的 p 值时才可以彼此双有理变换.(曲面的页数不一定保持不变.)Riemann 不要求进一步的证明,它是由直观保证的.

Riemann(在 1857 年的论文中)认为所有能彼此双有理变换的方程(或曲面)属于同一类. 它们有相同的亏格 p. 然而,不同的类别可具有相同的 p 值(因为歧点可以不同). 亏格为 p 的最普遍的类,当 $p>0$ 时用 $3p-3$ 个(复数)常数(方程中的系数)去刻画,当 $p=1$ 时用一个常数,当 $p=0$ 时用零个常数去刻画. 在椭圆函数情况下,$p=1$,于是有一个常量. 对于三角函数,$p=0$,故没有任何任意常量. Riemann 把常量的个数叫做类模数. 常量在双有理变换下是不变量. Clebsch 同样把从一个曲线用一一对应的双有理变换导出的所有曲线放在一类. 在同一类的曲线必然有相同的亏格,但是也可以有不同的类具有相同的亏格.

---

① 若重(奇)点是 r_i 阶的,则曲线 C 的亏格 p 是 $(n-1)(n-2)/2-(1/2)\sum r_i(r_i-1)$,其中和式遍历所有重点. 亏格是更细致的概念.

② *Math. Ann.*, 9, 1876, 163～165.

③ *Jour. für Math.*, 54, 1857, 115～155 = *Werke*, 2nd ed., 88～142.

5. 单值化问题

后来 Clebsch 把注意力转向所谓曲线的单值化问题. 首先说明这个问题的含义. 已给方程

$$w^2+z^2=1, \tag{10}$$

把它表成参量形式

$$z=\sin t,\ w=\cos t, \tag{11}$$

或参量形式

$$z=\frac{2t}{1+t^2},\ w=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{12}$$

这样,即使(10)定义 w 为 z 的多值函数,我们也能把 z 和 w 都表示成 t 的单值函数. 称参量方程(11)或(12)把代数方程(10)单值化.

对亏格 0 的方程 $f(w,z)=0$, Clebsch① 证明每个变量能够表示成单个参量的有理函数. 这些有理函数都是单值化函数. 当 $f=0$ 解释为一条曲线时,则称它为**有理**曲线. 反之,若 $f=0$ 的变量 w 与 z 能够用一个任意参量有理表出,则 $f=0$ 的亏格为 0.

Clebsch 在同一年②证明当 $p=1$ 时 w 与 z 能够表示成参量 ξ 与 η 的有理函数,其中 η^2 是 ξ 的三次或四次多项式. 于是 $f(w,z)=0$,或相应的曲线,称为双有理的,这是 Cayley 所引进的名词③. 它也叫做椭圆的,因为方程 $(dw/dz)^2=\eta^2$ 导致椭圆积分. 我们也说 w 与 z 可表示成为单参量 α 的双周期单值函数,或者表示成为 $\wp(\alpha)$ 的有理函数,这里 $\wp(\alpha)$ 是 Weierstrass 函数. Clebsch 用一个参量的椭圆函数把亏格 1 的曲线单值化,这一成果使他有可能证

---

① *Jour. für Math.*, 64, 1865, 43~65.

② *Jour. für Math.*, 64, 1865, 210~270.

③ *Proc. Lon. Math. Soc.*, 4, 1871~1873, 347~352 = *Coll. Math. Papers*, 8, 181~187.

明这些曲线有关拐点、密切锥、从一点到曲线的切线等值得注意的性质，其中有些性质虽早有证明但却极其困难.

对于亏格为 2 的方程 $f(w, z) = 0$, Alexander von Brill (1842—1935)证明了①变量 w 与 z 能够表示为 ξ 与 η 的有理函数，其中 η^2 现为 ξ 的五次或六次多项式.

这样，亏格为 0, 1, 2 的函数能够单值化. 对亏格大于 2 的函数 $f(w, z) = 0$, 当时的想法是用更一般的函数，即自守函数. 在 1882 年 Klein② 给出一个普遍的单值化定理，但其证明是不完全的. 在 1883 年 Poincaré 发表了他的一般单值化定理③，但他也没有完全的证明. Klein 与 Poincaré 两人继续努力证明这个定理，但在 25 年间没有决定性的成果. 在 1907 年 Poincaré④ 与 Paul Koebe(1882—1945)⑤ 各自独立给出这一单值化定理的证明. Koebe 于是把这个结果推广到许多方面. 现在既已严密地建立了单值化定理，那就有更好的办法来处理代数函数及其积分了.

6. 代数-几何方法

代数几何研究的一个新方向开始于 1865—1870 年间 Clebsch 和 Gordan 的合作. Clebsch 不满足于只指出 Riemann 的研究对曲线的重要意义. 他现在想用曲线的代数理论来建立 Abel 积分理论. 在 1865 年他和 Gordan 合作写出了他们的《Abel 函数论》(*Theorie der Abelschen Funktionen*, 1866). 我们必须注意到，这时 Weierstrass 的更严密的 Abel 积分理论尚无人知道，而 Riemann 的基础——他的存在性证明基于 Dirichlet 原理——不仅使

---

① *Jour. für Math.*, 65, 1866, 269～283.

② *Math. Ann.*, 21, 1883, 141～218 = *Ges. Math. Abh.*, 3, 630～710.

③ *Bull. Soc. Math. de France*, 11, 1883, 112～125 = *Œuvres*, 4, 57～69.

④ *Acta Math.*, 31, 1908, 1～63 = *Œuvres*, 4, 70～139.

⑤ *Math. Ann.*, 67, 1909, 145～224.

人感到奇怪,而且还没有完善建立.而且那时对于代数型(或曲线)的不变量理论,以及对于用射影方法作为处理双有理变换的所谓第一步,都具有相当大的热情.

虽然 Clebsch 和 Gordan 的工作对代数几何作出了贡献,但并没有用纯代数理论来建立 Riemann 的 Abel 积分理论.他们诚然是用代数的与几何的方法,而不同于 Riemann 的函数论方法,但他们也用了函数论的基本结果和 Weierstrass 的函数论方法.另外他们也用了有理函数和交点定理的某些结果作为已给的事实.他们的贡献总的说来是:从一些函数论的结果出发,用代数方法获得了先前用函数论方法所建立的结果.有理变换是代数方法的精髓.

他们给出有理变换下代数曲线亏格 p 的不变性的第一个代数证明,以 $f=0$ 的次数和它的奇点个数作为 p 的定义.于是,利用 p 是 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 的线性无关的第一类积分的个数(而且这些积分处处有限)这一事实,他们证明变换

$$\rho x_i = \psi_i(y_1, y_2, y_3),\ i=1, 2, 3,$$

把第一类积分变到第一类积分,从而 p 是不变量.他们也给出 Abel定理的新证明(应用函数论的思想和方法).

他们的工作是不严密的.特别是他们也按照 Plücker 的传统用任意常量的个数来确定 C_m 和 C_n 的交点个数.对特殊类型的二重点没有进行研究.Clebsch-Gordan 工作对代数函数论的意义在于:用代数形式清楚表达出像 Abel 定理那样的结果,并用这种形式来研究 Abel 积分.他们把 Abel 积分和 Abel 函数理论中的代数部分放在更加突出的地位,特别是在变换本身的基础上建立了变换理论.

Clebsch 和 Gordan 提出很多问题并留下很多漏洞.所提出的问题指出了以纯粹代数理论对代数函数进行代数研究的一个新方向.用代数方法的这个研究工作由 Alexander von Brill 与 Max Noether 从 1871 年起继续进行,他们的关键性文章发表于 1874

年①. Brill和 Max Noether 的理论基于著名的留数定理,这在他们手里代替了 Abel 定理. 他们也用代数方法证明了关于代数函数 $F(w, z)$里常量个数的 Riemann-Roch 定理,这里函数 $F(w, z)$除去在 C_n 的 m 个已给点外不再变为无穷大. 根据这个定理,满足所说条件的最一般的代数函数具有形状

$$F = C_1F_1 + C_2F_2 + \cdots + C_\mu F_\mu + C_{\mu+1},$$

其中
$$\mu = m - p + \tau,$$

τ 是线性无关的函数 ϕ($n-3$ 次) 的个数,它们在 m 个已给点处为零,p 是C_n 的亏格. 例如,若 C_n 是没有二重点的C_4,则 $p = 3$, 且 ϕ 都是直线. 在这种情况下,若

$$m = 1,\text{则 } \tau = 2,\text{且 } \mu = 1-3+2 = 0;$$

$$m = 2,\text{则 } \tau = 1,\text{且 } \mu = 2-3+1 = 0;$$

$$m = 3,\text{则 } \tau = 1 \text{ 或 } 0,\text{且 } \mu = 1 \text{ 或 } 0.$$

当 $\mu = 0$ 时,没有代数函数在已给点处变为无穷大. 当 $m = 3$ 时,有一个且仅有一个这样的函数,假如那三个已知点是在一直线上的话. 若三点确乎在一直线 $v = 0$ 上,则此线交 C_4 于第四个点. 选取一直线 $u = 0$ 通过这个点,则 $F_1 = u/v$.

这个工作取代了 Riemann 对在已知点变为无穷的最一般的代数函数的确定法. 再者 Brill-Noether 的成果胜过射影的观点,因其所处理的由 $f = 0$ 给出的曲线 C_n 上点的几何,它们相互间的关系在一一对应双有理变换下不变. 这样就第一次从代数上证明了曲线交点定理. 计算常量个数这一方法被舍弃了.

代数几何方面的工作由 Noether② 和 Halphen③ 继续,他们详细研究了空间代数曲线. 任一空间曲线 C 能够双有理地射影变换为一个平面曲线C_1. 由 C 所得的所有这种C_1 都有相同的亏格. 所

① "Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie", *Math. Ann.*, 7,1874,269～310.

② *Jour. für Math.*, 93,1882,271～318.

③ *Jour. de l' Ecole Poly.*, Cahier 52,1882, 1 ～ 200 = *Œuvres*, 3,261～455.

以 C 的亏格定义为任一这种 C_1 的亏格,并且 C 的亏格在空间的双有理变换下是不变的.

多年来受到最大注意的课题是平面代数曲线的奇点的研究.直到 1871 年,代数函数的理论,从代数观点考虑的,限于研究有不同的或相离开的二重点(最坏的只是尖点)的那种曲线.对于有更复杂的奇点的曲线,人们相信可以作为具有二重点的曲线的极限情况来处理.但是实际的极限步骤是模糊的,并且缺乏严密性与统一性.奇点研究的顶峰是两个著名的变换定理.第一个定理说,每条不可约的平面代数曲线可用一个 Cremona 变换变到一条曲线,它除了有不同切线的重点外别无奇点.第二个定理断言:每条平面不可约代数曲线用只在曲线上双有理的变换,能变换成另一曲线,它只有具不同切线的二重点.曲线化简到这些简单形式,就使代数几何的一套方法容易得到应用.

然而,这些定理的许多证明,特别是第二个定理的证明,是不完整的或者至少受到数学家(除去给出证明的作者)的指责.第二个定理实际上有两种情况:射影平面中的实曲线以及复函数论意义下的曲线,其中 x 和 y 各自在一个复平面上取值. Noether① 在 1871 年用一系列在全平面上一对一的二次变换证明了第一定理.一般把这证明归功于他,实际上他只是指出一个证法,而是由许多著者加以完善并修改的②. Kronecker 应用分析与代数,建立了一个方法以证明第二定理.他把这个方法在 1858 年口头上告诉了 Riemann 和 Weierstrass,从 1870 年起用之于讲课,并在 1881 年发表了它③.这个方法使用有理变换,借助于所给平面曲线的方程,变换是一对一的,并把奇异情况变到"正则情况";即奇点变成有相异切线的二重点.然而这结果 Kronecker 并没有叙述出来,只

---

① *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1871,267~278.

② 又参看 Noether, *Math. Ann.*, 9,1876,166~182 与 23,1884,311~358.

③ *Jour. für Math.*, 91,1881, 301 ~ 334 = *Werke*, 2,193~236.

是隐含在他的工作里.

这个第二定理的大意是,所有多重点用曲线的双有理变换能够化成二重点,它是由 Halphen 在 1884 年[①]首先明显叙述出来并给予证明的,许多其他证明都曾提出过,但没有一个是被普遍接受的.

7. 算术方法

研究代数曲线的方法,除去超越方法与代数-几何方法之外,还有一个方法,叫算术方法,然而它至少在概念上是纯代数的.这个方法实际上是一批理论,它们在细节上大不相同,但在三类 Abel积分的被积函数的构造与分析上有共同之点.这个方法是由 Kronecker 在其讲义[②]中,由 Weierstrass 在其 1875—1876 年的讲义中,并由 Dedekind 和 Heinrich Weber 在一篇合写的论文[③]中发展出来的.这方法的完整叙述出现于 Kurt Hensel 与 Georg Landsberg 的教科书《单变量代数函数论》(*Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln*, 1902)中.

这个方法的中心思想来自 Kronecker 与 Dedekind 关于代数数的研究工作,并利用代数数域中的整代数数与复函数中在 Riemann 曲面上的代数函数之间的类比.代数数理论是从整系数不可约多项式方程 $f(x)=0$ 出发的.在代数几何上的类比是一个不可约多项式方程 $f(\zeta, z)=0$,其中 ζ 乘幂的系数都是 z 的多项式(比如说是实系数的).在数论中可以考虑由 $f(x)=0$ 的系数和它的一个根生成的域 $R(x)$.在几何中则考虑所有 $R(\zeta, z)$ 形成的

---

① 重出现于 G. Salmon 的 *Higher Plane Curves* 法文版(1884)的一个附录中.又在 E. Picard 的 *Traité d'analyse*, 2,1893,364 ff. = *Œuvres*, 4,1～93.

② *Jour. für Math.*, 91,1881,301～334 与 92,1882, 1 ～ 122 = *Werke*, 2,193～387.

③ "Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen", *Jour. für Math.*, 92,1882, 181 ～ 290 = Dedekind's *Werke*, Ⅰ, 238 ～ 350.

域,它们在 Riemann 曲面上是单值的代数函数. 于是考虑数论中的整代数数. 与此相应的代数函数 $G(\zeta, z)$是整函数,即只在 $z = \infty$ 处变为无穷大的代数函数. 整代数数能分解成实的质因子与单位,这分别相应于 $G(\zeta, z)$之能分解成只在 Riemann 曲面上一点处为零的因子和一些无处为零的因子. Dedekind 在数论中引进理想以讨论可除性,这在几何上的类比是:把 $G(\zeta, z)$的一个在 Riemann 曲面上一点处为零的因子,代之以 $R(\zeta, z)$的域中所有在该点为零的函数集合. Dedekind 与 Weber 用这种算术方法来处理代数函数域,他们得到了经典性结果.

Hilbert 继续用 Dedekind 和 Kronecker 的本质上是代数的或算术的方法进行代数几何的研究①,他的一个主要定理,Hilbert 的零点定理(*Nullstellensatz*),说:任意多个齐次变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的空间内每个任意范围的代数结构(图形),恒能用有限个齐次方程

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0, \cdots,\ F_\mu = 0$$

来表示,使得包含原来那个结构的任意其他结构的方程,都可以表成

$$M_1 F_1 + \cdots + M_\mu F_\mu = 0,$$

其中各个 M 都是任意齐次整式,其次数必须如此选择使方程本身的左边是齐次的.

Hilbert 依 Dedekind 称 $M_i F_i$ 的集合为模(此名词是今日的理想,而模现在稍更一般些). 于是可把 Hilbert 的结果叙述为:R_n 的每一个代数结构确定一个为零的有限模.

8. 曲面的代数几何

几乎从曲线的代数几何工作开始之时起,曲面的理论就有人

① "Über die Theorie der algebraischen Formen", *Math. Ann.*, 36, 1890, 473～534 = *Ges. Abh.*, 2, 199～257.

研究了.这里工作的方向也转向在线性与双有理变换下的不变量.像方程 $f(x, y)=0$ 一样,多项式方程 $f(x, y, z)=0$ 也有双重解释.若 x, y, z 取实数值,则方程代表一个三维空间的二维曲面.然而,若这些变量取复数值,则此方程代表六维空间的四维流形.

研究曲面的代数几何方法类似于研究曲线的方法. Clebsch 用函数论方法并引进①二重积分,相应于曲线论中的 Abel 积分. Clebsch 指出,对于有孤立多重点和寻常多重直线的 m 次代数曲面,某个 $m-4$ 次曲面应该起 $m-3$ 次伴随曲线对于 m 次曲线的作用.已给有理函数 $R(x, y, z)$,其中 x, y 和 z 由 $f(x, y, z)=0$ 相关联,如果要使二重积分

$$\iint R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

在四维曲面的二维域上恒保持有限,则求得其形式为

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{f_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Q 是 $m-4$ 次多项式. $Q=0$ 是一个伴随曲面,通过 $f=0$ 的多重直线,且在 $f=0$ 的每一个 k 阶多重直线处有一个至少是 $k-1$ 阶的多重直线,以及在 f 的每个 q 阶孤立多重点处有一个至少是 $q-2$ 阶的多重点.这种积分叫做第一类二重积分.这类线性无关积分的个数,即是 $Q(x, y, z)$ 中基本常量的个数,叫做 $f=0$ 的几何亏格 p_g.如果曲面没有点的多重直线,则

$$p_g=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}.$$

Max Noether② 与 Hieronymus G. Zeuthen(1839—1920)③证明 p_g 是曲面(不是全空间)在双有理变换下的一个不变式.

---

① *Comp. Rend.*, 67,1868,1238～1239.

② *Math. Ann.*, 2,1870,293～316.

③ *Math. Ann.*, 4,1871,21～49.

直到这里,曲面和曲线论的类比是好的.第一类二重积分类似于第一类 Abel 积分.但现在明显出现第一个差异.必须计算 $m-4$ 次多项式 Q(它在曲面多重点处的性态使积分保持有限)中的基本常量的个数.但只有当多项式次数 N 充分大时,才可用确切公式求得条件的个数.若将 $N=m-4$ 代入此公式,便可得不同于 p_g 的一个数.Cayley[①] 称此新数为曲面的数值(算术的)亏格 p_n.最一般的情况是 $p_n=p_g$.当等式不成立时有 $p_n<p_g$,那时曲面称为非正则的;否则称为正则的.后来 Zeuthen[②] 与 Noether[③] 证明了 p_n 在它不等于 p_g 时的不变性.

Picard[④] 发展了第二类二重积分的理论.这些是以

$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{13}$$

那样的方式变为无穷大的积分,其中 U 和 V 是 x, y 与 z 的有理函数,且 $f(x, y, z)=0$.不相同的第二类积分的个数是有限的,这里所谓不相同的意义是指这些积分的线性组合中没有一个能化成(13)的形式,这个数是曲面 $f=0$ 的双有理不变量.但和曲线情况比就不对了,不相同的第二类 Abel 积分的个数是 $2p$.代数曲面的这个新不变量似乎与数值亏格或几何亏格没有联系.

代数曲面的研究成果远比曲线少得多.一个理由是曲面可能有的奇点要复杂得多.Picard 和 Georges Simart 有一个定理被 Beppo Levi(1875—1928)[⑤] 所证明:任何(实的)代数曲面能够双有理地变换成无奇点的曲面,然而它必须在一个五维的空间内.不过这个定理没有多大用处.

就曲线来说,单独的不变量亏格 p 能够用曲线的特征数或

---

① *Phil. Trans.*, 159,1869,201～229 = *Coll. Math. Papers*, 6,329～358;和 *Math. Ann.*, 3,1871,526～529 = *Coll. Math. Papers*, 8,394～397.

② *Math. Ann.*, 4,1871,21～49.

③ *Math. Ann.*, 8,1875,495～533.

④ *Jour. de Math.*, (5),5,1899,5～54 及以后的文章.

⑤ *Annali di Mat.*, (2),26,1897,219～253.

Riemann 曲面的连通数来定义,就 $f(x, y, z)=0$ 的情形说,还不知道算术上刻画双有理不变量的个数①. 我们不打算进一步描述曲面代数几何的少数有限成果.

代数几何的主题现在包括对高维图形(流形或簇,由一个或多个方程定义)的研究. 除了在这个方向的推广之外,还有另一类推广,即在定义方程中用更一般的系数(这些系数可以是抽象环或域中的元素),并用抽象代数的方法进行研究. 研究代数几何的方法有好几种,又因 20 世纪用了抽象的代数叙述,导致在用语上与研究方法上产生明显的差别,使得一类的工作者很难于了解他类的工作. 20 世纪强调的是抽象代数研究方法. 看来这确实能明确表达定理与证明,从而解决了对旧结果的意义与正确性所引起的许多争论. 然而大多数研究工作似乎对代数的关系比对几何的关系更多一些.

参考书目

Baker, H. F.: "On Some Recent Advances in the Theory of Algebraic Surfaces", *Proc. Lon. Math. Soc.*, (2), 12, 1912～1913, 1～40.

Berzolari, L.: "Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903～1915, Ⅲ C4, 313～455.

Berzolari, L.: "Algebraische Transformationen und Korrespondenzen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903～1915, Ⅲ, 2, 2nd half B, 1781～2218. Useful for results on higher-dimensional figures.

Bliss, G. A.: "The Reduction of Singularities of Plane Curves by Birational Transformations", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 29, 1923, 161～183.

Brill, A., and M. Noether: "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 3, 1892～1893, 107～565.

Castelnuovo, G., and F. Enriques: "Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte

---

① 所涉及的流形是不能刻画的,甚至是不能拓扑地刻画的.

der birationalen Transformationen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903～1915, Ⅲ C6b, 674～768.

Castelnuovo, G., and F. Enriques: "Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques", *Math. Ann.*, 48, 1897, 241～316.

Cayley, A.: *Collected Mathematical Papers*, Johnson Reprint Corp., 1963, Vols. 2, 4, 6, 7, 10, 1891～1896.

Clebsch, R. F. A.: "Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner Wissenschaftlichen Leistungen", *Math. Ann.*, 7, 1874, 1～55. An article by friends of Clebsch.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover(reprint), 1963, pp. 195～230, 278～292.

Cremona, Luigi: *Opere mathematiche*, 3 vols., Ulrico Hoepli, 1914～1917.

Hensel, Kurt, and Georg Landsberg: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln*(1902), Chelsea(reprint), 1965, pp. 694～702 in particular.

Hilbert, David: *Gesammelte Abhandlungen*, Julius Springer, 1933, Vol. 2.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19 *Jahrhundert*, 1, 155～166, 295～319; 2, 2～26, Chelsea(reprint), 1950.

Meyer, Franz W.: "Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie", *Jahres. der Deut. Math. -Verein.*, 1, 1890～1891, 79～292.

National Research Council: *Selected Topics in Algebraic Geometry*, Chelsea(reprint), 1970.

Noether, Emmy: "Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien and zu der Zahlentheorie", *Jahres. der Deut. Math. -Verein.*, 28, 1919, 182～203.

第 40 章

分析中注入严密性

> 如果认为只有在几何证明里或者在感觉的证据里才有必然，那会是一个严重的错误.
>
> A. L. Cauchy

1. 引　言

大约在 1800 年前后，数学家们开始关心分析的庞大分支在概念和证明中的不严密性. 函数概念本身就是不清楚的；使用级数而不考虑它们的收敛和发散已经产生了悖论和不同意见的争论；关于用三角级数来表示函数的论战进一步引起了混乱；当然，导数和积分的基本概念还从来没有恰当地定义过. 所有这些困难最终导致人们对分析的逻辑状况的不满.

Abel 在 1826 年给 Christoffer Hansteen 教授的一封信①中抱怨说："人们在分析中确实发现了惊人的含糊不清之处. 这样一个完全没有计划和体系的分析，竟有那么多人能研究过它，真是奇怪. 最坏的是，从来没有严格地对待过分析. 在高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的方式证明的. 人们到处发现这种从特殊到一般的不可靠的推理方法，而非常奇怪的是这种方法只导致了极少几个所谓的悖论."

一些数学家决心从这种混沌中整理出一个秩序来. 常被人们称为批判运动的领导者们决心把分析只在算术概念的基础上重新

---

① *Œuvres*, 2, 263～265.

建立起来.这个运动的开端正好是非欧几何的创立时期.一个完全不同的集体,除了 Gauss 外卷入了这后一活动,因而要追溯这个活动和把分析奠定在算术基础上的决心之间的任何直接联系是困难的.这种决心的出现大概是由于企图把分析奠基于几何之上的希望——17 世纪的许多数学家断言这种希望是能够实现的——但因在 18 世纪分析发展中日益增长的复杂性而导致破灭.不过 Gauss 早在 1799 年就已表示了他对欧氏几何真理性的怀疑,而且在 1817 年他就认定真理只存在于算术之中.此外,甚至在 Gauss 和其他作者关于非欧几何的早期著作中就注意到欧氏几何发展中的缺陷.因此很可能就是这两个因素造成了对几何的不信任而决心把分析奠基在算术概念之上.这无疑是批判运动的领导者们要着手去做的事.

严密的分析是从 Bolzano, Cauchy, Abel 和 Dirichlet 的工作开始,而由 Weierstrass 进一步发展了的.在这方面,Cauchy 和 Weierstrass 最为著名. Cauchy 关于分析基础的基本著作是他的《代数分析教程》(*Cours d'analyse algébrique*)①,《无穷小分析教程概论》(*Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*)②,以及《微分计算教程》(*Leçons sur le calcul différentiel*)③.实际上,用现代的标准来衡量,Cauchy 著作中的严密性是不够的.他用了诸如"无限趋近"、"想要多小就多小"、"无穷小增量的最后比"以及"一个变量趋于它的极限"之类的话.可是,如果人们把 Lagrange 的《解析函数论》(*Théorie des fonctions analytiques*)④和《函数计算教程》(*Leçons sur le calcul des fonctions*)⑤以及 Lacroix 的有影响的书《微积分计算专著》(*Traité du calcul différentiel et*

---

① 1821, *Œuvres*, (2), Ⅲ.

② 1823, *Œuvres*, (2), Ⅳ, 1~261.

③ 1829, *Œuvres*, (2), Ⅳ, 265~572.

④ 1797; 2nd ed., 1813 = *Œuvres*, 9.

⑤ 1801; 2nd ed., 1806 = *Œuvres*, 10.

du calcul intégral)①同 Cauchy 的《代数分析教程》相比较，就开始看到 18 和 19 世纪的数学之间的明显不同. 特别要指出，Lagrange 纯粹是形式的. 他用符号表达式来进行运算. 在他那里没有极限、连续等根本性的概念.

Cauchy 在他的 1821 年著作的导言中说得非常明白，他企图给分析以严密性. 他指出对一切函数自由地使用那些只有代数函数才有的性质以及使用发散级数都是不合法的. 虽然 Cauchy 的工作只是迈向严密化方向的一步，他自己却相信而且在《概论》(*Résumé*)中说他已经把分析的严密化进行到底了. 至少对初等函数，可以说他确实开始给出了定理的确切证明并作出了有适当限制的断言. Abel 在他 1826 年关于二项式的论文中赞扬 Cauchy 的成就："每一个在数学研究中喜欢严密性的人都应该读这本杰出的著作[《分析教程》]." Cauchy 抛弃了 Euler 的显式表示和 Lagrange 的幂级数而引进了处理函数的新概念.

2. 函数及其性质

18 世纪的数学家大多相信一个函数必须处处都有相同的解析表达式. 在 18 世纪的后半叶，很大程度上作为弦振动问题上争论的一个结果，Euler 和 Lagrange 允许函数在不同的区域上具有不同的表达式，而且在那些有同一表达式的点上用连续这个词，而在那些改变了表达式形式的点上用不连续这个词(虽然在现代意义上讲整个函数可能都是连续的). 当 Euler, d'Alembert 和 Lagrange 不得不重新考虑函数的概念时，他们既没有得到任何广泛被采用的定义，也没有解决什么样的函数可以用三角级数来表示的问题，但是多方面的逐渐发展以及函数的应用迫使数学家接受一个更广的概念.

---

① 3 vols., lst ed., 1797～1800; 2nd ed., 1810～1819.

在Gauss的早期著作中函数指的是一个封闭的(有限解析的)表达式,而当他谈到超几何级数F(α, β, γ, x)作为α, β, γ和x的函数时,他用注解来确定它的意义说:“在这个范围内能认为它是一个函数.”Lagrange在把幂级数看成函数时早就采用了一个更广的概念.在他的《解析力学》(*Mécanique analytique*, 1811—1815)第二版中,他用函数一词来表示几乎是任何类型的对一个或多个变量的依赖关系.甚至在Lacroix 1797年的《专著》中早就引入了一个更广的概念.他在引论中说:“每一个量,若其值依赖于一个或几个别的量,就称它为后者(这个或这些量)的函数,不管人们知不知道用何种必要的运算可以从后者得到前者.”作为一个例子,Lacroix把一个五阶方程的一个根作为该方程系数的函数.

Fourier的工作甚至更广泛地展现了函数究竟是什么的问题.一方面他主张函数不必表示为任何解析表达式.他在他的《热的解析理论》(*The Analytical Theory of Heat*)[①]中说:“通常,函数$f(x)$表示相接的一组值或纵坐标,它们中的每一个都是任意的……我们不假定这些纵坐标服从一个共同的规律;它们以任何方式一个挨着一个……”实际上,他只讨论了在任一有限区间上具有有限个间断点的函数.另一方面,在某种程度上Fourier支持函数必须用一个解析表达式来表示的论点,即使这个表达式是一个Fourier级数.无论如何,Fourier的工作是动摇了18世纪的这样一个信念,即所有函数无论它们怎么坏总都是代数函数的推广.代数函数,甚至初等超越函数,都不再是函数的原型了.由于代数函数的性质不再能搬到一切函数上去,所以人们说的函数、连续、可微性、可积性以及其他性质的真实意义究竟是什么的问题就提出来了.

在许多人从事的分析的积极重建中,实数系被认为是当然没有问题的.没有人企图去分析实数系的结构或逻辑地建立实数系.

---

① 英译本,p. 430, Dover(重印),1955.

显然数学家们认为就所讨论的问题而言，他们是立足于可靠的基础之上的.

Cauchy 在他 1821 年的书中是从定义变量开始的."人们把依次取许多互不相同的值的量叫做变量."至于函数的概念,"当变量之间这样联系起来的时候,即给定了这些变量中一个的值,就可以决定所有其他变量的值的时候,人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的,这时这个量就取名为自变量,而由这自变量表示的其他量就叫做这个自变量的函数."Cauchy 也清楚无穷级数是规定函数的一种方法,但是对函数来说不一定要有解析表达式.

在一篇关于 Fourier 级数的论文《用正弦和余弦级数来表示完全任意的函数》(Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinusreihen)①(这篇文章我们以后还要谈到)中,Dirichlet 给出了(单值)函数的定义,这个定义是现今最常用的,即如果对于给定区间上的每一个 x 的值有唯一的一个 y 的值同它对应,那么 y 就是 x 的一个函数. 接下去他又说,至于在整个区间上 y 是否按照一种或多种规律依赖于 x,或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算来表达,那都是无关紧要的. 事实上,在 1829 年②他给出了 x 的一个函数的例子,它对一切有理数取值 c 而对一切无理数取值 d.

Hankel 指出,至少在 19 世纪的上半世纪,最好的教科书中在讲到函数概念是什么的时候是混乱的. 一些书本质上按 Euler 的意义定义函数;另一些书则要求 y 随 x 依某一规律而变化,但是又没说规律的含义是什么;有些书则采用了 Dirichlet 的定义;还有一些书则不给定义. 但是由他们的定义推出的结论并非逻辑地蕴含在这些定义中.

连续和间断之间特有的区别逐渐显现出来了. 对函数性质的

---

① *Repertorium der Physik*, 1,1837, 152～174 = *Werke*, 1,135～160.

② *Jour. für Math.*, 4,1829, 157～169 = *Werke*, 1,117～132.

仔细研究是由 Bernhard Bolzano(1781—1848)开始的，他是波希米亚的一个神父、哲学家和数学家. Bolzano 做这一工作，是由于他试图为代数基本定理给出一个纯算术证明来替代 Gauss 用几何思想的第一个证明(1799). 对于微积分的建立(除实数理论外)，Bolzano 具有正确的概念，但他的工作有半个世纪未被注意. 他不承认无穷小数和无穷大数的存在，而无穷小和无穷大正是 18 世纪的作者曾经用过的. 在 1817 年的一本以 *Rein analytischer Beweis*(纯粹分析的证明)开始的书名很长的一本书中(参看文献)，Bolzano 给出了连续性的恰当定义，即若在区间内任一 x 处，只要 ω(的绝对值)充分小，就能使差 $f(x+\omega)-f(x)$(的绝对值)任意小，那么就说 $f(x)$ 在该区间上连续. 他证明了多项式是连续的.

Cauchy 也抓住了极限和连续性的概念. 和 Bolzano 一样，极限概念是基于纯算术的考虑. 他在《教程》(1821)中说，"当一个变量逐次所取的值无限趋近一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就多小，这个定值就叫做所有其他值的极限. 例如，一个无理数就是那些在数值上愈来愈接近于它的不同分数的极限."这个例子有点不恰当，因为许多人把这样的极限作为无理数的定义，而如果无理数事先不存在，那么极限就没有意义. Cauchy 在 1823 年和 1829 年的著作中删去了这个例子.

Cauchy 在其 1821 年著作的序言[《教程》第 5 页]中说，当说及函数的连续性时，必须说明无穷小量的主要性质. "当一个变量的数值这样地无限减小，使之收敛到极限 0，那么人们就说这个变量成为无穷小."Cauchy 把这种变量叫做无穷小量. 这样一来，Cauchy 就澄清了 Leibniz 的无穷小概念而且把无穷小量从形而上学的束缚中解放出来. Cauchy 继续说："当变量的数值这样地无限增大，使该变量收敛到极限∞，那么该变量就成为无穷大."但是∞不意味着是一个固定的量，而只是无限变大的某个量.

现在 Cauchy 准备给函数的连续性下定义了. 在《教程》(pp.

34～35)中他说:"设 $f(x)$是变量 x 的一个函数,并设对介于给定两个限[界]之间的 x 的值,这个函数总取一个有限且唯一的值.如果从包含在这两个界之间的一个 x 值开始,给变量 x 以一个无穷小增量 α,函数本身就将得到一个增量,即差 $f(x+\alpha)-f(x)$,这个差同时依赖于新变量 α 和原变量 x 的值.假定了这一点之后,如果对于每一个在这两个限中间的 x 的值,差 $f(x+\alpha)-f(x)$的数值随着 α 的无限减小而无限减小,那么就说,在变量 x 的两限之间,函数 $f(x)$是变量的一个连续函数.换句话说,**如果在这两限之间,变量的一个无穷小增量总产生函数自身的一个无穷小增量,那么函数 $f(x)$在给定限之间对于 x 保持连续.**

"我们也说 $f(x)$在变量 x 的一个确定值的邻域中是 x 的连续函数,只要这函数在 x 的这两个限之间是连续的,而不管界住自变量的值的这两个限是多么靠近."然后 Cauchy 又说,如果函数在包含 x_0 的任何区间上不连续,就说函数在 x_0 处不连续.

Cauchy 在他的《教程》中第 37 页断言,如果一个多变量函数分别对每个变量都是连续的,则它对于所有变量都连续.这是不正确的.

在整个 19 世纪,连续的概念是人们研讨的对象,因而数学家们对它更多地理解了,有时候产生使他们感到吃惊的结果. Darboux 曾给出一个函数的例子,当从 $x=a$ 变到 $x=b$ 时,这个函数取遍两个给定值之间的一切中间值,但却不是连续的.这样,连续函数的一个基本性质是不足以确保函数连续性的①.

Weierstrass 在分析严密化方面的工作改进了 Bolzano, Abel 和 Cauchy 的工作.他也力求避免直观而把分析奠基在算术概念的基础上.但他是在 1841—1856 年做中学教师时做这些工作的,

---

① 考虑当 $x\neq 0$ 时 $y=\sin\frac{1}{x}$,而当 $x=0$ 时 $y=0$.这个函数取遍从 x 的一个负值所对应的函数值到 x 的一个正值所对应的函数值之间的一切值.但是这个函数在 $x=0$ 点不连续.

因此直到 1859 年他在柏林大学任教之前,他的大部分工作没有为人们所知道.

Weierstrass 攻击"一个变量趋于一个极限"的说法,这种说法不幸地使人们想起时间和运动.他把一个变量简单地解释为一个字母,该字母代表它可以取值的集合中的任何一个数.这样运动就消除了.一个连续变量是这样一个变量,如果 x_0 是该变量的值的集合中的任一值而 δ 是任意正数,则一定有变量的其他值在区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 中.

为了消除 Bolzano 和 Cauchy 在定义函数的连续性和极限中用到的短语"变为而且保持小于任意给定的量"的不明确性,Weierstrass 给出了现今所采用的定义:如果给定任何一个正数 ε,都存在一个正数 δ 使得对于区间 $|x-x_0|<\delta$ 内的所有的 x 都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.如果在上述说法中,用 L 代替 $f(x_0)$,则说 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极限 L.如果函数 $f(x)$ 在区间内的每一点 x 处都连续,就说 $f(x)$ 在 x 值的这个区间上连续.

在连续性概念本身正被精细地研究着的那些年代里,为了严密地建立分析而进行艰难的尝试就要求人们证明许多原先已经被直观地接受了的有关连续函数的定理.Bolzano 在他 1817 年的出版物中,企图证明如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为负而在 $x=b$ 处为正,则 $f(x)$ 在 a 和 b 之间有一个零点.他(对固定的 x)考虑函数序列

(1) $$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \cdots,\ F_n(x),\ \cdots$$

而且引入了这样的定理:如果 n 充分大,可使差数 $F_{n+r}-F_n$ 对于无论多大的 r 都小于任何给定的正数,则存在一个固定的量 X,使得这个序列愈来愈靠近 X,而且确实如人们所想要的那样靠近 X.他对量 X 的确定是含糊的,因为他没有一个清楚的实数系的理论,尤其是不清楚作为实数系基础的无理数的理论.然而他已经有了我们现在叫做序列收敛的 Cauchy 条件的思想(见下面).

在证明的过程中，Bolzano 建立了有界实数集的最小上界的存在. 他的确切的陈述是：如果性质 M 不能适用于变量 x 的所有的值，但对于所有小于某个 u 的值性质 M 成立，则总存在一个量 U，它是所有这样的量 u 的最大值. 这个引理的 Bolzano 证明的实质，在于把有界区间分成两部分，而选取包含集合的无穷多个元素的那一部分. 然后他重复这一手续，直到他得到给定实数集的最小上界才停止. Weierstrass 在 19 世纪 60 年代应用 Bolzano 贡献的这一方法证明了现在冠以 Weierstrass-Bolzano 名字的定理. 这个定理证实了对于任何有界无穷点集，存在一个点，使得该点的任何邻域内都有这无穷点集的点.

Cauchy(在他关于多项式的根的存在的证明之一中)已经不加证明地用过定义在闭区间上的连续函数存在最小值. Weierstrass 在他的柏林讲义中证明了：对任何定义在有界闭区域的单变量或多变量的连续函数，存在函数的一个最大值和一个最小值.

在 Georg Cantor 和 Weierstrass 的思想的鼓舞下，Heine 定义了单变量或多变量函数的一致连续性[①]，尔后又证明了在实数系的有界闭区间上的连续函数是一致连续的[②]. Heine 的方法引进且利用了下述定理：设给定了一个闭区间 $[a, b]$，以及位于 $[a, b]$ 中的所有闭区间构成的一个可数无穷集合 Δ，使得 $a \leqslant x \leqslant b$ 中的每一点 x 至少是 Δ 中一个区间的内点.（当 a 是一个区间的左端点而 b 是另一个区间的右端点时，也把端点 a 和 b 看作是内点.）则由 Δ 中有限多个区间组成的一个集合具有同样的性质，即闭区间 $[a, b]$ 的每个点至少是这个有限区间集合中的某一区间的一个内点(a 和 b 可能是端点).

Emile Borel(1871—1956)，20 世纪的第一流法国数学家之一，清楚地认识到能够选出有限个覆盖区间的重要性，且对原来的

---

① *Jour. für Math.*, 71, 1870, 353～365.

② *Jour. für Math.*, 74, 1872, 172～188.

区间集合Δ是可数的情形首先把它叙述为一个独立的定理①. 虽然许多德国和法国的数学家把这个定理叫做 Borel 定理,但由于 Heine 在关于一致连续的证明中利用了这个性质,所以这个定理也叫 Heine-Borel 定理. 正如 Lebesgue 所指出的,这个定理的功绩不在于它的证明(它的证明是不难的),而在于认识到这个定理的重要性,而且把它作为一个清楚的定理确切地陈述出来. 对于任何维数的闭集合,这个定理都适用,而且现在它已成了集合论中的一个基本定理.

把 Heine-Borel 定理推广到可以从一个不可数无穷集合中选出覆盖区间的一个有限集合的情形,通常归功于 Lebesgue,他自称在1898年就已经知道了这个定理而且发表在他的《积分学教程》(*Leçons sur l'intégration*, 1904)中. 但是这个定理是由 Cousin(1867—1933)在1895年首先发表的②.

3. 导 数

D'Alembert 是看出 Newton 在本质上具有正确的导数概念的第一个人. 在《百科全书》(*Encyclopédie*)中 d'Alembert 明确地说,导数必须建立在应变量的差和自变量的差的比的基础上. 这个看法再次系统地阐述了 Newton 的最初和最后比. 由于 d'Alembert 的思想仍然受几何直观的束缚,他没有继续前进. 在后来的50年中他的继承者们仍然不能给出导数的明确定义. 连 Poisson 都相信,小于任何给定的无论多小的正数的非零正数是存在的.

Bolzano 第一个(1817)把 $f(x)$ 的导数定义为当 Δx 经由负值和正值趋于0时,比 $[f(x+\Delta x)-f(x)]/\Delta x$ 无限接近地趋向的

---

① *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (3), 12, 1895, 9~55.

② *Acta Math.*, 19, 1895, 1~61.

量 $f'(x)$. Bolzano 强调 $f'(x)$ 不是两个 0 的商，也不是两个消失了的量的比，而是前面指出的比所趋近的一个数.

Cauchy 在他的《无穷小分析教程概论》[1]中，用和 Bolzano 同样的方式定义导数. 然后他通过把 dx 定义为任一有限量而把 dy 定义为 $f'(x)dx$，从而把导数的概念和 Leibniz 的微分统一起来[2]. 换句话说，他引入两个量，根据定义，它们的比是 $f'(x)$. 微分通过导数就有了意义，但只是一个辅助的概念，在逻辑上没有它也行，但是作为思考或书写的手段是方便的. Cauchy 还指出，整个 18 世纪所用的微分表达式的含义就是通过导数来表示的.

然后他通过平均值定理，即 $\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$，其中 $0<\theta<1$，来阐明 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 和 $f'(x)$ 之间的关系. Lagrange 已经知道这个定理(第 20 章第 7 节). Cauchy 在平均值定理的证明中用到了 $f'(x)$ 在区间 $(x, x+\Delta x)$ 上的连续性.

虽然 Bolzano 和 Cauchy 已经(多少)严密化了连续性和导数的概念，但是 Cauchy 和他那个时代的几乎所有的数学家都相信，而且在后来 50 年中许多教科书都"证明"，连续函数一定是可微的 $\left(\text{当然要除去像 } y=\frac{1}{x} \text{ 中的 } x=0 \text{ 那样的孤立点}\right)$. Bolzano 确实了解到连续性和可微性之间的区别. 在他的《函数论》(*Funktionenlehre*)中(他在 1834 年写这本书，但没写完也没有发表)[3]，他给出了一个在任何点都没有有限导数的连续函数的例子. Bolzano 的例子像他的其他著作一样，没有引起人们的注意[4]. 即使他在 1834 年发表这个例子也可能不会产生什么影响，因为他所

---

① 1823, *Œuvres*, (2), 4, 22.

② Lacroix 在他的《专著》的第一版中早就这样定义 dy 了.

③ *Schriften*, 1, Prague, 1930. 这是由 K. Rychlik 编辑出版的，布拉格，1930.

④ 1922 年 Rychlik 证明了这个函数是到处不可微的. 见 Gerhard Kowalewski, "Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion", *Acta Math.*, 44, 1923, 315～319. 这篇文章包括 Bolzano 函数的一个描述.

举的例子是一条曲线,没有解析表达式,而对那个时期的数学家来说,函数仍然是由解析表达式给出的实体.

最终讲明白连续性和可微性之间的区别的例子,是由 Riemann 在取得大学教授资格的论文(*Habilitations-schrift*)中给出的,这是他为了取得格丁根(Göttingen)的一个无薪大学教师(其报酬直接来自学生的学费)职位(privatdozent)而在1854年写的论文,《用三角级数来表示函数的可表示性》(Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe)①. [这是作为应征讲演而写的几何基础方面的论文(第37章第3节).] Riemann 定义了下面的函数. 令 (x) 表示 x 和最靠近 x 的整数的差,如果 x 在两个整数的中点,则令 $(x)=0$. 于是 $-\frac{1}{2}<(x)<\frac{1}{2}$. $f(x)$ 定义为

$$f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(2x)}{4}+\frac{(3x)}{9}+\cdots$$

这个级数对所有的 x 值收敛. 然而(对于任意的 n)对 $x=\frac{p}{2n}$, 其中 p 是一个和 $2n$ 互质的整数, $f(x)$ 是间断的而且具有一个数值为 $\frac{\pi^2}{8n^2}$ 的跳跃. 在 x 的所有其他数值处, $f(x)$ 是连续的. 而且在每个任意小的区间上 $f(x)$ 有无穷多个间断点. 尽管如此, $f(x)$ 却是可积的(第4节). 而且 $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$ 对一切 x 连续,但在 $f(x)$ 的间断点处没有导数. 这个例子直到1868年才发表,在这之前这个病态函数没有引起多大的注意.

连续性和可微性之间的一个甚至是更为惊人的区别,是由瑞士数学家 Charles Cellérer(1818—1889)指出的. 1860年他给出了一个连续但处处不可微的函数的例子,就是

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^{-n}\sin a^n x,$$

① *Abh. der Ges. der Wiss. zu Gött.*, 13, 1868, 87～132 = *Werke*, 227～264.

其中 a 是一个大的正整数. 但是这个例子直到 1890 年[1]才发表. 最引起人们注意的例子,是由 Weierstrass 给出的. 早在 1861 年他在讲课中已经确认,想要从连续性推出可微性的任何企图都必定失败. 1872 年 7 月 18 日,在柏林科学院的一次讲演中,他给出了处处不可微的连续函数的经典例子[2]. Weierstrass 在 1874 年的一封信中把他的例子告诉了 Du Bois-Reymond,而由后者首先发表出来[3]. Weierstrass 的函数是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

其中 a 是一个奇整数而 b 是一个小于 1 的正的常数,而且 $ab > 1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)$. 这个级数是一致收敛的,因而定义一个连续函数. Weierstrass 的例子推动人们去创造更多的函数,这些函数在一个区间上连续或到处连续,但在一个稠密集或在任何点上都是不可微的[4].

发现连续性并不蕴含可微性,以及函数可以具有各种各样的反常性质,其历史意义是巨大的. 它使数学家们更加不敢信赖直观或者几何的思考了.

4. 积　分

Newton 的著作表明面积可以通过把微分法反过来求得. 当然这仍是本质的方法. Leibniz 关于把面积或体积看作是诸如矩形或柱体微元的"和"的思想[定积分]被忽视了. 在 18 世纪当微元

---

① *Bull. des Sci. Math.*, (2), 14, 1890, 142～160.

② *Werke*, 2, 71～74.

③ *Jour. für Math.*, 79, 1875, 21～37.

④ 其他的例子和参考文献可以在 E. J. Townsend 的 *Functions of Real Variables* (Henry Holt, 1928) 和 E. W. Hobson 的 *The Theory of Functions of a Real Variable* 2 卷第 6 章 (Dover, 1957) 中找到.

“和”的概念多少被采纳时,使用这些概念也是很不严谨的.

Cauchy 强调把积分定义为和的极限来代替把积分看作是微分法的逆运算.这个改变至少有一个主要的理由.我们知道,Fourier 处理过间断函数,而 Fourier 级数的系数公式是

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

这就要求间断函数的积分.Fourier 把积分看成一个和(Leibniz 的观点),因此处理即使是间断的 $f(x)$ 也没有什么困难.但是当 $f(x)$ 是间断函数时,必须考虑积分的解析含义的问题.

Cauchy 在他的《概论》(1823)中对定积分作了最系统的开创性工作,在书中他也指出在人们能够使用定积分、原函数之前,必须确立定积分的存在,以及间接地确立反导数或原函数的存在.他从连续函数开始.

他对连续函数 $f(x)$ 给出了定积分作为和的极限的确切定义①.如果区间 $[x_0, X]$ 为 x 的值 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 所分割,$x_n = X_n$,则积分是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

定义中事先假设 $f(x)$ 在 $[x_0, X]$ 上连续以及最大子区间的长度趋于零,这个定义是算术性的.Cauchy 证明了,无论怎样选取 x_i,积分都存在.但由于他没有一致连续性的概念,他的证明是不严密的.他用 Fourier 建议的记号 $\int_{x_0}^{X} f(x)\mathrm{d}x$ 来代替 Euler 对反微分法经常使用的记号

$$\int f(x)\mathrm{d}x\begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}.$$

接着 Cauchy 定义

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x,$$

① *Résumé*, 81 ~ 84 = *Œuvres*, (2), 4, 122~127.

且证明 $F(x)$在$[x_0, X]$上连续. 置

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}x,$$

并利用积分中值定理,Cauchy 证明了

$$F'(x)=f(x).$$

这就是微积分基本定理. Cauchy 的表示方法是微积分基本定理的第一个证明. 在证明了给定函数 $f(x)$的全体原函数彼此只差一个常数之后,他把不定积分定义为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x+C.$$

他指出,若假定 $f'(x)$连续,则

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

然后 Cauchy 论述了在积分区间的某些值 x 处 $f(x)$变为无穷或积分区间趋于∞时的奇异(反常)积分. 对于 $f(x)$在 $x=c$ 点不连续,而在这点处 $f(x)$ 可以有界也可以无界的情形,Cauchy 把反常积分定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

只要右端的极限存在,当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ 时我们就得到 Cauchy 所谓的主值.

曲线所界区域的面积,曲线的长度,曲面所界区域的体积,以及曲面的面积等概念,已经作为直观的理解而被人们接受了,而这些量能用积分来计算已被看作是微积分重大成就之一. 但是 Cauchy 为了和他的算术化分析的目标相一致,他用计算这些量而建立起来的积分公式来定义这些几何量. 由于积分公式把限制强加给被积函数,所以 Cauchy 已在无意中对他所定义的概念加上了一种限制. 例如由 $y=f(x)$ 表示的曲线的弧长公式是

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x,$$

而在这个公式中事先假定了 $f(x)$ 是可微的. 至于面积、曲线长度和体积的最一般定义是什么的问题,是后来才提出来的(第 42 章第 5 节).

Cauchy 已经对任何连续函数证明了积分的存在. 他也定义了被积函数具有跳跃间断和被积函数为无穷时的积分. 但是随着分析的发展,显然需要去研究更不规则的函数的积分. Riemann 在他 1854 年关于三角级数的一篇论文中提出了可积性这个课题. 他说:考虑使 Fourier 系数的积分公式仍然成立的较宽条件,虽然对物理应用不一定是重要的,但至少对数学是重要的.

Riemann 把积分推广到在区间 $[a, b]$ 上有定义且有界的函数 $f(x)$ 上去. 他把 $[a, b]$ 分割成子区间① $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$,并把 $f(x)$ 在 Δx_i 上的最大值和最小值之差定义为 $f(x)$ 在 Δx_i 上的振幅. 然后他证明了,当最大的 Δx_i 趋于 0 时,和式

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(其中 ξ_i 是 Δx_i 中 x 的任一值)趋于一个唯一的极限(积分存在)的一个必要充分条件是:区间 Δx_i(在其中 $f(x)$ 的振幅大于任给的数 λ)的总长度必须随着各区间长度的趋于零而趋于零.

然后 Riemann 指出,关于振幅的这一条件使他可以用具有孤立间断点的函数以及具有到处稠密的间断点的函数来替代连续函数. 事实上,他所给出的在每个任意小区间上有无穷多个间断点的可积函数的例子(第 3 节),是企图说明他的积分概念的一般性. 这样,Riemann 就在积分的定义中去掉了连续和分段连续的要求.

Riemann 在他 1854 年的论文中给出了在区间 $[a, b]$ 上有界函数是可积的另一个必要充分条件,但是没有进一步的说明. 实际上相当于首先建立现在所谓的上和与下和

---

① 为简单起见,我们用 Δx_i 表示子区间及其长度.

$$S = M_1 \Delta x_1 + \cdots + M_n \Delta x_n,$$
$$s = m_1 \Delta x_1 + \cdots + m_n \Delta x_n,$$

这里，m_i 和 M_i 是 $f(x)$在 Δx_i 上的最小值和最大值. 然后令 $D_i = M_i - m_i$，Riemann 指出，当且仅当对于区间$[a, b]$上 Δx_i 的一切选法都有

$$\lim_{\max \Delta x \to 0} \{D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \cdots + D_n \Delta x_n\} = 0$$

时，$f(x)$在$[a, b]$上的积分才存在. Darboux 把 Riemann 的说法阐述得更加完全，并且证明了这个条件是必要充分的①. S 有许多值，每一个值与把$[a, b]$分为 Δx_i 的分划对应. 类似地 s 也有许多值. 每个 S 叫上和而每个 s 叫下和. 令 J 是 S 的下确界，而令 I 是 s 的上确界. 就得到 $I \leqslant J$. 于是 Darboux 的定理说，当 Δx_i 的数目无限增加，使最大子区间的长度趋于 0 时，和 S 与 s 分别趋于 J 与 I. 如果 $J = I$，则说有界函数在$[a, b]$上是可积的.

Darboux 力图证明，一个有界函数 $f(x)$在$[a, b]$上可积的充要条件是，$f(x)$的间断点组成一个测度为零的集合. 但他所谓间断点集合的测度为 0，意思是指间断点可以包含在有限个区间中，而这些区间的总长度是任意小. 这种关于可积性条件的确切阐述，也由许多人在同一年(1875 年)给了出来. Volterra 对 S 的下确界 J 引入了上积分这个术语和记号 $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$，他还对 s 的上确界引入了下积分这个术语和记号 $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ ②.

Darboux 在 1875 年的论文中还证明了，在推广了的意义下，可积的函数的微积分基本定理成立. Bonnet 不用 $f'(x)$的连续性证明了微分学的中值定理③. Darboux 利用这个证明(这个证明在现在是标准的)证明了：当 f' 仅在 Riemann-Darboux 意义下可

① *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (2), 4, 1875, 57～112.

② *Gior. di Mat.*, 19, 1881, 333～372.

③ 发表在 Serret 的 *Cours de calcul différentiel et intégral*, 1, 1868, 17～19.

积时，

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Darboux 的论点是

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})],$$

其中 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 由中值定理,

$$\sum[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum f'(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

这里 t_i 是(x_{i-1}, x_i)中的某个值. 现在若最大的 Δx_i 或 $x_i - x_{i-1}$趋于零,则上式的右端趋于 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$, 而左端是 $f(b)-f(a)$.

19 世纪 70 和 80 年代最受欢迎的活动之一,就是构造各种具有无穷个间断点而在 Riemann 意义下仍为可积的函数. 在这方面, H. J. S. Smith① 给出了在 Riemann 意义下不可积的函数的第一个例子,但是这个函数的间断点是“稀疏”的. Dirichlet 函数(第 2 节)也是 Riemann 意义下不可积的,不过它是处处不连续的.

积分的概念后来推广到了无界函数,还推广到各种广义积分. 最有意义的推广是在 20 世纪由 Lebesgue 作出的(第 44 章). 然而,就初等微积分而言,到 1875 年时积分概念就已经建立在充分广阔而严密的基础之上了.

二重积分的理论也解决了. 18 世纪已经处理过比较简单的二重积分(第 19 章第 6 节). Cauchy 在 1814 年的论文(第 27 章第 4 节)中指出,如果被积函数在积分区域中不连续,则在计算二重积分 $\iint f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时,积分的次序至关重要. Cauchy 特别指出②,当 f 无界时累次积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\left(\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x\right),\ \int_0^1 \mathrm{d}x\left(\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y\right)$$

① *Proc. Lon. Math. Soc.*, 6, 1875, 140 ~ 153 = *Coll. Papers*, 2, 86~100.

② *Mémoire*(1814 年);特别见 *Œuvres*, (1), 1, p. 394.

不一定是相等的.

Karl J. Thomae(1840—1921)把 Riemann 的积分理论推广到二元函数①. 以后 Thomae 在 1878 年②给出了有界函数的一个简单例子,表明上面第二个累次积分存在但第一个没有意义.

在 Cauchy 和 Thomae 的例子中,二重积分都不存在. 但在 1883 年③ Du Bois-Reymond 证明了,即使二重积分存在,两个累次积分也不一定存在. 在二重积分的情形,最有意义的推广也是由 Lebesgue 作出的.

5. 无穷级数

18 世纪的数学家不加辨别地使用无穷级数. 到 18 世纪末,由于应用无穷级数而得到的一些可疑的或者完全荒谬的结果,促使人们追究对无穷级数进行运算的合法性. 在 1810 年前后, Fourier, Gauss 和 Bolzano 开始确切地处理无穷级数. Bolzano 强调人们必须考虑收敛性,并且特别批评了二项式定理的不严密的证明. Abel 是对无穷级数的老式用法的最公开的批评者.

Fourier 在他 1811 年的论文中,以及在他的《热的解析理论》(1822)中,给出了一个无穷级数收敛的满意的定义,虽然一般说来他是随便使用发散级数的. 在书中(英文版 p. 196)他所讲的收敛的意思是指:当 n 增加时前 n 项的和愈来愈趋近一个固定的值,而且同这个值的差变得小于任何给定的量. 而且他认识到,只能在 x 值的一个区间中得到函数级数的收敛性. 他还强调指出收敛的必要条件是通项的值趋于零. 但是级数 $1-1+\cdots$ 仍然愚弄了他,他以为这个级数的和是 $\frac{1}{2}$.

---

① *Zeit. für Math. und Phys.*, 21,1876,224～227.

② *Zeit. für Math. und Phys.*, 23,1878,67～68.

③ *Jour. für Math.*, 94, 1883, 273～290.

对收敛性的第一个重要而极其严密的研究是由 Gauss 在他 1812 年的论文《无穷级数的一般研究》(Disquisifiones Generales Circa Seriem Infinitam)①中给出的,在那篇文章中他研究了超几何级数 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. 在 Gauss 的大多数著作中,如果级数从某一项往后的项减小到零,他就把这个级数叫做收敛的. 但在 1812 年的论文中,他注意到这不是一个正确的概念. 因为对 α, β 和 γ 的不同的选取,超几何级数可以代表许多函数,所以对超几何级数提出一个确切的收敛判别准则看来是 Gauss 的愿望,判别准则是很费劲地得到了,但是只解决了原来想到的级数的收敛性问题. Gauss 证明了对实的和复的 x,如果 $|x|<1$, 则超几何级数收敛,而如果 $|x|>1$ 则发散. 对 $x=1$, 级数当且仅当 $\alpha+\beta<\gamma$ 时收敛,而对 $x=-1$, 级数当且仅当 $\alpha+\beta<\gamma+1$ 时收敛. 论文中异乎寻常的严密性使那时的数学家们丧失了兴趣. 此外,Gauss 只关心特殊的级数而没有着手处理级数收敛的一般原则.

虽然 Gauss 作为第一个认识到需要把级数的使用限制在它们的收敛区域内而被经常提到,但他回避任何决定性的表态. 他是如此专心于用数值计算去解决具体问题以至于他使用了 Γ 函数的 Stirling 发散展开. 当他在 1812 年决定研究超几何级数的收敛性时,他说②,他这样做是为了使那些喜欢古代几何学家严密性的人们高兴,但他没有表明他自己在这方面的立场. 在他的论文中③,他利用了 $\log(2-2\cos x)$ 展为 x 的倍数的余弦的展开式,可是没有证明这个级数的收敛性,而且按当时可用的技巧而言,也许不可能有证明. Gauss 在他的天文学和测地学工作中,和 18 世纪的人一样,沿旧习使用了无穷级数的有限多个项而略去其余项. 当他看出后面的项在数值上是小的时候他就停止取项,当然他没有

---

① *Comm. Soc. Gott.*, 2, 1813 = *Werke*, 3,125~162 和 207~229.

② *Werke*, 3, 129.

③ *Werke*, 3, 156.

估计误差.

Poisson 也采取了奇特的立场. 他拒绝发散级数[①], 甚至给出了用发散级数作计算怎样会导致错误的例子. 尽管如此, 当他把一个任意函数表为三角级数和球函数级数时, 他还是广泛地使用了发散级数.

Bolzano 在他 1817 年的出版物中已经对序列收敛的条件有了正确的概念, 现在把这个条件归功于 Cauchy. Bolzano 也已有了关于级数收敛的清楚而正确的概念. 但正如我们早先指出的那样, 他的工作没有广泛为人所知.

Cauchy 关于级数收敛性的工作是这一课题的第一个具有广泛意义的论述. 他在《分析教程》中说:"令

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

是[我们所研究的无穷级数]前 n 项的和, n 表示自然数. 如果对于不断增加的 n 的值, 和 s_n 无限趋近某一极限 s, 则级数叫做**收敛的**, 而这个极限值叫做**该级数的和**[②]. 反之, 如果当 n 无限增加时, s_n 不趋于一个固定的极限, 该级数就叫做**发散的**, 而且级数没有和."

在定义了收敛和发散以后, Cauchy 叙述了(《教程》, p. 125) Cauchy 收敛判别准则, 即序列 $\{S_n\}$ 收敛到一个极限 S, 当且仅当 $S_{n+r} - S_n$ 的绝对值对于一切 r 和充分大的 n 都小于任何指定的量. Cauchy 证明了这个条件是必要的, 但是仅仅指出, 如果条件成立, 序列的收敛性就有了保证. 要作出证明, 他还缺少有关实数性质的知识.

Cauchy 然后叙述并证明了正项级数收敛的一些特殊的判别法. 他指出 u_n 必须趋于零. 另一个判别法(《教程》, p. 132～135)需

---

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 19, 1823, 404～509.

② 序列的极限的正确概念是由 Wallis 在 1655 年给出的(*Opera*, 1695, 1, 382), 但是未被人们采用.

要人们求出当 n 变为无穷时表达式 $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ 趋向的一个或几个极限,用 k 来记这些极限中的最大者. 如果 $k<1$ 则级数收敛,如果 $k>1$ 则级数发散. 他也给出了使用 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 的比值判别法. 如果这个极限小于 1 则级数收敛,如果极限大于 1 则级数发散. 如果比值为 1,还给出了比值为 1 时的特殊判别法. 接着是比较判别法和对数判别法. 他证明了两个收敛级数的和 u_n+v_n 收敛到各自极限的和,对于乘积也有类似的结果. 对于带有负项的级数,Cauchy 证明了由项的绝对值构成的级数收敛时原级数收敛,然后他推导了交错级数的 Leibniz 判别法.

Cauchy 也研究了级数

$$\sum u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$$

的和,其中所有的项都是单值的连续实函数. 这里用常数项级数的定理来确定收敛区间. 他也研究了项是复变函数的级数.

Lagrange 是第一个叙述带余项的 Taylor 定理的人,但 Cauchy 在他的 1823 年和 1829 年的教科书中指出了重要的一点:如果余项趋于零,则 Taylor 级数收敛到导出该级数的函数. 他给出了 Taylor 级数不收敛到导出该级数的一个函数的例子 $e^{-x^2}+e^{-1/x^2}$. 在他的 1823 年的教科书中,他给出了一个例子,函数 e^{-1/x^2} 在 $x=0$ 有各阶导数,但在 $x=0$ 邻近没有 Taylor 展开. 这里他用一个例子反驳了 Lagrange 在他的《函数论》(*Théorie des fonctions*)(第 V 章,第 30 条)中的断言:如果 $f(x)$ 在 x_0 有各阶导数,则 $f(x)$ 可表为在 x_0 附近的 x 处收敛到 $f(x)$ 的 Taylor 级数. Cauchy 还在 Taylor 公式中给出了另一形式的余项公式①.

在这里,Cauchy 在严密性方面有些失检. 在他的《分析教程》(*Cours d'analyse*)(pp. 131 ~ 132)中他说:如果当 $F(x)=$

---

① *Exercices de mathématiques*, 1,1826, 5 = *Œuvres*, (2),6,38~42.

$\sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ 时级数收敛且 $u_n(x)$ 都连续，则 $f(x)$ 是连续的. 在他的《简明教程》(*Résumé des le ons*)[1]中，他说，如果 $u_n(x)$ 都连续且级数收敛，则对级数可以逐项积分；即

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}x = \sum_1^{\infty}\int_a^b u_n\,\mathrm{d}x.$$

他忽视了一致收敛性的要求. 对于连续函数他还断言[2]

$$\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,\ u)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}x.$$

Cauchy 的著作鼓舞了 Abel. Abel 在 1826 年从巴黎写给他原先的老师 Holmboë 的信[3]中说，Cauchy"是当今懂得应该怎样对待数学的人."在那一年[4] Abel 研究了 m 和复的 x 的二项级数

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

的收敛区域. 他对以前没有人去研究这个最重要的级数的收敛性表示惊讶. 他首先证明级数

$$f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots$$

(其中 v_i 是常数而 α 是正实数)如果对 α 的一个值 δ 收敛，则级数对 α 的每个较小的值也收敛，而且当 α 小于等于 δ 时，对于趋于 0 的 β，$f(\alpha-\beta)$ 趋于 $f(\alpha)$. 最后一部分说一个对于变量 α 小于等于 δ 收敛的幂级数是变量的连续函数.

Abel 在 1826 年的同一篇论文中[5]改正了 Cauchy 关于连续函数的一个收敛级数的和一定连续的错误. 他给出了例子

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}\cdots, \tag{2}$$

---

① 1823, *Œuvres*, (2), 4, 237.

② *Exercices de mathématiques*, 2, 1827 = *Œuvres*, (2), 7, 160.

③ *Œuvres*, 2, 259.

④ *Jour. für Math.*, 1, 1826, 311 ～ 339 = *Œuvres*, 1, 219～250.

⑤ *Œuvres*, 1, 224.

虽然(2)的每一项都是连续的,但是,当 $x=(2n+1)\pi$ 而 n 是整数时,(2)是不连续的①.然后他用一致收敛的思想正确地证明了连续函数的一个一致收敛级数的和在收敛区域内部是连续的. Abel没有从中把一致收敛的性质抽调出来.

级数 $\sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ 的一致收敛概念要求对任意给定的 ε,存在 N,使得对所有的 $n>N$,对某个区间上的一切 x 都有 $\left|S(x)-\sum_{1}^{n} u_n(x)\right|<\varepsilon$. $S(x)$ 当然就是级数的和.这个概念本身为一个第一流的数学物理学家 Stokes 清楚地认识②,而且也为 Philipp L. Seidel(1821—1896)独立地认识③.两个人都没有给出确切的系统阐述.倒不如说他们两人指出了,如果连续函数的一个级数的和在 $x=x_0$ 点不连续,则在 x_0 附近有一些 x 值,使得级数在这些点上任意慢地收敛.他们也没有指出需要一致收敛性去验证级数逐项积分的合法性.事实上,Stokes 接受了 Cauchy 的逐项积分的用法④. Cauchy 最后还是认识到,为了断言连续函数的级数的和一定连续,需要一致收敛性⑤.但即使是 Cauchy,在当时也未看出他自己在使用级数的逐项积分中的错误.

实际上 Weierstrass⑥ 早在1842年就有了一致收敛的概念.他无意中重复了 Cauchy 关于一阶常微分方程的幂级数解的存在定理.在此定理中,他断言级数一致收敛.因而构成复变量的解析函数.大约在同一时期,Weierstrass 利用一致收敛的概念,给出了级数逐项积分和

---

① 级数(2)是 $\frac{x}{2}$ 在区间 $-\pi<x<\pi$ 中的 Fourier 展开.因此这个级数表示周期函数,在每个 2π 长的区间中是 $\frac{x}{2}$.于是当 x 从左边趋于 $(2n+1)\pi$ 时级数收敛到 $\frac{\pi}{2}$,而当 x 从右边趋于 $(2n+1)\pi$ 时级数收敛到 $-\frac{\pi}{2}$.

② *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 8_5,1848,533～583 = *Math. and Phys. Papers*, 1,236～313.

③ *Abh. der Bayer. Akad. der Wiss.*, 1847/1849,379～394.

④ *Papers*, 1,242,255,268 和 283.

⑤ *Comp. Rend.*, 36,1853, 454～459 = *Œuvres*, (1),12,30～36.

⑥ *Werke*, 1,67～85.

在积分号下求微分的条件.

通过 Weierstrass 周围的学生,人们知道了一致收敛的重要性. Heine 在一篇关于三角级数的论文中强调了这个概念①. Heine 也许已经通过 Georg Cantor 听到了这个思想,Cantor 曾在柏林学习,然后在 1867 年去 Halle,在那里他是一个数学教授.

Weierstrass 在当中学教师期间,还发现在实轴的一个闭区间上连续的任何函数可以表为这个区间上的绝对一致收敛的多项式级数. Weierstrass 的结论,对多变量函数也对. 这个结果②引起人们极大的兴趣,在 19 世纪的最后四分之一年代中,建立了这个结果的许多推广,推广到用一个多项式级数或用一个有理函数级数来表示复变函数.

人们曾假定级数的项是可以任意地重新排列的. 1837 年 Dirichlet 在一篇论文③中证明了,对于一个绝对收敛的级数,人们可以组合或重新排列它的项而不改变级数的和. 他还给出例子说明,任何一个条件收敛的级数的项可以重新排列而使级数的和不相同. Riemann 在 1854 年写的一篇论文(见下文)中证明了,适当重排级数的项可以使级数的和等于任何给定的数值. 从 1830 年代直到 19 世纪末,许多第一流的数学家推导了无穷级数收敛的很多判别法则.

6. Fourier 级数

我们知道,Fourier 的工作表明,广泛的一类函数可以用三角级数来表示. 找出函数具有收敛 Fourier 级数的确切条件的问题尚未解决.

---

① *Jour. für Math.*, 71,1870,353~365.

② *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1885,633~639, 789 ~ 905 = *Werke*, 3,1~37.

③ *Abh. Konig. Akad. der Wiss.*, *Berlin*,1837, 45 ~ 81 = *Werke*, 1, 313 ~ 342 = *Jour. de Math.*, 4,1839, 393~422.

Cauchy 和 Poisson 的努力没有得到结果.

Dirichlet 在 1822 年到 1825 年期间在巴黎会见 Fourier 之后,对 Fourier 级数产生了兴趣. 在一篇基本的论文《关于三角级数的收敛性》(Sur la convergence des séries trigonométriques)中[1] Dirichlet 给出了代表一个给定 $f(x)$的 Fourier 级数是收敛的并且收敛到 $f(x)$的第一组充分条件. Dirichlet 给出的证明,是对 Fourier 在其《热的解析理论》的末尾几节中草拟的证明的改进. 考虑函数 $f(x)$,它或者是以 2π 为周期的,或者是在区间$[-\pi, \pi]$上给定而且在每一个从$[-\pi, \pi]$往左或往右的长为 2π 的区间上定义为周期的. Dirichlet 的条件是:

(a) $f(x)$是单值、有界的.

(b) $f(x)$是分段连续的;即在(闭的)周期内只有有限多个间断点.

(c) $f(x)$是分段单调的;即在一个周期内只有有限多个最大值和最小值.

在基本周期的不同部分 $f(x)$可以有不同的解析表示.

Dirichlet 的证明方法是,直接求 n 项的和并研究当 n 趋于无穷时会出现什么情况. 他证明:对于任给的 x 值,只要 $f(x)$在该 x 处连续,则级数的和就是 $f(x)$,如果 $f(x)$在该 x 处不连续,则级数的和是 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

在 Dirichlet 的证明中,必须仔细讨论当 μ 无限增加时积分

$$\int_0^a f(x)\frac{\sin \mu x}{\sin x}\mathrm{d}x,\ a>0,$$

$$\int_a^b f(x)\frac{\sin \mu x}{\sin x}\mathrm{d}x,\ b>a>0$$

的极限值. 这些积分至今还叫做 Dirichlet 积分.

与此工作相关联,Dirichlet 给出了一个在有理点上取值为 c

---

① *Jour. für Math.*, 4,1829, 157 ~ 169 = *Werke*, 1,117~132.

而在无理点上取值为 d 的函数(第 2 节). 他曾希望推广积分的概念使得更大一类函数仍可表为收敛到该函数的 Fourier 级数,但是刚才提到的特殊函数就打算作为一个不能包括在一类更广积分概念中的例子.

Riemann 有一段短时间曾在柏林在 Dirichlet 的指导下进行研究工作,而且对 Fourier 级数产生了兴趣. 1854 年在格丁根在他为取得大学教授资格而写的论文《试用短文》(*Habilitationsschrift*)中以此为题①,《用三角级数来表示函数》(Über die Darstellbarkeit einer Function durch einer trigonometrische Reihe),文章的目的是要找出函数 $f(x)$ 必须满足的充要条件使在区间 $[-\pi, \pi]$ 中的一点 x 处 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛到 $f(x)$.

Riemann 曾证明了基本定理:如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有界且可积,则 Fourier 系数

$$(3)\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

当 n 趋于无穷时趋于零. 定理还表明有界可积的 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 中的一点处的收敛性只依赖于 $f(x)$ 在该点邻域中的特性. 但是寻求 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛到它自己的必要而又充分的条件的问题依旧没有解决.

Riemann 开辟了另一个研究路子. 他研究三角级数,但不需要根据公式(3)来确定 Fourier 系数. 他从级数

$$(4)\qquad \sum_1^{\infty} a_n \sin nx + \frac{b_0}{2} + \sum_1^{\infty} b_n \cos nx$$

出发并定义

$$A_0 = \frac{1}{2}b_0,\ A_n(x) = a_n \sin nx + b_n \cos nx.$$

于是级数(4)等于

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x).$$

---

① *Abh. der Ges. der Wiss. zu Gött.*, 13, 1868, 87～132 = *Werke*, 227～264.

当然 $f(x)$只对级数收敛的那些 x 值才有一个值. 我们用 Ω 来表示级数本身. Ω 的项对一切 x 或对某个 x 可以趋于零. Riemann 分别讨论了这两种情形.

如果 a_n 和 b_n 趋于零,则 Ω 的项对一切 x 趋于零. 令 $F(x)$是函数

$$F(x) = C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \cdots - \frac{A_n}{n^2} \cdots,$$

它是接连对 Ω 逐项积分两次而得到的. Riemann 证明了 $F(x)$对一切 x 收敛而且关于 x 连续. 这时 $F(x)$本身就能积分. Riemann 证明了关于 $F(x)$的一系列定理,这些定理转而导致使一个形如(4)的级数收敛到一个周期为 2π 的给定函数的必要充分条件. 然后他给出了三角级数(4)(其中当 n 趋于∞时 a_n 和 b_n 仍趋于 0)在 x 的一个特殊值处收敛的充要条件.

其次他考虑了另一情形,即$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 依赖于 x 的情形,并且给出了在 x 的特殊值处级数 Ω 收敛的条件和在特殊值 x 处的收敛判别法.

他还指出,可以积分的 $f(x)$可能没有 Fourier 级数表示. 而且还存在这样的不可积函数,级数 Ω 在任意接近的界限之间的无穷多个 x 值上收敛到这个函数. 最后他指出,即使三角级数的 a_n 和 b_n 当 $n\to\infty$时都不趋于零,但这级数在一个任意小的区间中的无穷多个 x 值上可能收敛.

在 Stokes 和 Seidel 引进了一致收敛的概念之后,Fourier 级数收敛的性质进一步受到人们的注意. 从 Dirichlet 时期以来,人们已经知道,级数纵然收敛,一般也只是条件收敛,并且知道,级数的收敛性依赖于正项和负项出现的情况. Heine 在 1870 年的一篇论文①中指出,有界函数 $f(x)$可以唯一地表示成在$[-\pi, \pi]$上的一个三角级数这一结论,通常采用的证明是不完全的,因为级数可

① *Jour. für Math.*, 71,1870,353～365.

能不一致收敛,因此不能逐项积分.这就使人联想到还可能存在非一致收敛的三角级数,而它又确实表示一个函数.而且,一个连续函数有可能表成 Fourier 级数,而这个级数可以不一致收敛.这些问题引起了一系列新的研究,企图建立用三角级数表示一个函数的唯一性以及研究其系数是否一定是 Fourier 系数. Heine 在前面提到的论文中证明了,满足 Dirichlet 条件的有界函数的 Fourier 级数,在区间$[-\pi, \pi]$中去掉函数间断点的任意小邻域后剩下的部分,是一致收敛的.而在这些邻域中,收敛一定是不一致的.然后 Heine 证明:如果表示一个函数的三角级数具有上述的一致收敛性,那么级数是唯一的.

关于唯一性的第二个结果,等价于下述陈述:如果形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{5}$$

的三角级数是一致收敛的,而且在收敛的地方,即除去一个有限点集 P 外,都是零,则系数全为零,因而当然在整个$[-\pi, \pi]$上级数表示零(函数).

与三角级数和 Fourier 级数的唯一性有关的问题引起了 Cantor 的兴趣,他研究了 Heine 的工作. Cantor 是从寻找函数的三角级数表示的唯一性的判别准则开始他的研究工作的.他证明[①]了,当 $f(x)$用一个对一切 x 都收敛的三角级数表示时,就不存在同一形式的另一级数,它也对每个 x 收敛并且代表同一函数 $f(x)$.在另一篇论文[②]中,他给出了上述结果的一个更好的证明.

他证明的唯一性定理可以重新叙述为:如果对于一切 x,有一个收敛的三角级数表示零,则系数 a_n 和 b_n 都是零.后来,Cantor 在 1871 年的论文中证明了,即使在有限个 x 值上不收敛,这结论仍旧成立.这是 Cantor 论述 x 的例外值集合(set of exceptional

① *Jour. für Math.*, 72, 1870, 139 ~ 142 = *Ges. Abh.*, 80~83.

② *Jour. für Math.*, 73, 1871, 294 ~ 296 = *Ges. Abh.*, 84~86.

values)的一系列论文中的第一篇. 他把唯一性的结果推广到允许例外值是无穷集的情形[1]. 为了描述这种集合,他首先定义,一个点 p 是一个点集 S 的极限点,如果包含 p 点的每一区间都包含 S 的无穷多个点. 然后他引进了点集的导集的概念,它是由原点集的全部极限点构成的. 于是就有第二导集,即导集的导集,等等. 如果一个给定集合的第 n 个导集是一个有限点集,那么就说该给定集合是属于第 n 类的或第 n 阶的(或者说属于第一种的). 关于一个函数在区间$[-\pi, \pi]$上能否有两个不同的三角级数表示,或者零是否可以有非零的 Fourier 表示的问题,Cantor 最终的回答是:如果在该区间上除去第一种点集外(在这些点上级数的性质什么也不知道),对于一切 x,三角级数之和为零,则级数的所有系数必须为零. 在 1872 年的这篇论文中,Cantor 奠定了点集论的基础,我们将在后一章中讨论. 在 19 世纪末和 20 世纪初有许多别的数学家从事于唯一性问题的研究[2].

在 Dirichlet 的研究工作之后的大约 50 年中间,人们都相信在$[-\pi, \pi]$上的任何一个连续函数的 Fourier 级数都收敛到该函数. 但是 Du Bois-Reymond[3] 给出了$(-\pi, \pi)$上的一个连续函数,其 Fourier 级数在一个特定点上并不收敛的例子. 他还选了另一个连续函数,其 Fourier 级数在一个到处稠密的点集上不收敛. 在 1875 年[4]他证明了,如果形如

$$a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

的三角级数在$[-\pi, \pi]$中收敛到 $f(x)$,而且如果 $f(x)$是可积的(比 Riemann 意义更一般意义下的可积性,即 $f(x)$可以在第一种

---

① *Math. Ann.*, 5,1872, 123～132 = *Ges. Abh.*, 92～102.

② 细节见 E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable*, Ⅱ, 656～698.

③ *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1873,571～582.

④ *Abh. der Bayer. Akad. der Wiss.*, 12,1876,117～166.

集合上无界),则该级数一定是 $f(x)$的 Fourier 级数. 他还证明了①,任一 Riemann 可积函数的 Fourier 级数,即使不是一致收敛的,也可以逐项积分.

其后有许多数学家从事于早已为 Dirichlet 用一种方法回答了的问题的研究,这个问题就是,要给出函数 $f(x)$具有收敛到 $f(x)$ 的 Fourier 级数的充分条件. 有几个结果是经典的. Jordan 用他所引进的有界变差函数的概念给了一个充分条件②. 令 $f(x)$在$[a, b]$上有界,又令 $a=x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n=b$是这个区间的一种划分. 令 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n$ 是 $f(x)$在这些点上的值. 则对每一个划分

$$\sum_{0}^{n-1}(y_{r+1}-y_r)=f(b)-f(a),$$

令 t 表示
$$\sum_{0}^{n-1}|y_{r+1}-y_r|.$$

对$[a, b]$的每一种细分方式有一个 t. 当对应于$[a, b]$的所有划分方式,和数 t 有一个上界时,则 f 就定义为在$[a, b]$上是有界变差的.

Jordan 的充分条件说的是:可积函数 $f(x)$的 Fourier 级数在那样一些点上收敛到

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

这些点各有一个邻域,使 $f(x)$在该邻域中是有界变差的③.

19 世纪 60 和 70 年代数学家们还考察了 Fourier 系数的性质,在所得到的许多重要结果中,有一个就是所谓的 Parseval 定理(Parseval 是在限制更严的条件下叙述这个定理的,见第 29 章第 3 节),根据这个定理,如果 $f(x)$和$[f(x)]^2$ 是在$[-\pi, \pi]$上

---

① *Math. Ann.*, 22,1883,260~268.

② *Comp. Rend.*, 92, 1881, 228 ~ 230 = *Œuvres*, 4, 393 ~ 395 和 *Cours d'analyse*, 2,第 1 版 1882,Ch. V.

③ *Cours d'analyse*,第二版,1893,1,67~72.

Riemann 可积的,则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x = 2a_0^2 + \sum_1^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

而且如果 $f(x)$和 $g(x)$及其平方 Riemann 可积,则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x = 2a_0\alpha_0 + \sum_1^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n),$$

其中 a_n, b_n 和 α_n, β_n 分别是 $f(x)$和 $g(x)$的 Fourier 系数.

7. 分析的状况

Bolzano, Cauchy, Weierstrass 和其他人的工作给分析提供了严密性. 这些工作把微积分及其推广从对几何概念、运动和直觉了解的完全依赖中解放出来. 这些研究一开始就造成了巨大的轰动. 在一次科学会议上,Cauchy 提出了级数收敛性的理论,会后 Laplace 急忙赶回家并隐居起来,直到他查完他的《天体力学》(*Mécanique céleste*)中所用到的级数. 幸亏书中用到的每一个级数都是收敛的. 当 Weierstrass 的工作通过他的讲演为人们所知道时,其影响甚至更为显著. 把 Jordan 的《分析教程》(*Cours d'analyse*)第一版(1882—1887)同第二版(1893—1896)、第三版(3 卷,1909—1915)进行比较,就可以看出严密性的改进. 许多其他的专题论文体现了新的严密性.

分析的严密化并不证明就是基础研究的终结. 首先,所有的研究工作实际上都是以承认实数系为先决条件的,而实数系仍然是没有条理的. 我们将看到 Weierstrass 在 19 世纪 40 年代就考虑了无理数的问题,除他之外所有其他的人都认为没有必要去研究数系的逻辑基础. 看来即使是最大的数学家们都必须逐步发挥他们的才智方能了解严密性的需要. 关于实数系的逻辑基础方面的工作不久就跟着开展起来了(见第 41 章).

连续函数可以没有导数,不连续函数可以积分,这些发现,以及由 Dirichlet 和 Riemann 关于 Fourier 级数方面的工作清楚地显示了对不连续函数的新的见解,还有对函数的间断性的种类和程度的研究,使数学家们认识到,函数的精确研究扩充了微积分中以及分析的通常分支中用到的函数,在这些分支中可微性的要求通常限制了函数类.对函数的研究在 20 世纪继续进行着,结果产生了数学的一个新分支,就是所谓的实变函数论(见第 44 章).

和数学中的一切新运动一样,分析的严密化不是没有遭到反对.关于是否应该从事分析的改进就有许多争论.引进来的独特的函数被攻击为奇怪而无意义的函数、古怪的函数、也许比较复杂却也不比幻方更重要的数学游戏.这些函数还被看做是一种变态或是函数的不健康部分,而且还被认为在纯粹和应用数学的重要问题中是不会出现的.违反了公认为是完美的法则的这些新的函数,被看作是无秩序和混乱的标志,而这种无秩序和混乱是对以前形成的秩序和协调的嘲笑.现在为了叙述一个正确的定理必须加上的许多前提,被认为是学究式的,破坏了 18 世纪古典数学的优美,用 Du Bois-Reymond 的话来说,这种优美"就像在天堂里一样".人们对这些新的函数的琐碎细节感到不满,因为它们掩盖了主要的思想.

尤其是 Poincaré 怀疑这种新的研究.他说①:

> 逻辑有时候产生怪物.半个世纪以来我们已经看到了一大堆离奇古怪的函数,它们被弄得愈来愈不像那些能解决问题的真正的函数.多一点连续性或少一点连续性,多几阶导数,如此等等.诚然,从逻辑的观点看来,这些陌生的函数是最一般的;另一方面,不用去找就碰到的函数以及遵从简单规律的函数却是一种特殊情形,这种情形仅

---

① *L'Enseignement mathématique*, 1,1899, 157 ~ 162 = *Œuvres*, 2,129~134.

> 只是函数中很小的一角.
>
> 过去人们为了一个实际的目的而创造一个新的函数;今天人们为了说明先辈在推理方面的不足而故意造出这些函数来,而从这些函数所能推出来的东西也就是仅此而已.

Charles Hermite 在给 Stieltjes 的一封信中说:"我怀着惊恐的心情对不可导函数的令人痛惜的祸害感到厌恶."

Du Bois-Reymond[①] 表达了另一种不同的意见. 他担心分析的算术化会使分析和几何从而也和直观以及物理思考脱离开,这就使分析变成一种"简单的符号游戏,在那里所写下的符号具有在国际象棋和纸牌游戏中的棋子所具有的任意意义."

Abel 和 Cauchy 明显地排除发散级数引起了最大的争论. Abel在 1826 年写给 Holmboë 的信中说[②]:

> 发散级数是魔鬼的发明. 把不管什么样的任何证明建立在发散级数的基础之上都是一种耻辱. 利用发散级数人们想要什么结论就可以得到什么结论,而这也是为什么发散级数已经产生了如此多的谬论和悖论的原因……对所有这一切我变得异常关心,因为除几何级数外,在全部数学中曾被严格地确定出和的单个无穷级数是不存在的. 换句话说,数学中最重要的事情也就是那些具有最小基础的事情.

但是 Abel 表示了某种担心,即这样一来是否忽视了一种好的思想,因为他在信中继续写道:"尽管这种级数是令人非常惊奇的,但它们中的大多数都是正确的. 我正试图为这种正确性寻找理由;这

---

① *Théorie générale des fonctions*, 1887,61.

② *Œuvres*, 2,256.

是一个极其有趣的问题."Abel 死时很年轻,并没有从事这方面的研究.

Cauchy 对于排斥发散级数也有些不安.他在《教程》(1821)的引论中说:"我曾被迫承认各种各样多少有点不幸的命题,例如,发散级数不能求和."在 1827 年[①]出版的他写于 1815 年的关于水波的得奖论文所加的注释中,Cauchy 却不管这个结论而继续使用发散级数.他决心去研究为什么发散级数被证明这样有用的问题,而且事实上他最终是接近于认识到这个原因的(第 47 章).

法国数学家采纳了 Cauchy 的排除发散级数的做法.但是英国和德国的数学家没有这样做.在英国,剑桥学派求助于形式的永恒性原理(the principle of permanence of form),为使用发散级数辩护(第 32 章第 1 节).对于发散级数,这个形式的永恒性原理首先是由 Robert Woodhouse(1773—1827)使用的.在《解析计算原理》(*The Principles of Analytic Calculation*)(1803,p. 3)中他指出,在方程

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots \tag{6}$$

中,等号比之只表示数值上相等,具有"更广泛的意义".因此无论这个级数发散或收敛,方程(6)都成立.

Peacock 也应用形式的永恒性原理对发散级数进行运算[②].在第 267 页上他说,"这样,因为对于 $r<1$,上面的(6)式成立,于是对于 $r=1$ 我们就真的得到了 $\infty = 1+1+\cdots$.对于 $r>1$,我们在左边得到一个负数,而由于在右端的项不断增大,故右端比∞更大."这就是 Peacock 接受的结论.他试图确立的论点是:对于一切 r,级数都能代表 $\frac{1}{1-r}$.他说:

---

① *Mém. des sav. étrangers*, 1,1827,3~312;见 *Œuvres*, (1),1,238,277,286.

② *Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis*, Brit. Assn. for Adv. of Science, 3,1833,185~352.

> 如果认为代数运算是一般的，而且认为服从这种运算的符号在数值上没有限制，那么想要回避发散级数的形成就和回避收敛级数的形成一样都是不可能的；而且如果先不谈这种级数本身，而把这种级数看做是一些可定义的运算的结果，那么检查相继项的数值之间的关系就不是太重要的事情了，虽然在断定级数收敛或发散时这样做或许是必要的；因为在这些情形下，必须认为这些级数是它们的母函数的等价形式，就这些运算的目的来说，可以认为它们具有等价的性质……企图在符号运算中排斥使用发散级数，必将对代数公式和运算的普遍性强加上一种限制，这是完全违反科学精神的……这样做必将导致如下的大量而又麻烦的情形：几乎所有的代数运算所具有的大部分确定性和简单性都被剥夺了.

Augustus De Morgan 虽然比 Peacock 更准确更有意识地知道发散级数中的困难，然而他还是在英国学派的影响之下，而且从他不顾这些困难而使用发散级数所得到的一些结果也给人这样的印象. 1844 年他在一篇尖锐但混乱的论文《发散级数》①中以这样的话开始："我相信本文的标题一般是可以接受的，这个标题描述了还保留着初等性质(特征)的仅有的主题，在这方面，关于结果的绝对正确或错误，数学家之间存在着严重的分歧."De Morgan 的这种见解，他早在他的《微分和积分计算》(*Differential and Integral Caulcus*)②中就已经宣布了："代数的历史向我们表明，没有什么事情是比排斥自然出现的方法更没有根据了，排斥这种方法的理由是在一个或几个显然正确的情形中由于使用了这种方法而导致错误的结论. 这就告诉我们要小心使用但不应该拒绝这种方

---

① *Trans. Camb. Philo. Soc.*, 8, Part Ⅱ, 1844, 182～203, 1849 出版.

② London, 1842, p. 566.

法;如果宁愿拒绝而不是小心使用的话,那么负量,尤其是它的平方根,就会成为代数进步的一个有力的障碍……而且甚至发散级数的拒绝者们所毫不担心地涉及的那些巨大的分析领域也就不会有那么多发现,更会缺少优美而永久的发现……我在反对一本在我看来是故意终止发现的进展的教科书时,所采取的座右铭包含在一个词和一个符号中——记住$\sqrt{-1}$."他区分一个级数的算术意义和代数意义. 代数意义在一切情况下总成立. 为了解释由于使用发散级数而造成的某些错误结论,他在 1844 年的论文中(p. 187)说,积分法是一个算术运算而不是一个代数运算,因此在没有对发散级数进行进一步思考的时候不能对它进行积分. 但是从 $y = 1 + ry$ 出发,并在右端用 $1 + ry$ 去代替 y,并这样不断地做下去而导出的

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots$$

却因为它是代数的而为 Morgan 所接受. 类似地,从 $z = 1 + 2z$ 得到 $z = 1 + 2 + 4 + \cdots$. 因此 $-1 = 1 + 2 + 4 + \cdots$ 也是对的. 他接受那个时代的三角级数的全部理论,但如果有人给出一个 $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 不等于$\frac{1}{2}$的例子(见第 20 章),他就会要拒绝这种理论.

为了采用发散级数,另外有许多杰出的英国数学家给出了其他种种辩护,有些辩护回到了 Nicholas Bernoulli 的一种论证(第 20 章第 7 节),即级数(6)包含一个余项 r^{∞} 或 $\frac{r^{\infty+1}}{1-r}$. 这是必须考虑到的(虽然他们没有指出怎样考虑). 另外一些数学家说:一个发散级数在代数上是真的而在算术上是假的.

某些德国数学家用的是和 Peacock 一样的论证,虽然他们用的是不同的言词,诸如语法的运算是和算术的运算相对立的,或说文字的运算和数字的运算是对立的. Martin Ohm[①] 说:"用一个无

---

① *Aufsätze aus dem Gebeit der höheren Mathematik*(高等数学领域短文集,1823).

穷级数(把任何收敛或发散的问题放在一边)去表示一个表达式是完全合适的,如果人们能够肯定已经有了级数展开的正确规律的话. 仅当级数收敛时人们才能说一个无穷级数的值."在德国拥护发散级数的论证,持续进行了几十年.

虽然为了级数的利益而提出的许多论证或许是牵强附会的,但是为使用发散级数所作的辩护却远非表面看来那样愚蠢. 首先,在整个 18 世纪的分析中很少注意严密性或证明,而且因为所得到的结论几乎总是正确的,这样做是可以接受的. 因此数学家们就变得习惯于不严密的程序和论证. 更确当些,可以说许多概念和运算,例如复数,曾经造成困窘,但在被充分了解之后仍被证明是正确的. 因此数学家们就想到,当人们获得了对发散级数的一个比较好的了解时,使用发散级数的困难也将会得到澄清,因而发散级数也将被证明为合法的. 此外对发散级数进行运算,常常与分析中其他几乎没有弄懂的运算——诸如交换极限次序、不连续函数的积分和无穷区间上的积分——混在一起,这就使发散级数的捍卫者们能以坚持把由于用了发散级数而造成的错误结论归咎于别的困难的原因.

一个也许成了定论的见解是:当一个解析函数在某个区域内表示成一个幂级数时(Weierstrass 把它叫做一个元素),这个级数确实具有函数的"代数的"或"语法的"性质,而且在超出元素的收敛区域时仍然有这种性质. 解析开拓的程序就用了这一事实. 实际上,在发散级数的概念中确实具有使发散级数成为可用的有根据的数学实质. 但是认识这种实质并且最终接受发散级数,还必须等待无穷级数的新的理论(第 47 章).

参考书目

Abel, N. H.: *Œuvres complètes*, 2 vols., 1881, Johnson Reprint Corp., 1964.

Abel, N. H.: *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa ncissance*, Jacob Dyb-

wad, 1902. Letters to and from Abel.

Bolzano, B.: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Hass, Prague, 1817 = *Abh. Königl. Böhm. Ges. der Wiss.*, (3),5,1814～1817, pub. 1818 = *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* #153,1905,3～43,未包含在 Bolzano 的 *Schriften* 中.

Bolzano, B.: *Paradoxes of the Infinite*, Routledge and Kegan Paul, 1950. 包含 Bolzano 工作的一个概述.

Bolzano, B.: *Schriften*, 5 vols., Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1930～1948.

Boyer, Carl B.: *The Concepts of the Calculus*, Dover (reprint), 1949, Chap. 7.

Burkhardt, H.: "Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750～1860", *Math. Ann.*, 70,1911,169～206.

Burkhardt, H.: "Trigonometrische Reihe und Integrale", *Encyk. der Math. Wiss.*, Ⅱ A12,819～1354, B. G. Teubner, 1904～1916.

Cantor, Georg: *Gesammelte Abhandlungen* (1932), Georg Olms (reprint), 1962.

Cauchy, A. L.: *Œuvres*, (2), Gauthier-Villars, 1897～1899, Vols. 3 and 4.

Dauben, J. W.: "The Trigonometric Background to Georg Cantor's Theory of Sets", *Archive for History of Exact Sciences*, 7,1971,181～216.

Dirichlet, P. G. L.: *Werke*, 2 vols., Georg Reimer, 1889～1897, Chelsea (reprint), 1969.

Du Bois-Reymond, Paul: *Zwei Abhandlungen über unendliche und trigonometrische Reihen* (1871 and 1874), Ostwald's Klassiker # 185; Wilhelm Engelmann, 1913.

Freudenthal, H.: "Did Cauchy Plagiarize Bolzano?" *Archive for History of Exact Sciences*, 7,1971,375～392.

Gibson, G. A.: "On the History of Fourier Series", *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 11, 1892/1893, 137～166.

Grattan-Guinness, I.: "Bolzano, Cauchy and the 'New Analysis' of the Nineteenth Century", *Archive for History of Exact Sciences*, 6,1970,372～400.

Grattan-Guinness, I.: *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1970.

Hawkins, Thomas W., Jr.: *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*, University of Wisconsin Press, 1970, Chaps. 1～3.

Manheim, Jerome H.: *The Genesis of Point Set Topology*, Macmillan, 1964, Chaps.

1～4.

Pesin, Ivan N. : *Classical and Modern Integration Theories*, Academic Press, 1970, Chap. 1.

Pringsheim, A. : "Irrationalzahlen und Konvergenz unendlichen Prozesse", *Encyk. der Math. Wiss.*, IA3, 47～147, B. G. Teubner, 1898～1904.

Reiff, R. : *Geschichte der unendlichen Reihen*, H. Lauppsche Buchhandlung, 1889; Martin Sändig (重印), 1969.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Verke*, 第2版(1902), Dover(重印), 1953.

Schlesinger, L. : "Über Gauss' Arbeiten zur Funktionenlehre", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1912, Beiheft, 1～43. 亦见 Gauss 全集 10_2, 77 页以后.

Schoenflies, Arthur M. : "Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten", *Jahres. der Deut. Math. Verein.*, 8_2, 1899, 1～250.

Singh, A. N. : "The Theory and Construction of Non-Differentiable Functions", 见 E. W. Hobson: *Squaring the Circle and Other Monographs*, Chelsea(重印), 1953.

Smith, David E. : *A Source Book in Mathematics*, Dover(重印), 1959, Vol. 1, 286～291, Vol. 2, 635～637.

Stolz, O. : "B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung", *Math. Ann.*, 18, 1881, 255～279.

Weierstrass, Karl: *Mathematische Werke*, 7卷, Mayer und Müller, 1894～1927.

Young, Grace C. : "On Infinite Derivatives", *Quart. Jour. of Math.*, 47, 1916, 127～175.

第 41 章

实数和超限数的基础

上帝创造了整数,其他一切都是人造的.

Leopold Kronecker

1. 引 言

数学史上最使人惊奇的事实之一,是实数系的逻辑基础竟迟至 19 世纪后叶才建立起来.在那时以前,即使正负有理数与无理数的最简单性质也没有逻辑地建立,连这些数的定义也还没有.复数的逻辑基础,那时也才存在不久(第 32 章第 1 节),而且还是预先假定了实数系而建立的.鉴于代数与分析的广泛发展都用到实数,而实数的精确结构和性质却没有人考虑过,这一事实说明数学的进展是怎样地不合逻辑.对于这些数的直观了解,被认为是适当的,而数学家们就满足于在这样的基础上进行运算.

分析的严密化促进了这样的认识:对于数系缺乏清晰的理解这件事本身非补救不可.例如 Bolzano 关于一个连续函数在 $x=a$ 为负,在 $x=b$ 为正,应在 a 与 b 间 x 的某个值上为零的证明(第 40 章第 2 节),在一个关键的地方搞错了,就是因为他对实数系的结构缺乏足够的理解.对于极限的深入研究,也说明需要理解实数系,因为有理数可以有一个无理数作为极限,反之亦然.Cauchy 不能证明他自己关于序列收敛准则的充分性,也是由于他对实数系的结构缺乏理解.对于可用 Fourier 级数表示的函数的不连续点的研究,也揭出了同样的缺陷.正是 Weierstrass 首

先指出,为了要细致地建立连续函数的性质,需要算术连续统的理论.

建立数系基础的另一个动机,是想要保证数学的真实性.非欧几何创造后的一个后果是:几何失去了它的真实身份(第36章第8节);但是在通常算术基础上建立的数学,仍被认为在某种哲学意义上毫无疑问是真实的.早在1817年,Gauss[①]在他致Olbers的信中曾把算术区别于几何,其理由就在于他认为只有前者才纯粹是先验的.1830年4月9日在他给Bessel的信[②]中,他重复了这样的断言:只有算术的定律才是必要而又真实的.可是,足以排除对于算术的真实性以及建立在算术基础上的代数和分析的真实性的任何怀疑的数系基础,还是没有建立起来.

十分值得注意的是,在数学家们领会到数系本身必须加以剖析之前,看来最中肯的问题是建立代数的基础,特别是要解释清楚这样的事实,即人们可以用文字来代表实数与复数,而且竟可以使用关于正整数的那些被认为正确的性质来对文字进行运算.对于Peacock, De Morgan和Duncan Gregory来说,19世纪初叶的代数只是一些操作规程的巧妙而朴素的复合,它具有节奏但缺少理由;在他们看来,当时的含糊不清的原因在于代数基础的不完善.我们已经看到这些人是怎样处理这个问题的(第32章第1节).19世纪后叶的人们认识到,为了分析学,应当更深入地考究,并把整个实数系的结构搞清楚.作为一个副产品,他们也就得到了代数的逻辑结构,因为不同类型的数具有相同形式的性质,这在直观上是早已清楚的.所以,如果他们能够在牢固的基础上建立起这些性质,他们也就能够把这些性质运用到代表这些数的文字上去.

---

① *Werke*, 8,177.

② *Werke*, 8,201.

2. 代数数与超越数

19 世纪中叶,关于代数无理数与超越无理数的工作,是朝着更好地了解无理数的方向跨进的一步.代数无理数与超越无理数之间的区别在 19 世纪已经完成了(第 25 章第 1 节).对于这个区别的兴趣通过 19 世纪关于方程的解的工作而大大提高了,因为这个工作揭示了这样的事实:并不是所有的代数无理数都可以通过对有理数进行代数运算而得到.再则,关于 e 和 π 究竟是代数数还是超越数的问题,继续吸引着数学家们的兴趣.

直到 1844 年前,是否存在任何超越数的问题还没有解决,在这一年,Liouville① 证明下述形式的任何一个数都是超越数:

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots$$

其中 a_i 是从 0 到 9 的任意整数.

要证明上述结论,Liouville 先证明了几个关于用有理数逼近代数无理数的定理.根据定义(第 25 章第 1 节),一个代数数是满足代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的任何一个实数或复数,其中 a_i 都是整数.一个根叫做 n 次代数数,是指它满足一个 n 次方程,但不满足低于 n 次的方程.有些代数数是有理数,它们都是一次的. Liouville 证明,如果 p/q 是一个 n 次代数无理数 x 的任一近似值,则存在一个正数 M 使

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{M}{q^n},$$

这里 p 与 $q>1$ 是整数.这表明,对于一个 n 次代数无理数的任一有理逼近 p/q,其精度必定达不到 M/q^n.换句话说,如果 x 是一个

① *Comp. Rend.*, 18,1844,910~911 与 *Jour. de Math.*,(1),16,1851,133~142.

n 次代数无理数,则必存在一个正数 M 使不等式

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{M}{q^{\mu}}$$

当 $\mu=n$ 时 p 与 q 无整数解,从而当 $\mu\leqslant n$ 时亦然. 因此,对于一个固定的 M,如果上述不等式对每一个正整数 μ 都有解 p/q,则 x 是超越数. Liouville 证明他的那些无理数是满足上述最后的条件的,从而就证明了他的那些数都是超越数.

在识别特殊的超越数方面,其次跨进的一大步是 1873 年 Hermite 关于 e 是超越数的证明①. 在得到这个结果以后,Hermite 写信给 Carl Wilhelm Borchardt(1817—1880)说,"我不敢去试着证明 π 的超越性. 如果其他人承担这项工作,对于他们的成功没有比我再高兴的人了,但请相信我,我亲爱的朋友,这必定会使他们花去一些力气."

Legendre 早曾猜测 π 是超越的(第 25 章第 1 节). Ferdinand Lindemann(1852—1939)在 1882 年②用实质上和 Hermite 没有什么差别的方法证明了这个猜测. Lindemann 指出,如果 x_1, x_2, …, x_n 是不相同的代数数,实的或复的,而 p_1, p_2, …, p_n 是不全为零的代数数,则和数

$$p_1e^{x_1}+p_2e^{x_2}+\cdots+p_ne^{x_n}$$

不能是 0. 如果我们取 $n=2$, $p_1=1$, $x_2=0$, 则可见当 x_1 是非零代数数时,e^{x_1} 不能是代数数. 由于 x_1 可以取成 1,e 是超越数. 现在已知 $e^{i\pi}+1=0$, 从而数 $i\pi$ 不能是代数数. 由于两个代数数的乘积是代数数,而 i 是代数数,所以 π 不是代数数. π 是超越数的证明,解决了著名的几何作图问题的最后一个项目,因为所有可作出的数都是代数数.

---

① *Comp. Rend.*, 77, 1873, 18~24, 74~79, 226~233, 285~293 = *Œuvres*, 2, 150~181.

② *Math. Ann.*, 20, 1882, 213~225.

关于一个基本的常数仍是一个谜. Euler 常数(第 20 章第 4 节)

$$C = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

近似地是 0.577 216,它在分析中,特别在 Γ 函数与 ζ 函数的研究中,起着重要作用,却至今不知道它是有理数还是无理数.

3. 无理数的理论

实数系的逻辑结构问题在 19 世纪后叶被人正视. 无理数被认为是主要难点. 然而无理数的意义与性质的发展预先假定了有理数系的建立. 对无理数理论的不同的贡献者来说,或者认为有理数已为众所确认,无需什么基础,或者只给出一些匆促而临时应付的方案.

足够奇怪的是,无理数理论的建立,除了一个新的观点外,并不需要什么别的新的思想. Euclid 在《原本》第五卷中处理度量的无公度比时,曾对这种比规定了等与不等. 他的等式的定义(第 4 章第 5 节)相当于把有理数 m/n 分成两类,一类中的 m/n 是小于度量 a 与 b 的无公度比 a/b,另一类中的 m/n 是大于 a/b. Euclid 的逻辑诚然是有缺陷的,因为他根本没有定义一个不可公度的比. 再则,Euclid 关于比的理论的发展,两个无公度比的相等,只是在几何上可以适用. 尽管如此,他确已具有可以及早用来定义无理数的基本思想了. 实际上,Dedekind 确实利用了 Euclid 的工作,并且明白承认了这一点①. Weierstrass 也可能为 Euclid 的理论所引导. 然而,后知总是比先见容易. 因此容易解释,为什么 Euclid 思想的重新构型的利用竟延迟了很久. 负数必须全部被认可,然后才能使整个有理数系成为可用. 再则,无理数理论的需要必须被觉察

---

① *Essays*, p. 40.

到,而这只有当分析的算术化已经进行到相当程度之后才会发生.

在1833年与1835年,于爱尔兰皇家学会上宣读的两篇论文,并以《代数学作为纯时间的科学》(Algebra as the Science of Pure Time)为题发表的文章中,William R. Hamilton 提出了无理数的第一个处理①.他把他关于有理数与无理数全体的概念放在时间的基础上,对于数学来说,这个基础是不能令人满意的(虽然 Kant 的许多追随者都认为,这是一个基本的直观).在提出有理数的理论之后,他引进了把有理数分成两类的思想(这个思想将在联系到 Dedekind 的工作时更充分地描述),并把这样一个划分用来定义一个无理数.但他并没有完成这个工作.

除了上述未完成的工作而外,所有在 Weierstrass 之前引进无理数的人都采用了这样的概念,即无理数是一个以有理数为项的无穷序列的极限.但是这个极限,假如是无理数,在逻辑上是不存在的,除非无理数已经有了定义. Cantor② 指出:这个逻辑上的错误,由于没有引起后继的困难,所以在相当时间内没有被发觉.从1859年开始的在柏林的讲演中,Weierstrass 认识到无理数理论的需要,并给出了一个理论.由 H. Kossak 出版的《算术基本原理》(*Die Elemente der Arithmetik*, 1872),声称要发表这个理论,但被 Weierstrass 否定了.

在1869年,Charles Méray(1835—1911)作为数学算术化的革新者以及 Weierstrass 的法国对等人物,在有理数的基础上给出了无理数的一个定义③. Georg Cantor 也给出了一个理论,并用它来澄清他关于点集的思想,这点集是他在1871年研究 Fourier 级数的工作中用到的.在一年之后,(Heinrich) Eduard Heine 的理

---

① *Trans. Royal Irish Academy*, 17, 1837, 293～422 = *Math. Papers*, 3, 3～96.

② *Math. Ann.*, 21, 1883, p. 566.

③ *Revue des Sociétés Savants*, 4, 1869, 280～289.

论和 Dedekind 的理论分别在《数学杂志》(*Journal für Mathematik*)[①]与《连续性与无理数》(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*)[②]两个出版物上发表了.

无理数的各种理论在实质上是十分类似的;因此我们只限于给出 Cantor 与 Dedekind 的理论的一些说明. Cantor[③] 是从有理数出发的. 在他的 1883 年的文章[④]中,他说(第 565 页)已经没有必要去讨论有理数,因为这方面的工作已经由 Hermann Grassmann 在他的《算术教本》(*Lehrbuch der Arithmetik*)(1861)和 J. H. T. Muller(1797—1862)在他的《一般算术教本》(*Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik*, 1855)中完成了. 实际上,这些工作并没有证实是明确的. Cantor 在那篇文章中给出了他的无理数理论的较详细的内容. 他引进了一个新的数类,叫做实数,它包含有理数与无理数. 他从有理数序列开始,这种序列满足如下的条件:对于任何一个给定的正有理数 $\varepsilon > 0$, 序列中除去有限个项以外,彼此相差都小于 ε,亦即对于任意的正整数 m 一致地有

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+m} - a_n) = 0$$

成立. 这样的序列他叫做基本序列. 每一个这样的序列定义为一个实数,可用 b 来表示. 两个这样的序列 (a_ν) 与 (b_ν) 是同一个实数当且仅当 $|a_\nu - b_\nu|$ 在 ν 趋向于无穷时趋向于零.

对于这样的序列有三种可能的状态出现. 给定任何一个正的有理数,序列中的项只要对应的 ν 充分大,其绝对值就小于这个给定的数;或者,从某一个 ν 以后,序列中对应的项都大于某一固定的正有理数 ρ;或者,从某一个 ν 以后,序列中对应的项都小于某一固定的负有理数 $-\rho$. 在第一种情形 $b = 0$; 在第二种情形 $b > 0$;

---

① *Jour. für Math.*, 74, 1872, 172～188.

② Continuity and Irrational Numbers, 1872 — *Werke* 3, 314～334.

③ *Math. Ann.*, 5, 1872, 123～132 = *Ges. Abh.*, 92～102.

④ *Math. Ann.*, 21, 1883, 545～591 = *Ges. Abh.*, 165～204.

在第三种情形 $b<0$.

如果(a_ν)与(a'_ν)是两个基本序列，记作 b 与 b'，可以证明 $(a_\nu \pm a'_\nu)$ 与 $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ 都是基本序列，就分别定义为 $b \pm b'$ 与 $b \cdot b'$. 再则，若 $b \neq 0$，则除有限项外，序列(a'_ν/a_ν)也是一个基本序列，就定义为 b'/b.

有理的实数包含在上述实数的定义之内；因为任一序列(a_ν)，其中每个 a_ν 都等于同一有理数 a，就定义出这有理实数 a.

现在可以定义任何两个实数的等与不等. 实际上 $b=b'$，$b>b'$ 或 $b<b'$ 是按照 $b-b'$ 等于 0，大于 0 或小于 0 而规定的.

以下的定理是重要的. Cantor 证明，若(b_ν)是任一实数序列(有理实数或无理实数)，又若对于任意的正整数 μ 一致地都有 $\lim\limits_{\nu\to\infty}(b_{\nu+\mu}-b_\nu)=0$ 成立，则必存在唯一的一个实数 b，它被一个由有理数 a_ν 构成的基本序列(a_ν)所确定，使得

$$\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = b.$$

这表明，由实数构成的基本序列并不需要任何更新的类型的数来充当它的极限，因为已经存在的实数已足够提供其极限了. 换句话说，从给基本序列(也就是满足 Cauchy 收敛准则的序列)提供极限的观点来说，实数系是一个完备系.

Dedekind 的无理数理论，发表在上面已提到过的他的 1872 年的书中，但他的思想来源却回溯到 1858 年. 那时需要他开微积分的课程，而他理解到实数系还没有逻辑基础. 为要证明单调增加的有界变量趋向于一个极限，他就像其他的作者一样，不得不借助于几何直观(他说，在微积分的初步中仍旧适宜于这样做，特别是对于那些不愿意花很多时间的人). 再则，许多基本的算术定理都没有得到证明. 他举了这样的事实，即等式 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ 还没有严格地证明过.

他接着声明，他预先假定有理数的发展，只对有理数作概括的

讨论. 为要达到对无理数的认识,他先提出什么叫做几何的连续性. 当时的和早些时候的思想家——例如 Bolzano——相信所谓连续就是在任两数之间至少存在一个另外的数. 这一性质现在知道是稠密性. 但是有理数本身就形成一个稠密集,因此稠密性不是连续性.

Dedekind 是在直线划分的启发下来定义无理数的. 他注意到把直线上的点划分成两类,使一类中的每一个点位于另一类中每一个点的左方,就必有**一个且只有一个点**产生这个划分. 这一事实使得直线是连续的. 对于直线来说,这是一个公理. 他把这个思想运用到数系上来. Dedekind 说,让我们考虑任何一个把有理数系分成两类的划分,它使得第一类中的任一数小于第二类中的任一数. 他把有理数系的这样一个划分叫做一个分割(cut). 如果用 A_1 与 A_2 表示这两类,则(A_1, A_2)表示这分割. 在一些分割中,或者 A_1 有个最大的数,或者 A_2 有个最小的数;这样的而且只有这样的分割是由一个有理数确定的.

但是存在着不是由有理数确定的分割. 假如我们把所有的负有理数以及非负的且平方小于 2 的有理数放在第一类,把剩下的有理数放在第二类,则这个分割就不是由有理数确定的. 通过每一个这样的分割,"我们创造出一个新的无理数 α 来,它是完全由这个分割确定的. 我们说,这个数 α 对应于这个分割,或产生这个分割. "从而对应于每一个分割存在唯一的一个有理数或无理数.

Dedekind 在引进无理数时所用的语言,留下一些不完善的地方. 他说无理数 α 对应于这个分割,又为这分割所定义. 但他没有说清楚 α 是从哪儿来的. 他应当说,无理数 α 不过就是这一个分割. 事实上,Heinrich Weber 告诉过 Dedekind 这一点,而 Dedekind 在 1888 年的一封信中却回答说,无理数 α 并不是分割本身而是某些不同的东西,它对应于这个分割而且产生这个分割. 同样,虽然有理数产生分割,它和分割是不一样的. 他说,我们有创造这

种概念的脑力.

他接着给出一个分割(A_1, A_2)小于或大于另一分割(B_1, B_2)的定义. 在定义了不等关系之后,他指出实数具有三个可以证明的性质:(1)若 $\alpha > \beta$ 且 $\beta > \gamma$, 则 $\alpha > \gamma$. (2)若 α 与 γ 是两个不同的实数,则存在着无穷多个不同的数位于 α 与 γ 之间. (3)若 α 是任一实数,则实数全体可以分成两类 A_1 与 A_2,每一类含有无穷多个实数,A_1 中的每一个数都小于 α,而 A_2 中的每一个数都大于 α,数 α 本身可以指定在任一类. 实数类现在就具有**连续性**,他把这个性质表达为:如果实数全体的集合被划分成 A_1 与 A_2 两类,使 A_1 中的每一个数小于 A_2 中所有的数,则必有一个且只有一个数 α 产生这个划分.

他接着定义实数的运算. 分割(A_1, A_2)与(B_1, B_2)的加法是这样定义的:设 c 是任一有理数,如果有 a_1 属于 A_1, b_1 属于 B_1,使 $a_1 + b_1 \geqslant c$, 我们就把 c 放在类 C_1 中. 所有其他的有理数都放在类 C_2 中. 这两类数 C_1 与 C_2 构成一个分割(C_1, C_2),因为 C_1 中的每一个数小于 C_2 中的每一个数. 这个分割(C_1, C_2)就是(A_1, A_2)与(B_1, B_2)的和. 他说,其他运算可以类似地定义. 他现在就能够建立加法和乘法的结合与交换等性质. 虽然 Dedekind 的无理数理论,经过上面指出的一些少量修改之后,是完全符合逻辑的,但 Cantor 认为分割在分析中出现并不自然而加以批评.

除以上提到的或描述的以外,关于无理数理论还有另外一些工作. 例如 Wallis 在 1696 年曾把有理数与循环小数等同起来. Otto Stolz (1842—1905) 在他的《一般算术教程》(*Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*)①中证明了,每一个无理数可以表达成不循环小数,因而这个事实可以用来定义无理数.

从这些不同的处理,可以明显地看出,无理数的逻辑定义是颇有些不自然的. 从逻辑上看,一个无理数不是简单的一个符号,或

---

① 1886,1,109～119.

一对符号,像两个整数的比那样,而是一个无穷的集合,如 Cantor 的基本序列或 Dedekind 的分割. 逻辑地定义出来的无理数是一个智慧的怪物. 我们可以理解,为什么希腊人和许多后继的数学家都觉得,这样的数难以掌握.

数学的进展并没有博得普遍的赞许. Hermann Hankel,他自己是有理数逻辑理论的创始人,却反对无理数的理论①:"没有[几何的]度量的概念,形式地去处理无理数的每一个尝试,必然导致最玄奥的和麻烦的人工制作,它们是不会有较高的科学价值的,即使它们能够被完全严密地进行到底的话,何况对此我们完全有权怀疑."

4. 有理数的理论

为数系建立基础的下一步是关于有理数的定义及其性质的推演. 如上所述,在这方向上的一两个尝试是先于无理数方面的工作的. 大多数在有理数方面工作的人都假定普通整数的本质与属性是已知的,并认为问题在于逻辑地建立负数和分数.

第一个这样的努力是由 Martin Ohm(1792—1872)作出的. 他是柏林的教授,物理学家 Georg Simon Ohm 的弟弟. 他在他的《数学的一个完备相容系的研究》(*Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik*, 1822)中作出了这个努力. 后来 Weierstrass 在 1860 年间的讲演中,从自然数导出了有理数. 他引进正有理数作为一对自然数,负整数作为另一类型的自然数偶,而负有理数作为一对正负整数. Peano 独立地使用了这个思想,我们将联系他的工作在以后作较详细的介绍. Weierstrass 没有意识到有必要去澄清整数的逻辑. 实际上他的有理数理论也没有免除困难. 然而从 1859 年以后,在他的讲演中已正确地肯定:只要承认了

① *Theorie der complexen Zahlensystem*, 1867, p. 46～47.

自然数,建立实数就不再需要进一步的公理了.

建立有理数系的关键问题,在于采取一些步骤来构造普通整数的基础并确立整数的性质.在那些从事于整数理论工作的人们中,有少数人相信,像自然数这样基本的东西,已不可能再加以逻辑分析了. Kronecker 就是坚持这样的观点的.他之所以如此,是出于哲学上的考虑,关于这些我们将在以后更深入地讨论. Kronecker 也愿意把分析算术化,也就是把分析建立在整数的基础上;但他认为人对于整数的知识,除了直接承认以外,不能再做什么了.人对于这些知识有着基本的直观.他说"上帝创造了整数,其他一切都是人造的".

Dedekind 在他的《数的性质与意义》(*Was sind und was sollen die Zahlen*)[1]的著作中给出了一个整数理论.这个著作写作时间是从 1872 年到 1878 年,虽然发表的时间是 1888 年.他用了集合论的思想,这个思想在那时 Cantor 早已领先,而且不久就被认为有很大的重要性.但无论如何,Dedekind 的处理过于复杂,以至得不到多大的注意.

对于整数的处理,最能适合 19 世纪后叶的公理化倾向的,是整个用一组公理来引进整数.利用 Dedekind 在上面提到的著作中所获得的结果,Giuseppe Peano(1858—1932)在他的《算术原理新方法》(*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, 1889)中[2],首先完成了这个工作.由于 Peano 的处理已被广泛使用,我们将介绍它.

Peano 用了许多符号,目的在使推理干净利落.例如 $\in$ 表示属于;$\supset$ 表示包含;N_0 表示自然数类;$a+$ 表示后继于 a 的下一个自然数. Peano 在他的所有数学表达中,都采用这些符号.他的《数学

---

① The Nature and Meaning of Numbers = *Werke*, 3,335～391.

② *Opere scelte*, 2,20～55,与 *Rivista di Matematica*, 1,1891,87～102,256～257 = *Opere scelte*, 3,80～109.

公式》(*Formulario mathematico*,五卷,1895—1908)一书就是显著的例子.他在讲课时也使用这些符号,因而学生们造了反.他试着用全部及格的办法去满足他们,但没有起作用,因而他被迫辞去他在 Turin 大学的教授职位.

虽然 Peano 的工作影响到符号逻辑的进一步发展,以及后来由 Frege 与 Russell 发起的把数学建筑在逻辑上的运动,但他的工作必须与 Frege 和 Russell 的工作区分开来,Peano 并不要把数学建立在逻辑上.对于他,逻辑只是数学的仆人.

Peano 从不经定义的“集合”、“自然数”、“后继者”与“属于”等概念出发(参见第 42 章第 2 节).他关于自然数的五个公理是:

(1) 1 是一个自然数.

(2) 1 不是任何其他自然数的后继者.

(3) 每一个自然数 a 都有一个后继者.

(4) 如果 a 与 b 的后继者相等,则 a 与 b 也相等.

(5) 若一个由自然数组成的集合 S 含有 1,又若当 S 含有任一数 a 时,它一定也含有 a 的后继者,则 S 就含有全部自然数.

这最后一个公理就是数学归纳法公理.

Peano 采取了关于相等的相反、对称和传递公理.这就是 $a=a$;若 $a=b$,则 $b=a$;若 $a=b$ 且 $b=c$,则 $a=c$.他用如下的叙述来定义加法:对于每一对自然数 a 与 b,有唯一的和 $a+b$ 存在,使

$$a+1=a+,$$
$$a+(b+)=(a+b)+.$$

同样地,他用如下的说法来定义乘法:对于每一对自然数 a 与 b,有唯一的积 $a\cdot b$ 存在,使

$$a\cdot 1=a,$$
$$a\cdot(b+)=(a\cdot b)+a.$$

他接着建立了自然数的所有人们熟悉的性质.

从自然数及其性质出发,可以直接定义负整数与有理数,并建立其性质.我们可以先定义正的与负的整数作为新的一类数,它们每一个是一对有序的自然数.这样(a, b)就是一个整数,其中a与b是自然数.(a, b)的直观意义是$a-b$.从而当$a>b$时,(a, b)就是通常的正整数,而当$a<b$时,(a, b)就是通常的负整数.适当地制定加法与乘法运算的定义,就可以导出正负整数的通常的性质.

有了整数,就可以通过有序的整数对来引进有理数.即若A与B是整数,有序对(A, B)就是一个有理数.直观地说,(A, B)就是A/B.适当地制定关于这种数对的加法与乘法运算的定义,就可以导出有理数的通常的性质.

所以,一旦对于自然数的逻辑处理完成之后,建立实数系的基础问题就完备了.正如我们已经注意到的,一般说来,从事于无理数理论工作的人们,总是假定对有理数已经彻底了解,因而可以承认它们,或者稍微作出一些澄清它们的姿态.在Hamilton把复数建立于实数基础上之后,在用有理数定义了无理数之后,这最后一类——有理数——的逻辑终于创立起来了.这个历史顺序实质上与需要用来建立复数系的逻辑顺序恰好相反.

5. 实数系的其他处理

以上所描述的关于处理实数系逻辑基础的要点是:先得出整数及其有关性质,从而导出负数与分数,最后导出无理数.这种处理的逻辑基础只是关于自然数的某些公设的系列,例如Peano公理.所有其他的数都是构造出来的.Hilbert称以上的处理为原生法(genetic method)(他可能当时还不知道Peano公理,但他知道关于自然数的其他处理).他承认这种原生法可能有教学与直观推断的价值,但他说,对整个实数系采用公理方法,在逻辑上将更为

可靠. 在我们陈述他的理由之前,我们先看一看他的公理①.

他介绍了不定义的词和用 a, b, c 代表的数之后,给出了下列公理:

Ⅰ. 连接公理

I_1　从数 a 与数 b 经过加法产生一个确定的数 c;用符号表出便是

$$a+b=c \text{ 或 } c=a+b.$$

I_2　若 a 与 b 是给定的两数,则存在唯一的一个数 x 与唯一的一个数 y,使

$$a+x=b \text{ 与 } y+a=b.$$

I_3　存在一个确定的数,记为 0,使对每一个 a 都有

$$a+0=a \text{ 与 } 0+a=a,$$

I_4　从数 a 与数 b 经过另一方法——乘法,产生一个确定的数 c,用符号表出便是

$$ab=c \text{ 或 } c=ab.$$

I_5　若 a 与 b 是任意给定的两数,且 a 不是 0,则存在唯一的一个数 x 与唯一的一个数 y,使

$$ax=b \text{ 与 } ya=b.$$

I_6　存在一个确定的数,记为 1,使对每一个 a 都有

$$a\cdot 1=a \text{ 与 } 1\cdot a=a.$$

Ⅱ. 运算公理

II_1　$a+(b+c)=(a+b)+c$.

II_2　$a+b=b+a$.

II_3　$a(bc)=(ab)c$.

---

① *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 8,1899,180～184;这文章不在 Hilbert 的 *Gesammelte Abhandlungen* 中. 见于他的 *Grundlagen der Geometrie*,第七版,附录 6.

Ⅱ$_4$　$a(b+c)=ab+ac.$

Ⅱ$_5$　$(a+b)c=ac+bc.$

Ⅱ$_6$　$ab=ba.$

Ⅲ.　顺序公理

Ⅲ$_1$　若 a 与 b 是任意两个不同的数，则其中的一个必大于另一个，称后者为小于前者；用符号表出便是

$$a>b \text{ 与 } b<a.$$

Ⅲ$_2$　若 $a>b$ 与 $b>c$，则 $a>c$.

Ⅲ$_3$　若 $a>b$，则下述关系成立：

$$a+c>b+c \text{ 与 } c+a>c+b.$$

Ⅲ$_4$　若 $a>b, c>0$，则 $ac>bc$ 与 $ca>cb$.

Ⅳ.　连续公理

Ⅳ$_1$　(Archimedes 公理)若 $a>0$ 与 $b>0$ 是两个任意的数，则总可以把 a 自己相加足够的次数使

$$a+a+\cdots+a>b.$$

Ⅳ$_2$　(完备公理)对于数系，不可能加入任何集合的东西使加入后的集合满足前述公理．扼要地说：数构成一个对象系，它在保持上述公理全部成立的情况下不能扩大.

Hilbert 指出，这些公理并不是互相独立的，有些可以从另一些导出来．他接着肯定，在上述的实数概念下，那些反对无限集合存在的论点是站不住的．他说，这是因为我们无需去总体地考虑所有那些可以用来构成基本序列(Cantor 的有理数序列)中元素的定律全体，我们只需考虑一个封闭的公理系统以及那些可以通过有限个逻辑步骤导出来的结论．他确实也指出，这组公理的相容性是必须证明的，但只要这一点做到之后，由此定义出来的对象，即实数，就在数学的意义下存在了．Hilbert 那时还没有觉察到，实数

公理的相容性是很难证明的.

Hilbert 声称,他的公理方法优越于原生法. 对此,Russell 的回答是:前者有窃取辛勤劳动成果的优越性,它一下子就假定了那些能从小得多的一组公理推演出来的东西.

在数学上几乎每一次重大的进展都会遭到反对,实数理论的创建也不例外. 我们已经提到过,Du Bois-Reymond 是反对分析算术化的,在他的 1887 年的《函数的一般理论》(*Théorie générale des fonctions*)一书中说道①:

> 毫无疑问,借助于所谓的公理、公约、生造的哲学命题以及本来清楚的概念的不可理解的推广,一个算术体系是可以建立起来的. 它在各方面都类似于从度量概念得出的体系,却好像是用教条与防御性定义作为警戒线来孤立计算的数学……但是任何人都可以照样发明另外一套算术体系. 通常的算术正好是这样一个体系,它是对应于线性度量的.

尽管有这样的攻击,在广大的数学家们看来,实数系工作的完成,解决了它所面对的所有逻辑问题. 算术、代数与分析至今仍是数学的最广阔的部分,而这部分现在已经有了稳固的基础.

6. 无穷集合的概念

分析的严密化揭示人们有必要去理解实数集合的结构. 为了处理这个问题,Cantor 早曾引进关于无穷点集的一些概念,特别是第一型的集合(第 40 章第 6 节). Cantor 认为无穷集合的研究是如此重要,以至他就为此而承担起无穷集合的研究. 他期望这个研究能使他清楚地区分不同的不连续点的无穷集合.

---

① 62 页,*Die allgemeine Funktionentheorie*, 1882 年的法文版.

集合论里的中心难点是无穷集合这个概念本身.从希腊时代以来,这样的集合很自然地引起数学家们与哲学家们的注意,而这种集合的本质以及看来是矛盾的性质,使得对这种集合的理解,没有任何进展. Zeno 的悖论可能是难点的第一个迹象.既不是直线的无限可分性,也不是直线作为一个由离散的点构成的无穷集合,足以对运动作出合理的结论. Aristotle 考虑过无穷集合,例如整数集合,但他不承认一个无穷的集合可以作为固定的整体而存在.对他来说,集合只能是潜在地无穷的(potentially infinite)(第3章第10节).

Proclus(Euclid 的注释者)注意到圆的一根直径分圆成为两半,由于直径有无穷多,所以必有两倍那么多的半圆. Proclus 说,这在许多人看来是一个矛盾.但他用这样的说法来解决这个矛盾,他说:任何人只能说很大很大数目的直径或半圆,不能说一个实实在在无穷多的直径或半圆.换句话说,Proclus 是接受 Aristotle 的潜无穷(potential infinity)的概念而不接受实无穷(actual infinity).这就回避了两倍无穷大等于一个无穷大的问题.

整个中世纪,关于是否有实实在在无穷多个对象的集合这个问题,哲学家们各持一端.这样的事实已被注意到:把两个同心圆上的点用公共半径联起来,就构成两个圆上的点之间的一一对应关系,但一个的周长却比另一个的长.

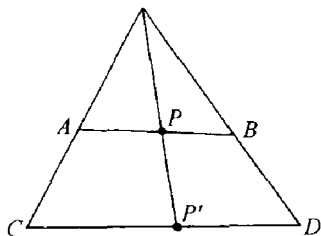


图 41.1

Galileo 与无穷集合作过斗争,并因为它们不可理喻而放弃了.在他的《两门新科学》(*Two New Sciences*)(英译本18～40页)中,他注意到两个不等长的线段 AB 与 CD 上的点(图41.1)可以构成一一对应,从而可以想象它们含有同样多的点.他又注意到正整数可以和它们的平

方构成一一对应,只要把每一个正整数同它的平方对应起来就行了. 但这导致无穷大的不同的"数量级",Galileo 说这是不可能的:所有无穷大量都一样,不能比较大小.

Gauss 于 1831 年 7 月 12 日给 Schumacher 的信①中说:"我反对把一个无穷量当作实体,这在数学中是从来不允许的. 无穷只是一种说话的方式,当人们确切地说到极限时,是指某些比值可以任意近地趋近它,而另一些则允许没有界限地增加."Cauchy,如他的前人一样,不承认无穷集合的存在,因为部分能够同整体构成一一对应这件事,在他看来是矛盾的.

涉及集合的许多问题的争论是无休止的,并且卷入了形而上学的甚至是神学的辩论. 大多数数学家对这个问题的态度是:不谈他们自己所不能解决的问题. 他们全都避免对实在无穷集合的明确承认,尽管他们使用无穷级数与实数系. 他们会说到直线上的点,但避免说直线是由无穷多个点构成的. 这样回避困难问题的方式是虚伪的,但这对于建立古典的分析确是足够了. 然而,当 19 世纪面对在分析中建立严密性的问题时,关于无穷集合的许多问题就再也躲避不开了.

7. 集合论的基础

Bolzano 在他的《无穷悖论》(*Paradoxes of the Infinite*, 1851)一书(这书在他死后三年才出版)中显示了他是第一个朝着建立集合的明确理论的方向采取了积极步骤的人. 他维护了实在无穷集合的存在,并且强调了两个集合等价的概念,这就是后来叫做两个集合的元素之间的一一对应关系. 这个等价概念,适用于有限集合,同样也适用于无穷集合. 他注意到在无穷集合的情形,一

---

① *Werke*, 8,216.

个部分或子集可以等价于整体;他并且坚持这个事实必须接受.例如 0 到 5 之间的实数通过公式 $y = 12x/5$,可以与 0 到 12 之间的实数构成一一对应,虽然这第二个数集包含了第一个数集.对于无穷集合,同样可以指定一种数叫做超限数,使不同的无穷集合有不同的超限数,虽然 Bolzano 关于超限数的指定,根据后来 Cantor 的理论是不正确的.

Bolzano 关于无穷的研究,其哲学意义比数学意义来得多,并且没有充分弄清楚后来称之为集合的势或集合的基数的概念.他同样遇到一些性质在他看来是属于悖论的,这些他都在他的书中提到了.他的结论是,对于超限数无需建立运算,所以不用深入研究它们.

集合论的创建者是 Georg Cantor(1845—1918).他出生于俄国的一个丹麦-犹太血统的家庭,和他的父母一起迁到德国.他的父亲力促他学工,因而 Cantor 在 1863 年带着这个目的进了柏林大学.在那里他受了 Weierstrass 的影响而转到纯粹数学.他在 1869 年成为 Halle 大学的讲师,1879 年成为教授.当他 29 岁时,他在《数学杂志》(*Journal für Mathematik*)上发表了关于无穷集合理论的第一篇革命性文章.虽然有些命题为老一些的数学家们指出是错的,但这篇文章总体上的创造性与光彩引起了人们注意.他继续在集合论与超限数方面发表论文直到 1897 年.

Cantor 的工作解决了不少经久未解决的问题,并且颠倒了许多前人的想法,自然就很难被立刻接受.他关于超限序数与基数的思想,引起了权威 Kronecker 的敌视,粗暴地攻击他的思想达 10 年以上.Cantor 曾一度精神崩溃,但他在 1887 年又恢复了工作.虽然 Kronecker 死于 1891 年,但是他的攻击使数学家们对 Cantor 的工作抱着怀疑态度.

Cantor 的集合理论分散在许多文章中,所以我们不具体指出他的每一个概念和定理出现在哪篇文章中.他的这些文章是从

1874 年开始[①]分载在《数学年鉴》(*Mathematische Annalen*)和《数学杂志》(*Journal für Mathematatik*)两杂志上的. Cantor 称集合(set)为一些确定的、不同的东西的总体(collection),这些东西人们能意识到,并且能判断一个给定的东西是否属于这个总体. 他说,那些认为只有潜无穷集合的人是错误的,并且驳斥了数学家们和哲学家们反对实无穷集合的早期论点. 对 Cantor 来说,如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应,它就是无穷的. 他的一些集合论的概念,如集合的极限点、导集、第一型集等,是在一篇关于三角级数的文章[②]中定义而且使用了的. 这些我们已经在前一章(第 6 节)中叙述过. 一个集合称为是闭的,假如它包含它的全部极限点;是开的,假如它的每一个点都是内点,即每一个点可以包在一个区间内,这区间的点都属于这个集合. 一个集合称为完全的,假如它是闭的并且它的每一个点都是它的极限点. 他还定义了集合的和与交. 虽然 Cantor 主要考虑的是直线上的点集或实数集合,但他确实把这些集合论的概念推广到了 n 维 Euclid 空间的点集合.

他接着寻求像"大小(size)"这样的概念来区分无穷集合. 他和 Bolzano 一样,认为一一对应关系是基本的原则. 两个能够一一对应的集合称为是等价的或具有相同的势(后来"势(power)"这个名词改成了"基数(cardinal number)"). 两个集合可以有不同的势. 如果在 M 与 N 两个集合中,N 能与 M 的一个子集构成一一对应,而 M 不可能与 N 的任何子集构成一一对应,就说 M 的势大于 N 的势.

数集自然是最重要的,所以 Cantor 用数集来阐明他关于等价或势的概念. Cantor 引进了"可列(enumerable)"这个词,对于凡是能和正整数构成一一对应的任何一个集合都称之为可列集合.

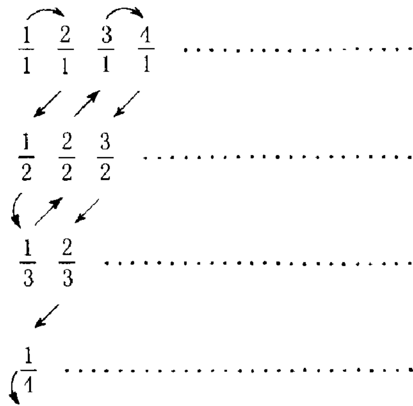
---

① *Ges. Abh.*, 115～356.

② *Math. Ann.*, 5, 1872, 122～132 = *Ges. Abh.*, 92～102.

这是最小的无穷集合. 然后他证明了有理数集合是可列的. 他在1874年给出了一个证明①;他的第二个证明②是现在普遍采用的,我们就来描述它.

有理数排列成如下形式:



要注意的是,那些在同一个对角线方向的分式,其分子与分母的和是相同的. 现在我们从$\frac{1}{1}$开始随着箭头所示的方向依次指定1对应于1/1,2对应于2/1,3对应于1/2,4对应于1/3,等等. 每一个有理数必将在某一步对应于一个被指定的有限的正整数. 于是上面列出的有理数集合(其中有些出现许多次)与正整数集合构成一一对应. 于是把重复的去掉后,这个有理数集合仍是一个无穷集合,从而必然仍是可列的,因为可列集合是最小的无穷集合.

更惊人的是,在上面引到的那篇1874年的文章中,Cantor证明了所有代数数全体构成的集合也是可列的. 这里所谓代数数就是满足某一个代数方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的数,其中a_j都是整数.

为证明这一点,Cantor对任一个n次代数方程指定一个数

---

① *Jour. für Math.*, 77,1874,258～262 = *Ges. Abh.*, 115～118.

② *Math. Ann.*, 46,1895,481～512=*Ges. Abh.*, 283～356,特别在pp. 294～295.

(叫做高)N 如下:

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|,$$

其中 a_i 都是这个方程的系数. 数 N 是一个正整数. 对每一个 N, 以 N 为高的代数方程是有限个,它们的全部解也是有限个,除去重复的以外,所对应的代数数也是有限个,设为 $\phi(N)$ 个. 例如 $\phi(1) = 1$; $\phi(2) = 3$; $\phi(3) = 5$. 他从 $N = 1$ 开始,对于所对应的代数数从 1 到 n_1 给以标号;对应于 $N = 2$ 的代数数从 $n_1 + 1$ 到 n_2 给以标号;依次下去. 由于每一个代数数总一定会编到号,并且必与唯一的一个正整数相对应,从而所有代数数的集合是可列的.

Cantor 在 1873 年和 Dedekind 的一次通信中提出过这样的问题:实数集合是否能和正整数集合构成一一对应. 几个星期后他自己回答了这个问题,认为是不可能的. 他给出两个证明:第一个证明(在上面提到过的 1874 年那篇文章中)比第二个证明①复杂得多,今天经常采用的就是这第二个证明. 它具有这样的优越性,正如 Cantor 自己指出的,即不依赖于无理数的技术性考虑.

Cantor 关于实数不是可列的第二个证明,是从假定 0 与 1 之间的实数是可列的这个前提出发的. 让我们把每一个这样的实数写成无穷小数,例如把 1/2 写成 0.499 9…的形式. 假如它们是可列的,那么我们就能够对每一个数指定一个正整数 n:

$$\begin{array}{l} 1 \leftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13} \quad \cdots \\ 2 \leftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23} \quad \cdots \\ 3 \leftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33} \quad \cdots \\ \cdots\cdots \end{array}$$

现在我们定义一个在 0 到 1 之间的实数如下:令 $b = 0.b_1b_2b_3\cdots$, 其中 $b_k = 9$ 若 $a_{kk} = 1$, 而 $b_k = 1$ 若 $a_{kk} \neq 1$. 这个实数不同于上表中所列的任何一个实数,而这和假定上表已包含所有从 0 到 1 之

① *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 1. 1890/1891, 75~78 = *Ger. Abh.*, 278~281.

间的实数是矛盾的.

由于实数是不可列的而代数数是可列的,必定有超越数存在.这是 Cantor 关于超越数的非结构性存在的证明,这应与 Liouville 实际构造出超越数(第 2 节)相比较.

在 1874 年 Cantor 考虑着一条直线上的点和整个 R^n(n 维空间)中的点的对应关系,并企图证明这两个集合不可能构成一一对应关系.三年之后,他证明这样的对应关系是存在的,他写信给 Dedekind 说①:"我看到了它,但我简直不能相信它."

用来构成这个一一对应的思想②能够立刻显示出来,如果我们把单位正方形中的点和(0, 1)线段的点能构成这样的对应关系的话.设(x, y)是单位正方形中的一个点而 z 是单位区间中的一个点.又设 x 和 y 都表成无穷小数,即把有限小数写成 9 的无限循环.我们把 x 与 y 的小数分成一组一组,每一组终止在第一个非零的数字上.例如

$$x = .3 \quad 002 \quad 03 \quad 04 \quad 6 \quad \cdots$$

$$y = .01 \quad 6 \quad 07 \quad 8 \quad 09 \quad \cdots$$

作

$$z = .3 \quad 01 \quad 002 \quad 6 \quad 03 \quad 07 \quad 04 \quad 8 \quad 6 \quad 09 \quad \cdots$$

其中的各组数字是:先是 x 的第一组,然后是 y 的第一组,并依次进行下去.如果两个 x 或两个 y 有不同的小数位数字,则对应的两个 z 也必不同.从而对于每一对(x, y)有唯一的一个 z 可以确定.对于任意给定的一个 z,把 z 的小数像上面那样分成一组一组,并由此把上述步骤倒过去作出 x 与 y,则不同的两个 z 将得出不同的两对(x, y),从而对每一个 z 有唯一的(x, y)可以确定.方才描述的一一对应关系是不连续的;粗略地说,对应于彼此靠近的 z 点的(x, y)点不一定靠近,反之亦然.

---

① *Briefwechsel Cantor Dedekind*, p. 34.

② *Jour. für Math.*, 84, 1878, 242~258 = *Ges. Abh.*, 119~133.

Du Bois-Reymond 反对这个证明①."这看来与普通常识相矛盾.事实上,这只是这样一种推理的结论,这种推理允许空想的虚构来介入,并且让这些虚构——它们甚至不是量的表示式的极限——充当真正的量.这就是悖论所在."

8. 超限基数与超限序数

Cantor 在论证了相同的势与不同的势的集合都存在之后,他继续研究集合的势这个概念并且引进了基数与序数的理论,其中超限基数(transfinite cardinal number)与超限序数(transfinite ordinal number)是惊人的创造. Cantor 在《数学年鉴》(*Mathematische Annalen*)杂志上从 1879 年到 1884 年发表的一系列文章中发展了这个工作,这些文章都纳入同一个标题:《关于无穷的线性点集》(Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten). 后来他在 1895 年与 1897 年写了两篇决定性的文章发表在同一杂志上②.

在关于线性集合的第五篇文章中③, Cantor 从如下的观察开始:

> 我的集合论研究的描述已经达到了这样的地步,它的继续已经依赖于把实的正整数扩展到现在的范围之外.这个扩展所采取的方向,就我所知,至今还没有人注意过.
>
> 我对于数的概念的这一扩展依赖到这样的程度,没有它我简直不能自如地朝着集合论前进的方向迈进哪怕

① 他的 *Die allgemeine Funktionentheorie*(1882)一书的法文版(1887)第 167 页.

② *Math. Ann.*, 46, 1895, 481～512, 以及 49, 1897, 207～246 = *Ges. Abh.*, 282～351;这两篇文章的一个英文翻译见于 Georg Cantor, *Contributions to the Founding of a Theory of Transfinite Numbers*, Dover (reprint),无出版年月.

③ 1883, *Ges. Abh.*, 165.

> 是一小步.我希望在这样的情形下,把一些看起来是奇怪的思想引进到我的论证中是可以理解的,或者,如有必要的话,是可以谅解的.实际上,其目的在于扩展或推广实的整数序列到无穷大以外.虽然这可能显得是大胆的,我却不仅希望而且坚信,到了适当时机,这个扩展将被承认是十分简单、适宜而又自然的一步.但我仍是十分清楚,在采取这样一步后,我把自己放到了关于无穷大的流行观点以及关于数的性质的公认意见的对立面去了.

Cantor 指出,他的关于无穷数或超限数的理论,不同于普通所说的一个变量变得无穷小或无穷大的那个无穷的概念.两个一一对应的集合具有相同的势或基数.对于有限集合来说,基数就是这集合中元素的个数.对于无穷的集合,要引进新的基数.自然数集合的基数用$\aleph_0$表示.由于实数不能和自然数构成一一对应,实数集合必定有另一个基数,这个基数用 c 表示,它是连续统 continuum 的第一个字母.正像势的概念一样,若在两个集合 M 与 N 中,N 可与 M 的一个子集构成一一对应,而 M 却不能与 N 的任何一个子集构成一一对应,则 M 的基数就大于 N 的基数.从而 $c>\aleph_0$.

要得到一个基数大于某一给定的基数[1],可考虑任何一个具有这给定基数的集合 M,并考虑 M 的所有子集所构成的集合 N.在 M 的子集中有 M 的单个元素组成的集合,也有 M 的一对元素组成的集合,等等.现在,M 与 N 的一个子集构成一一对应是一定可能的,因为 N 有一个子集是由 M 的所有单个元素构成的(每个单个元素看作 M 的子集当然是 N 的元素).它自然可与 M 构成一一对应.但是,在 M 与 N 的全部元素之间不可能建立一个一一对应关系.因为假如这样的一个一一对应是可以建立的话,就可令 m

---

① Cantor, *Ges. Abh.*, 278～280.

是 M 的任一元素，并考虑所有这样的 m，它在所假定的一一对应关系下，与 N 的某个元素相对应，而 N 的这个元素作为 M 的子集时，并不包含 m. 把具有这样性质的 m 的全体所构成的集合记作 η，则 η 当然是 N 的一个元素. Cantor 证明，在所假定的一一对应下，η 并没有 M 的元素与之对应. 因为假如 η 与 M 的某一个 m 对应，且 η 含有 m 的话，那就会与 η 的定义本身有矛盾，假如 η 不含有 m，则根据 η 的定义，m 又应属于 η. 所以假定 M 与 N 存在一一对应关系是会导致矛盾的. 由此可见，一已知集合的所有子集所构成的集合，其基数大于这已知集合的基数.

Cantor 定义两个基数的和为两个分别具有所给基数的(不相交的)集合的和集的基数. 他也定义了两个基数的乘积，给定两个基数 α 与 β，集合 M 的基数为 α，集合 N 的为 β，作元素对 (m, n)，其中 m 属于 M，n 属于 N，所有这样的元素对构成的集合，其基数定义为 α 与 β 的乘积.

基数的乘幂也得到了定义. 设集合 M 的基数为 α，集合 N 的基数为 β，把集合 N 的每一元素用 M 的任一元素来置换，这就有许多不同的置换法，每一不同的置换法看作不同的元素，其总体所成的集合记作 M^N. Cantor 定义 M^N 的基数为 α^β. 在有穷的情况下，例如 $\alpha = 3$，$\beta = 2$，这相当于 α 个元素中每次取 β 个(允许重复)的排列所构成的集合，其基数为 $\alpha^\beta = 3^2$. 令 m_1，m_2，m_3 为集合 M 的三个元素，每次取 2 个的排列为

$$\begin{matrix} m_1m_1 & m_2m_1 & m_3m_1 \\ m_1m_2 & m_2m_2 & m_3m_2 \\ m_1m_3 & m_2m_3 & m_3m_3. \end{matrix}$$

事实上，N 的每一元素用 M 的任一元素来置换，就有 α 个不同的情形，既然 N 的每一元素就有 α 个不同的置换，则 β 个元素所有不同的置换法应当是 α^β. 有了乘幂的定义之后，Cantor 证明了 $2^{\aleph_0} = c$，这从 $(0, 1)$ 线段的数展为二进位小数可知，这时 M 只有 0，1

两个元素,N 是自然数集合.

Cantor 提请人们注意这样的事实,即他的关于基数的理论特别适合于有限集合,从而对于有限数理论他已给出了“最自然、最简短且最严密的基础”.

下一个概念便是序数的概念.他在引进一个已知集合的逐次导集时,早就发觉序数概念的需要.他现在抽象地来引进这个概念.一个集合叫做全序的(simply ordered),假如它的任何两个元素都有一个确定的顺序;即若给定 m_1 与 m_2,则或者是 m_1 前于 m_2,或者是 m_2 前于 m_1;记号表示:$m_1 < m_2$ 或 $m_2 < m_1$.再则,若 $m_1 < m_2$ 与 $m_2 < m_3$,则 $m_1 < m_3$,即这顺序关系有传递性.一个全序集 M 的序数是这个集合的顺序的序型.两个全序集称为是相似的,假如它们是一一对应而且保留顺序,即若 m_1 对应于 n_1,m_2 对应于 n_2,而 $m_1 < m_2$,则必 $n_1 < n_2$.两个相似的集合叫做有相同的序型或序数.作为全序集的例子,我们可用任一有限数集合并按任何给定的顺序排列.对于有限集,不管其顺序是怎样的,其序数是确定的,并且就用这个集合的基数来表示.正整数集合按它们的自然顺序,其序数用 ω 表示.另一方面,按递减顺序的正整数集合

$$\cdots, 4, 3, 2, 1$$

的序数用 $^*\omega$ 表示.正、负整数与零所成的集合按通常的顺序,其序数为 $^*\omega+\omega$.

接着 Cantor 定义序数的加与乘.两个序数的和是第一个全序集的序数加第二个全序集的序数,顺序即按其特殊规定.例如按自然顺序的正整数集合之后随着五个最初的正整数所构成的集合,即

$$1, 2, 3, \cdots, 1, 2, 3, 4, 5,$$

其序数为 $\omega+5$.序数的相等与不相等,也可以很显然地给出定义.

现在他引进超限序数的整个集合,这在一方面是基于它本身的价值,另一方面是为了确切地定义较大的超限基数.为了引进这些新的序数,他把全序集限制在良序集(well-ordered)的范围之内①.一个全序集叫做良序集,假如它有为首的元素,并且它的每一子集也有为首的元素.序数与基数都存在着级别.第一级是所有的有限序数

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

我们用 Z_1 表示上述第一级序数.在第二级的序数是

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \cdots,\ 2\omega,\ 2\omega+1,\ \cdots,$$
$$3\omega,\ 3\omega+1,\ \cdots,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^3,\ \cdots,\ \omega^\omega.$$

我们用 Z_2 表示,其中每一个都是基数为 $\aleph_0$ 的集合的序数.

Z_2,作为上述序数构成的集合,应有一个基数.这个集合是不可列的,从而 Cantor 引进一个新的基数 $\aleph_1$ 作为集合 Z_2 的基数.接着证明 $\aleph_1$ 为 $\aleph_0$ 的后继的基数.

第三级的序数用 Z_3 表示,它们是

$$\Omega,\ \Omega+1,\ \Omega+2,\ \cdots,\ \Omega+\Omega,\ \cdots$$

这些是良序集中基数为 $\aleph_1$ 的集合的序数.而 Z_3 这个序数的集合的基数大于 $\aleph_1$,Cantor 用 $\aleph_2$ 来表示它的基数.这个序数与基数的级别可以无穷无尽地这样继续下去.

Cantor 已经证明,对于给定的任一集合,总可以构造一个新的集合,即所给集合的所有子集构成的集合,使其基数大于所给集合的基数.如果给定集合的基数是 $\aleph_0$,则其全部子集构成的集合具有基数 $2^{\aleph_0}$.Cantor 已经证明 $2^{\aleph_0}=c$,这个 c 就是连续统的基数.另一方面,他通过序数引进了 $\aleph_1$,并证明 $\aleph_1$ 是 $\aleph_0$ 的后继者.于是 $\aleph_1 \leqslant c$.至于 $\aleph_1 = c$ 是否成立,即连续统假设(continuum hypothesis)是否成立,Cantor 不管怎样刻苦努力,也不能回答.在1900年的国际数学会议上,Hilbert 把这个问题列入了著名问题

---

① *Math. Ann.*, 21, 1883, 545～586 = *Ges. Abh.*, 165～204.

的名单中(第43章第5节;也可参看第51章第8节).

对于一般的集合 M 与 N,可能有这样的情形,即 M 不能与 N 的任何一个子集构成一一对应,而 N 也不能与 M 的任何一个子集一一对应.在这种情形下,虽然 M 与 N 各有基数,设分别为 α 与 β,但不能说 $\beta=\alpha$,还是 $\alpha<\beta$ 或 $\alpha>\beta$. 也就是说,这两个基数是不可比较的.对于良序集,Cantor 能够证明这样的情况不可能出现.存在着基数不能比较的非良序集这件事,看来似乎近于悖理,但怎样处理这个问题,Cantor 同样不能解决.

Ernst Zermelo(1871—1953)着手处理了非良序集的基数的比较应怎样进行的问题.他在1904年①证明每一个集合都能够良序化(在某种重新排列下),并在1908年②给出了第二个证明.在证明中,他需要用到现在大家知道的选择公理(axiom of choice)(Zermelo 公理):对于给定的非空且不相交的集合的任何一个总体,总可以在每一集合中选取一个元素,从而构成一个新的集合.选择公理,良序化定理,以及任何两个集合可比较其基数的大小(即若它们的基数分别为 α 与 β,则或者 $\alpha=\beta$,或者 $\alpha<\beta$,或者 $\alpha>\beta$),这三者是等价的原理.

9. 集合论在20世纪初的状况

Cantor 的集合论是在这样一个领域中的一个大胆的步伐,这个领域,我们已经提过,从希腊时代起就曾断断续续地被考虑过.集合论需要严格地运用纯理性的论证,需要肯定势愈来愈高的无穷集合的存在,这都不是人的直观所能掌握的.这些思想远比前人曾经引进过的想法更革命化,要它不遭到反对那倒是一个奇迹.对于这个发展的可靠性的怀疑,被 Cantor 自己以及其他一些人提出

---

① *Math. Ann.*, 59,1904,514~516.

② *Math. Ann.*, 65,1908,107~128.

的问题所增强. Cantor 在 1899 年 7 月 28 日与 8 月 28 日给 Dedekind 的两封信中①,问到所有的基数全体本身是否构成一个集合,因为如果是集合,它就会有大于任何其他基数的基数. 他想采取相容集合与不相容集合的办法,从否定方面来回答这个问题. 然而,在 1897 年,Cesare Burali-Forti(1861—1931)指出,所有序数的序列是良序的,它具有的序数应是所有序数的最大者②. 于是这个序数大于所有的序数(Cantor 早在 1895 年已注意到这个困难). 这些,以及其他一些未解决的问题,叫做悖论,是在 19 世纪末开始被注意到的.

反对的意见确实是耸人听闻的. Kronecker 几乎从一开始就反对 Cantor 的思想,这是我们早已看到了的. Felix Klein 对这些思想也决不表同情. Poincaré③ 评论性地指出,"但是我们遇到某些悖论,某些明显矛盾的事情已经发生了,这些将使埃利亚的 Zeno 与 Megara 学派高兴……我个人,而且这不只我一人,认为重要之点在于,切勿引进一些不能用有限个文字去完全定义好的东西". 他把集合论当作一个有趣的"病理学的情形"来谈. 他并且预测(在同一文章中)说:"后一代将把[Cantor 的]集合论当作一种疾病,而人们已经从中恢复过来了."Hermann Weyl 称 Cantor 关于$\aleph$的等级是雾上之雾.

然而,许多卓越的数学家深为这新的理论已经起的作用所感动. 1897 年在苏黎世举行的第一次国际数学家会议上,Adolf Hurwitz 与 Hadamard 指出了超限数理论在分析中的重要应用. 进一步的应用不久就在测度论(第 44 章)与拓扑学(第 50 章)方面开展起来. Hilbert 在德国传播了 Cantor 的思想,并在 1926

① *Ges. Abh.*, 445~448.

② *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11,1897,154~164 与 260.

③ *Proceedings of the Fourth Internat. Cong. of Mathematicians*, Rome, 1908;167~182; *Bull. des Sci Math.*, (2),32,1908,168~190 = *Œuvres* 中的摘录,5,19~23.

年说①:"没有人能把我们从 Cantor 为我们创造的乐园中开除出去."他对 Cantor 的超限算术赞誉为"数学思想的最惊人的产物,在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一."②Bertrand Russell 把 Cantor 的工作描述为"可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作".

参考书目

Becker, Oskar: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Verlag Karl Alber, 1954, pp. 217~316.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968,第25章.

Cantor, Georg: *Gesammelte Abhandlungen*, 1932, Georg Olms (reprint), 1962.

Cantor, Georg: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover (reprint),无日期.这包含 Cantor 的两篇决定性文章(1895与1897)的英文翻译以及 P. E. B. Jourdain 的很有帮助的导言.

Gavaillès, Jean: *Philosophie mathématique*, Hermann, 1962.并包含 Cantor Dedekind 通信的法文翻译.

Dedekind, R.: *Essays on the Theory of Numbers*, Dover (reprint), 1963.包含 Dedekind 的"Stetigkeit und irrationale Zahlen"以及"Was sind und wes sollen die Zahlen"的英文翻译.两篇著作都在 Dedekind 全集第3卷,314~334与335~391.

Fraenkel, Abraham A.: "Georg Cantor", *Jahres. der Deut. Math. Verein.*, 39, 1930,189~266.这是关于 Cantor 工作的一个历史估价.

Helmholtz, Hermann von: *Counting and Measuring*, D. Van Nostrand, 1930. Helmholtz 的 *Zählen und Messen* (*Wissenschaftliche Abhandlungen*, 3,356~391)的英文翻译.

Manheim, Jerome H.: *The Genesis of Point Set Topology*, Macmillan, 1964, pp. 76

---

① *Math. Ann.*, 95,1926, 170 = *Grundlagen der Geometrie*, 7th ed., 1930, 274.

② *Math. Ann.*, 95,1926, 167 = *Grundlagen der Geometrie*, 7th ed, 1930,270.文章是"*Über das Unendliche*",上述的引号句是从这里摘录的,而以法文出现的是在 *Acta Math.*, 48,1926,91~122.这不包含在 Hilbert 的 *Gesammelte Abhandlugen* 中.

~110.

Meschkowski, Herbert: *Ways of Thought of Great Mathematicians*, Holden-Day, 1964, pp. 91~104.

Meschkowski, Herbert: *Evolution of Mathematical Thought*, Holden Day, 1965, 第4~5章.

Meschkowski, Herbert: *Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors*, F. Vieweg und Sohn, 1967.

Noether, E. and J. Cavaillès: *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, Hermann, 1937.

Peano G.: *Opere scelte*, 3 卷, Edizioni Cremonese, 1957~1959.

Schoenflies, Arthur M.: *Die Entwickelung der Mengenlehre und ihre Anwendungen*, 两部分, B. G. Teubner, 1908, 1913.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, pp. 35~45, 99~106.

Stammler, Gerhard: *Der Zahlbegriff seit Gauss*, Georg Olms, 1965.

第 42 章

几 何 基 础

假如几何不严密，那它就什么也不是……在严密这一点上，普遍都认为，Euclid 的方法是无懈可击的.

H. J. S. Smith (1873)

每当 Euclid 被考虑作为教科书，而由于他的冗长，他的晦涩，或者他的拘泥形式遭到攻击时，总是习惯于为他辩护，据以辩护的理由是：他的逻辑的优点是超群的，而且给不成熟的推理能力提供非常宝贵的训练. 然而，仔细地推敲一下，上述理由就化为乌有了. 他的定义并不总是下了定义的，他的公理并不总是不可证明的，他的证明需要许多他还没有完全意识到的公理. 一个正确的证明，即使没有画出图形，也仍然保持其论证的力量. 但在这个检验面前，Euclid 的许多早期的证明就站不住脚了……说他的著作是一部逻辑的杰作，这是过于夸大了.

Bertrand Russell (1902)

1. Euclid 中的缺陷

对于 Euclid 的定义和公理的批评(第 4 章第 10 节)，要追溯到最早的两位著名的注释者：Pappus 和 Proclus. 在文艺复兴时期，当 Euclid 第一次被介绍给欧洲人时，他们也注意到了上面的瑕疵. Jacques Peletier (1517—1582)在他的《Euclid 几何原本中的证明》(*In Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum*, 1557)一书中，批评了 Euclid 使用叠合法去证明全等方面的定理. 甚至哲学家 Arthur Schopenhauer 在 1844 年也说，他感到很奇怪的是，数学家们攻击 Euclid 的平行公设，而不去攻击重合的图形是相等的这一条公理. 他论述说，重合的图形自然是恒等或相等

的,因而无需什么公理;或者,重合完全是一种经验性质的事情,不属于纯直觉知识(*Anschauung*),而是属于外部感官的经验. 另外,这条公理预先假设了图形的可移动性;但是,在空间中能移动的是物质,因此超出了几何的范围. 19 世纪时已普遍认识到:叠合法或者是建立在一些未明确说明的公理的基础上,或者必须用另一种探讨全等的方法来代替.

有些批评家不希望把所有的直角都相等这种陈述作为一条公理,并力图去证明它(当然是在别的公理的基础上去证明它). Euclid 著作的一位编辑者 Christophorus Clavius (1537—1612)注意到还缺少一条公理来保证与三个已知量成比例的第四个量的存在(第 4 章第 5 节). Leibniz 正确地评述道,当 Euclid 断言(卷 1 命题 1)两个互相经过对方圆心的圆有公共点的时候,他是依赖于直观的. 换句话说,Euclid 假定了圆是某一种连续的结构,所以在它被另一个圆分割的地方必定有一个点.

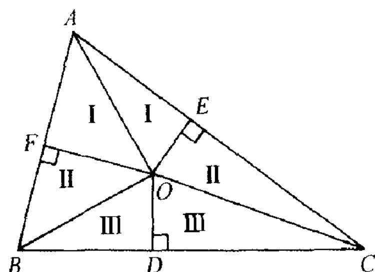


图 42.1

Gauss 也注意到了 Euclid 几何表述中的短处. 他在 1832 年 3 月 6 日给 Wolfgang Bolyai 的一封信[①]中指出,说到一个平面在三角形内部的一部分,这是需要适当的基础的. 他还说:“在完全的阐述中,诸如‘在……之间’那样的词必须建立在清晰的概念上,这是能够做到的,但我在任何地方都没有看到过.”Gauss 还附带批评了直线的定义[②]和平面的定义,其中平面定义为一种曲面,使得连结它上面任意两点的直线必定在它上面[③].

① *Werke*, 8,222.

② *Werke*, 8,196.

③ *Werke*, 8,193~195 和 200.

众所周知,错误结论的许多"证明"是能够作出来的,因为 Euclid 的公理没有强行规定某些点与另外一些点必须处于什么样的位置关系. 例如,每一个三角形都是等腰的"证明"就属于这种情况. 作出$\triangle ABC$中角 A 的平分线和 BC 边上的垂直平分线(图42.1). 如果这两条线平行,则这角平分线就垂直于 BC,因而这三角形就是等腰三角形. 因此,我们假定这两条直线交于(比如说是) O 点,然而我们仍将"证明"这三角形是等腰的. 我们作出垂直于 AB 的线 OF 和垂直于 AC 的线 OE. 那么标着Ⅰ的两个三角形是全等的,因而 $OF = OE$. 标着Ⅲ的两个三角形也全等,因而 $OB = OC$. 从而标着Ⅱ的两个三角形也全等,所以 $FB = EC$. 从标着Ⅰ的两个三角形,我们得到 $AF = AE$. 于是 $AB = AC$, 从而三角形就是等腰的了.

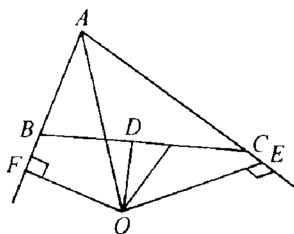


图 42.2

人们也许要问,点 O 的位置到底在哪里? 而实际上可以证明,它必定在三角形的外部,在外接圆上. 但是如果画成图 42.2,就依然能"证明"三角形 ABC 是等腰的. 漏洞在于 E、F 两点,它们必须分别在三角形中各自边的内部和外部. 但这就意味着在开始证明之前我们就必须能够确定相对于 A 和 B 的点 F 的正确位置,以及相对于 A 和 C 的点 E 的正确位置. 当然不应该依赖于画出正确的图形来确定 E 和 F 的位置,但这恰巧是 Euclid 和直到 1800 年为止的数学家们所做的事情. Euclid 几何被说成是给出了由图形直观地猜测到的定理的精确证明,其实它只是提供了精确画出的图形的直观证明.

虽然对 Euclid《原本》的逻辑结构的批评,差不多从它写成之日就已开始了,但这些批评流传不广,或者其中的缺陷被认为是次要问题.《原本》被普遍认为是严密性的楷模. 然而非欧几何的工作使数学家们看清了 Euclid 结构中的全部缺陷,因为在作出证明的

时候,他们不得不持特别的批判态度来对待他们所采用的东西.

认识到许多缺陷的存在,终于迫使数学家们着手重建 Euclid 几何以及含有同样弱点的其他几何的基础. 这项活动在 19 世纪的最后 30 年中变得非常广泛.

2. 对射影几何学基础的贡献

在 19 世纪 70 年代,与度量几何学有关的射影几何学方面的工作揭示出射影几何学是一门基础的几何学(第 38 章). 也许由于这个原因,几何基础的工作就和它一起开始了. 然而,几乎所有的著作家都同等关心于(或者是在射影几何学的基础上,或者是独立地)建立度量几何学. 因此 19 世纪后期和 20 世纪初期讨论几何基础的书和论文都不能按照不同的几何学分离开来.

非 Euclid 几何方面的工作使人们认识到几何是人为的结构,它与物理空间有关,但未必就是它的确切的理想化. 这件事情隐含着:几个重大的变革已不能不被吸收进几何的任何一种公理化研究方法中去了. Moritz Pasch(1843—1930)认识到并强调了这些变革,他是第一个对几何基础作出较大贡献的人. 他的《新几何学讲义》(*Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882 年第一版,1926 年又由 Max Dehn 修订出版(第二版))是一本开辟新方向的著作.

Pasch 注意到 Euclid 的一些普通的概念,诸如点和线,实际上并没有定义. 把一个点定义为没有结构成分的东西,并没有多大意义,因为结构成分作何解释呢? 事实上,像 Aristotle 以及略晚一些时候诸如 Peacock 和 Boole 那样的数学家曾经做过的那样,Pasch 指出,有一些概念必定是不定义的,否则,或者定义的过程无穷无尽,或者数学就会依赖于物理的概念. 一旦某些不定义的概念被挑选出来之后,其余的概念就可以通过它们定义出来. 例如在几何中,点、线、平面(Pasch 在他的著作的第一版中还用了线段的

叠合)是可以选来作为不定义的概念的. 这种选取并不是唯一的. 因为有不定义的概念,所以问题就产生了:这些概念的哪些性质能用来作与它们有关的一些证明呢? Pasch 的回答是:公理作出有关不定义概念的断言,而这些断言就是我们可以用的与它们有关的仅有的断言. 正如 Gergonne 早在 1818 年就提出过的那样[①],不定义的概念是由公理含蓄地定义着的.

谈到公理,Pasch 继续说,它们中的某些虽然可以通过实验猜测出来,但是只要公理集一经选定之后,就必须能够完成所有的证明而不用再参考实验或者参考概念的物理意义. 此外,公理决不是不证自明的真理,而只是企图用以产生特殊的一门几何的定理的一些假定. 他在《讲义》(第 2 版第 90 页)中说:

> ……如果几何学要成为一门真正演绎的科学,那么必不可少的是:作出推论的方式既要与几何概念的意义无关,又要与图形无关;需要考虑的全部东西只是由命题和定义所断言的几何概念之间的联系. 在演绎过程中,把所用的几何概念的意义牢记在心里,这是既恰当而又有用的,但这决不是本质的;事实上,当这成为必要的时候,恰恰是演绎过程中出现了漏洞,因而(当不可能通过修改推理去填补缺陷时)我们被迫承认乞求来作为证明工具的命题是不够用的.

Pasch 的确深信概念和公理应该与经验有关,但在逻辑上这是不相干的.

在《讲义》中,Pasch 给出了射影几何的一些公理,但是,这些公理中的许多条以及它们的类似物对于公理化 Euclid 几何和非 Euclid 几何(当把它们建成独立的学科时)也是同等重要的. 因此他是第一个建立直线上点的顺序的公理集(或者是在……中间的

① *Ann. de Math.*, 9,1818/1819,1.

概念)的人. 这样的公理还必定被吸收进任何一门度量几何学的完全的公理集中. 我们在下面将会看到顺序公理究竟相当于什么.

他建立射影几何学的方法是把无穷远处的点、线和面,加到真正的点、线和面中去. 然后他用 von Staudt 和 Klein 的投影作图法(第 35 章第 3 节)引进了(几何基上的)坐标,最后引进了射影变换的代数表示. 非 Euclid 几何和 Euclid 几何是通过区分 Felix Klein 那里的真假线和点,作为在几何基上的特殊情形引进的.

一个更令人满意的对射影几何的探讨是由 Peano 给出的①. Mario Pieri(1860—1904)的作品《射影几何学原理》②继续了这种探讨. 遵循这种研究方法的人还有 Federigo Enriques(1871—1946)(《射影几何讲义》(*Lezioni di geometria proiettiva*, 1898)), Eliakim Hastings Moore(1862—1932)③, Friedrich H. Schur(1856—1932)④, Alfred North Whitehead(1861—1947)(《射影几何的公理》(*The Axioms of Projective Geometry*)⑤), Oswald Veblen(1880—1960)和 John W. Young(1879—1932)⑥. 最后的两个人给出了一个完全独立的公理集. Veblen 和 Young 的《射影几何》(*Projective Geometry*, 2 卷本, 1910 和 1918)是最优秀的教科书,他们在严格的公理基础上以射影几何开始,然后通过挑选不同的绝对二次曲面去得到 Euclid 几何和几个非 Euclid 几何(第 38 章第 3 节)来特殊化这门几何学,从而实现了几何的 Klein 组织. 他们的公理集广泛得足以包括具有有限个点的几何,只有有理点的几何以及有复数点的几何.

---

① *Rivista di Matematica* = *Revue de Mathématiques*, 4, 1894, 51～90 = *Opere scelte*, 3, 115～157.

② *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, (2), 48, 1899, 1～62.

③ *Amer. Math. Soc. Trans.*, 3, 1902, 142～158.

④ *Math. Ann.*, 55, 1902, 265～292.

⑤ Cambridge University Press, 1960.

⑥ *Amer. Jour. of Math.*, 30, 1908, 347～378.

关于射影几何学的以及我们一会儿就要看到的 Euclid 几何学的许多公理系统,还有一点是值得提到的. Euclid 几何的某些公理是存在公理(第 4 章第 3 节). 为了保证图形的逻辑存在,古希腊人使用尺规作图. 19 世纪的几何基础方面的工作修改了存在的概念,部分地是因为要补充 Euclid 处理这个论题时的不足,部分地是因为要扩大存在的概念,使 Euclid 几何能把不一定用尺规作出来的点、线和角包括进去. 我们将看到新的一类存在公理在我们将要考察的体系中究竟相当于什么.

3. Euclid 几何的基础

在《几何原理》(*I Principii di geometria*, 1889)中,Giuseppe Peano 给出了 Euclid 几何的一个公理集. 他也强调说基本的元素是不定义的. 他规定了一条原则:不定义的概念应该尽可能少,他用了点、线段和运动. 鉴于 Euclid 使用叠合原理而受到的批判,所以把运动包括进去,看来似乎是有些令人吃惊的;但是,根本的问题并不在于运动的概念,而是在于:如果必须用到它时,还缺乏合适的公理基础. Peano 的学生 Pieri 给出了一个类似的公理集①,他把点和运动作为不定义的概念. 另外一个把直线、线段和线段的叠合作为不定义的元素的公理集,是由 Giuseppe Veronese(1854—1917)在他的《几何基础》(*Fondamenti di geometria*, 1891)中给出的.

在 Euclid 几何的所有公理系统中,概念和陈述最简单、闯出的路子最接近于 Euclid 且最受人们欢迎的公理集是属于 Hilbert 的,他并不知道上述意大利人的工作. 在《几何基础》(*Grundlagen der Geometrie*, 1899)中,他给出了他的公理集的第一个叙述,但

① *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, (2), 49, 1899, 173～222.

后来进行了很多次修改. 下文引用的内容取自这本书的第七版(1930). Hilbert 在使用不定义概念,以及这些概念的性质仅由公理来说明等方面,都追随 Pasch,认为无需给不定义的概念指定明晰的意义. 就像 Hilbert 说的那样,这些点、线、面以及其他元素,可以用桌子、椅子、啤酒杯以及别的什么东西来代替. 当然,当几何同"事物"打交道时,这些公理肯定不是不证自明的真理,但必须把它们看做是任意的,即便它们事实上是由经验启示的.

Hilbert 首先列出他的不定义概念. 它们是点、线、平面、位于上面(点和线之间的关系)、位于上面(点和平面之间的关系)、在……中间、一对点重合、角的重合. 这个公理系统在同一个公理集中处理平面 Euclid 几何及立体 Euclid 几何,而这些公理又被分成几组. 第一组公理包括存在性方面的公理:

Ⅰ.　**联系公理**

I_1　对于每两个点 A 和 B,有一条直线 a 位于它们上面.

I_2　对于每两个点 A 和 B,只有一条直线位于它们上面.

I_3　一条直线上至少有两个点. 不位于同一条直线上的点,至少是三点.

I_4　对于不位于一条直线上的任意三点 A、B 与 C,都有一张平面 α,位于这三点上([包含]这三点). 在每一张平面上[至少]有一个点.

I_5　对于不位于同一条直线上的任意三点 A、B 和 C,只能有一张平面包含它们.

I_6　如果一条直线上有两个点位于平面 α 上,那么这条直线上所有的点都位于 α 上.

I_7　如果两张平面 α 和 β 有一个公共点 A,那么它们至少还有另外一个点 B 是公共的.

I_8　不在同一张平面上的点,至少是四点.

第二组公理补充了 Euclid 公理集中最严重的遗漏,即关于点

和线的相对顺序的公理.

Ⅱ. 位于……之间的公理

II_1 如果一点 B 位于点 A 和 C 之间,那么 A、B 和 C 是同一条直线上的三个不同点,并且 B 也位于 C 和 A 之间.

II_2 对于任意两点 A 和 C,直线 AC 上至少有一点 B,使 C 位于 A 和 B 之间.

II_3 在一条直线上的任意三点中,只有一个点位于其他两点之间.

公理 II_2 和 II_3 的意思是使直线成为无限的.

定义 设 A 和 B 是直线 a 上的两点. 点对 A, B 或者点对 B, A 就叫做线段 AB. 位于 A 和 B 之间的点称为这线段的点或者这线段的内点. A 和 B 叫做这线段的端点. 直线 a 上的所有其他的点都被说成是在这线段的外部.

II_4 (Pasch 公理)设 A, B 和 C 是不位于同一条直线上的三个点,并设 a 是 A, B, C 所在平面上不经过(不位于)A、B 或 C(上)的任意一条直线. 如果 a 经过线段 AB 上的一个点,那么它必定还经过线段 AC 上的或线段 BC 上的一个点.

Ⅲ. 叠合公理

III_1 如果 A、B 是直线 a 上的两个点,A'是 a 上或另一条直线 a' 上的一个点,那么在直线 a'上,在 A'的给定的一侧(预先已经规定好),可以找到一点 B',使线段 AB 和线段 $A'B'$叠合. 记为 $AB \equiv A'B'$.

III_2 如果 $A'B'$和 $A''B''$都与 AB 叠合,那么 $A'B' \equiv A''B''$.

这条公理把 Euclid 的"与同一个东西相等的东西,彼此也相等"的公理局限于线段.

III_3 设 AB 和 BC 是直线 a 上没有公共内点的两条线段,并设 $A'B'$和 $B'C'$是直线 a'上没有公共内点的两条线段. 如果 $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, 那么 $AC \equiv A'C'$.

这相当于把 Euclid 公理"等量加等量,还得等量"用于线段.

III_4 设 $\angle(h, k)$ 位于平面 α 中,并设直线 a' 位于平面 α' 中,a' 在 α' 中的确定的一侧已经给出. 设 h' 是 a' 的从 O' 点出发的射线. 则在 α' 中有且只有一条射线 k',使 $\angle(h, k)$ 和 $\angle(h', k')$ 叠合,且 $\angle(h', k')$ 的所有内点都位于 a' 的给定的一侧. 每一个角与本身是叠合的.

III_5 在两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中,如果 $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, 那么 $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

最后这条公理能用来证明 $\angle ACB = \angle A'C'B'$. 考虑同样的两个三角形和同样的一些假设. 不过,首先取 $AC \equiv A'C'$, 然后取 $AB \equiv A'B'$, 我们就有权断言 $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$, 因为在假设的新的次序下应用公理的词句,就产生这个新的结论.

Ⅳ. **平行公理**

设 a 是一条直线,A 不是 a 上的一个点. 那么在 a 和 A 所在的平面上,最多只有一条经过 A 并与 a 不相交的直线.

至少存在一条经过 A 并与 a 不相交的直线是可以证明的,因此没有必要放在这条公理里.

Ⅴ. **连续性公理**

V_1 (Archimedes 公理)如果 AB 和 CD 是任意两条线段,那么在直线 AB 上存在若干点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 使线段 $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$ 都与 CD 叠合,并使 B 位于 A 和 A_n 之间.

V_2 (直线完备性公理)直线上的点构成一个满足公理 I_1, I_2, Ⅱ, Ⅲ 和 V_1 的点集,而且不可能再把它扩大成一个继续满足这些公理的更大的集合.

这条公理相当于要求直线上有足够的点,能够和实数构成一一对应. 虽然这个事实自从坐标几何诞生之日起就被有意识和无意识地使用了. 但是它的逻辑基础先前并没有叙述过.

Hilbert 用这些公理证明了 Euclid 几何的一些基本定理. 证明 Euclid 几何的全部内容确实都能从这些公理推出来的工作是由其他一些人完成的.

Euclid 几何公理的随意性的特点(即它们不依赖于物理的现实性)产生了另外一个问题,即这门几何的相容性. 只要 Euclid 几何被认为是关于物理空间的真理,那么对它相容性的任何怀疑似乎都是没有什么意义的. 但是对不定义概念和公理的新的理解要求相容性是已建立了的. 这个问题至关紧要,因为非 Euclid 几何的相容性已归结为 Euclid 几何的相容性(第 38 章第 4 节). 1898 年 Poincaré 提出这件事[①],并说,一个公理式地建立起来的结构,如果我们能给它一个算术解释,就可以相信它的相容性. Hilbert 提供了这样一个解释,从而证明了 Euclid 几何是相容的.

Hilbert(在平面几何里)把点和一对有序实数(a, b)等同起来[②],把一条直线与一组联比$(u : v : w)$(其中 u 和 v 不都为 0)等同起来. 如果

$$ua + vb + w = 0,$$

则点就在直线上. 通过解析几何中平移和旋转的表达式,叠合就被代数地解释了;这就是:两个图形,如果其中的一个可以由另一个通过平移、x 轴上的反射以及旋转而得到,则称它们叠合.

在每一个概念都被算术地解释,而且弄清楚公理是被这些解释所满足之后,Hilbert 的论点是:定理也必须适合于这些解释,因为它们是公理的逻辑的结果. 假如 Euclid 几何中有矛盾,那么同样的东西也会保持在它的代数解释(它是算术的一个扩充)中. 因此,**如果算术是相容的**,则 Euclid 几何也一定是相容的. 但当时算术的相容性还是一个未解决的问题(见第 51 章).

---

① *Monist*, 9, 1898, p. 38.

② 严格说来,他用了较有限的实数集.

人们极想证明的是,在给定的公理集中,没有一条公理能由其他一条或所有公理推导出来,因为,不然的话,就没有必要把它作为一条公理了.这个无关性的概念是 1894 年 Peano 在刚才提到的那篇论文(甚至更早一些,在他的《算术原理》(*Arithmetices Principia*, 1889))中提出并加以讨论的. Hilbert 考虑了他的那些公理的无关性.但是,因为在他的公理集中,某些公理的意义依赖于前面的一些,所以不可能证明每一条公理都与其他所有的公理无关. Hilbert 成功地证明了的是:任何一组中的所有公理都不能由另外四组公理推得.他的方法是作出一个满足四组公理,但不满足第五组公理的相容的解释或模型.

无关性的证明对非 Euclid 几何有特殊的意义.为了建立平行公理的无关性,Hilbert 作出了一个不满足 Euclid 平行公理但满足其余四组公理的模型.其中用了在 Euclid 球内部的点以及把球的边界变为自身的特殊变换.因此,平行公理就不能是其他四组公理的推论,因为如果是的话,作为 Euclid 几何一部分的这个模型关于平行就会有矛盾的性质.这同一证明也表明非 Euclid 几何是可能的,因为如果 Euclid 平行公理独立于其他公理,那么它的否定必然也是独立于其他公理的;而假如它是一个推论,则 Euclid 公理的整个体系就会包含矛盾.

Hilbert 的 Euclid 几何公理系统,第一次出现于 1899 年,激起了对 Euclid 几何基础的大量关注,许多人使用不同的不定义元素集或公理的变种,作出了各种说法.正如我们已经提到过的,Hilbert 本人直到他作出 1930 年的说法之前,一直在改变他的公理体系.在为数众多的各种公理体系中,我们将只提到一个. Veblen[①] 的公理体系是建立在把点和序作为不定义概念的基础上的.他证明了他的每一条公理都是独立于其他公理的,而且还建立了另外一条性质:范畴性. Edward V. Huntington(1874—1952)

---

① *Amer. Math. Soc. Trans.*, 5,1904,343～384.

在专门讨论实数系的一篇论文中[①]第一次清楚地叙述并使用了这个概念(他把这个概念叫做充分性). 与不定义符号集 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 相联系的公理集 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 称为是范畴的,如果在任何两个含有不定义符号并满足公理集的成员之间,能够建立不定义概念(它们由公理所维护的关系而被保存)之间的一一对应;也就是说,这两个系统是同构的. 实际上,范畴性意味着公理系统的所有解释仅仅是语言上的不同. 例如,若把平行公理略去,那么这一性质就会不成立,因为这时 Euclid 几何和双曲型非 Euclid 几何就会是这缩减了的公理集的非同构解释.

范畴性还隐含着另外一条性质,Veblen 把它叫做析取性,而今天通称为完全性. 一个公理集叫做完全的,如果不可能再增加一条与给定集无关并与之相容的公理(不引入新的初始概念). 范畴性隐含着完全性,因为如果一个公理集合 A 是范畴的,但不完全,那就可以引进一条公理 S,使得 S 和非 S 都与集合 A 相容. 因为原来的集合 A 是范畴的,所以 A 与 S 在一起的公理集和 A 与非 S 在一起的公理集的解释是同构的. 然而这是不可能的,因为对应的命题在两个解释中必须都成立,但是 S 适用于一种解释,而非 S 却适用于另一种解释.

4. 一些有关的基础工作

Euclid 几何公理的清晰的描述启发了相应的几门非 Euclid 几何的研究. Hilbert 公理集的一个美妙的特点是:如果用 Lobatchevsky-Bolyai 公理代替 Euclid 平行公理,而其余公理保持不变,马上就可以得到双曲型非 Euclid 几何的公理集.

为了得到单重的或双重的椭圆型几何,不仅必须抛弃 Euclid 平行公理并吸收任意两条直线都有一个公共点(在单重椭圆型几

---

① *Amer. Math. Soc. Trans.*, 3, 1902, 264～279.

何中)或者至少有一个公共点(在双重椭圆型几何中)的公理,而且还必须改变另外一些公理.在这些几何中,直线不是无限长的,而是具有圆的性质.因此必须用描述圆上点的序关系的序公理来代替 Euclid 几何的序公理.几个这样的公理系统被作出来了.George B. Halsted(1853—1922)在他的《有理几何》(*Rational Geometry*)中[①],以及 John R. Kline(1891—1955)[②]都建立了双重椭圆型几何的公理基础;Gerhard Hessenberg(1874—1925)[③]作出了单重椭圆型几何的公理体系.

另一类关于几何基础的研究是考虑否定或者只略去公理集中一条或几条公理所产生的后果.Hilbert 在他的独立性证明中亲自做了这项工作,因为这种证明的实质就是构造一个模型或者一种解释,使之满足除了要建立其独立性的那条公理以外的所有公理.否定一条公理的最有意思的一个例子当然就是否定平行公理.扔掉 Archimedes 公理可以产生饶有兴趣的结果,这条公理可以像 Hilbert 公理系统中的 V_1 那样叙述.这样获得的几何称为非 Archimedes 几何;在这种几何中存在这样两条线段,其中一条的任何整数倍(不管这个数有多大)都不超过另外一条线段.Giuseppe Veronese 在《几何基础》中构造了这样一种几何.他还证明了这门几何中的定理可以任意接近 Euclid 几何中的定理.

Max Dehn(1878—1952)通过略去 Archimedes 公理也获得了许多有趣的定理[④].例如,存在一种几何,在其中,存在着角之和等于两个直角,相似而不叠合的三角形,以及过一已知点可以画出无穷多条直线平行于一条已知直线.

Hilbert 指出,在建立平面上的面积理论时无需用到连续性公

---

① 1904, pp. 212～247.

② *Annals of Math.*, (2), 18, 1916/1917, 31～44.

③ *Math. Ann.*, 61, 1905, 173～184.

④ *Math. Ann.*, 53, 1900, 404～439.

理(即 V_2). 但是在空间的情况下,Max Dehn 证明[①]存在多面体,它们虽然不能分解成相互叠合的部分(即使在建立了叠合多面体的加法之后),但仍然有相同的体积. 因此在三维的情况下,连续性公理是必需的.

有一些数学家采用一种完全不同的方式探讨 Euclid 几何的基础. 我们知道,几何曾经失宠,因为数学家们发现他们不自觉地在直观基础上采用了一些事实,因而他们信以为真的证明便是不完全的. 这种还会继续出现的危险使他们确信,几何的唯一坚固的基础是算术. 建立这样一个基础的途径当时是清楚的. 事实上,Hilbert 就曾经给出了 Euclid 几何的一个算术解释. 现在什么是必须做的事情呢? 譬如对于平面几何来说,并不是要把点解释为一个数对 (x, y),而是要定义点就是一个数对,定义直线就是三个数之比 $(u:v:w)$, 定义点 (x, y) 在直线 (u, v, w) 上当且仅当 $ux+vy+w=0$ 成立,定义圆就是满足方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的所有 (x, y) 的集合,等等. 换句话说,就是必须把纯粹几何概念的解析几何等价物作为几何概念的定义,并用代数方法去证明定理. 因为解析几何把 Euclid 几何中的一切东西都以代数形式包含进去了,所以不存在能否获得算术基础的问题. 事实上,涉及到的技术性工作(甚至对于 n 维 Euclid 几何)确实已经做过了,例如 Grassmann 在他的《扩张的计算》(*Calculus of Extension*)中就已经做过;而且他本人还提议把这项工作作为 Euclid 几何的基础.

5. 一些未解决的问题

对几何的批判性研究超出了重建几何基础的范围. 曲线自然是随便地使用着的. 比较简单的一些曲线(比如椭圆)有牢靠的几何和分析的定义. 但是很多曲线只是通过方程和函数引进的. 分析

---

① *Math. Ann.*, 55, 1902, 465~478.

的严密化不仅仅包括了函数概念的扩大,而且还包括构造一些非常特殊的函数,例如没有导数的连续函数.显而易见,这些不寻常的函数从几何观点看来是麻烦的.例如表示 Weierstrass 的例子的函数曲线(它处处连续而无处可微)确实不适合于通常的函数概念,因为没有导数就意味着这条曲线在任何一点都没有切线.问题就产生了,这种函数的几何表示形式是曲线吗?更一般地说,一条曲线究竟是什么呢?

Jordan 作出了曲线的一个定义①.它是由连续函数 $x = f(t)$, $y = g(t)(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ 表示的点的集合.为了某种目的,Jordan 想限制他的曲线使之没有多重点.因此他要求对于(t_0, t_1)中的 t 和 t', $f(t) \neq f(t')$ 或 $g(t) \neq g(t')$,或者对于每一个(x, y),只存在一个 t.这种曲线现在称为 Jordan 曲线.

正是在这本书中,他增加了闭曲线的概念②,它要求 $f(t_0) = f(t_1)$ 和 $g(t_0) = g(t_1)$,而且还叙述了闭曲线把平面分成两部分(内部和外部)的定理.同一区域上的两个点总可以用一条与这曲线不相交的折线连接起来.不在同一区域内的两个点不可能用任何一条与这简单闭曲线不相交的折线或连续曲线连接起来.这一定理的力量比乍一看所感觉到的力量要大得多,因为简单闭曲线完全可以是奇形怪状的.实际上,因为函数 $f(t)$, $g(t)$仅仅要求是连续的,所以复杂连续函数的所有种类都包括进去了.Jordan 本人和许多杰出的数学家作出了这条定理的不正确的证明.第一个严密的证明是属于 Veblen 的③.

Jordan 的曲线定义,虽然满足了许多用途,但它毕竟是太广了.1890 年,Peano④ 发现符合 Jordan 定义的曲线能跑遍一个正

---

① *Cours d'analyse*,1887 年第 1 版,第 3 卷第 593 页;1893 年第 2 版,第 1 卷第 90 页.

② 第 1 版第 593 页;第 2 版第 98 页.

③ *Amer. Math. Soc. Trans.*, 6,1905,83~98,和 14,1913,65~72.

④ *Math. Ann.*, 36,1890, 157 ~ 160 = *Opere scelte*, 1,110~115.

方形上的所有点，每个点至少经过一次. Peano 对区间[0, 1]上的点和正方形上的点的对应作出了详细的算术描述. 实际上，正方形上的这些点对于 $0\leqslant t\leqslant 1$，可规定两个单值连续函数 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$，使得 x 和 y 取属于单位正方形的每一个点的值. 但是，(x, y)和 t 的对应既不是单值的，又不是连续的. 从 t 值到(x, y)值的一个一对一的连续对应是不可能有的；也就是说，$f(t)$和$g(t)$不能都是连续的. 这是由 Engen E. Netto(1846—1919)证明的①.

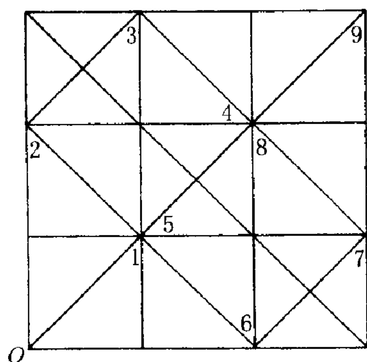


图 42.3

Peano 曲线的几何解释是由 Arthur M. Schoenflies (1853—1928)② 和 E. H. Moore③ 作出的. 先把线段[0, 1]映射到图 42.3 所示的九条线段，然后在每一个小正方形内把包含在内部的线段分成相同的样式，但使这种分法从一个小正方形到下一个小正方形的过渡是连续的. 这个过程重复无穷遍，极限点集就覆盖了原正方形. Ernesto Cesàro(1859—1906)④给出了 Peano 的 f 和 g 的解析形式.

Hilbert⑤ 作出了从单位线段到正方形上的连续映射的另一个例子. 把单位线段(图 42.4)和正方形都分成四个相等的部分，如图. 跑过每一个小正方形，使得所示的路径对应于单位线段. 现在把单位正方形分成 16 个子正方形，编号如图 42.5 所示，并连接 16 个子正方形的中心，如图.

---

① *Jour. für Math.*, 86,1879,263～268.

② *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 82,1900,121～125.

③ *Amer. Math. Soc. Trans.*, 1,1900,72～90.

④ *Bull. des Sci. Math.*, (2),21,1897,257～266.

⑤ *Math. Ann.*, 38,1891, 459 ～ 460 = *Ges. Abh.*, 3,1～2.

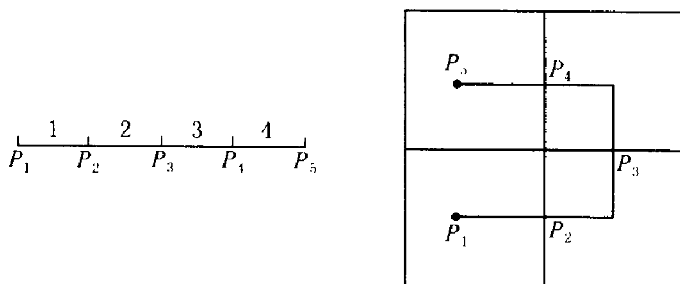


图 42.4

我们继续这个过程，把每一个子正方形再分成四部分，给它们编号，使我们能够通过一条连续的路线跑遍整个集合. 所要的曲线就是在每一步上相继形成的折线的极限. 因为当细分继续进行下去时，子正方形以及单位线段的部分都收缩为一个点，所以我们能直观地看到单位线段上的每一个点映射到正方形上的一个点. 事实上，如果我们固定单位线段上的一个点，比如说 $t=2/3$，那么这个点的象就是在相继形成的折线上 $t=2/3$ 的相继的象的极限.

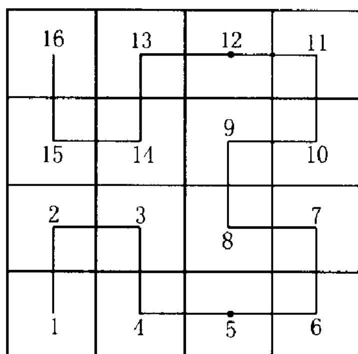


图 42.5

这些例子说明 Jordan 提出的曲线的定义是不令人满意的，因为按照这个定义，一条曲线能填满一个正方形. 一条曲线究竟意指什么的问题依然没有解决. 1898 年 Felix Klein 注意到①，没有什么东西比曲线的定义更含糊的了. 这个问题是由拓扑学家接手研究的(第 50 章第 2 节).

除了一条曲线究竟意指什么这个问题以外，把分析扩展到没有导数的函数也产生了这样一个问题，即一条曲线的长度究竟意指什么？通常的计算公式

① *Math. Ann.*, 50,1898,586.

$$L = \int_a^b (1 + y'^2)^{1/2} \mathrm{d}x,$$

其中 $y = f(x)$，至少需要导数存在. 因此这个概念不再能用于不可微的函数. Du Bois-Reymond, Peano, Ludwig Scheeffer (1859—1885)和 Jordan 作出了各种努力去推广曲线长度的概念，他们或者使用推广了的积分定义，或者使用推广了的几何概念. 最一般的定义是用测度的概念系统地陈述的，我们将在第 44 章中考察这个概念.

对于曲面面积的概念，一个类似的困难也被注意到了. 19 世纪教科书中所欣赏的概念，是在曲面上内接一个三角形面的多面体. 当三角形的边长趋向于 0 时，它们的面积的和的极限就取成曲面的面积. 用分析的话来说，如果曲面是由

$$x = \phi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v)$$

给出的，那么曲面面积的公式就是

$$\int_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 A, B 和 C 分别是 y 和 z，x 和 z，x 和 y 的 Jacobi 行列式. 但是问题又出现了：如果 x, y 和 z 没有导数，这个定义又应是什么样子呢？为了把情况搞得更复杂些，H. A. Schwarz 在给 Hermite 的信中作出了一个例子①，其中甚至对于任何一个普通的圆柱面，都可以选择三角形使得曲面面积成为无穷大②. 曲面面积的理论也是通过测度的概念重新进行考虑的.

在 1900 年左右，还没有一个人证明用 Jordan 和 Peano 的定义的每一条闭的平面曲线围住一块面积. Helge von Koch(1870—1924)③作出了一条连续但不可微、周长为无穷大但围住一块有限

---

① *Ges. Math. Abh.*, 2, pp. 309～311.

② 这个例子可以在 James Pierpont 的 *The Theory of Functions of Real Variables*(Dover 1959 年重印，第 2 卷第 26 页)中找到.

③ *Acta Math.*, 30, 1906, 145～176.

面积的曲线,使面积问题变复杂了.从边长为 $3s$ 的等边三角形 ABC 开始(图 42.6).在每一边的居中的三分之一段上作一个边长为 s 的等边三角形,并把每一个三角形的底边抹掉.这样的三角形就有 3 个.然后在新的图形中,在长为 s 的每一条在外部的线段上,在它的居中的三分之一段上作一个边长为 $s/3$ 的等边三角形.然后把每一个三角形的底边抹掉.这种三角形将有 12 个.然后在得到的图形的外部线段上,作一个边长为 $s/9$ 的等边三角形.这样的三角形有 48 个.依次得到的图形的周长是 $9s$, $12s$, $16s$, …,因而这些周长变为无穷大.然而极限图形的面积却是有限的.因为,由众所周知的等边三角形的(用边长表示的)面积公式,即如果边长是 b,面积就是 $(b^2/4)\sqrt{3}$,因此原三角形的面积是 $[(3s)^2/4]\sqrt{3}$.第一次得到的 3 个三角形增加的面积是 $3(s^2/4)\sqrt{3}$.因为下一次增加的三角形的边长是 $s/3$,且数目是 12 个,所以增加的面积是 $12(s/3)^2\sqrt{3}/4 = (s^2/3)\sqrt{3}$.于是面积的和等于

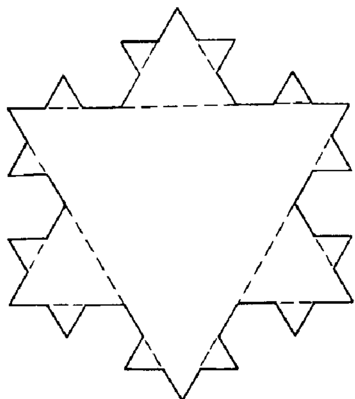


图 42.6

$$S = \frac{9s^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4}s^2\sqrt{3} + \frac{s^2}{3}\sqrt{3} + \frac{4s^2}{27}\sqrt{3} + \cdots$$

这是一个无穷的几何级数(第一项除外),公比是 4/9.所以

$$S = \frac{9s^2}{4}\sqrt{3} + \frac{(3/4)s^2\sqrt{3}}{1-4/9} = \frac{18}{5}s^2\sqrt{3}.$$

Peano 曲线和 Hilbert 曲线也产生了这样一个问题,即我们所说的维数究竟是什么？正方形本身是二维的,但是当它作为一条曲线的连续的象的时候,它就应该是一维的了.此外,Cantor 曾经证明,一条线段上的点能够和正方形的点建立一一对应(第 41 章

第7节).虽然这不是连续地从线段到正方形的对应,或者其他的什么方法,但它确实证明了维数不是点的多少的事情.它也不是为了固定点的位置而需用的坐标个数(如同 Riemann 和 Helmholtz 曾想过的那样),因为 Peano 曲线对每一个 t 值,指定唯一的 (x, y).

这些困难使我们看到,几何的严密化确实还没有回答所有出现的问题.许多问题是由下一个世纪的拓扑学家和分析学家解决的.围绕着基本概念的问题不断出现,这一事实本身再一次说明,数学不是像一个逻辑结构那样发展的.步入新的领域,甚至完善化旧的领域,都揭示出一些新的不容怀疑的缺陷.除了曲线和曲面问题的解决之外,我们还需要看见,通过分析的基础工作(即实数系)以及几何的基础工作,严密性的最后阶段是否已经达到了.

参考书目

Becker, Oskar: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Karl Alber, 1954, 199～212.

Enriques, Federigo: "Prinzipien der Geometrie", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907～1910, Ⅲ AB1, 1～129.

Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie*, 7th ed., B. G. Teubner, 1930.

Pasch, M. and M. Dehn: *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2nd ed., Julius Springer, 1926, 185～271.

Peano, Giuseppe: *Opere scelte*, 3 vols., Edizioni Cremonese, 1957～1959.

Reichardt, Hans: *C. F. Gauss, Leben und Werke*, Haude und Spenersche, 1960, 111～150.

Schmidt, Arnold: "Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie",见 Hilbert 的 *Gesammelte Abhandlungen*, 2, 404～414.

Singh, A. N.: "The Theory and Construction of Non-Differentiable Functions",见 E. W. Hobson: *Squaring the Circle and Other Monographs*, Chelsea (reprint), 1953.

第 43 章

19 世纪的数学

在 1900 年巴黎数学家大会上,我毫不犹豫地把 19 世纪称为函数论的世纪.

Vito Volterra

1. 19 世纪发展的主要特征

和前两个世纪一样,19 世纪数学上的进展,给数学带来了较大的变化. 这些变化,在一年又一年的发展中,几乎是觉察不到的,但是对它们自身,以及对未来发展的影响,都是极为重要的. 题材的巨大膨胀,新领域的开辟,以及旧领域的扩大,这些自然都是明显的. 代数学受到 Galois 的全新的刺激;几何学也再次活跃起来,并由于非 Euclid 几何的引入,以及射影几何的复兴,而发生了根本性的变化;数论发展成解析数论;分析学则由于复变函数论的引进,以及常微分方程和偏微分方程的发展,而无可估量地扩大了. 从技巧性发展的观点看,复变函数论是新的创造中最为重要的. 但从智力的重要性,以及最终影响数学本性的角度来看,最重大的发展还是非 Euclid 几何. 我们将要看到,它的影响带来的革命性远比我们迄今为止所指出过的要多得多. 这个世纪初期给数学研究划定的框框在一切方面都被突破了,数学爆炸成了上百个分支. 新成果的洪流,尖锐地否定了 18 世纪末占主导地位的一种意见,认为数学的资源已经枯竭了.

19 世纪时,数学活动在其他方面也扩展了. 作为学术民主化的必然结果,数学家的人数剧增. 虽然德国、法国和英国是主要的

中心,但意大利也在舞台上重现,美国则由于 Benjamin Peirce,G. W. Hill 及 Josiah Willard Gibbs 的工作而初露头角. 1863 年,美国创建了国家科学院. 但它和英国皇家学会、巴黎科学院及柏林科学院都不相同,国家科学院并不是作为提出和评论论文的科学聚会场所. 它出版一种杂志:《科学院进展》(*Proceedings of the Academy*). 为研究人员聚会,提呈科学论文,以及保证出版刊物,许多数学学会都组织起来了(第 26 章第 6 节). 到 19 世纪末,部分或全部登载数学研究的刊物,增加到约 950 种. 1897 年开始了每四年召开一次国际性会议的做法.

与数学活动的爆炸性扩张同时产生的,是一种不很健康的发展. 许多学科变成了自封的,它们各有自己的特殊术语和研究法. 任何学科的研究都承担着许多较专门的和较困难的问题,因而都要求愈来愈巧妙的思想、丰富的启发、以及较为隐晦的论证. 为了取得进展,数学家们一定要有大量理论上的背景和技术上的熟练. 专业化的倾向在 Abel, Jacobi, Galois, Poncelet 及其他人的一些工作中已明显可见. 尽管有些人通过诸如群、线性变换和不变量之类的概念,把重点放在许多分支之间的相互联系上,但总的效果还是分离成许多不同的而且互不关联的部分. Felix Klein 在 1893 年确实认为:各个分支的专业化和脱节现象可以用刚才说过的那些概念来克服. 但是这个希望落了空. 虽然 Poincaré 和 Hilbert 几乎是通才,但 Cauchy 和 Gauss 毕竟是了解这整个学科的最后两个人.

从 19 世纪开始,人们发现,有些数学家只是在数学的一些小角落里工作;非常自然地,每个人都认为自己的领域比别人的重要. 他的论文不再面向广大的公众,而只是为着专门的同行. 绝大多数文章不再包含它们与数学中较大问题之间的联系的任何象征,从而几乎不容易被许多数学家所接受,当然更谈不上适合更多人的胃口了.

除了题材方面的成就之外,19 世纪重新引进了严密的证明.不管个别的数学家对他们的结果的可靠性是怎样想的,事实是:从大约公元前 200 年起到 1870 年前后为止,几乎整个数学都建基于经验的和实用的基础之上.从明显的公理出发进行推理证明的观念早已看不见了.数学历史的惊人发现之一是:在它的内容如此广泛扩展的两千年中,这门学科的这个理想目标(严密论证)事实上是被忽视了.虽然(特别是 Lagrange)对于分析的严密化做过一些早期的努力(第 19 章第 7 节),但 Lacroix 却发表了更为独特的见解(第 26 章第 3 节).Fourier 的工作使得近代分析学者对之毛骨悚然.对 Poisson 说来,导数和积分只不过是差商与有穷和的缩写.从 Bolzano 和 Cauchy 开始的建立基础的运动,毫无疑问是由于担心那些急剧膨胀的依靠在微积分松软基础上的大量数学.这场运动由于 Hamilton 发现了不适合交换律的四元数而得到了加速,这个发现当然是对不加批判地接受数的原则的一种挑战.但更引起骚动的还是非 Euclid 几何的创立.它不但摧毁了公理的自明性和浅显可接受性这些观念本身,而且还揭露了在整个数学中一直被看成是最牢靠的证明中的不充分性.数学家们意识到了他们过去是易于受骗上当并且是依靠在直觉上.

到 1900 年,严密地建立数学的目标似乎已经达到了,数学家们几乎都为这一成就自鸣得意.在巴黎第二次国际会议上,Poincaré 夸耀道[①]:"我们是否已最终地达到了绝对的严密性了呢?在它进程的每个阶段上,我们的先驱者们都相信他们已经达到了.如果他们是受骗了,那么,难道我们就不会像他们一样受骗吗?……在今天的分析中,如果我们小心翼翼地尽力严密,那么只有三段论法或诉诸纯粹数的直觉是不可能欺骗我们的,所以现在

---

① *Comp. Rendu du Deuxième Congrès Internat. des Math.*, 1900, pub. 1902, pp. 121~122.

可以说,绝对的严密是已经达到了."当人们考察数系和几何学的基础的关键性结论时,以及在此数系上建立起来的分析时,人们可以看到这种心满意足的理由.数学现在已有了几乎所有的人都乐于接受的基础了.

无理数、连续性、积分和导数,这些基本概念的确切表达方式没有受到所有数学家的热烈欢迎.许多人并不懂得 ε-δ 语言,反而认为确切的定义对于了解数学,甚至对于严密的证明,都是不必要的,只是一时的爱好.尽管出现了没有导数的连续函数,填满空间的曲线,以及没有长度的曲线这类惊人的事情,但他们仍觉得,直觉已是足够好的了.Emile Picard 就偏微分方程中的严密性说道:"……真正的严密应该是多产的,与此相反的另一种严密则是纯粹形式的、令人厌倦的.它只不过是在它所触及的问题上投一个阴影罢了."①

尽管几何早已被严密化了,但严密化运动的一个直接后果却是,数和分析跑到几何前头去了.在非 Euclid 几何创立的当时及以后,数学家们认识到了,他们在接受 Euclid 几何的证明中曾经不知不觉地依赖于直观的基础,他们害怕在所有的几何推理中还会继续这样,因而宁愿要一个建筑在数上的数学.许多人赞成继续前进,并且在数的基础上建立起整个的几何学,而按照已说过的方法,通过解析几何,这是可能办到的.于是许多数学家谈论着数学的算术化,其实比较确切地说,应是分析的算术化.关于这一点,Plato 说:"上帝永远在进行几何化."直至这世纪中叶,Jacobi 还说:"上帝一直在进行算术化."在第二次国际会议上,Poincaré 明确地说:"今天,分析中只剩下整数以及有限的与无限的整数系统了,这些系统是用一簇等式或不等式的关系联系起来的.正如我们所说的,数学已经算术化了."Pascal 说过:"一切超越了几何的都

① *Amer. Math. Soc. Bull.*, 11,1904/1905,417;还见第 40 章第 7 节和第 41 章第 5 节与第 9 节.

超越了我们的理解力."①1900 年时,数学家们却乐意说:"一切超越了算术的都超越了我们的理解力."

数学的逻辑基础的建立——不管这基础是几何还是代数——进一步使数学从形而上学中脱离出来.数学的推理步骤在基础上和合法性上的含糊不清之处,在 18 世纪和 19 世纪早期,都由于引用形而上学的论点而蒙混过来了.这些论点虽然从来没有明确地说出来,却是被用来作为解释数学的依据的.实数和几何的公理化给了数学一个清晰的、独立的、而且是自足的基础.这样就不必再去求助于形而上学了.正如 Kelvin 勋爵评价的那样:"数学是仅有的好的形而上学."

数学的严密化可能已经满足了 19 世纪的需要,但它也教给了我们进一步发展严密化的一些事情.新建立的逻辑结构可能保证了数学的牢靠性;但是这种保证多少有点虚假.结果是,没有哪一条算术的,或代数的,或 Euclid 几何的定理被改变了,而分析中的定理也只是要求更加小心地陈述罢了.实际上,这些新的公理结构和严密化所作的一切,本质上都是数学家们过去就已经知道了的.确实,与其说这些公理能推断出什么定理,倒不如说它们只能承认那些现成的定理.所有这一切都意味着:数学发展不是依靠在逻辑上,而是依靠在正确的直觉上.正如 Jacques Hadamard 指出的,严密仅仅是批准直觉的战利品;或者像 Hermann Weyl 说的,逻辑是指导数学家保持其思想健康和强壮的卫生学.

2. 公理化运动

数学的严密化是通过各个分支的公理化来完成的.按照我们在第 41 章和第 42 章观察过的样板来看,公理化发展的实质就是:从一些不定义的术语出发,这些术语的性质由公理规定;工作的目

① "All that transcends geometry transcends our comprehension."

标是导出这些公理的推论.此外,对每个系统必须确立这些公理的独立性、相容性以及结构规定性(在前两章中我们已经考查过这些概念).

20世纪初期,公理化方法不仅使许多旧的和新的数学分支的逻辑基础得以建立,而且也确切地揭示出每个分支以哪些假定作为基础,并使得有可能比较和弄清各个分支间的联系.对于这个方法的价值,Hilbert是很热情的.在讨论到由于把数学的各个分支建立在牢靠的基础之上,因而它大致已经达到了完满的状态时,Hilbert评论道[①]:

> 的确,不管在哪个领域里,对于任何严正的研究精神来说,公理化方法都是并且始终是一个合适的不可缺少的助手;它在逻辑上是无懈可击的,同时也是富有成果的;因此它保证了研究的完全自由.在这个意义上,用公理化方法进行研究就等于用已掌握了的东西进行思考.早年没有公理化方法的时候,人们只能朴素地把某些关系作为信条来遵守,公理化的研究方法则可去掉这种朴素性而使信仰得到利益.

Hilbert在他的《公理化思想》(Axiomatisches Denken)的最后一部分[②]中再一次赞扬了这个方法:

> 能够成为数学的思考对象的任何事物,在一个理论的建立一旦成熟时,就开始服从于公理化方法,从而进入了数学.通过突进到公理的更深层次……我们能够获得科学思维的更深入的洞察力,并弄清楚我们的知识的统一性.

---

① *Abh. Math. Seminar der Hamburger Univ.*, 1,1922, 157～177 = *Ges. Abh.*, 3,157～177.

② *Math. Ann.*, 78,1918, 405～415 = *Ges. Abh.*, 3,145～156.

> 特别是，得力于公理化方法，数学似乎就被请来在一切学问中起领导的作用.

许多数学家趁此机会，通过略去、否定或用一些别的方式改变所建体系的公理，来探索新问题. 这个活动，以及数学各个分支的公理基础的建立，叫做公理化运动. 它延续为一种时髦的活动. 其所以有这样巨大的吸引力，部分是由于在几个主要分支的牢固公理基础建立之后，刚才所说的那些变化，相对来说是比较容易入门和探究的. 然而，数学上任何新的发展，总是吸引着这样的人们：他们寻求大有开发余地的领域或真挚地相信，数学的未来就在那个特殊的范围之内.

3. 作为人的创造物的数学

从数学未来发展的角度看，这个世纪发生的最重要的事情是，获得了数学与自然界的关系的正确看法. 对于我们评述过他们工作的许多人说来，尽管没有讨论过他们的数学观点，但是像希腊人，Descartes, Newton, Euler 和许多别的人，我们却说过，他们相信数学是真实现象的准确描述，并且认为他们自己的工作揭示了天地万物的数学设计. 数学确也研究抽象，但并不比物理对象(或事件)的理想形式更抽象. 甚至像函数和导数这类概念，也是为真实现象所要求的，并且是为描写它们服务的.

除了已经说过的支持这种数学观点的人之外，数学家们对于几何学里空间维数的限制，更清楚地表明了数学与实际联系得何等密切. 例如，在《天体》(*Heaven*)的第一卷里，Aristotle 就说：“直线在一个方向上有大小，平面在 2 个方向上有大小，而立体在 3 个方向上有大小；除此以外，就没有其他的大小了，因为这个 3 已经是全部了……不同种的大小之间不能转化，譬如从长度到面积，从

面积到体积都不能转化.”在另一页上他又说:“……没有一种大小能超越3,因为没有比3维更多的,”他还加了一句,“因为3是一个完全数.”Wallis在他的《代数》里把高维空间看成是“自然界里的怪物,它比希腊神话中狮头羊身蛇尾的或半人半马的妖怪还难以想象.”他说:“长、宽、厚占有了整个空间;连幻想也不能想象在这个3之外还有一个第4个局部的维数.”Cardan,Descartes,Pascal和Leibniz也都考虑到第4维的可能性,但都认为荒谬而排除了.事实上,只要代数被束缚于几何,则多于3个量的乘积就会被拒绝.Jacques Ozanam指出过,一个多于3个字母的乘积将是“有多少字母就有多少维数”的一种度量,“但这只能是一种想象,因为在自然界里,我们并不知道任何一个多于3维的量.”

甚至在19世纪初期,数学上的高于3维的几何学还是被拒绝的.Möbius在他的《重心的计算》(*Der barycentrische Calcul*,1827)中指出,在3维空间中2个互为镜像的几何图形是不能重叠的,却能够在4维空间中叠合起来.但后来他又说①:“然而,因为这样一种空间是不能想象的,所以叠合是不可能的.”直到19世纪60年代,Kummer还嘲弄4维几何的思想.当然,只要把几何学与物理空间的研究等同起来,则所有这些人对于高维几何的非难就都是正当的了.

但是数学家们无意中逐渐引进了一些没有或很少有直接物理意义的概念,其中负数和复数是最令人费解的.因为这两种数在自然界中没有“实在性(reality)”,所以直到19世纪初,虽已经常被人使用,但仍然受到怀疑.把负数当作是直线上一个定向的距离,把复数当作是平面上的点或向量,这种几何解释,虽然如Gauss后来所说,给予负数和复数以直观意义并使它们成为可以接受的,但是可能因此推延了数学处理人为概念的实现.到后来,四元数、非Euclid几何、几何中的复元素、n维几何、稀奇古怪的函数,以及

① *Ges. Werke*, 1,172.

超限数的引进,则迫使人们认识到数学的人为性(artificiality).

非 Euclid 几何对这方面的冲击前已提过(第 36 章第 8 节),现在必须考察 n 维几何的影响. n 维空间的概念在 d'Alembert, Euler 和 Lagrange 的分析著作中无关紧要地出现了. D'Alembert 在《百科全书》的"维数(dimension)"一条中提议把时间想象成第 4 个维数. Lagrange 在研究化二次型为标准型时无意中引进了 n 个变量的二次型. 他在他的《分析力学》(1788)和《解析函数论》(1797)中,也把时间作为第 4 个维数. 在后一著作中,他说:"这样,我们可以把力学看成是一种 4 维几何学,而把分析力学看成是解析几何的一种推广."Lagrange 在他的著作中把 3 个空间坐标和表示时间的第 4 个坐标置于同等地位. 更进一步,1828 年 George Green 在他的关于位势理论的论文里,毫不犹豫地考虑了 n 维位势问题;关于这个理论,他说,"已经不再像过去那样局限于空间的 3 个维数了."

在 n 维数上的这些早期的瓜葛,并不是有意要作为几何学本身的研究. 它们只是不再受到几何束缚的分析工作的自然推广. 引入 n 维语言,部分原因只是作为分析思维的一种便利和帮助. 把 $(x_1, \cdots, x_n)$看成一个点,而把 n 个变量的一个方程看成是 n 维空间的一张超曲面. 用 3 维空间中这些术语的意义来思考,有助于人们获得对分析工作的洞察力. 事实上,Cauchy 确实强调过,n 维空间的概念在许多分析研究中是有用的,特别是在数论中①.

严肃地研究 n 维几何在 19 世纪也进行了,虽然并不意味着有一个 n 维的物理空间. 这门抽象几何的奠基人是 Grassmann. 在他 1844 年的《扩张研究》(*Ausdehnungslehre*)中,人们可以找到完全一般的 n 维几何的概念. Grassmann 在 1845 年发表的一篇札记中写道:

---

① *Comp. Rend.*, 24, 1847, 885 ~ 887 = *Œuvres*, (1), 10, 292~295.

> 我的扩张的演算建立了空间理论的抽象基础;即它脱离了一切空间的直观,成为一个纯粹数学的科学;只是在对[物理]空间作特殊应用时才构成几何学.
>
> 然而扩张演算中的定理并不单单是把几何结果翻译成抽象的语言;它们有非常一般的重要性,因为普通几何受[物理]空间的三个维数的限制,而抽象科学则不受这个限制.

Grassmann 附带又说,通常意义的几何学不适当地被看成是纯粹数学的一个分支,其实它是应用数学的一个分支,因为它研究的课题并不是由智力创造的,而只是客观提供给它的. 它研究物质. 但他又说,应当能够创造出一种纯粹智力的课题,它把"扩张"当作一种概念来研究,而不是研究感官觉察到的空间. 这样, Grassmann 的工作就成为一种发展学术思想的观点的代表作,确认纯粹思维能够建立在可以有也可以没有物理应用的任意结构上.

与 Grassmann 相独立,Cayley 也承担了用分析方法研究 n 维几何的任务. 而且,如他所说:"无需求助于任何形而上学的概念."在 1845 年的《剑桥数学杂志》(*Cambridge Mathematical Journal*)上,Cayley 发表了"n 维解析几何的几章"[①]. 这个著作给出了 n 个变量的分析结果,当 $n=3$ 时,叙述的是关于曲面的已知定理;尽管在 n 维几何学中他没有作出什么特别新奇的东西,但概念是完全抓住了的.

同时,Riemann 在他的 1854 年的《试用讲义》(*Habilitationsvortrag*)中写了"奠定几何学基础的几个假设". 他毫不犹豫地研究 n 维流形,虽然他主要关心的是 3 维物理空间的几何. 那些遵循这篇基本文献的人——Helmholtz, Lie, Christoffel, Beltrami,

---

① 4. 119～127 = *Collected Math. Papers*, 1,55～62.

Lipschitz, Darboux,及其他一些人——继续做了 n 维空间方面的工作.

n 维几何的概念即使在引进以后很长一段时期,还是受到一些数学家的顽固的抵抗.同负数、复数的情形一样,在这里,数学超越了经验提供的概念前进着,因而数学家们就不得不领悟到,他们的学科要能够考虑思维创造的概念,而如果说他们的学科曾经是自然界的一种复写的话,那么今后就不再是这样了.

可是,大约到 1850 年以后,人们才接受了这样一种观点,即数学能够引进并研究一些相当任意的概念和理论,或者像四元数那样,它们没有直接的物理解释,但却是有用的;或者像 n 维几何那样,它们满足一种普遍性的要求. Hankel 在他的《复数系理论》(*Theorie der complexen Zahlensysteme*, 1867,第 10 页)中为数学辩护,说它是"纯粹的智力,一种纯粹的形式理论,其对象不是量的组合或者它们的表象——数,而是那些可以对应于实际事物或实际关系的思维的东西,即使这种对应并不必要."

Cantor 为了捍卫他所创造的超限数,说它是一种存在的、真正确定的量时,主张数学和其他领域的区别在于它自由地创造自己的概念,而无需顾及是否实际存在. 1883 年他说①:"数学在它自身的发展中完全是自由的,对它的概念的限制只在于:必须是无矛盾的并且和先前由确切定义引进的概念相协调……数学的本质就在于它的自由."他喜欢用"自由数学"这个名词,胜过于用通常说的"纯粹数学".

数学的新观点也蔓延到了老的以物理学为基础的分支. Alfred North Whitehead 在他的《一般代数》(*Universal Algebra*, 1898,第 11 页)中说:

> ……代数变换法则的合法性是不依赖于算术的.如果

① *Math. Ann.*, 21,1883,563～564 = *Ges. Abh.*, 182.

> 有依赖的话,那么显然可见,代数表达式一旦在算术上不可理解,则关于它们的所有法则就必定失去合法性.代数法则虽是由算术提供的,但却不依赖于它.代数法则完全依靠约定,用以表达某些把符号分组的模式必须被认为是等同的.这就给形成代数符号的记号指定了一定的性质.

代数学是与含义无关的一种逻辑发展."显然我们可以用我们愿意用的任何符号,并按我们选定的任何法则去处理它们"(第4页).Whitehead 指出,符号的这种任意处理可以是比较随便的,而只有那些能被赋予某种意义的或具有某种应用的解释才是重要的.

几何学也割断了它与物理实在性的联系.正如 Hilbert 在他1899年的《基础》中指出的,几何学所说的东西,其性质是由公理规定的.虽然 Hilbert 所说的只是为了考察数学的逻辑结构这个目的而必须用来探讨数学的一种战略,然而他支持并鼓励了数学是与自然界里的概念和法则全然不同的这样一种观点.

4. 真理的丧失

那些在真实世界里没有直接对应物的概念之被引进并逐步被接受,确实迫使人们承认数学是一种人为的并且多少带有任意性的创造物,而不仅仅是从自然界里引导出来的本质上是真实事物的一种理想化.但是随着这种认识的深化,带来了更加意义深远的发现——数学并不是关于自然的一堆真理.使真理的争论得以展开的是非 Euclid 几何,虽然它的冲击被几乎所有的数学家(除了少数几个之外)所特有的保守主义和封闭思想延误了.哲学家 David Hume(1711—1776)早就指出:自然界并不顺应固定的模式和

必然的法则;但是由 Kant 提出来的物理空间是 Euclid 空间的这种观点则占统治地位. 甚至 Legendre 在他的 1794 年的《几何初步》中依然相信 Euclid 公理是自明的真理.

对几何学来说,至少在今天看来是正确的观点,首先是由 Gauss 明确表述出来的. 早在 19 世纪初,他就认为几何学是一门经验科学,应当与力学并列. 而算术和分析却是先验的真理. 1830 年 Gauss 写信给 Bessel 说[①]:

> 按照我的最深的信念,在我们先验的知识中间,空间理论与纯粹算术占有完全不同的位置. 在我们关于空间理论的全部知识中,对作为纯粹算术的特征的必然性(即绝对真理)缺少完全的信念;我们还必须谦卑地说,如果数仅仅是我们思维的产物,那么空间在我们的思维之外有其实在性,它的法则我们不能完全先验地规定.

然而 Gauss 似乎曾经有过相反的意见,因为他也明确表达过全部数学都是人为的这个见解. 他在 1811 年 11 月 21 日写给 Bessel 的信中[②],谈到单复变函数时说道:"千万不要忘记,像一切数学结构一样,函数仅仅是我们自己的创造物,因而当定义失却意义时,人们就不应该问,它是什么? 而应该问,为了使它继续有意义,什么样的假定才是方便的?"

不管 Gauss 对几何学持怎样的观点,绝大多数数学家还是相信,在几何学里有着基本的真理. Bolyai 就认为,几何学中的绝对真理就是 Euclid 几何与双曲几何共有的那些公理和定理. 他并不知道椭圆几何,所以在他所处的时代还不能意识到,在这些公有的公理中有许多条并不是所有几何所共有的.

Riemann 在他的 1854 年的论文《奠定几何学基础的假设》中,

---

① *Werke*, 8,201.

② *Werke*, 10,363.

仍然相信某些关于空间的命题是先验的,虽然这些命题并不断言物理空间是真正的 Euclid 空间. 但是物理空间局部地是 Euclid 空间.

Cayley 和 Klein 对 Euclid 几何的实在性仍然恋恋不舍(参看第 38 章第 6 节). Cayley 在英国科学促进协会的主席致词[1]中说道:“……注意到 Euclid 空间长期以来一直被当作是我们经验的物理空间,所以几何学的命题对于 Euclid 空间不仅仅近似地是真实的,而且还是绝对真实的.”虽然 Cayley 和 Klein 本人都曾经在非 Euclid 几何方面做过研究工作,但是他们却把非 Euclid 几何看成是在 Euclid 几何中引进新的距离函数时得到的新奇结果. 他们没有看到非 Euclid 几何和 Euclid 几何一样基本,一样可以应用.

Bertrand Russell 在 19 世纪 90 年代提出了这样一个问题:空间的哪些性质对经验是必需的,而且是由经验假定了的. 也就是说,如果在这些先验的性质中任何一条被否定,那么经验就要成为没有意义的了. 他在《关于几何基础的随笔》(*Essay on the Foundations of Geometry*, 1897)中,赞同 Euclid 几何不是一门先验学问这种见解. 他断言,就一切几何学来说,倒不如认为射影几何是先验的. 这个结论在 1900 年前后,从射影几何的重要性的观点来看,是可以理解的. 然后他就把 Euclid 几何和一切非 Euclid 几何所共有的公理,当作先验的东西添加到射影几何里去. 加进去的那些东西(空间的齐次性、维数的有穷性和距离的概念)使得度量成为可能. 他又把空间是 3 维的以及实际空间是 Euclid 空间这些事看作是经验的.

度量几何可以由射影几何通过引进一个度量而导出,Russell 认为这件事只不过是一种技术上的成就,在哲学上没有什么重要性. 度量几何是一种逻辑推论,是数学中的一个独立分支,但却不

---

① *Report of the Brit. Assn. for the Adv. of Sci.*, 1883, 3 ~ 37 = *Coll. Math. Papers*, 11, 429~459.

是先验的. 在对待 Euclid 几何和几个基本的非 Euclid 几何的态度上, Russell 不同于 Cayley 和 Klein, 他认为所有这些几何都处于同等的地位. 因为具有上面那些性质的度量空间只有 Euclid 空间、双曲空间和单、双椭圆空间这几种, 于是 Russell 就断言, 所有可能的度量空间就只有这几种, 而 Euclid 空间则当然是仅有的物理上可以应用的空间. 其他那些空间在证明可能有别的几何学时, 有其哲学上的重要性. 现在我们回过头来看, 可以说 Russell 无非是用一种射影癖代替了 Euclid 癖.

虽然数学家们慢慢地才认识到 Gauss 早就清楚地看到了的这一事实, 即 Euclid 几何的物理真实性是完全没有保证的; 但是他们逐步来到这个观点的周围, 并且接受了 Gauss 的这一有关信念: 数学的真理存在于算术中, 因而也存在于分析中. 例如 Kronecker 在他的《关于数的概念》[①]中就坚持算术中的规则的真理性, 但却否定几何中的规则的真理性. 至于 Gottlob Frege(我们在后面要提到他的工作), 他也坚持算术的真理性.

然而, 甚至算术和建立在它上面的分析, 也很快地被人怀疑了. 非交换代数, 特别是四元数和矩阵的创立, 明确地提出了这样的问题: 怎么能断定普通数具有它是真实世界的真理这种特权般的性质呢? 针对算术的真理性的第一个挑战来自 Helmholtz. 在一篇著名的论文里[②], 他坚决主张: 我们关于物理空间的知识只能从经验中来, 而且依赖于用来作为量尺和其他用途的刚体的存在性. 后来在他的《算与量》(*Zählen und Messen*, 1887)中, 他还攻击了算术的真理性. 他认为, 把量和等同性客观地应用于经验是否有意义或有效, 是算术中的主要问题. 算术本身也许只不过是算术运算的结果的一本首尾一贯的账目罢了. 它处理的是符号, 也可以看

---

① *Jour. für Math*, 101, 1887, 337 ~ 355 = *Werke*, 3, 249~274.

② *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 15, 1868, 193 ~ 221 = *Wiss. Abh.*, 2, 618~639.

成是一种游戏.但是这些符号却被应用于实在客体以及它们之间的联系,还给出关于自然界的真实作用的结果.为什么这样做是可能的呢?在什么条件下这些数和运算能够应用到实在客体上去呢?特别是,两个客体的等同化的客观意义是什么呢?还有,物理上的加法为了要同数学上的加法一样处理,必须具有什么样的特性呢?

Helmholtz 指出:数的可应用性既不是数的定律的真理性的一个偶然事件,也不是它的证明.某些种经验启示数,而数又能应用于这些经验. Helmholtz 说,当把数应用到实在客体上去的时候,这些客体必须不会自行消失,不会彼此合并,也不会分成两个.在物理上,一个雨点加上另一个雨点并不产生两个雨点.只有经验才能告诉我们,一个物理集合里的客体是否保持它们的同一性,使得这个集合里的客体有确定的个数.同样地,要想知道什么时候物理量之间的等同性可以应用也只有依靠经验.任何一个有关定量的等式论断必须满足两个条件:如果两个客体互换位置,它们必须保持相等;还有,如果客体 a 等于客体 c,而客体 b 也等于客体 c,则客体 a 就必须等于客体 b.这样,我们就能说重量的相等和时间间隔的相等,因为对于这些客体来说,等同性能够确定.就耳朵来说,两个音调都可以等于介于它们之间的一个音调,而耳朵还能分辨出原来的两个音调.在这里,等于同一个事物的事物是彼此不相等的.为了求得并联电阻的总电阻,我们不能把电阻值都加起来;我们也不能用任何一种方法把不同介质的折射率组合起来.

到 19 世纪末,盛行的看法是:数学里的一切公理都是任意的.公理只不过是导出结论的推理的基础.既然公理不再是关于包含在它里面的概念的真理,于是也就不用去管这些概念的物理意义了.当公理和实在之间产生某种联系的时候,这种物理意义至多只能是发现(真理)的向导.即使是从物理世界抽象出来的概念也是

这样. 到 1900 年,数学已经从实在性中分裂出来了;它已经明显地而且无可挽回地失去了它对自然界真理的所有权,因而变成了一些没有意义的任意公理之必然推论的随从了.

许多人把这种真理的丧失和表面上的任意性,以及数学思想与结果的主观性本质,看成是对数学的一种否定,使他们深感烦恼. 于是有些人采取一种神秘的观点,企图寻求对数学的实在性和客观性的承诺. 这些数学家赞成这样一种思想,即认为数学本身就是一种实在,是真理的一个独立部分,数学对象所给予我们的就和真实世界的对象所给予我们的一样. 数学家只不过是发现这些概念和它们的性质罢了. Hermite 在给 Stieltjes 的信中说[①]:"我相信,数和分析中的函数不是我们精神的任意产物;它们在我们之外存在着,并且和客观实在的对象一样,具有某种必然性的特征;我们找到或发现它们、研究它们,就和物理学家、化学家及动物学家所做的事情一样."

Hilbert 1928 年在波洛尼亚(Bologna)国际会议上说[②]:"如果数学没有真理的话,那么我们知识中的真理、科学的存在和进步尤其会怎么样呢? 的确,今天,在一些专门著作和公开的演讲中,经常出现一种关于知识的怀疑主义和意气消沉;这是某种我认为有破坏性的神秘主义."

20 世纪的一位杰出的分析学家 Godfrey H. Hardy(1877—1947)在 1928 年说道[③]:"数学定理的真伪,它们的真实性和谬误性是独立于我们对它们的了解的. 在某种意义上,数学的真理是客观实在的一部分."他在《一位数学家的自白》(*A Mathematician's Apology*,1967 年版,第 123 页)一书中表达了同样的看法:"我相信数学的实在性是在我们之外,我们的作用只是发现它们或观察

---

① *C. Hermite-T. Stieltjes Correspondance*, Gauthier-Villars, 1905,2, p. 398.

② *Atti del Congresso*, 1,1929, 141 = *Grundlagen der Geometrie*, 第 7 版,第 323 页.

③ *Mind*, 38,1929,1～25.

它们,而那些被夸张地描绘成为我们的‘创造物’的定理,其实只是我们观察的记录.”

5. 作为研究任意结构的数学

19 世纪的数学家起先都关心自然界的研究,因而物理学就必然成为数学工作的主要启示.最伟大的人物,如 Gauss, Riemann, Fourier, Hamilton, Jacobi 和 Poincaré;次一级的知名人物,如 Christoffel, Lipschitz, Du Bois-Reymond, Beltrami,以及上百个其他人物,都直接在物理问题和由物理研究所提出的数学问题上工作着.甚至被公认为纯粹数学家的人,譬如 Weierstrass,也研究物理问题.事实上,在物理问题为数学研究提供意见和方向方面,这一世纪比以往任何一个世纪都多.一些高度复杂的数学,正是为了处理这些物理问题而创建出来的.Fresnel 曾说过,“大自然并不被分析的困难所阻碍”,但是数学家们也没有被它们吓倒,而且克服了它们.至少从 Diophantus 的工作以来,追求内在的美学上满足的唯一主要分支就是数论.

然而在 19 世纪,数学家们第一次不仅把他们的工作推进到远远超出科学技术的需要,而且还提出并解答一些与实际问题无关的问题.这种发展的理由可以说明如下:2000 多年来关于数学是自然界真理的信念被粉碎了.但是现在被人们认为是任意的数学理论,却又在自然界的研究中被证明是有用的.虽然已有的理论,在历史上从自然界取得了许多启示;但是或许会有单纯由精神构造出来的新的理论,在表现自然界方面也将被证明是有用的.于是数学家们感到有一种创造任意结构的自由.这个思想被用来证明数学研究中新的自由是正确的.然而,到 1900 年,已经有的明显的少数几个结构,以及此后的许多这类创造物,看来都是如此之人为,甚至对于潜在的应用来说,也是如此之遥远;它们的赞助人也

只好辩解说,这是为着它们自身及内在的要求.

数学应当包含那些并不是直接地或间接地由于研究自然界的需要而产生出来的任意结构.这种观点逐渐兴起并被人们接受了,于是造成了今天的纯粹数学和应用数学的分裂.和传统决裂,当然不能不引起论战.我们可以用一些篇幅来引证双方的一些论点.

Fourier 在他的《热的解析理论》一书的序言中写道:"对自然界的深入研究是数学发现的最丰富的源泉.这种研究的优点不仅在于有完全明确的目的性,还在于排除含糊不清的问题和无用的计算.这是建立分析自身的一种方法,是发现至关紧要的、在科学里必须经常保存的思想的一种方法.基本的思想就是那些表现自然界发生的事件的思想."他还强调应当把数学应用到对社会有用的问题上去.

虽然 Jacobi 在力学和天文学方面都做过第一流的工作,但是他还是和 Fourier 进行争论.1830 年 7 月 20 日,他写信给Legendre 说①:"确实地,Fourier 持有这样一种意见,即认为数学的主要目标是公众的利益和对自然现象作解释;但是,像他那样的一个科学家应当知道,科学的唯一对象是人类精神的光荣,基于这点,一个数[论]问题就和一个关于行星系的问题一样有价值."

在这整个世纪,当许多人被纯粹数学的倾向搅扰的时候,反对的声音也喊出来了.Kronecker 写信给 Helmholtz 说:"您的合情合理的实际经验以及有兴趣的问题,造成的财富将给予数学以新的方向和新的刺激……片面的、内省的数学思索把人们引向不毛之地."

Felix Klein 在他的《陀螺的数学理论》(*Mathematical Theory of the Top*, 1897,1~2 页)中提出:"纯粹科学和物理学中有纯粹科学最重要应用的那些部门,应该再一次把它们密切结合起来,在

① *Ges. Werke*, 1,454~455.

Lagrange 和 Gauss 的工作中证明了这种结合是非常有成果的,它们是数学科学最需要的礼品."20 世纪初,Emile Picard 在《近代科学及其实际状况》(*La Science moderne et son état actuel*, 1908)的演讲中,对抽象化的趋势和没有意义的问题提出了警告.

稍后,Felix Klein 再次直截了当地说[①],他担心创造任意结构的自由会被滥用.他强调说,任意结构就是"一切科学的死亡.几何学的公理……不是任意的,而是切合实际的陈述.一般说来,它们是由对空间的知觉归纳出来的,它们的确切内容则是由权宜的办法确定的."为了判断非 Euclid 几何公理,Klein 指出,视觉只能在一定限度内验证 Euclid 平行公理.在另一场合,他指出:"有自由特权的任何人都应当承担义务."所谓"义务",他指的是在对自然界研究中的贡献.

不顾这些告诫,抽象化的趋势,为推广而推广的趋势,以及对任意选择问题的追随,仍旧继续着.为了探讨许多有联系的具体问题而去研究一整类问题,为了求得一个问题的实质而进行抽象;所有这些合理的需要都成为在自身内并为自身而进行推广和抽象的借口.

多少也是为了反对把这种趋势推广开来,Hilbert 不但强调具体问题是数学的鲜血,而且还不辞劳苦地于 1900 年宣布了共有 23 个未解决的问题的一览表(见参考书目),在巴黎第二次国际数学家大会上,他在演讲中把它们一一罗列. Hilbert 的名望促使许多人研究这些问题.没有任何一种荣誉能够比解决由这样一位伟大人物提出来的问题更令人神往了.但是自由创造、抽象化和推广的势头还是没有被堵住.数学从自然界和科学中解脱出来,继续着它自己的行程.

---

① *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Macmillan, 1939; Dover(重印), 1945,第 2 卷,p. 187.

6. 相容性问题

从逻辑观点来看,在19世纪末,数学是一堆结构,每个结构都建立在它自己的公理体系上.正如我们已指出的,任何这样一个结构所必备的性质之一是它的公理的相容性.只要数学还被看成是关于自然的真理,则出现互相矛盾的定理的可能性就不会发生;而且实际上这种思想将会被认为是荒谬的.当各种非Euclid几何被创造出来的时候,它们与客观存在在表面上的偏离,确实引起了对非Euclid几何公理相容性的疑问.正像我们已看到的,问题是这样解决的,非Euclid几何的相容性依赖于Euclid几何的相容性.

到19世纪80年代,无论是算术还是几何都不是真理的实现的认识,迫使人们去研究这些分支的相容性.Peano和他的学派从19世纪90年代开始考虑这个问题.他相信能够提出弄清相容性的明确的判别法.然而有几件事证明他错了.在假定算术公理相容性的基础上,Hilbert确实成功地建立了Euclid几何的相容性(第42章第3节).但是算术公理的相容性还是没有建立,Hilbert把这个问题列为他在1900年的第二次国际会议上提出的一览表中的第二个;在他的《公理化思想》(Axiomatisches Denken)①中,他又把这个问题强调为数学基础的基本问题.其他许多人也觉悟到这个问题的重要性.1904年Pringsheim(1850—1941)强调过②,数学所寻求的真理正好就是相容性.有关这个问题方面的工作,我们将在第51章中再进行考察.

---

① *Math. Ann.*, 78,1918, 405 ~ 415 = *Ges. Abh*, 3,145~156.

② *Jahres. der Deut. Math.-Verein*, 13,1904,381.

7. 向前的一瞥

从 1600 年以来,数学创造的步幅一直在加大,20 世纪肯定也是这样.在 19 世纪里所从事的许多领域,在 20 世纪进一步得到了发展.然而在这些领域里,较新工作的详细情况可能只有专家才感到兴趣.所以我们把 20 世纪工作的报告只限制在一开始就在这时期占突出地位的那些领域;而且,我们将只考虑这些领域的开头部分.要想恰当地评价这世纪第二个和第三个 25 年的发展,现在未免太早了.我们注意到,在过去曾经精力旺盛地热情地从事过的许多领域,曾被它们的拥护者誉为数学的精髓所在,其实只不过是一时的爱好,或者在整个数学的征途上只留下少许的影响.上半世纪有信心的数学家们可能会认为他们的工作是最重要的,然而,他们的贡献在数学史上的地位,现在还是不能确定的.

参考书目

Fang, J.: *Hilbert*, Paideia Press, 1970. Sketches of Hilbert's mathematical work.

Hardy, G. H.: *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1940 and 1967.

Helmholtz, H. von: *Counting and Measuring*, D. Van Nostrand, 1930. *Zählen und Messen* 的译本 = *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 3,356~391.

Helmholtz, H. von: "Über den Ursprung Sinn und Bedeutung der geometrischen Sätze";英译:"On the Origin and Significance of Geometrical Axioms", in Helmholtz: *Popular Scientific Lectures*, Dover (reprint), 1962, pp. 223~249. 亦见 James R. Newman: *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, 1956,卷 1, pp. 647~668. 亦见 Helmholtz 的 *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 2,640~660.

Hilbert, David: "Sur les problèmes futurs des mathématiques", *Comptes Rendus du Deuxième Congrès International des Mathématiciens*, Gauthier-Villars, 1902,

58～114. 亦见德文, *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1900, 253～297, 和 Hilbert 的 *Gesammelte Abhandlungen*, 3, 290～329. 英译文见 *Amer. Math. Soc. Bull.*, 8, 1901/1902, 437～479.

Klein, Felix: "Über Arithmetisirung der Mathematik", *Ges. Math. Abh.*, 2, 232～240. 英译文见 *Amer. Math. Soc. Bull.*, 2, 1895/1896, 241～249.

Pierpont, James: "On the Arithmetization of Mathematics", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 5, 1898/1899, 394～406.

Poincaré, Henri: *The Foundations of Science*, Science Press, 1913. 特别看 43～91 页.

Reid, Constance: *Hilbert*, Springer-Verlag, 1970, 是一本传记.

第 44 章

实变函数论

> 如果 Newton 和 Leibniz 想到过连续函数不一定有导数——而这却是一般情形，——那么微分学就决不会被创造出来.
>
> Emile Picard

1. 起　源

一元或多元实变函数论的产生，是为了理解和弄清 19 世纪的一系列奇怪的发现. 连续而不可微的函数，连续函数的级数其和是不连续的，不逐段单调的连续函数，具有有界的但不是 Riemann 可积的导数的函数，可求长的但不符合微积分中弧长定义的曲线，以及作为可积函数序列的极限的不可积函数——这一切看来都与函数、导数和积分所期望的性态相矛盾. 进一步研究函数性态的另一个动机，来自 Fourier 级数的研究. 由 Dirichlet, Riemann, Cantor, Ulisse Dini(1845—1918), Jordan 和 19 世纪其他数学家们建立起来的 Fourier 级数理论，对于应用数学而言，当时已是一个相当令人满意的工具. 但是，那时发展起来的这种级数的性质，却不能给纯粹数学家以一个满意的理论. 函数和级数之间关系的统一性、对称性和完备性仍告阙如.

函数论研究的重点是积分论，因为看起来大多数不合适的地方都能够通过扩充积分的概念来解决. 因此在很大程度上，函数论的研究可以看成是 Riemann, Darboux, Du Bois-Reymond, Cantor 和另外一些人(第 40 章第 4 节)的工作的直接继续.

2. Stieltjes 积分

实际上,积分概念的第一次扩充,是从完全不同于刚才所说的一类问题中来的. 1894 年 Stieltjes(1856—1894)发表了他的《连分数的研究》(Recherches sur les fractions continues)[1],这是一篇很有独创性的论文,他从一个非常特殊的问题出发,并且解决得非常漂亮. 在这篇文章里提出的几个问题,在解析函数论和一元实变函数论里,本质上都是全新的. 尤其是为了表示一个解析函数序列的极限,Stieltjes 被迫引进了一种新的积分,推广了 Riemann-Darboux 的概念.

Stieltjes 把质量沿着一根直线的正的分布看成是点密度概念的推广(当然,点密度的概念是早已被应用了的). 他注意到这样一种质量分布可以用一个递增函数 $\phi(x)$ 给出,$\phi(x)$ 表示在区间 $[0, x]$ $(x>0)$ 上的总质量,ϕ 的跳跃点对应着质量在这个点集中. 对于区间 $[a, b]$ 上的这样一种分布,他明确地写出 Riemann 和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)),$$

其中 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是 $[a, b]$ 的一个划分,而 ξ_i 位于 $[x_i, x_{i+1}]$ 中. 然后他证明了,当 f 在 $[a, b]$ 上连续,划分的最大子区间趋于零时,这个和趋于一个极限,他把这个极限记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\phi(x)$. 虽然 Stieltjes 在自己的著作中使用了这个积分,但他除了对区间 $(0, \infty)$ 定义

$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}\phi(x) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}\phi(x)$$

以外,并没有进一步推进这个积分概念.

---

① *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*, 8,1894, J. 1~122,与 9,1895, A. 1 ~ 47 = *Œuvres complètes*, 2,402~559.

一直到很久以后,当 Stieltjes 积分确实找到了许多应用的时候(见第 47 章第 4 节),他的积分概念才被数学家们采用.

3. 有关容量和测度的早期工作

沿着完全不同的另一条思想路线,导致积分概念的不同推广的,就是 Lebesgue 积分. 因为函数不连续点的广延决定了函数的可积性,所以研究函数的不连续点集,就提出了怎样度量它的广延或"长度"的问题. 容量(content)理论及后来的测度论就是为了把长度概念扩充到普通直线上非完整区间的点集而引进的.

容量概念建基于下面的思想:考虑一个按某种方式分布在区间$[a, b]$上的点集 E. 暂时放宽些条件,假定 E 中的点都可以被$[a, b]$的小子区间包围或覆盖,使得 E 的点或者是$[a, b]$的子区间的内点,或者是子区间的一个端点. 我们愈来愈缩小这些子区间的长度,为了继续包住 E 的点,如果必要,可以再添加些别的子区间,但总的说来,要缩小这些子区间的长度的总和. 覆盖住 E 的点的那些子区间的长度总和的最大下界,就称为 E 的(外)容量. 这种不严格的形式并不是最后被采用的确定的概念,但它可以用来指明人们想干什么.

(外)容量概念是 Du Bois-Reymond 在他的《一般函数论》(*Die allgemeine Funktionentheorie*, 1882)中,Axel Harnack (1851—1888)在他的《微积分原理》(*Die Elemente der Differential-und Integralrechnung*, 1881)中,以及 Otto Stolz① 和 Cantor② 给出的. Stolz 和 Cantor 还用矩形和立方体等代替区间,把容量概念扩充到 2 维和高维点集.

不幸的是,容量概念的使用,并不是在所有方面都令人满意

---

① *Math. Ann.*, 23,1884,152~156.

② *Math. Ann.*, 23,1884, 453 ~ 488 = *Ges. Abh.*, 210~246.

的,然而却揭露了存在着正容量的无处稠密集(即一个区间上的集合,在该区间的任一子区间内它都不稠密),而以这样一个集合为不连续点集的函数在 Riemann 意义下是不可积的. 同时还揭露了,具有有界但不可积的导数的函数也存在. 但在 19 世纪 80 年代,数学家们都认为 Riemann 的积分概念是不能推广的.

为了克服上述容量理论的局限性,并为了把一个区域的面积概念严密化,Peano(《无穷小计算的几何应用》(*Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, 1887))引进了一个比较完满的并作了多次改善的容量概念. 他引进了区域的内容量和外容量. 假定考虑的是 2 维区域. 这里的内容量是包含在区域 R 内的一切多边形区域的最小上界,而外容量是包含区域 R 的一切多边形的最大下界. 如果内容量和外容量相等,这个公共值就是区域 R 的面积. 对于 1 维点集,思路是类似的,只须用区间代替多边形. Peano 指出,如果 $f(x)$在$[a, b]$上非负,则

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = C_i(R) \quad \text{而} \quad \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = C_e(R),$$

其中第一个积分是 f 在$[a, b]$上的下 Riemann 和的最小上界,而第二个积分是上 Riemann 和的最大下界;$C_i(R)$和 $C_e(R)$分别是由 f 的图形所围成的区域 R 的内、外容量. 因此,为要 f 是可积的,必须且仅须 R 具有在 $C_i(R) = C_e(R)$ 意义下的容量.

在 19 世纪的容量理论中,最先进的一步是 Jordan 迈出的(他把容量叫做 *étendue*). 他也引进了内容量和外容量[①],但概念陈述得更有力. 他的关于$[a, b]$中点集 E 的容量的定义,是从外容量出发的. 用$[a, b]$子区间的一个有穷集合覆盖 E,使得 E 的每一点是某个子区间的内点或端点. 那些至少含有 E 的一个点的所有子区间的长度总和的最大下界便是 E 的外容量. 内容量则定义为那些只含有 E 的点的$[a, b]$子区间长度总和的最小上界. 如果 E 的内

① *Jour. de Math.*, (4),8,1892, 69 ~ 99 = *Œuvres*, 4,427~457.

容量和外容量相等,那么它就有容量.除了用矩形及其高维类似物代替了区间外,Jordan 把同一概念运用到 n 维空间的点集.这时 Jordan 就能够证明所谓的可加性:**有限多个**不相交的、有容量的集合的并,其容量等于各个集合的容量之和.对于早期的容量理论,除了 Peano 的以外,这一点都是不对的.

Jordan 对容量的兴趣来源于,企图弄清楚平面区域 E 上的二重积分的理论.通常采用的定义是,把平面用平行于坐标轴的直线分成许多正方形 R_{ij}.平面的这种分划导致了 E 被分划成一些 E_{ij}.于是由定义

$$\int_E f(x, y)\mathrm{d}E = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \sum_{i, j} f(x_i, y_j) a(R_{ij}),$$

其中 $a(R_{ij})$ 表示 R_{ij} 的面积,和是对一切 R_{ij}(E 内部的 R_{ij},及含有 E 的点同时也许还含有 E 以外的点的 R_{ij})取的.为了使积分存在,必须证明那些非整个地包含在 E 内的 R_{ij} 可以忽略不计,换句话说,那些包含 E 的边界点的 R_{ij} 的面积的总和,要在 R_{ij} 的尺寸趋于 0 时趋于 0.过去,一般总是假定这是对的,而 Jordan 本人在他的《分析教程》的第一版(第二卷,1883)中就是这样做的.然而当 Peano 发现了填满矩形的特殊曲线之后,数学家们就更加小心翼翼了.如果 E 具有 2 维的 Jordan 容量,那么包含 E 的边界点的 R_{ij} 就可以忽略不计.Jordan 还能够得到用累次积分计算重积分的结果.

Jordan 在《分析教程》的第二版(第一卷,1893)中,写进了他的关于容量的研究及其对积分的应用.虽然 Jordan 关于容量的定义比他的前人优越,但也还不完全令人满意.按照他的定义,一个有界开集不一定有容量,包含在一个有界区间里的有理点集也没有容量.

容量理论的下一步是 Borel 作出的.在处理表示复函数的级数收敛的点集时,他被引向他称之为测度的理论.Borel 的《函数论

讲义》(*Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898)包含了他在这方面最主要的工作.他看出容量的早期理论中的缺陷并对之作了补救.

Cantor 曾经证明,直线上的任一开集 U 必定是一族可数个两两不相交的开区间的并集. Borel 利用 Cantor 的结果,不再用有穷个区间包围 U 去逼近 U 的方法,而是提出把一个有界开集的各个构成区间的长度总和,作为这个开集的测度.然后他定义可数个不相交可测集的并集的测度为各个测度的总和;如果 A 和 B 都是可测的,并且 B 包含在 A 内,则定义 $A-B$ 的测度为这两个测度的差.由这些定义,他就能对任何可数个不相交可测集的并集以及两个可测集 A、B 的差集(只要 A 包含 B)赋予测度.然后他考虑了零测集,并证明测度大于 0 的集合是不可数的.

Borel 的测度论是对 Peano 和 Jordan 容量理论的一个改进,但它还不是最终的形式,而且也没有被应用到积分中去.

4. Lebesgue 积分

现在认为已成定形的测度和积分的推广,是由 Borel 的一个学生、法兰西学院的教授 Henri Lebesgue(1875—1941)作出的.以 Borel 的思想为指导,当然也用了 Jordan 和 Peano 的思想,Lebesgue 在他的论文《积分、长度与面积》(Intégrale, longueur, aire)里[①],第一次叙述了他关于测度和积分的思想.他的工作替代了 19 世纪的创造,特别是,改进了 Borel 的测度论.

Lebesgue 的积分论是建立在他关于点集的测度的概念之上的,而这些概念都被应用到 n 维空间的点集上.为了说明方便起见,我们只考虑一维情形.设 E 是 $a \leqslant x \leqslant b$ 中的一个点集. E 的点可以被$[a, b]$中一族有限个或可数无限个区间集 d_1, d_2, …所

---

① *Annali di Mat.*, (3),7,1902,231～259.

包围而成为内点($[a, b]$的端点可以是某个 d_i 的端点). 能够证明区间集合$\{d_i\}$可以被互不重叠的区间集合 $\delta_1, \delta_2, \cdots$所代替,使得 E 的每一个点是其中某一个区间的内点或是两个相邻区间的公共端点. 令 $\sum\delta_n$ 表示长度δ_i 之和. 所有可能集合$\{\delta_i\}$的 $\sum\delta_n$ 的(最大)下界称为 E 的外测度,记作 $m_e(E)$. E 的内测度 $m_i(E)$定义为集合 $C(E)$的外测度的补测度 $[b-a]-m_eC(E)$, 这里集合$C(E)$是 E 在$[a, b]$中的补集,也就是 $a\leqslant x\leqslant b$ 中不在 E 内的点所成的集合.

现在可以证明几个辅助性的结果,包括 $m_i(E)\leqslant m_e(E)$ 这件事. 如果 $m_i(E)=m_e(E)$, 那么集合 E 就定义为可测的,而测度 $m(E)$就是这个公共值. Lebesgue 证明,可数个两两不相交的可测集的并集的测度,等于这些集合的测度的总和. 另外,一切 Jordan 可测集都是 Lebesgue 可测的,并且具有相同的测度. Lebesgue 的测度概念与 Borel 的测度概念的区别在于,他对 Borel 意义下的零测集作了增补. 他还注意到了不可测集的存在.

Lebesgue 的下一个重要概念是可测函数. 设 E 是 x 轴上的一个有界可测集. 在 E 的一切点上定义的函数 $f(x)$称为在 E 上是可测的,如果对任意常数 A, E 中使得 $f(x)>A$ 的点所成的集合是可测的.

现在我们来讨论 Lebesgue 的积分概念. 设 $f(x)$是定义在$[a, b]$中可测集 E 上的一个有界可测函数. 设 A 和 B 是 $f(x)$在 E 上的最大下界和最小上界. 把区间$[A, B]$(在 y 轴上)分成 n 个子区间

$$[A, l_1], [l_1, l_2], \cdots, [l_{n-1}, B],$$

其中 $A=l_0$, $B=l_n$. 设 e_r 是 E 中满足条件 $l_{r-1}\leqslant f(x)\leqslant l_r$, $r=1, 2, \cdots, n$ 的点集. 于是 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 都是可测集. 作和 S 与 s,其中

$$S=\sum_1^n l_r m(e_r),\ s=\sum_1^n l_{r-1}m(e_r).$$

和 S 与 s 分别有最大下界 J 与最小上界 I. Lebesgue 证明了:对于有界可测函数永远有 $I = J$. 这个公共值就是 $f(x)$在 E 上的Lebesgue 积分,记作

$$I = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

如果 E 是整个区间 $a \leqslant x \leqslant b$, 那么我们还可以用记号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来写. 不过积分要按照 Lebesgue 的意义来理解. 如果 $f(x)$ 是 Lebesgue 可积的,积分值也是有穷的,那么用 Lebesgue 自己引进的术语来讲,就说 $f(x)$是可和的(summable). $[a, b]$上 Riemann 可积的函数 $f(x)$必是 Lebesgue 可积的;但反过来不一定对. 如果 $f(x)$在 Riemann 和 Lebesgue 意义下都可积,那么这两个积分值相等.

Lebesgue 积分的普遍性可以从下面的事实看出来. Lebesgue 可积函数不一定几乎处处(即除去一个零测集外)连续. 例如,在区间$[a, b]$上的 Dirichlet 函数,在有理数 x 处取值为 1,在无理数 x 处取值为 0,处处不连续,从而不 Riemann(原义和广义)可积,但却是 Lebesgue 可积的. 这时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Lebesgue 积分的概念,可以推广到更普遍的函数,例如无界函数. 如果 $f(x)$在积分区间上 Lebesgue 可积但无界,则积分绝对收敛. 无界函数可以 Lebesgue 可积,但不 Riemann 可积,反之亦然.

就实用的目的来说,Riemann 积分已经够用了. 事实上,Lebesgue 证明了(《关于积分法和原函数研究的讲义》(*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitive*, 1904)):为要一个有界函数是 Riemann 可积的,必须且仅须它的不连续点集是一个零测集. 但对理论工作来说,Lebesgue 积分提供了简化的便利. 建立在 Lebesgue 测度可数可加性基础上的新定理,同建立

在 Jordan 容量有限可加性基础上的结果形成了鲜明的对照.

为了说明 Lebesgue 积分带来的定理的简化,我们就用 Lebesgue 本人在他的论文里的结果. 设 $u_1(x)$, $u_2(x)$, …是可测集 E 上的可和函数并且 $\sum_1^{\infty} u_n(x)$ 收敛到 $f(x)$,那么 $f(x)$是可测的. 又若 $s_n(x)=\sum_1^n u_n(x)$ 是一致有界的(对 E 中的一切 x 和一切 n, $|s_n(x)|\leqslant B$),则有定理:$f(x)$在 E 上 Lebesgue 可积,且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E s_n(x)\mathrm{d}x.$$

如果我们研究的是 Riemann 积分,则还要加上这个级数的和是可积的这一假设;关于 Riemann 积分的这个定理是 Cesare Arzelà (1847—1912)得到的①. Lebesgue 在他的《积分法讲义》里把这一定理作为阐述他的理论的基石.

Lebesgue 积分在 Fourier 级数理论中特别有用. 这方面的许多最重要的贡献是 Lebesgue 本人作出的②. 根据 Riemann 的工作,一个有界的 Riemann 可积的函数的 Fourier 系数 a_n 和 b_n,当 n 趋于无穷时必趋于 0. Lebesgue 的推广说:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\begin{Bmatrix}\sin nx\\ \cos nx\end{Bmatrix}\mathrm{d}x=0,$$

其中 $f(x)$是一个 Lebesgue 可积的函数,不管它是否有界. 这个事实今天称之为 Riemann-Lebesgue 引理.

在 1903 年的这同一篇文章里,Lebesgue 证明了:如果 f 是由三角级数表示的有界函数,即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则 a_n 和 b_n 就是 Fourier 系数. 1905 年 Lebesgue 给出了使 Fourier

① *Atti della Accad. dei Lincei, Rendiconti*, (4),1,1885,321～326,532～537,566～569.

② 例如 *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (3),20,1903,453～485.

级数收敛到函数 $f(x)$的一个新的充分条件[1],这个条件蕴含了以前已知的一切条件.

Lebesgue 还证明了(《三角级数讲义》(*Leçons sur les séries trigonométriques*, 1906,第 102 页)):一个 Fourier 级数之可以逐项积分并不依赖于这级数对 $f(x)$本身的一致收敛性. 对任一 Lebesgue 可积的函数 $f(x)$,不管 $f(x)$的原始级数是否收敛到它,都有

$$\int_{-\pi}^{x} f(x)\mathrm{d}x=a_0(x+\pi)+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n\sin nx+b_n(\cos n\pi-\cos nx)),$$

其中 x 是$[-\pi,\ \pi]$内的任一点. 而且这新级数在区间$[-\pi,\ \pi]$上总是一致收敛到这等式的左边.

此外,对$[-\pi,\ \pi]$上的任一函数 $f(x)$,只要它的平方在$[-\pi,\ \pi]$是 Lebesgue 可积的,就成立着 Parseval 定理:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x = 2a_0^2+\sum_{1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

(《讲义》,1906,第 100 页). 后来,对$[-\pi,\ \pi]$上 Lebesgue 平方可积的 $f(x)$及 $g(x)$,Pierre Fatou(1878—1929)证明了[2]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x = 2a_0\alpha_0+\sum_{1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n),$$

其中 a_n, b_n 与α_n, β_n 是$f(x)$与 $g(x)$的 Fourier 系数. 尽管在 Fourier 级数理论里有这么多进展,但到现在为止还不知道,在$[-\pi,\ \pi]$上 Lebesgue 可积的 $f(x)$的什么性质对它的 Fourier 级数的收敛性是充分必要的.

Lebesgue 为建立积分概念与原函数(不定积分)概念之间的联系尽了最大的努力. 在 Riemann 引进他的积分的推广的时候,就提出了这样一个问题:对连续函数成立的定积分和原函数之间的对应,在更为一般的情形下是否还成立. 但可以举出一些在

---

① *Math. Ann.*, 61,1905,251～280.

② *Acta Math.*, 30,1906,335～400.

Riemann意义下可积的函数 f 的例子，使得 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在一些点上没有导数(甚至没有右导数或左导数)．反过来，Volterra 在 1881 年证明[①]：存在函数 $F(x)$，它在一个区间 I 内有有界的但 Riemann 不可积的导数. Lebesgue 通过曲折的分析，证明了：如果 f 在 $[a, b]$ 上在他的意义下可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就几乎处处(即除去一个零测集外)有导数并等于 $f(x)$(《积分法讲义》). 反之，如果函数 g 在 $[a, b]$ 上可微且它的导数 $g'=f$ 是有界的，那么 f 是 Lebesgue 可积的，并成立着公式：$g(x)-g(a)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 然而，Lebesgue 指出，如果 g' 无界，则情况要复杂得多. 这时，g' 不一定可积，因而首要的问题是刻画那种函数 g，使 g' 几乎处处存在并且可积. Lebesgue 把自己限制在 g 的一个导出数(derived numbers)处处有限的情形[②]，他证明了这时的 g 必定是一个有界变差函数(第 40 章第 6 节). 最后，Lebesgue(在 1904 年的书中)还建立了反过来的结果. 一个有界变差函数 g 一定几乎处处有导数 g'，且 g' 可积. 但是，并不一定就有

$$g(x)-g(a)=\int_a^x g'(t)\mathrm{d}t; \tag{1}$$

这个方程左右两边之差是一个有界变差函数，其导数几乎处处为 0，但函数本身可以不是常数. 至于使等式(1)成立的有界变差函数 g，则具有下述性质：g 在一个开集 U 上的全变差(即 g 在 U 的每一个构成区间上的全变差之和)随 U 的测度趋于 0 而趋于 0. Giuseppe Vitali(1875—1932)把这种函数称为绝对连续的函数，并对它们进行了细致的研究.

---

① *Gior. di Mat.*, 19, 1881, 333 ～ 372 = *Opere Mat.*, 1, 16～48.

② g 的两个右导出数是两个极限

$$\limsup_{h\to 0,\, h>0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h},\quad \liminf_{h\to 0,\, h>0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

两个左导出数也类似地定义.

Lebesgue 的工作也推进了多重积分的理论. 在他的二重积分的定义下,能用累次积分来计算二重积分的函数的范围扩大了. Lebesgue 在他 1902 年的论文中给出了这方面的一个结果,但较好的结果是 Guido Fubini(1879—1943)给出的①:如果 $f(x, y)$在可测集 G 上可和,则

(a) 对几乎所有的 y 和 x,$f(x, y)$分别作为 x 和 y 的函数都是可和的;

(b) 使得 $f(x, y_0)$或 $f(x_0, y)$不可和的点(x_0, y_0)的集合的测度为 0;

(c) $\iint\limits_G f(x, y)\mathrm{d}G = \int \mathrm{d}y\left(\int f(x, y)\mathrm{d}x\right) = \int \mathrm{d}x\left(\int f(x, y)\mathrm{d}y\right)$,

其中外层的积分是在 x 的函数(或 y 的函数)$f(x, y)$是可和的那些 y(或 x)的点集上取的.

最后,在 1910 年,Lebesgue 把单重积分的导数的结果推广到了多重积分②. 对 R^n 中每一个紧致区域上可积的函数 f,他规定了一个定义在 R^n 中每个可积区域 E 上的集合函数

$$F(E) = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

(x 表示 n 个坐标). 这是不定积分概念的推广. 他注意到函数 F 具有两条性质:

(1) 它是完全可加的,即 $F\left(\sum_1^\infty E_n\right) = \sum_1^\infty F(E_n)$, 其中 E_n 是两两不相交的可测集;

(2) 它是绝对连续的,意即当测度 E 趋于 0 时,$F(E)$趋于 0.

Lebesgue 的这篇文章的实质性部分是证明这个命题的反面,即定义 $F(E)$在 n 维空间的一点 P 处的导数. Lebesgue 得到了下面的定理:如果 $F(E)$是绝对连续并且是可加的,那么它就几乎处

① *Atti della Accad. dei Lincei, Rendiconti*, (5),16,1907,608~614.

② *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (3),27,1910,361~450.

处具有有穷的导数，而 F 就是一个可和函数的不定积分，这个函数在 F 的导数存在且有穷的点处就等于这个导数，而在其余点上则是任意的.

证明的主要工具是 Vitali 覆盖定理①，这个定理在积分的这个领域里始终是基本的. 但 Lebesgue 并没有就此止步. 他又指出了推广有界变差函数概念的可能性，即考虑函数 $F(E)$，其中 E 是一个可测集，$F(E)$ 是完全可加的，并且当把 E 任意分划为可数个可测集 E_n 时，$\sum_n |F(E_n)|$ 始终是有界的. 还可以举出微积分里许多被 Lebesgue 的积分概念推广了的其他定理.

Lebesgue 的工作是 20 世纪的一个伟大贡献，确实赢得了公认，但和通常一样，也并不是没有遭到一定阻力的. 我们提到过(第 40 章第 7 节)Hermite 反对没有导数的函数. Lebesgue 写了一篇论文《关于可应用于平面的非直纹面短论》(Note on Non-Ruled Surfaces Applicable to the Plane)②，讨论不可微曲面. Hermite 曾企图阻止它的发表. 许多年以后，Lebesgue 在他的《工作介绍》(*Notice*，第 14 页，见参考书目)中写道：

> Darboux 在他的 1875 年的论文里，曾经致力于研究积分法和没有导数的函数；因而他并没有体验到 Hermite 的那种战栗. 然而我怀疑 Hermite 终究是否完全原谅了我的《关于可应用的曲面的短论》. 他必定认为，使得自己在这种研究中变得迟钝了的那些人，是在浪费他们的时间，而不是在从事有用的研究.

Lebesgue 还说(《工作介绍》第 13 页)：

> 对许多数学家来说，我成了没有导数的函数的人，虽然我

---

① *Atti Accad. Torino*, 43, 1908, 229～246.

② *Comp. Rend.*, 128, 1899, 1502～1505.

在任何时候也不曾完全让我自己去研究或思考这种函数. 因为 Hermite 表现出来的恐惧和厌恶差不多每个人都会感觉到,所以任何时候,只要当我试图加入一个数学讨论时,总会有些分析学者说:"这不会使你感兴趣的,我们是在讨论有导数的函数."或者,一位几何学家就会用他的语言说:"我们是在讨论有切平面的曲面."

5. 推 广

我们已经指出过 Lebesgue 积分在推广老的结果和在简洁地陈述级数定理方面的优点. 在以后的几章里,我们还要遇到 Lebesgue 思想的进一步应用. 积分概念的许多推广是函数论的直接发展. 在这中间,我们只准备提一下 Johann Radon(1887—1956)的积分,它包含了 Stieltjes 积分和 Lebesgue 积分,实际上它被称为 Lebesgue-Stieltjes 积分①. 这一推广不仅使得它包括的范围扩大了,或者使得它统一了 n 维 Euclid 空间点集上的不同的积分概念,而且还扩展到像函数空间那样的更普遍的空间. 这种更普遍的概念现在在概率论、谱理论、各态历经理论以及调和分析(广义 Fourier 分析)中,找到了应用.

参考书目

Borel, Emile: *Notice sur les travaux scientifiques de M. Emile Borel*, 2nd ed., Gauthier Villars, 1921.

Bourbaki, Nicolas: *Eléments d'histoire de mathématiques*, Hermann, 1960, pp. 246～259.

Collingwood, E. F.: "Emile Borel", *Jour. Lon. Math. Soc.*, 34, 1959, 488～512.

---

① *Sitzngsber. der Akad. der Wiss. Wien*, 122, Abt. IIa, 1913, 1295～1438.

Fréchet, M. :"La Vie et l'œuvre d'Emile Borel", *L'Enseignement Mathématique*, (2), 11,1965,1～94.

Hawkins, T. W., Jr. : *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*, University of Wisconsin Press, 1970, Chaps. 4～6.

Hildebrandt, T. H. :"On Integrals Related to and Extensions of the Lebesgue Integral", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 24,1918,113～177.

Jordan, Camille: *Œuvres*, 4 vols., Gauthier-Villars, 1961～1964.

Lebesgue, Henri: *Measure and the Integral*, Holden-Day, 1966, pp. 176～194. 译自法文 *La Mesure des grandeurs*.

Lebesgue, Henri: *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, Edouard Privat, 1922.

Lebesgue, Henri: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, 1904,2nd ed., 1928.

McShane, E. J. :"Integrals Devised for Special Purposes", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 69,1963,597～627.

Pesin, Ivan M. : *Classical and Modern Integration Theories*, Academic Press, 1970.

Plancherel, Michel:"Le Développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle", *L'Enseignement Mathématique*, 24,1924/1925,19～58.

Riesz, F. :"L'Evolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue", *Annales de l'Institut Fourier*, 1,1949,29～42.

第 45 章

积 分 方 程

大自然并不被分析的困难所阻碍.

Augustin Fresnel

1. 引　言

积分方程是未知函数出现在积分号内的方程,解方程的问题就是要确定这个函数. 我们不久就会看到,数学物理中有些问题直接导致积分方程,而另一些问题则导致常微分或偏微分方程,但却可以把它们转换为积分方程而很快得到处理. 起初,解积分方程被看作反积分. 积分方程这个术语是属于 Du Bois-Reymond 的①.

在数学的其他分支中,个别的包含积分方程的问题,远在这门学科取得明显地位和研究方法以前,就已经出现了. 例如,Laplace 在 1782 年②就考虑过由

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-xt}g(t)\,dt \tag{1}$$

给出的 $g(t)$的积分方程. 方程(1)就今天的情况来说,称为 $g(t)$的 Laplace 变换. Poisson③ 发现了 $g(t)$的表达式,就是

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{xt}f(x)\,dx,$$

其中 a 充分大. 另一个真正属于积分方程史的值得注意的结果,来

① *Jour. für Math.*, 103,1888,228.

② *Mém de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1782,1～88, pub. 1785 和 1783,423～467, pub. 1786 = *Œuvres*, 10,209～261,特别是 p. 236.

③ *Jour. de l'Ecole Poly.*, 12,1823,1～144,249～403.

自 Fourier 1811 年关于热的理论的著名文章(第 28 章第 3 节). 在那里可以看到

$$f(x)=\int_0^{\infty}\cos(xt)u(t)\mathrm{d}t,$$

以及反演公式

$$u(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(xt)f(x)\mathrm{d}x.$$

第一个自觉地直接应用并解出积分方程的人是 Abel. 在他最早发表的两篇文章中(第一篇发表在 1823 年一个不出名的杂志上①,第二篇发表在 *Journal für Mathematik* 上②), Abel 考虑了下面的力学问题:一质点从 P 出发沿光滑曲线(图 45.1)滑到点 O. 曲线位于一铅直平面上. 在 O 点的速度与曲线的形状无关,但从 P 到 O 所需的时间则不然,设 $(\xi,\ \eta)$ 是 P 与 O 之间任一点 Q 的坐标, s 是 OQ 的弧长,则质点在 Q 点的速度由

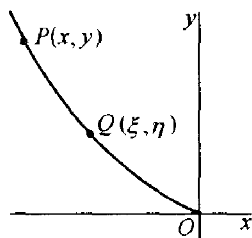


图 45.1

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2g(x-\xi)}$$

给出,其中 g 是重力常数. 因此

$$t=\frac{-1}{\sqrt{2g}}\int_P^Q\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{x-\xi}}.$$

在这里 s 可以通过 ξ 表出. 设 s 为 $v(\xi)$. 于是从 P 到 O 的整个下降时间 T 便是

$$T(x)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x\frac{v'(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{x-\xi}}.$$

显然对任何一条曲线来说时间 T 依赖于 x. Abel 提出的问题是:

---

① *Magazin for Naturuidenskaberne*, 1, 1823 = *Œuvres*, 1, 11～27.

② *Jour. für Math.*, 1, 1826, 153 ～ 157 = *Œuvres*, 1, 97～101.

给定了 T 作为 x 的函数，求 $v(\xi)$. 如果我们引入

$$f(x)=\sqrt{2g}T(x),$$

问题就变成从方程

$$f(x)=\int_0^x \frac{v'(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi$$

确定 v. Abel 得到解

$$v(\xi)=\int_0^\xi \frac{f(x)dx}{(\xi-x)^{1/2}}.$$

他的方法(他给出了两个)很特别，因而不值得注意.

实际上，Abel 着手解决的是更为一般的问题：

$$(2)\qquad f(x)=\int_a^x \frac{u(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\lambda},\ 0<\lambda<1,$$

并且得到了解：

$$u(z)=\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\frac{d}{dz}\int_a^z \frac{f(x)dx}{(z-x)^{1-\lambda}}.$$

Liouville 独立于 Abel，自 1832 年起解出了一些特殊的积分方程①. Liouville 跨出的最有意义的一步②是表明某些微分方程的解怎样可以通过解积分方程得到. 所要求解的微分方程是

$$(3)\qquad y''+[\rho^2-\sigma(x)]y=0,$$

其中 $a\leqslant x\leqslant b$；ρ 是参数. 设 $u(x)$ 是满足初始条件

$$(4)\qquad u(a)=1,\ u'(a)=0$$

的一个特解. 这个函数也一定是非齐次方程

$$y''+\rho^2y=\sigma(x)u(x)$$

的解. 应用常微分方程的基本结果，便有

$$(5)\qquad u(x)=\cos\rho(x-a)+\frac{1}{\rho}\int_a^x\sigma(\xi)\sin\rho(x-\xi)u(\xi)d\xi.$$

这样，如果我们能解这个积分方程，我们就将得到微分方程(3)的

---

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 13, 1832, 1～69.

② *Jour. de Math.*, 2, 1837, 16～35.

满足初始条件(4)的解.

Liouville 得到这个解,用的是被认为属于 Carl G. Neumann 的逐次代入法,Neumann 的著作《对数和牛顿位势的研究》(*Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, 1877)是 30 年后发表的. 我们将不叙述 Liouville 的方法,因为它实际上和 Volterra 所给出的相同,后者是我们要简略地叙述的.

Abel 和 Liouville 所处理的积分方程都属于基本的类型. Abel的形式是

$$f(x)=\int_a^x K(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{6}$$

而 Liouville 的形式是

$$u(x)=f(x)+\int_a^x K(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7}$$

在两种情形中,$f(x)$与 $K(x,\xi)$是已知的,而 $u(x)$是待定的函数. 用 Hilbert 引入的今天在使用的术语来说,它们分别属于第一类和第二类方程,$K(x,\xi)$称为核. 一般说来,它们也称为 Volterra 方程,而当上限是固定数 b 时,它们就称为 Fredholm 方程. 实际上,Volterra 方程是相应的 Fredholm 方程的特殊情形,因为人们总可以取 $K(x,\xi)=0$ 当 $\xi>x$, 而这样就把 Volterra 方程归结为 Fredholm 方程. $f(x)\equiv 0$ 这种第二类方程的特殊情形,称为齐次方程.

在 19 世纪中叶,积分方程的主要兴趣,是围绕着解与位势方程

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{8}$$

有关的边值问题,方程要在某条曲线 C 所围成的已知平面区域内成立. u 的边值是某一函数 $f(s)$,它作为沿曲线 C 的弧长 s 的函数给出. 这时位势方程的一个解可以表成

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_C \rho(s)\log\frac{1}{r(s;\ x,\ y)}\mathrm{d}s,$$

其中 $r(s;\ x,\ y)$是点 s 到区域内部或边界上任一点$(x,\ y)$的距离，而 $\rho(s)$是一未知函数，它对 C 上的 $s=(x,\ y)$ 满足

$$f(s)=\frac{1}{2\pi}\int_C \rho(t)\log\frac{1}{r(t;\ x,\ y)}\mathrm{d}t. \tag{9}$$

这是 $\rho(t)$的一个第一类积分方程. 换一种选择，如果把(8)的满足同样边界条件的一个解取作

$$v(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_C \phi(s)\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r(s;\ x,\ y)}\right)\mathrm{d}s,$$

其中$\frac{\partial}{\partial n}$表示边界上的法向微商，那么 $\phi(s)$必须满足积分方程

$$f(s)=\frac{1}{2}\phi(s)+\frac{1}{2\pi}\int_C \phi(t)\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r(t;\ x,\ y)}\right)\mathrm{d}t, \tag{10}$$

这是第二类的积分方程. 这些方程对于凸区域的情形，由 Neumann 在他的《研究》以及在以后发表的论文中解出来了.

偏微分方程的另一个问题也是通过积分方程来解决的. 在波动的研究中出现了方程

$$\Delta u+\lambda u=f(x,\ y), \tag{11}$$

当相应的双曲方程

$$\Delta u-\frac{1}{c^2}u_{tt}=f(x,\ y)$$

中出现的时间函数(通常取作 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$)被消去的时候就是这样. 大家知道(第 28 章第 8 节)，附有边界条件的相应于(11)的齐次方程，只有对 λ 值的一个离散集才有非平凡解，这些 λ 值称为特征值. Poincaré 在 1894 年[①]考虑了带复 λ 值的(11)的非齐次情形. 他巧妙地导出了 λ 的一个亚纯函数，当 λ 不是特征值的时候，这个函数表示方程(11)的唯一解，而这个函数的留数就引出齐次方程即 f

① *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 8, 1894, 57～155 = *Œuvres*, 9, 123～196.

= 0 时的特征函数.

基于这些结果,Poincaré 在 1896 年[①]研究了方程

$$u(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ y)u(y)\mathrm{d}y=f(x),$$

这是他从(11)导出来的,他并且断言,解是 λ 的亚纯函数. 这个结果是由 Fredholm 在我们即将谈到的一篇文章中建立起来的.

上述例子说明,把微分方程转换为积分方程,变成求解常微分与偏微分方程的初值与边值问题的重要技巧,并且是研究积分方程的最强大的动力.

2. 一般理论的开始

Vito Volterra(1860—1940),他继承 Beltrami 而成为罗马的数学物理教授,是积分方程一般理论的第一个创立者. 他对这个课题,从 1884 年起写了很多论文,主要的写于 1896 和 1897 年[②]. Volterra 提供了一个求解第二类积分方程

$$f(s)=\phi(s)+\int_a^b K(s,\ t)\phi(t)\mathrm{d}t \tag{12}$$

的方法,其中 $\phi(s)$是未知的, $K(s,\ t)=0$ 当 $t>s$. Volterra 把这个方程写成

$$f(s)=\phi(s)+\int_a^s K(s,\ t)\phi(t)\mathrm{d}t.$$

Volterra 的解法是令

---

① *Acta Math.*, 20,1896~1897, 59 ~ 142 = *Œuvres*, 9,202~272. 也可以看参考书目中 Hellinger 和 Toeplitz 的引文.

② *Atti della Accad. dei Lincei*, *Rendiconti*, (5),5,1896,177~185,289~300; *Atti Accad. Torino*, 31,1896,311~323,400~408,557~567,693~708; *Annali di Mat.*, (2),25,1897,139~178;所有这些都包含在他的 *Opera matematiche*, 2,216~313.

$$f_1(s) = -\int_a^b K(s, t) f(t) \mathrm{d}t,$$

$$\cdots\cdots$$

(13) $$f_n(s) = -\int_a^b K(s, t) f_{n-1}(t) \mathrm{d}t,$$

$$\cdots\cdots$$

并取 $\phi(s)$ 为

(14) $$\phi(s) = f(s) + \sum_{p=1}^{\infty} f_p(s).$$

对他的核 $K(s, t)$, Velterra 巧妙地证明了(14)是收敛的,而如果把(14)代入(12),就可以证明它是一个解. 这个代入给出

$$\phi(s) = f(s) - \int_a^b K(s, t) f(t) \mathrm{d}t + \int_a^b \int_a^b K(s, r) K(r, t) f(t) \mathrm{d}r \mathrm{d}t + \cdots$$

它可以写成

(15) $$\phi(s) = f(s) + \int_a^b \overline{K}(s, t) f(t) \mathrm{d}t,$$

其中 $\overline{K}$(后来 Hilbert 称之为解核或预解式)是

$$\overline{K}(s, t) = -K(s, t) + \int_a^b K(s, r) K(r, t) \mathrm{d}r - \int_a^b \int_a^b K(s, r) K(r, w) K(w, t) \mathrm{d}r \mathrm{d}w + \cdots$$

等式(15)是 Liouville 较早对一个特殊的积分方程得到的表达式,并归于 Neumann. Volterra 还解出了第一类积分方程 $f(s) = \int_a^s K(x, s) \phi(x) \mathrm{d}x$, 用的方法是把它们化成第二类方程.

1896 年 Volterra 观察到,第一类积分方程是含 n 个未知数的 n 个线性代数方程组当 n 变成无穷时的极限形式. Erik Ivar Fredholm(1866—1927),是斯德哥尔摩(Stockholm)的数学教授,很关心求解 Dirichlet 问题,他在 1900 年[①]吸收了上述这种看法,并把

① *Acta Math.*, 27,1903,365~390.

它用于解第二类积分方程,即形为(12)的方程,而且对核 $K(s, t)$ 不加限制.

我们将把 Fredholm 所处理的方程写成

$$(16) \qquad u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, \xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

虽然在他的文章中参数 λ 没有明显出现. 然而,他所做的,如果我们要陈述的话,借助于他后来的工作将更易理解. 为了忠实表现 Fredholm 的公式,我们应当令 $\lambda=1$ 或把它看作隐含在 K 内.

Fredholm 把 x 的区间 $[a, b]$ 用分点

$$a,\ x_1=a+\delta,\ x_2=a+2\delta,\ \cdots,\ x_n=a+n\delta=b$$

分成 n 等分,然后他把(16)中的定积分用和

$$(17) \qquad u_n(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{n}\lambda K(x, x_j)u_n(x_j)\delta$$

去代替. 现在假设方程(17)对 $[a, b]$ 的所有 x 值成立,因此它必须对 $x=x_1, x_2, \cdots, x_n$ 成立,这就给出了 n 个方程的方程组

$$(18) \qquad -\sum_{j=1}^{n}\lambda K(x_i, x_j)u_n(x_j)\delta+u_n(x_i)=f(x_i),$$
$$i=1, 2, \cdots, n.$$

这个方程组是由 n 个非齐次线性方程组成的,用以确定 n 个未知数 $u_n(x_1), u_n(x_2), \cdots, u_n(x_n)$.

在线性方程组理论中,下面的结果是熟知的:如果矩阵

$$S_n=\begin{Vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1+a_{nn} \end{Vmatrix},$$

那么 S_n 的行列式 $D(n)$ 有下面的展开[①]:

---

① 一个很好的解释可以在 Gerhard Kowalewski 的 *Integralgleichungen*, Walter de Gruyter, 1930,101～134 中找到.

$$D(n) = 1 + \frac{1}{1!}\sum_{r_1} a_{r_1 r_1} + \frac{1}{2!}\sum_{r_1, r_2} \begin{vmatrix} a_{r_1 r_1} & a_{r_1 r_2} \\ a_{r_2 r_1} & a_{r_2 r_2} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{r_1, r_2, \cdots, r_n} \begin{vmatrix} a_{r_1 r_1} & a_{r_1 r_2} & \cdots & a_{r_1 r_n} \\ a_{r_2 r_1} & a_{r_2 r_2} & \cdots & a_{r_2 r_n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{r_n r_1} & a_{r_n r_2} & \cdots & a_{r_n r_n} \end{vmatrix},$$

其中 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 独立地跑遍 1 到 n. 展开(18)中系数的行列式，然后让 n 变为无穷，Fredholm 得到行列式

$$(19)\ D(\lambda) = 1 - \lambda\int_a^b K(\xi_1, \xi_1)\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 - \cdots$$

他把这称为(16)的或核 K 的行列式. 类似地，考虑(18)中系数的行列式的第 ν 行第 μ 列的元素的余子式，并令 n 变成无穷，Fredholm 就得到函数

$$(20)\ D(x, y, \lambda) = \lambda K(x, y) - \lambda^2\int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, \xi_1) \\ K(\xi_1, y) & K(\xi_1, \xi_1) \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi_1 + \frac{\lambda^3}{2}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, \xi_1) & K(x, \xi_2) \\ K(\xi_1, y) & K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, y) & K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 - \cdots$$

Fredholm 称 $D(x, y, \lambda)$ 为核 K 的第一子式，因为它起着 n 个未知数 n 个线性方程的情形中第一子式的类似作用. 他还把整函数 $D(\lambda)$ 的零点称为核 $K(x, y)$ 的根. 把 Cramer 法则应用到线性方程组(18)，并令 n 变为无穷，Fredholm 推导出了(16)的解的形式. 然后通过直接代入，证明了它是正确的，因而能够断言下面的结果：如果 λ 不是 K 的根，即 $D(\lambda) \neq 0$，那么(16)有一个且只有一个(连续)解，就是

$$(21)\qquad u(x, \lambda) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x, y, \lambda)}{D(\lambda)} f(y)\mathrm{d}y.$$

此外,如果λ是$K(x, y)$的根,那么(16)或者没有连续解,或者有无穷多个解.

Fredholm还得到进一步的结果,其中包含着齐次方程

$$u(x) = \lambda\int_a^b K(x, \xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{22}$$

和非齐次方程(16)之间的关系.从(21)几乎可以显然地看出,当λ不是K的根时,(22)只有唯一的连续解$u \equiv 0$.因此,他考虑λ是K的根的情形.设$\lambda = \lambda_1$是这样的一个根,那么(22)有无穷多个解

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x),$$

其中c_i都是任意常数;$u_1, u_2, \cdots, u_n$是线性无关的,称为主解;n依赖于λ_1.量n称为λ_1的指标(index)[它并不是λ_1使$D(\lambda)$为0的重数].Fredholm巧妙地确定了任何一个根λ_i的指标,并证明指标永远不超过重数[重数永远是有限的].$D(\lambda) = 0$的根称为K的特征值;根的集合称为谱(spectrum).(22)的对应于特征值的解称为特征函数.

至此Fredholm就有可能来建立此后被称为Fredholm择一定理(alternative theorem)的结果了.当λ是K的特征值时,不仅积分方程(22)有了n个独立解,而且带有转置核的相伴或伴随(associated或adjoint)方程

$$u(x) = \lambda\int_a^b K(\xi, x)u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

对于同一特征值也有n个独立解$\psi_1(x), \cdots, \psi_n(x)$,因而这时的非齐次方程(16)是可解的,当且仅当

$$\int_a^b f(x)\psi_i(x)\mathrm{d}x = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{23}$$

最后这些结果,极其密切地平行于齐次与非齐次的线性代数方程组的理论.

3. Hilbert 的工作

Erik Holmgren(1872 年生)在 1901 年写的一本论述 Fredholm 积分方程工作的讲义(这本讲义已经在瑞典出版),引起了 Hilbert 对这个课题的兴趣. David Hilbert(1862—1943),20 世纪的领头数学家,在代数数、代数不变式和几何基础方面完成了宏伟的工作,现在他把他的注意力转到积分方程上来了. 他说,这个科目的研究向他表明,它对于定积分理论,任意函数展为级数(展为特殊函数级数或三角级数),线性微分方程理论,位势理论和变分法,都是重要的. 从 1904 到 1910 年,他在《格丁根自然科学皇家学会报告》(*Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*)上一连发表了六篇论文,并转载于他的书《线性积分方程一般理论的原理》(*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 1912)中. 在这个工作的较后部分,他把积分方程应用到数学物理问题.

Fredholm 曾经使用积分方程和线性代数方程之间的类似之处,但是他没有对无穷多个代数方程实现极限过程,而是直截了当地写出最后的行列式,并说明这些行列式把积分方程解出来了. Hilbert 的第一步工作就是在有限的线性方程组上严密地实现极限过程.

他从积分方程

$$f(s) = \phi(s) - \lambda\int_0^1 K(s,\ t)\phi(t)\mathrm{d}t \tag{24}$$

出发,其中 $K(s,\ t)$是连续的. 参数 λ 是明白表示出来的,而且在后续理论中起着重要作用. 像 Fredholm 一样,Hilbert 把区间$[0,\ 1]$分成 n 等分,使得$\frac{p}{n}$或$\frac{q}{n}$$(p,\ q = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 表示$[0,\ 1]$中的点. 令

$$K_{pq}=K\left(\frac{p}{n},\ \frac{q}{n}\right),\ f_p=f\left(\frac{p}{n}\right),\ \phi_q=\phi\left(\frac{q}{n}\right).$$

于是由(24)得到含 n 个未知数 $\phi_1,\ \cdots,\ \phi_n$ 的 n 个方程,就是

$$f_p=\phi_p-\lambda\sum_{q=1}^{n}K_{pq}\phi_q,\ p=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

在回顾了 n 个未知数 n 个线性方程的有限线性方程组的解的理论之后,Hilbert 就着手研究方程(24). 对于(24)的核 K,特征值是用幂级数

$$\delta(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n d_n\lambda^n$$

的零点来定义的,其中系数 d_n 由

$$d_n=\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\{K(s_i,\ s_j)\}\right|\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_n$$

给出. 这里 $|\{K(s_i,\ s_j)\}|$ 是 $n\times n$ 矩阵 $\{K(s_i,\ s_j)\}$, $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 的行列式, s_i 是区间 $[0,\ 1]$ 中 t 的值. 为了简单地陈述 Hilbert 的主要结果,我们需要中间量

$$\Delta_p(x,\ y)=\frac{1}{p!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & x(s_1) & \cdots & x(s_p)\\ y(s_1) & K(s_1,\ s_2) & \cdots & K(s_1,\ s_p)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y(s_p) & K(s_p,\ s_1) & \cdots & K(s_p,\ s_p)\end{vmatrix}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_p,$$

其中 $x(r)$ 和 $y(r)$ 是 r 在 $[0,\ 1]$ 上的任意连续函数,此外还需要中间量

$$\Delta(\lambda;\ x,\ y)=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\Delta_p(x,\ y)\lambda^{p-1}.$$

Hilbert 另外还定义

$$\Delta^*(\lambda;\ s,\ t)=\lambda\Delta(\lambda;\ x,\ y)-\delta(\lambda),$$

其中 $x=x(r)=K(s,\ r)$, $y=y(r)=K(r,\ t)$. 然后他证明了,如果对于使 $\delta(\lambda)\neq 0$ 的那些 λ 值, $\overline{K}$ 由

$$\overline{K}(s,\ t)=\frac{\Delta^*(\lambda;\ s,\ t)}{-\delta(\lambda)}$$

定义，那么

$$K(s,\ t) = \overline{K}(s,\ t) - \lambda\int_0^1 \overline{K}(s,\ r)K(r,\ t)\mathrm{d}r$$
$$= \overline{K}(s,\ t) - \lambda\int_0^1 K(s,\ r)\overline{K}(r,\ t)\mathrm{d}r.$$

最后，若 ϕ 取作

$$\phi(r) = f(r) + \lambda\int_0^1 \overline{K}(r,\ t)f(t)\mathrm{d}t, \tag{25}$$

则 ϕ 是(24)的一个解. 这个理论的各个步骤的证明，包含了一系列关于一类表达式的极限的研究，这些表达式出现在 Hilbert 关于有限的线性方程组的处理方法中.

至此，Hilbert 证明了，对于任何连续的(不一定是对称的)核 $K(s,\ t)$和对于任何使 $\delta(\lambda)\neq 0$ 的 λ，存在解函数(预解式)$\overline{K}(s,\ t)$，使得(25)是方程(24)的解.

现在，Hilbert 假设 $K(s,\ t)$是对称的，这使他有可能使用有限阶对称矩阵的事实，从而证明 $\delta(\lambda)$的零点即对称核的特征值是实的. 然后把 $\delta(\lambda)$的零点按绝对值增加的顺序排列起来(绝对值相等时可先取正的零点，而且要按重数排上). 现在(24)的特征函数用

$$\phi^k(s) = \left(\frac{\lambda_k}{\Delta^*(\lambda_k;\ s^*,\ s^*)}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta^*(\lambda_k;\ s,\ s^*)$$

定义，其中 s^* 的选取使得 $\Delta^*(\lambda_k;\ s^*,\ s^*)\neq 0$，而 λ_k 是 $K(s,\ t)$的任一特征值.

相应于各个特征值的特征函数，可以取成标准正交(正交而标准化了的①)集，且对每个特征值 λ_k 和每个属于 λ_k 的特征函数都有

$$\phi^k(s) = \lambda_k\int_0^1 K(s,\ t)\phi^k(t)\mathrm{d}t.$$

① 标准化是指调整 $\phi^k(s)$，使得 $\int_0^1(\phi^k)^2\mathrm{d}s = 1$.

有了这些结果,Hilbert 就有可能证明相应于对称二次型的所谓广义主轴定理. 首先,令

$$(26)\qquad \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} k_{pq}x_p x_q$$

为 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个 n 维二次型. 这可以写成 (Kx, x),其中 K 是 k_{pq} 组成的矩阵,x 是向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,而 (Kx, x) 是两个向量 Kx 与 x 的内积(数量积). 设 K 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 于是对任何一个固定的 λ_k,方程组

$$(27)\qquad 0 = \phi_p - \lambda_p \sum_{q=1}^{n} k_{pq}\phi_q,\ p = 1, 2, \cdots, n,$$

有解

$$\phi^k = (\phi_1^k, \phi_2^k, \cdots, \phi_n^k),$$

而且,若允许差一个常数倍,这解便是唯一的. 因此,正如 Hilbert 所证明的,可以得到

$$(28)\qquad K(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \frac{(\phi^k, x)^2}{(\phi^k, \phi^k)},$$

其中括号仍然表示向量的内积.

Hilbert 的广义主轴定理可叙述如下:设 $K(s, t)$ 是 s 和 t 的连续对称函数. 设 $\phi^p(s)$ 是属于积分方程(24)的特征值 λ_p 的特征函数,并且经过了标准化. 那么对任意连续的 $x(s)$ 和 $y(s)$,下面的关系式成立:

$$(29)\qquad \int_a^b\int_a^b K(s, t)x(s)y(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{p=1}^{\alpha} \frac{1}{\lambda_p}\left(\int_a^b \phi^p(s)x(s)\mathrm{d}s\right)\left(\int_a^b \phi^p(s)y(s)\mathrm{d}s\right),$$

其中 $\alpha = n$ 或 ∞,由特征值的数目决定,而在后一情形,级数对所有满足

$$\int_a^b x^2(s)\mathrm{d}s < \infty,\ \int_a^b y^2(s)\mathrm{d}s < \infty$$

的 $x(s)$ 与 $y(s)$ 绝对一致收敛. (29)是(28)的推广是很明显的,如

果我们先把 $\int_a^b u(s)v(s)\mathrm{d}s$ 定义为两个函数 $u(s)$ 与 $v(s)$ 的内积，并用 (u, v) 表示. 然后用 $x(s)$ 代替(29)中的 $y(s)$，并且用积分来代替(28)左边的和式.

Hilbert 接着证明了一个有名的结果，后来称为 Hilbert-Schmidt 定理. 如果 $f(s)$ 对某个连续的 $g(s)$ 有

$$(30)\qquad f(s) = \int_a^b K(s, t)g(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$(31)\qquad f(s) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \phi^p,$$

其中 ϕ^p 是 K 的标准正交特征函数，并且

$$(32)\qquad c_p = \int_a^b \phi^p(s)f(s)\mathrm{d}s.$$

这样，一个"任意的"函数 $f(s)$，可以表成 K 的特征函数的无穷级数，其系数 c_p 正是展开式的 Fourier 系数.

在前述工作中，Hilbert 在把有限线性方程和有限二次型的结果推广到积分和积分方程时，已经施行了极限过程. 他认为，无穷二次型即带无穷多个变量的二次型本身的处理，将是"有限多个变量二次型熟知理论的不可缺少的完成."他于是着手研究可以称之为纯粹代数问题的东西. 他考虑无穷的双线性形式

$$K(x, y) = \sum_{p, q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q,$$

通过对 n 个变量的二次型和 $2n$ 个变量的双线性型取极限，得到了基本的结果. 工作的细节是复杂的，我们只叙述某些结果. Hilbert 首先得到一个预解式 $\overline{K}(\lambda; x, x)$ 的表达式，它的样子很独特，就是写成对应于 λ 的离散集的每一个值的表达式的和，以及在一个属于连续区域的 λ 集合上的积分. λ 值的离散集属于 K 的点谱，连续集属于连续谱或带谱. 这是连续谱的最早的有特殊意义的应用，连续谱是 Wilhelm Wirtinger(1865 年生)在 1896 年对偏微分方程

已观察到了的.[1]

为了找出二次型的关键结果,Hilbert 引入有界形式的概念.符号(x, x)表示向量$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$和它自己的内积(数量积),$(x, y)$有类似的意义.相应地,形式 $K(x, y)$称为有界的,如果对所有满足 $(x, x) \leqslant 1$ 和 $(y, y) \leqslant 1$ 的 x 和 y 都有 $|K(x, y)| \leqslant M$. 有界性隐含了连续性,后者是 Hilbent 对无穷多个变量的函数定义的.

Hilbert 的关键结果,是把解析几何最平常的主轴定理推广到无穷多个变量的二次型.他证明,存在一个正交变换 T,使得对新变量 $x'(x' = Tx)$, K 可以化为"平方和".也就是说,每一个有界的二次型 $K(x, x) = \sum_{p, q=1}^{\infty} k_{pq}x_p x_q$, 都可以通过一个唯一的正交变换变换成

$$K(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i x_i^2 + \int_{(S)} \frac{d\sigma(\mu, \xi)}{\mu}, \tag{33}$$

其中 k_i 是 K 的特征值倒数.这个积分(我们将不进一步讲述)是在特征值的一个连续区域或连续谱上进行的.

为了排除连续谱,Hilbert 引入全连续的概念.一个具无穷多个变量的函数 $F(x_1, x_2, \cdots)$称为在 $a = (a_1, a_2, \cdots)$ 是全连续的,如果

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0 \\ \cdots\cdots}} F(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \cdots) = F(a_1, a_2, \cdots),$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$可以取遍,使

$$\lim_{h \to \infty} \varepsilon_1^{(h)} = 0, \ \lim_{h \to \infty} \varepsilon_2^{(h)} = 0, \ \cdots$$

的任何数组 $\varepsilon_1^{(h)}, \varepsilon_2^{(h)}, \cdots$. 这较 Hilbert 以前引进的连续性是要求更强的.

为要二次型 $K(x, x)$是全连续的,只要 $\sum_{p, q=1}^{\infty} k_{pq}^2 < \infty$. 有了全

---

[1] *Math. Ann.*, 48,1897,365~389.

连续的要求,Hilbert 就能够证明,如果 K 是一个全连续的有界形式,那么通过一个正交变换,可以把它化为

$$(34) \qquad K(x, x) = \sum_j k_j x_j^2,$$

其中 k_j 是特征值倒数,$(x_1, x_2, \cdots)$满足条件:$\sum_1^\infty x_i^2$ 有限.

现在,Hilbert 就把他的无限多个变量的二次型理论运用到积分方程.在许多情况下,结果并不是新的,但是用较为清楚和简单的方法得到的.Hilbert 着手积分方程的这项新的工作,是通过定义完备正交系$\{\phi_p(s)\}$这一重要概念开始的.这是一列函数,都在$[a, b]$上定义并且连续,还具有下列性质:

(a) 正交性:

$$\int_a^b \phi_p(s)\phi_q(s)\mathrm{d}s = \delta_{pq}, \ p, q = 1, 2, \cdots.$$

(b) 完备性:对每一对定义在$[a, b]$上的函数 u 和 v,都有

$$\int_a^b u(s)v(s)\mathrm{d}s = \sum_{p=1}^\infty \int_a^b \phi_p(s)u(s)\mathrm{d}s \int_a^b \phi_p(s)v(s)\mathrm{d}s.$$

数值

$$u_p^* = \int_a^b \phi_p(s)u(s)\mathrm{d}s$$

称为 $u(s)$关于函数系$\{\phi_p\}$的 Fourier 系数.

Hilbert 证明,对于任意有穷区间$[a, b]$,都可以(例如用多项式)定义一个完备的正交系.然后,可以证明广义的 Bessel 不等式,并且可以证明,条件

$$\int_a^b u^2(s)\mathrm{d}s = \sum_{p=1}^\infty u_p^{*2}$$

和完备性等价.

现在,Hilbert 转到积分方程

$$(35) \qquad f(s) = \phi(s) + \int_a^b K(s, t)\phi(t)\mathrm{d}t.$$

核 $K(s, t)$不必是对称的,但利用系数

$$a_{pq}=\int_a^b\int_a^b K(s,\ t)\phi_p(s)\phi_q(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

展成了二重"Fourier"级数. 这就推出

$$\sum_{p,\ q=1}^{\infty}a_{pq}^2\leqslant\int_a^b\int_a^b K^2(s,\ t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

此外,如果

$$a_p=\int_a^b\phi_p(s)f(s)\mathrm{d}s,$$

即 a_p 是 $f(s)$的"Fourier"系数,那么 $\sum_{p=1}^{\infty}a_p^2<\infty$.

接着,Hilbert 把上述积分方程化为一组带无穷多个未知量的无穷多个线性方程. 把 $\phi(s)$的积分方程的求解看成找 $\phi(s)$的"Fourier"系数问题. 用 x_1, x_2, …表示尚属未知的系数,他得到下面的线性方程组:

$$x_p+\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}x_q=a_p,\ p=1,\ 2,\ \cdots \tag{36}$$

他证明,如果这个方程组有唯一解,那么积分方程就有唯一的连续解,并且当相应于(36)的齐次线性方程组有 n 个线性无关解时,则相应于(35)的齐次积分方程

$$0=\phi(s)+\int_a^b K(s,\ t)\phi(t)\mathrm{d}t \tag{37}$$

有 n 个线性无关解. 这时,原来的非齐次积分方程有解,当且仅当 $\psi^{(h)}(s)$, $h=1,\ 2,\ \cdots,\ n$, 满足条件

$$\int_a^b\psi^{(h)}(s)f(s)\mathrm{d}s=0,\ h=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \tag{38}$$

其中 $\psi^{(h)}(s)$是转置齐次方程

$$\phi(s)+\int_a^b K(t,\ s)\phi(t)\mathrm{d}t=0$$

的 n 个线性无关解,当(37)有 n 个解时,它们也是存在的. 这样,就得到了 Fredholm 择一定理(alternative theorem):或者方程

$$f(s)=\phi(s)+\int_a^b K(s,\ t)\phi(t)\mathrm{d}t \tag{39}$$

对一切 f 都有唯一解，或者相应的齐次方程有 n 个线性无关解. 在后一情况，(39)有解当且仅当正交性条件(38)得到满足.

接着，Hilbert 转到特征值问题

$$f(s) = \phi(s) - \lambda\int_a^b K(s, t)\phi(t)\mathrm{d}t, \tag{40}$$

现在 K 是对称的. K 的对称性蕴含着它的"Fourier"系数确定一个全连续的二次型 $K(x, x)$. 他证明存在一个正交变换 T 使得

$$K(x', x') = \sum_{p=1}^{\infty}\mu_p x_p'^2,$$

其中 μ_p 是二次型 $K(x, x)$ 的特征值倒数. 核 $K(s, t)$ 的特征函数 $\{\phi_p(s)\}$ 现在定义为

$$L_p(K(s)) = \sum_{q=1}^{\infty} l_{pq}\int_a^b K(s, t)\Phi_q(t)\mathrm{d}t = \mu_p\phi_p(s),$$

其中 l_{pq} 是 T 的矩阵元素，$\Phi_q(t)$ 是一已知的完备标准正交集. 可以证明 $\phi_p(s)$(和 $\Phi_q(s)$ 不同)形成一标准正交集，并且满足

$$\phi_p(s) = \lambda_p\int_a^b K(s, t)\phi_p(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\lambda_p = \frac{1}{\mu_p}$. 这样，Hilbert 又重新证明了，对于(40)的齐次情形，以及对于和(40)的核 $K(s, t)$ 相联系的二次型 $K(x, x)$ 的每一个有穷特征值，都存在特征函数.

现在 Hilbert 再次建立了(Hilbert-Schmidt 定理)：如果 $f(s)$ 是任一连续函数，对于它存在 g 使得

$$\int_a^b K(s, t)g(t)\mathrm{d}t = f(s),$$

那么 $f(s)$ 可以表为 K 的特征函数的级数，这级数一致且绝对收敛(看(31)式). Hilbert 用这个结果去证明，相应于(40)的齐次方程除了在特征值 λ_p 之外没有非平凡解. 因此，Fredholm 择一定理取下述形式：对 $\lambda \neq \lambda_p$，方程(40)有唯一解. 对 $\lambda = \lambda_p$，方程(40)有解当且仅当 n_p 个条件

$$\int_a^b \phi_{p+j}(s)f(s)\mathrm{d}s = 0,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n_p,$$

被满足，其中 $\phi_{p+j}(s)$ 是相应于 λ_p 的 n_p 个特征函数. 最后，他又重新证明了主轴定理的推广：

$$\int_a^b\int_a^b K(s,\ t)u(s)u(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p}\left(\int_a^b u(t)\phi_p(t)\mathrm{d}t\right)^2,$$

其中 $u(s)$ 是任意(连续)函数，并且在这里相应于任一 λ_p 的全体 ϕ_p 都包含在求和之中.

Hilbert 的这一较晚的工作(1906)不用 Fredholm 的无穷阶行列式. 在这个工作中，他直接证明了积分方程和完备正交系理论以及函数在这种正交系中的展开式之间的关系.

Hilbert 把他关于积分方程的结果应用到各种几何和物理问题. 特别地，他在六篇文章的第三篇里解决了 Riemann 问题：构造一个在由光滑曲线围成的区域里解析的函数，它的边值的实部或者虚部是已知的，或者实部与虚部是用一线性方程联系着的.

Hilbert 的工作中最有价值的成就之一，发表在 1904 和 1905 年的论文中，把微分方程的 Sturm-Liouville 边值问题化成了积分方程. Hilbert 的结果说，微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u + \lambda u = 0 \tag{41}$$

满足边界条件

$$u(a) = 0,\ u(b) = 0$$

(甚至更一般的边界条件)的特征值和特征函数，恰恰是

$$\phi(x) - \lambda\int_a^b G(x,\ \xi)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \tag{42}$$

的特征值和特征函数，其中 $G(x,\ \xi)$ 是(41)的 Green 函数，也就是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u = 0$$

的特解，它满足一定的可微性条件，并且它的一阶偏微商在 $x = \xi$ 有等于 $-1/p(\xi)$ 的奇性跳跃. 类似的结果对偏微分方程也成立. 这

样,积分方程成了解常微分方程和偏微分方程的一种方法.

现在扼要地重述一下 Hilbert 的重大成果. 首先是他对于对称核 K 建立了一般的谱理论. 仅仅在 20 年前,人们为了证明膜的最低振动频率的存在,还得尽很大的数学上的努力(第 28 章第 8 节). 有了积分方程,频率和真正的特征函数的整个序列的存在,在对振动介质作十分一般的假定下得到了构造性的证明. 这些结果是首先由 Emile Picard① 运用 Fredholm 的理论得出来的. Hilbert 另一个值得注意的结果是,一个函数展成第二类积分方程的特征函数的展开式,取决于相应的第一类积分方程是否可解. 特别地, Hilbert 发现,Fredholm 方法的成功要依靠全连续的概念,而这是他引进到双线性形式并加以精深研究的. 在这里他开创了双线性对称形式的谱理论.

在 Hilbert 表明如何把微分方程的问题转化为积分方程之后,这个研究方法被愈来愈多地用来解决物理问题. 在这里应用 Green 函数去实现转化成了一个重要的工具. 还有,Hilbert 自己表明了②,在空气动力学问题里,人们可以直接引出积分方程. 这种直接求助于积分方程的办法是可能的,因为在某些物理问题中求和的概念证明是这样的基本,如同在另一些问题中导致微分方程的变化率概念那样. Hilbert 还强调,不仅常微分方程或偏微分方程,还有积分方程,是函数展成级数的必要和自然的出发点,而且通过微分方程得到的展开,恰好是积分方程理论中的一般定理的特殊情况.

4. Hilbert 的直接继承者

Hilbert 在积分方程方面的工作,被 Erhard Schmidt(1876—

① *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22,1906,241～259.

② *Math. Ann.*, 72,1912, 562 ～ 577 = *Grundzüge*, Chap. 22.

1959)简化了. Erhard Schmidt 在德国几所大学担任过教授. 他用的方法是 H. A. Schwarz 在位势理论中创立的. 他最有意义的贡献是在 1907 年把特征函数的概念推广到带非对称核的积分方程①.

Friedrich Riesz (1880—1956) 是匈牙利的数学教授, 他在 1907 年继续了 Hilbert 的工作②. Hilbert 曾经讨论过形如

$$f(s) = \phi(s) + \int_a^b K(s, t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

的积分方程,其中 f 和 K 是连续的. Riesz 要把 Hilbert 的思想推广到更一般的函数 $f(s)$. 为此必须肯定,相对于给定的标准正交函数序列 $\{\phi_p\}$,能够确定 f 的"Fourier"系数. 他还有兴趣于发现,在什么情况下,一个给定的数列 $\{a_p\}$ 能够是某一个函数 f 关于已知标准正交序列 $\{\phi_p\}$ 的 Fourier 系数.

Riesz 引进了平方是 Lebesgue 可积的函数,并得到了下面的定理:令 $\{\phi_p\}$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 平方可积的、标准正交的函数序列. 如果 $\{a_p\}$ 是一实数序列,那么 $\sum_{p=1}^{\infty} a_p^2$ 收敛是存在一个函数 f 使得对于每个 ϕ_p 和 a_p,成立

$$\int_a^b f(x)\phi_p(x)\mathrm{d}x = a_p,\ p = 1, 2, 3, \cdots$$

的充分必要条件. 函数 f 实际上是 Lebesgue 平方可积的;而且在 $\{a_p\}$ 完备的情况下,这样的 f (在几乎处处相等的两个函数不加区别的意义下)还是唯一的. 这个定理,通过任一组 Lebesgue 平方可积的完备的标准正交函数序列,在 Lebesgue 平方可积函数集合与平方可和序列集合之间,建立起一个一一对应.

随着 Lebesgue 可积函数的引进, Riesz 还有可能在很宽的条件下,证明第二类积分方程

---

① *Math. Ann.*, 63,1907,433~476 和 64,1907,161~174.

② *Comp. Rend.*, 144,1907,615~619,734~736,1409~1411.

$$f(s) = \phi(s) + \int_a^b K(s, t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

是可解的,这条件就是 $f(s)$ 与 $K(s, t)$Lebesgue 平方可积.除了一个在$[a, b]$上 Lebesgue 积分为 0 的函数外,解是唯一的.

在 Riesz 发表他的第一篇文章的同一年,科伦(Cologne)大学教授 Ernst Fischer(1875—1959)引进了平均收敛的概念①.定义在区间$[a, b]$上的函数序列$\{f_n\}$称为平均收敛的,如果

$$\lim_{m, n\to\infty}\int_a^b (f_n(x) - f_m(x))^2\mathrm{d}x = 0;$$

而称$\{f_n\}$平均收敛到 f,如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f - f_n)^2\mathrm{d}x = 0.$$

这里的积分是 Lebesgue 积分.函数 f 是唯一确定的,如果允许差一个定义在测度为 0 的集合上的函数,或者说差一个被称为零函数的 $g(x) \neq 0$,它满足条件 $\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = 0$.

在区间$[a, b]$上 Lebesgue 平方可积函数的集合后来记为 $L^2(a, b)$,或简记为 L^2. Fischer 的主要结果是说,$L^2(a, b)$在平均收敛意义下是完备的,也就是说,如果 f_n 属于 L^2,并且$\{f_n\}$平均收敛,那么在 $L^2(a, b)$中存在一个函数 f,使得$\{f_n\}$平均收敛到 f.这种完备性是平方可和函数的主要优点.由此作为一个推论,Fischer 推出上述 Riesz 定理,这个结果就是人们所熟悉的 Riesz-Fischer 定理.在一篇后记②中,Fischer 强调 Lebesgue 平方可积函数的运用是本质的.没有更小的函数集合可用.

所谓矩量(moment)问题是指:确定一个函数 $f(x)$,使它关于给定的标准正交系$\{g_n\}$具有给定的 Fourier 系数$\{a_n\}$,或者说,确定一个函数 f,使它满足

---

① *Comp. Rend.*, 144,1907,1022~1024.

② *Comp. Rend.*, 144,1907,1148~1150.

$$\int_a^b g_n(x)f(x)\mathrm{d}x = a_n,\ n = 1,\ 2,\ \cdots.$$

这个问题在 Riesz 1907 年的文章中已经提了出来(说的自然是 Lebesgue 积分). Riesz 在 1910 年①试图推广这个问题. 因为在这个新的研究工作中,Riesz 用了 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^n |a_ib_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

和 $$\left|\int_M f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_M |f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_M |g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\left(\text{其中}\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$, 以及另外的不等式,他不得不引进在集合 M 上可测的函数 f 的集合 L^p,对于它们 $|f|^p$ 是在 M 上 Lebesgue 可积的. 他的第一个主要定理是:如果函数 $h(x)$ 对于 L^p 中的每一个 f 都使得乘积 $f(x)h(x)$ 是可积的,那么 h 是属于 L^q 的;反过来,L^p 的一个函数与 L^q 的一个函数的乘积永远是(Lebesgue)可积的. 在这里自然要求 $p>1$ 并且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Riesz 还引入了强收敛和弱收敛的概念. 函数序列 $\{f_n\}$ 称为是强收敛到 f(p 阶平均),如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x = 0.$$

序列 $\{f_n\}$ 称为是弱收敛到 f,如果

$$\int_a^b |f_n(x)|^p\mathrm{d}x < M$$

(M 与 n 无关),并且对于 $[a,\ b]$ 中的每一个 x 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x (f_n(t)-f(t))\mathrm{d}t = 0.$$

强收敛隐含弱收敛. (弱收敛的近代定义是:如果 $\{f_n\}$ 属于 L^p,f 属于 L^p,并且

① *Math. Ann.*, 69, 1910, 449~497.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x)-f_n(x))g(x)\mathrm{d}x = 0$$

对于 L^q 中的每一个 g 成立，就说 $\{f_n\}$ 弱收敛到 f. 这是和 Riesz 的定义等价的.）

Riesz 在 1910 年的同一篇文章中，把积分方程

$$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x, t)\phi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

的理论推广到已知的 f 和未知的 ϕ 都是 L^p 函数的情形. 这个积分方程特征值问题解的结果和 Hilbert 的结果相类似，更加引人注意的却是，Riesz 为了实现这项工作，引入了算子(operator)的抽象概念，并对它明确地陈述了 Hilbert 的全连续概念，而且建立了抽象的算子理论. 我们将在下一章更多地谈到这种抽象的趋向. 在其他的结果中，Riesz 证明了，L^2 中实的全连续算子的连续谱是空的.

5. 理论的推广

Hilbert 对积分方程的看重，使这门学科在相当长的一段时间内，成了一种世界性的狂热，产生了大量的文献，其中大多数都只有短暂的价值. 然而，这门学科的某些推广却证明是有价值的. 我们只能把它们列出来.

上面介绍的积分方程的理论，涉及的是线性积分方程；也就是说，对未知函数 $u(x)$ 来说是线性的. 这个理论已推广到非线性积分方程，在那里未知函数以二次、或高次、或更为复杂的形式出现.

此外，我们的简略叙述没有谈到，对于已知函数 $f(x)$ 和 $K(x, y)$ 要加上什么条件才导致许多结论. 如果这些函数是不连续的并且间断性没有限制，或者区间 $[a, b]$ 换成了一个无穷区间，那么许多结果就得改变或者起码需要新的证明. 例如，即使是 Fourier

变换

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos(x\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

它可以看作第一类的积分方程,并且具有反变换

$$u(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos(x\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

作为它的解,但是它只有两个特征值±1,而每一个特征值都有无穷多个特征函数.这些情况现在都是在奇异积分方程这个标题下进行研究的,这样的方程不能用解 Volterra 和 Fredholm 方程的方法求解.然而,它们却显示了奇妙的性质,这就是存在 λ 值的连续区间或带谱,对于它们解是存在的.在这个课题上发表第一篇有意义文章的是 Hermann Weyl(1885—1955)①.

积分方程存在定理这一课题也已经引起了很大的注意,这项工作专注于线性和非线性积分方程.例如,关于

$$y(x)=f(x)+\int_a^x K(x,\ s,\ y(s))\mathrm{d}s$$

的存在定理就有许多数学家给出过,这种方程包含了第二类 Volterra 方程

$$y(x)=f(x)+\int_a^x K(x,\ s)y(s)\mathrm{d}s$$

作为一种特殊情形.

历史上,下一个重大的进展乃是积分方程研究工作的一种自然产物. Hilbert 认为一个函数是由它的 Fourier 系数给出.这些系数满足条件: $\sum_1^{\infty}a_p^2$ 有穷.他还引进了实数序列 $\{x_n\}$,使得 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 有穷.后来,Riesz 和 Fischer 证明,在 Lebesgue 平方可和函数与它们的 Fourier 系数所成的平方可和序列之间,存在一个一一对应关系(见前).平方可和序列可以看成无穷维空间中的点的坐标,这个无穷维空间是 n 维 Euclid 空间的推广.这样,函数可以看成

① *Math. Ann.*, 66,1908, 273～324 = *Ges. Abh.*, 1,1～86.

现在称之为 Hilbert 空间的一个点,积分 $\int_a^b K(x, y)u(x)\mathrm{d}x$ 可以看成是把 $u(x)$ 变换成它自己或其他函数的一个算子.这些思想为积分方程的研究提出了一种抽象的研究方法,它适应了变分法的初期抽象的研究方法.这种新的研究方法,现在作为泛函分析已为人所知,我们将在下一章叙述它.

参考书目

Bernkopf, M.:"The Development of Function Spaces with Particular Reference to their Origins in Integral Equation Theory", *Archive for History of Exact Sciences*, 3, 1966, 1～96.

Bliss, G. A.:"The Scientific Work of E. H. Moore", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 40, 1934, 501～514.

Bocher, M.: *An Introduction to the Study of Integral Equations*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1913.

Bourbaki, N.: *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1960, pp. 230～245.

Davis, Harold T.: *The Present State of Integral Equations*, Indiana University Press, 1926.

Hahn, H.:"Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 20, 1911, 69～117.

Hellinger, E.: *Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungssysteme*,见 Hilbert 的 *Gesam. Abh.*, 3, 94～145, Julius Springer, 1935.

Hellinger, E.:"Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen", *Jour. für Math.*, 136, 1909, 210～271.

Hellinger, E., and O. Toeplitz:"Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1923～1927, Vol. 2, Part 3, 2nd half, 1335～1597.

Hilbert, D.: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 1912, Chelsea (reprint), 1953.

Reid, Constance: *Hilbert*, Springer-Verlag, 1970.

Volterra, Vito: *Opere matematiche*, 5 vols., Accademia Nazionale dei Lincei, 1954～1962.

Weyl, Hermann: *Gesammelte Abhandlungen*, 4 vols, Springer-Verlag, 1968.

第 46 章

泛函分析

> 人必须确信，如果他是在给科学添加许多新的术语而让读者接着研究那摆在他们面前的奇妙难尽的东西，那么他就已经使科学获得了巨大的进展.
>
> A. L. Cauchy

1. 泛函分析的性质

数学中许多领域处理的是作用在函数上的变换或算子，这件事在接近 19 世纪后期已经很明显了. 例如，即使是常微分运算和它的逆(反微分)，也是作用在一个函数上以产生新的函数. 在变分法的问题中，人们处理形如

$$J=\int_a^b F(x,\ y,\ y')\mathrm{d}x$$

的积分，这个积分可以看作是作用在一类函数 $y(x)$ 上的运算，问题是要在这类函数中找出一个使积分取最大值或最小值的函数. 微分方程领域提供了另一类算子，例如，微分算子

$$L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q(x)$$

作用在一类函数 $y(x)$ 上，把它们变换为另外的函数. 自然，为了解微分方程，人们要寻找特殊的 $y(x)$，使得 L 作用到这个 $y(x)$ 上得到 0，并且这个函数也许还得满足初始条件或边界条件. 作为算子的最后一个例子是积分方程. 方程

$$f(x)=\int_a^b K(x,\ y)u(y)\mathrm{d}y$$

的右边可以看作是作用在不同的 $u(x)$ 上并引出新的函数来的一个算子,虽然仍像微分方程的情形一样,方程的解 $u(x)$ 是变换成 $f(x)$ 的.

推动创立泛函分析的思想是,所有这些算子都可以在作用于一类函数上的算子的一种抽象形式下加以研究.进而,这些函数可以看作空间的元素或点.这样,算子就把点变成点;在这种意义下,算子是普通变换(例如旋转)的一种推广.上述算子中有一些是把函数变成实数,而不是变成函数.那些变到实数或复数的算子,今天称为泛函,而算子这个名称则用来通称把函数变为函数的变换.因此,泛函分析这个名称[它是 Paul P. Lévy(1886—1971)引进的,当时泛函是关键的概念],并不是十分合适的.探求一般性和统一性,是20世纪数学的特征之一,而泛函分析所追求的正是这些目的.

2. 泛函的理论

泛函的抽象理论是由 Volterra 在他关于变分法的工作中开始的,他关于线(曲线)的函数(他自己是这样称呼的)的工作,包括了好几篇论文①.对 Volterra 来说,一个线的函数是指一个实值函数 F,它的值取决于定义在某个区间 $[a, b]$ 上的函数 $y(x)$ 的全体函数值.这些函数本身被看作一个空间的点,而对于这空间,可以定义点的邻域和点列的极限.对于泛函 $F[y(x)]$,Volterra 引进了连续、微商和微分的定义.然而,这些定义对于变分法的抽象理论是不适用的,因而被废弃了.他的定义事实上受到了 Hadamard 的批评②.

所有定义在某个区间上的函数的全体,可以看作空间的点,这

---

① *Atti della Reale Accademia dei Lincei*,(4),3,1887,97～105,141～146,153～158 = *Opere matematiche*,1,294～314,以及同期或以后年代的其他论文.

② *Bull. Soc. Math. de France*,30,1902,40～43 = *Œuvres*,1,401～404.

样一种概念,甚至在 Volterra 开始他的工作以前,就已经有人提出了. Riemann 在他的学位论文中①,说到了某些函数的全体组成(空间中点的)连通闭区域. Giulio Ascoli(1843—1896)②和 Cesare Arzelà③ 探求把 Cantor 的点集论推广到函数集合上,从而把函数看成一个空间的点. Arzelà 还说到线的函数. Hadamard 在 1897 年的第一次世界数学会上提出④,曲线可以看成一个集合的点. 这时他是在考虑定义在[0, 1]上的全体连续函数所成的族,即出现在他的偏微分方程论文中的一个函数族. Emile Borel 为了不同的目的,也做过相同的提示⑤,这就是借助于级数来研究任意函数.

Hadamard 由于变分法上的原因也开创了泛函的研究⑥. 泛函的名称就是属于他的. 根据 Hadamard,泛函 $U[y(t)]$ 是线性的,如果当 $y(t)=\lambda_1 y_1(t)+\lambda_2 y_2(t)$ 时,便有 $U[y(t)]=\lambda_1 U[y_1(t)]+\lambda_2 U[y_2(t)]$, 其中 λ_1, λ_2 是常数.

在建立函数空间和泛函的抽象理论中,第一个卓越的成果,是由法国的领头数学教授 Maurice Fréchet(1878—1973),在他 1906 年的博士论文⑦中取得的. Fréchet 在他的所谓泛函演算中,力图把 Cantor, Volterra, Arzelà, Hadamard 和其他人工作中的思想,以抽象的术语统一起来.

为了使他的函数空间获得最大程度的一般性,Fréchet 采纳了由 Cantor 发展起来的集合论的整套基本概念,虽然对 Fréchet 来说,集合中的点是函数. 他还把点集的极限的概念比较一般地确切

---

① *Werke*, p. 30.

② *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, (3),18,1883,521～586.

③ *Atti della Accad. dei Lincei, Rendiconti*, (4),5,1889,342～348.

④ *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses*, Teubner, 1898,201～202.

⑤ *Verhandlungen*, 204～205.

⑥ *Comp. Rend.*, 136,1903, 351 ～ 354 = *Œuvres*, 1,405～408.

⑦ *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22,1906,1～74.

陈述出来. 这个概念没有明显地定义,但是用很一般的性质刻画了出来,足以包括 Fréchet 在具体理论中所出现的并力图将其统一的各种类型的极限. 他引入了一类 L 空间,L 表示对这类空间的每一个,极限概念都是存在的. 例如,如果 A 是类 L 中的一个空间,而 A_1, A_2, …是从 L 中随意选出的元素,则必须有可能去确定,是否存在唯一的一个元素 A(当它存在的时候,称为序列 $\{A_n\}$ 的极限),使得

(a) 如果对每个 i, $A_i = A$, 则 $\lim\{A_n\} = A$.

(b) 如果 A 是 $\{A_n\}$ 的极限,则 A 也是 $\{A_n\}$ 的每个无穷子序列的极限.

然后,Fréchet 对类 L 中的任何一个空间,引进了一系列的概念. 例如一个集合 E 的导集 E',由这样的点构成,它们都是 E 中的序列的极限. E 是闭的,如果 E' 包含在 E 中. E 是完全的,如果 $E' = E$. E 的一个点 A 叫做 E 的内点(狭义),如果 A 不是任何一个不在 E 中的序列的极限. 集合 E 是紧的,如果或者 E 只有有限多个元素,或者 E 的每一个无穷子集至少有一个极限元素. 如果 E 是闭的而且紧的,那么称 E 为极型的(extremal)(Fréchet 的紧是近代的相对列紧,而他的"极型的"是现在的列紧). Fréchet 的第一个重要定理是闭区间套定理的推广:如果 $\{E_n\}$ 是由一个极型集的闭子集组成的单调下降序列,即 E_{n+1} 包含在 E_n 中,那么所有 E_n 的交是非空的.

Fréchet 接着就考虑泛函(他称它们为泛函运算). 这是定义在一个集合 E 上的实值函数. 他这样来定义泛函的连续性:泛函 U 称为在 E 的元素 A 处连续,如果对每个包含在 E 中并收敛到 A 的序列 $\{A_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} U(A_n) = U(A)$. 他还引进了泛函的半连续性,这是 René Baire(1874—1932)在 1899 年[①]对普通函数引进的

① *Annali di Mat.*, (3),13,1899,1~122.

一个概念. U 在 E 中是上半连续的,如果对一切上述的 $\{A_n\}$ 都有 $U(A) \geqslant \lim\sup U(A_n)$;它是下半连续的,如果 $U(A) \leqslant \lim\inf U(A_n)$ ①.

有了这些定义,Fréchet 就有可能证明关于泛函的许多定理. 例如,每一个在极型集 E 上连续的泛函是有界的,并且在 E 上达到它的极大和极小. 每一个在极型集 E 上上半连续的泛函是上有界的,而且在 E 上达到极大.

Fréchet 接着对泛函的集合和序列引进了一些概念,如一致收敛、拟一致收敛、紧致性和等度连续等. 例如,泛函序列 $\{U_n\}$ 一致收敛到 U,如果给定任一正数 ε,只要 n 充分大并且与 E 中的 A 无关,就有 $|U_n(A)-U(A)|<\varepsilon$. 这样他就可以证明过去对实函数得到的、现在推广到泛函的那些定理了.

研究了空间类 L 之后,Fréchet 就定义较特殊的空间(如邻域空间),重新定义对于具有极限点的空间引进过的概念,并证明一些类似于上述定理的定理,但结果往往较好,因为这些空间有更多的性质.

最后他引进距离空间. 在这样一个空间里,对于每一对点 A 和 B,定义了一个函数,起着距离(*écart*)的作用并用 (A, B) 表示,它满足下列条件:

(a) $(A, B) = (B, A) \geqslant 0$;

(b) $(A, B) = 0$ 当且仅当 $A = B$;

(c) $(A, B) + (B, C) \geqslant (A, C)$.

条件(c)称为三角不等式. 他称这样的空间是 $\mathscr{E}$ 类的. 对于这类空间,Fréchet 也可以证明关于空间的以及定义在其上的泛函的许多定理,它们十分类似于过去对更一般的空间已证明了的结果.

Fréchet 给出了函数空间的某些例子. 例如在同一区间 I 上连续的所有一元实变函数的全体所形成的集合,其中任意两个函数

---

① 下极限 lim inf 是指序列 $U(A_n)$ 的最小极限点.

f 和 g 的距离定义为 $\max_{x\in I}|f(x)-g(x)|$，它们构成 $\mathscr{E}$ 类的一个空间. 现在这个距离称为极大模.

Fréchet 提出的另一个例子是实数序列的全体所构成的集合. 如果 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ 和 $y=(y_1, y_2, \cdots)$ 是任两个序列，那么 x 和 y 的距离定义为

$$(x, y)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{|x_p-y_p|}{1+|x_p-y_p|}.$$

正如 Fréchet 所说的，这是一个可数无穷维空间.

Fréchet① 在运用他的 $\mathscr{E}$ 类空间的过程中，成功地给出了泛函的连续性、微分和可微性的定义. 虽然这些定义对变分法并不是完全适用的，但他的微分定义却值得一提，因为它在事后被证明为满意的概念中是核心. 他假设存在一个线性泛函 $L(\eta(x))$，使得

$$F[y(x)+\eta(x)]=F(y)+L(\eta)+\varepsilon M(\eta),$$

其中 $\eta(x)$是 $y(x)$的变分，$M(\eta)$是 $\eta(x)$在$[a, b]$上的最大绝对值，而 ε 随 M 趋向于 0. 这时 $L(\eta)$便是 $F(y)$的微分. 他还事先假定了 $F(y)$的连续性，这却是在变分法的许多问题中所不能满足的.

Charles Albert Fischer(1884—1922)②后来改进了 Volterra 关于泛函微商的定义，使之确能适用于变分法中的泛函. 泛函的微分由此可以通过微商来定义.

就变分法所需要的泛函性质的基本定义而论，其最终的确切表达是由 Elizabeth Le Stourgeon(1881—1971)给出的③. 关键的概念，即泛函的微分，是 Fréchet 定义的一种修正. 泛函 $F(y)$是说在 $y_0(x)$有微分，如果存在线性泛函 $L(\eta)$，使得对 y_0 的邻域中的所有弧 $y_0+\eta$ 都有关系式

---

① *Amer. Math. Soc. Trans.*, 15, 1914, 135～161.

② *Amer. Jour. of Math.*, 35, 1913, 369～394.

③ *Amer. Math. Soc. Trans.*, 21, 1920, 357～383.

$$F(y_0+\eta)=F(y_0)+L(\eta)+M(\eta)\varepsilon(\eta)$$

成立,其中 $M(\eta)$是 η 和 η' 在区间$[a, b]$上的最大绝对值,$\varepsilon(\eta)$是和 $M(\eta)$一起消失的量.她还定义了二阶微分.

Le Stourgeon 和 Fischer 两人都从他们的微分定义推证了泛函有极小值存在的若干必要条件,这种条件属于可应用到变分法问题的一种类型.例如,泛函 $F(y)$在 $y=y_0$ 有极小的一个必要条件是对每一 $\eta(x)$, $L(\eta)$趋于零,其中 η 在$[a, b]$上连续且有一阶连续微商,还满足 $\eta(a)=\eta(b)=0$. 从一阶微分消失的条件可以推出 Euler 方程,同时再应用泛函二阶微分的定义(这是曾经提到过的几个作者已经给出过的),就可以推出变分法的 Jacobi 条件的必要性.

变分法所要求的泛函理论的决定性工作,至少在 1925 年以前,是由比萨和波洛尼亚(Bologna)大学教授 Leonida Tonelli (1885—1946)完成的.他从 1911 年起就这个题目写了几篇论文,以后他发表了他的《变分法基础》(*Fondamenti di calcolo delle variazioni*,二卷,1922,1924),在其中他从泛函的观点来考虑问题.经典的理论大量依赖于微分方程的理论. Tonelli 的目的是要用积分的极小曲线的存在定理代替微分方程的存在定理.在他的整个著作中,泛函的下半连续性的概念是一个基本的概念,因为那里的泛函是不连续的.

Tonelli 首先处理曲线的集合,并给出保证一类曲线的极限曲线存在的诸定理.接下去的定理保证了通常的但是含参变量的积分

$$\int_{t_1}^{t_2}F(t,\ x(t),\ y(t),\ x',\ y')\mathrm{d}t$$

作为 $x(t)$和 $y(t)$的函数是下半连续的.(以后他考虑了更加基本的非参变量积分.)他为标准形式的问题导出了变分法的四个经典的必要条件.第二卷的重点是在半连续概念的基础上为一大类问

题推导存在定理.这就是,给定了上述形式的一个积分,把它看成一个泛函,对它施加一些条件,并在所考虑的曲线类上也施加一些条件,他就证明了,在这类曲线中存在一条曲线使积分达到极小.他的各定理涉及到绝对极值和相对极值.

Tonelli 的工作在某种程度上给微分方程带来了好处,因为他的存在定理隐含着微分方程解的存在性,这些方程在经典的方法中是用极小曲线来提供解的.然而,他的工作只限于变分法问题的基本类型.虽然这个抽象的研究途径被许多人接着做,但就泛函理论应用于变分法来说所取得的进展却是不大的.

3. 线性泛函分析

泛函分析的主要工作在于对积分方程而不是对变分法提供一个抽象的理论.变分法领域里所需泛函的性质是相当特殊的,对一般的泛函并不成立.此外,这些泛函的非线性造成了困难,而这种困难对于包含在积分方程中的泛函和算子则是无关紧要的.在 Schmidt,Fischer,Riesz 为积分方程解的理论作具体推广时,他们和其他一些人也同时开始了相应的抽象理论的研究.

第一个试图建立线性泛函和算子的抽象理论的,是美国数学家 E. H. Moore,他从 1906 年开始这一工作①. Moore 认识到,在有限多个未知数的线性方程的理论、无限多个未知数的无限多个线性方程的理论以及线性积分方程的理论之间,有许多共同的地方.他因此着手建立一种称为"一般分析"(General Analysis)的抽象理论,它包含上述具体理论作为特殊情形.他用的是公理方法.我们将不叙述其细节,因为他的影响并不广,而且也没有获得很有效的方

① 例如,看 *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici* (1908),2, *Reale Accademia dei Lincei*, 1909,98~114,以及 *Amer. Math. Soc. Bull.*, 18,1911/1912,334~362.

法. 另外,他的符号语言很奇怪,使以后的人理解起来很困难.

在建立线性泛函和算子的抽象理论的过程中,第一个有影响的步骤是由 Erhard Schmidt① 和 Fréchet② 在 1907 年采取的. Hilbert 在他的积分方程的工作中,曾经把一个函数看成是由它相应于某标准正交函数系的 Fourier 系数给定的. 这些系数以及在他的无穷多个变量的二次型理论中他所赋予这些 x_i 的值,都是使 $\sum_1^\infty x_n^2$ 成为有限的序列 $\{x_n\}$. 然而,Hilbert 并没有把这些序列看成空间中点的坐标,也没有用几何的语言. 这一步是由 Schmidt 和 Fréchet 采取的. 把每一个序列 $\{x_n\}$ 看成一个点,函数就被表现为无穷维空间的点. Schmidt 不仅把实数而且把复数引入序列 $\{x_n\}$ 中. 这样的空间从此以后被称为 Hilbert 空间. 我们的叙述按照 Schmidt 的工作.

Schmidt 的函数空间的元素是复数的无穷序列 $z = \{z_n\}$, 使得

$$\sum_{p=1}^{\infty} |z_p|^2 < \infty.$$

Schmidt 引入记号 $\|z\|$ 来表示 $\left\{\sum_{p=1}^{\infty} z_p \bar{z}_p\right\}^{\frac{1}{2}}$; $\|z\|$ 后来就称为 z 的范数(norm). 按照 Hilbert, Schmidt 用记号 (z, w) 表示 $\sum_{p=1}^{\infty} z_p w_p$, 所以 $\|z\| = \sqrt{(z, \bar{z})}$. (现在通用的记号是把 (z, w) 定义为 $\sum_{p=1}^{\infty} z_p \bar{w}_p$.) 空间中两个元素 z 和 w 称为正交的,当且仅当 $(z, \bar{w}) = 0$. Schmidt 接着证明了广义的 Pythagoras 定理:如果 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是空间的 n 个两两正交的元素,则由

$$w = \sum_{p=1}^{n} z_p$$

---

① *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 25, 1908, 53～77.

② *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 8, 1908, 97～116, 289～317.

知
$$\| w \|^2 = \sum_{p=1}^{n} \| z_p \|^2.$$
由此可推出 n 个两两正交的元素是线性无关的. Schmidt 在他的一般空间中还得到了 Bessel 不等式:如果 $\{z_n\}$ 是标准正交元素的无穷序列,即 $(z_p, \bar{z}_q) = \delta_{pq}$, 而 w 是任何一个元素,那么
$$\sum_{p=1}^{\infty} |(w, \bar{z}_p)|^2 \leqslant \| w \|^2.$$
此外,还证明了范数的 Schwarz 不等式和三角不等式.

元素序列 $\{z_n\}$ 称为强收敛于 z, 如果 $\| z_n - z \|$ 趋向于 0, 而每个强 Cauchy 序列,即每个使 $\| z_p - z_q \|$ 趋于 0(当 p, q 趋于 ∞ 时)的序列,可以证明都收敛于某一元素 z, 从而序列空间是完备的. 这是一条非常重要的性质.

Schmidt 接着引进了(强)闭子空间的概念. 他的空间 H 的一个子集 A 称为闭子空间,如果在刚才定义的收敛的意义下它是闭子集,并且是代数封闭的,后者意指,如果 w_1 与 w_2 是 A 的元素,那么 $a_1 w_1 + a_2 w_2$ 也是 A 的元素,其中 a_1, a_2 是任何复数. 可以证明这样的闭子空间是存在的,这只需取任何一个线性无关的元素列 $\{z_n\}$, 并取 $\{z_n\}$ 中元素的所有有限线性组合. 全体这些元素的闭包就是一个代数封闭的子空间.

现在,设 A 是任一固定的闭子空间. Schmidt 首先证明,如果 z 是空间的任一元素,则存在唯一的元素 w_1 和 w_2, 使得 $z = w_1 + w_2$, 其中 w_1 属于 A, w_2 和 A 正交,后者是指 w_2 和 A 的每个元素正交(这个结果,今天称为投影定理; w_1 就是 z 在 A 中的投影). 进一步, $\| w_2 \| = \min \| y - z \|$, 其中 y 是 A 的变动元素,而且极小值只在 $y = w_1$ 时达到. $\| w_2 \|$ 称为 z 和 A 之间的距离.

在 1907 年, Schmidt 和 Fréchet 同时注意到,平方可和(Lebesgue 可积)函数的空间有一种几何,完全类似于序列的 Hilbert 空间. 这个类似性的阐明是在几个月之后,当时 Riesz 运用在 Lebes-

gue 平方可积函数与平方可和实数列之间建立一一对应的 Riesz-Fischer 定理(第 45 章第 4 节)指出,在平方可和函数的集合 L^2 中能够定义一种距离,用它就能建立这个函数空间的一种几何. L^2 中,定义在区间$[a, b]$上的任何两个平方可积函数之间的距离这个概念,事实上也是 Fréchet 定义的①,他把它定义为

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 \mathrm{d}x}, \tag{1}$$

其中积分应理解为 Lebesgue 意义下的;并且两个函数只在一个 0 测集上不同时就认为是相等的. 距离的平方也称为这两个函数的平均平方偏差. f 和 g 的内积定义为 $(f, g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 使 $(f, g)=0$ 的两个函数 f 与 g 称为是正交的. Schwarz 不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2 \mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2 \mathrm{d}x}$$

以及对平方可和序列空间成立的其他性质,都适用于函数空间. 特别是,这类平方可和函数形成一个完备的空间. 这样,平方可和函数的空间,同这些函数相应于某一固定的完备标准正交函数系的 Fourier 系数所构成的平方可和序列的空间,可以认为是相同的.

在提到抽象函数空间时,我们应重提一下(第 45 章第 4 节) Riesz 引入的空间 $L^p(1<p<\infty)$. 这些空间对度量

$$d(f_1, f_2)=\left(\int_a^b |f_1-f_2|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

也是完备的.

虽然我们很快就要考察抽象空间领域中的其他成就,但下一发展涉及泛函和算子. 在刚才引述的对空间 L^2 的函数引进了距离的文章(1907)中,以及在同年的其他文章中②,Fréchet 证明了,对于定义在 L^2 的每一个连续线性泛函 $U(f)$,存在 L^2 中唯一的一

---

① *Comp. Rend.*, 444,1907,1414~1416.

② *Amer. Math. Soc. Trans.*, 8,1907,433~446.

个 $u(x)$，使得对 L^2 的每个 f 都有

$$U(f)=\int_a^b f(x)u(x)\mathrm{d}x.$$

这推广了 Hadamard 1903 年①得到的一个结果. 1909 年 Riesz②推广了这个结果，用 Stieltjes 积分表示 $U(f)$，也就是

$$U(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}u(x).$$

Riesz 自己还把这个结果推广到满足下面条件的线性泛函 A：对 L^p 中所有的 f，

$$A(f)\leqslant M\left[\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p},$$

其中 M 只依赖于 A. 这样，存在 L^q 中的一个函数 $a(x)$，在允许相差一个积分为 0 的函数的意义下是唯一的，使得对 L^p 中所有的 f，

$$U(f)=\int_a^b a(x)f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

这个结果称为 Riesz 表示定理.

泛函分析的中心部分是研究在微分方程和积分方程中出现的算子的抽象理论. 这个理论统一了微分方程和积分方程的特征值理论以及作用在 n 维空间中的线性变换. 这样的一个算子，例如

$$g(x)=\int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

(其中 k 是给定的)，把 f 变到 g 并且满足某些附加条件. 在抽象算子的符号 A 和符号 $g=Af$ 的表示法之下，线性是指

$$A(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1 Af_1+\lambda_2 Af_2, \tag{3}$$

其中 λ_i 是任何实常数或复常数. 不定积分 $g(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 和微商 $f'(x)=Df(x)$，对通常的函数类来说，就是线性算子. 算子 A

---

① *Comp. Rend.*, 136,1903,351～354 — *Œuvres*, 1,405～408.

② *Comp. Rend.*, 149,1909,974～977，和 *Ann. de l' Ecole Norm. Sup.*, 28, 1911,33 ff.

的连续性是指,如果函数序列 f_n 按函数空间的极限意义收敛到 f,那么 Af_n 必然趋向于 Af.

带对称核 $K(x, y)$的积分方程的抽象推广是算子 A 的自伴性. 如果对于任何两个函数 f_1, f_2 都有

$$(Af_1, f_2) = (f_1, Af_2),$$

其中(Af_1, f_2)表示空间中两个函数的内积或数量积,那么称 A 为自伴的. 在积分方程的情形,如果

$$Af_1 = \int_a^b K(x, y)f(y)\mathrm{d}y,$$

则

$$(Af_1, f_2) = \int_a^b\int_a^b K(x, y)f_1(y)f_2(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

$$(f_1, Af_2) = \int_a^b\int_a^b K(x, y)f_2(y)f_1(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

因而只要核是对称的,就有 $(Af_1, f_2) = (f_1, Af_2)$. 对任意的自伴算子,特征值都是实的,而且对应于不同特征值的特征函数是互相正交的.

作为泛函分析核心的抽象算子理论的一个良好开端,是由 Riesz 1910 年发表在《数学年刊》(*Mathematische Annalen*)的文章中做出的,文中他引进了 L^p 空间(第 45 章第 4 节). 在那里他把积分方程

$$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x, t)\phi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

的解推广到 L^p 空间中的函数. Riesz 把表达式

$$\int_a^b K(s, t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

设想为作用在函数 $\phi(t)$ 上的变换. 他称之为泛函变换,记为 $T(\phi(t))$. 然而,由于 Riesz 所处理的 $\phi(t)$是属于 L^p 空间的,所以变换就把函数变到同一或另一空间去. 特别地,一个把 L^p 中的函数变为 L^p 中的函数的变换或算子,称为在 L^p 中是线性的,如果它满足(3)并且如果 T 是有界的;这就是说,存在一个常数 M,使

得对 L^p 中所有满足

$$\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant 1$$

的函数 f 都有

$$\int_a^b |T(f(x))|^p \mathrm{d}x \leqslant M^p.$$

后来这种 M 的最小上界称为 T 的范数(norm),用 $\|T\|$ 表示.

Riesz 还引进了 T 的伴随或转置算子的概念. 对 L^q 中任何一个 g 和作用在 L^p 中的 T,

$$\int_a^b T(f(x))g(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

对固定的 g 与在 L^p 中变动的 f 定义了 L^p 的一个泛函. 因此由 Riesz 表示定理,存在 L^q 中的一个函数 $\psi(x)$,在差一个积分为 0 的函数外是唯一的,使得

$$\int_a^b T(f(x))g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\psi(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

T 的伴随或转置算子用 T^* 表示,现在就定义为 L^q 中这样的算子:它对固定的 T 只与 g 有关,并根据等式(5)把 g 对应于 ψ,也就是说,$T^*(g)=\psi$. (用近代的记号,T^* 满足 $(Tf, g)=(f, T^*g)$.) T^* 是 L^q 中的线性变换,而且 $\|T^*\|=\|T\|$.

Riesz 现在考虑方程

$$T(\phi(x)) = f(x) \tag{6}$$

的解,其中 T 是 L^p 中的线性变换,f 已知而 ϕ 是未知的. 他证明(6)有一个解当且仅当

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\left(\int_a^b |T^*(g(x))|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

对 L^q 中所有的 g 都成立. 他由此引入逆变换或逆算子 T^{-1} 的概念,并把完全一样的思想引到 T^{*-1}. 借助于伴随算子,他证明了逆算子的存在性.

Riesz 在他 1910 年的文章中引进了记号

(7) $$\phi(x)-\lambda K(\phi(x))=f(x),$$

其中 K 现在表示 $\int_a^b K(x,t)*\mathrm{d}t$，而 $*$ 表示受 K 作用的一个函数. 他的补充结果是限于 L^2 的，在其中有 $K=K^*$. 为了处理积分方程的特征值问题，他引入了 Hilbert 的全连续概念，但现在是对抽象算子说的. L^2 中的一个算子 K 称为是全连续的，如果 K 把每一个弱收敛的函数序列(第 45 章第 4 节)映为强收敛的序列，也就是说，$\{f_n\}$ 弱收敛蕴含 $\{K(f_n)\}$ 强收敛. 他曾证明(7)的谱是离散的(这就是说，不存在对称 K 的连续谱)，并证明相应于不同特征值的特征函数是正交的.

应用范数概念作为研究抽象空间的另一种方法也是由 Riesz 开始的①. 然而，赋范空间的一般定义却是在 1920 到 1922 年间由 Stefan Banach(1892—1945), Hans Hahn(1879—1934), Eduard Helly(1884—1943)和 Norbert Wiener(1894—1964)给出的. 虽然这些人的工作有许多是重叠的，并且优先权的问题也很难弄清，但要算 Banach 的工作影响最大. 他的动力来自积分方程的普遍化.

所有这些工作，特别是 Banach 的工作②，主要特点是要建立具有范数的空间，但这范数却不再用内积来定义. 虽然在 L^2 中 $\|f\|=(f,f)^{\frac{1}{2}}$，但是不可能这样来定义 Banach 空间的范数，因为内积不再是可用的了.

Banach 从空间 E 出发，用 $x, y, z, \cdots$ 表示 E 中的元素，而用 $a, b, c, \cdots$ 表示实数. 他的空间的公理分成三组. 第一组包含 13 条公理，说明 E 在加法下是一个交换群，与实数进行数乘是封闭的，实数与元素的各种运算满足熟知的一组结合律和分配律.

第二组公理刻画 E 中元素(向量)的范数. 范数是定义在 E 上

---

① *Acta Math.*, 41, 1918, 71～98.

② *Fundamenta Mathematicae*, 3, 1922, 133～181.

的实值函数的,用 $\|x\|$ 表示. 对于任一实数 a 和 E 中的任一元素 x,范数具有下列性质:

(a) $\|x\| \geqslant 0$;

(b) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(c) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$;

(d) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

第三组只包含一个完备性公理,它说:如果 $\{x_n\}$ 对范数来说是一 Cauchy 序列,即如果 $\lim\limits_{n,p\to\infty} \|x_n - x_p\| = 0$,则存在 E 中一个元素 x,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

满足上述三组公理的空间称为 Banach 空间,或完备的赋范向量空间. 虽然 Banach 空间是较 Hilbert 空间更为一般的,因为在定义范数时没有事先假设两个元素的内积存在,然而作为一个必然的后果却是,在非 Hilbert 空间的 Banach 空间中失却了两个元素正交这一关键性概念. 第一和第三组条件对 Hilbert 空间也成立,但第二组条件却较 Hilbert 空间范数的要求为弱. Banach 空间包括 L^p 空间,连续函数空间,有界可测函数空间,以及其他具有合适范数可用的空间.

有了范数的概念,Banach 能够对他的空间证明许多人们熟悉的事实. 关键定理之一是:设 $\{x_n\}$ 是 E 中的一序列元素,满足条件

$$\sum_{p=1}^{\infty} \|x_p\| < \infty,$$

则 $\sum\limits_{p=1}^{\infty} x_p$ 按范数收敛到 E 的某个元素 x.

在证明了一些定理之后,Banach 考虑定义在一个空间上而取值在另一个 Banach 空间 E_1 中的算子. 一个算子 F 称为在 x_0 处相对于集合 A 是连续的,如果 $F(x)$ 对 A 的所有 x 有定义,并且 x_0 属于 A 和 A 的导集,而且当 $\{x_n\}$ 是 A 中以 x_0 为极限的序列时,则 $F(x_n)$

趋向 $F(x_0)$. 他还定义了 F 相对于集合 A 的一致连续性,然后把他的注意回到算子序列. 算子序列 $\{F_n\}$ 称为在集合 A 上按范数收敛到 F,如果对于 A 中每一个 x 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

Banach 引进的一类重要的算子是连续的加法算子. 一个算子 F 是加法的,如果对所有的 x 和 y 都有 $F(x+y) = F(x)+F(y)$. 可以证明,一个加法的连续算子具有性质: $F(ax) = aF(x)$ 对一切实数 a 都成立. 如果 F 是加法的,并且在 E 的一个元素(点)处连续,那么它处处连续并且是有界的,即存在只依赖于 F 的常数 M,使 $\| F(x) \| \leqslant M \| x \|$ 对 E 中一切 x 成立. 另外一个定理断言:如果 $\{F_n\}$ 是加法连续算子序列,又 F 是一个加法算子,使得对每个 x 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, 则 F 是连续的,并且存在 M,使得 $\| F_n(x) \| \leqslant M \| x \|$ 对所有的 n 成立.

在这篇文章中,Banach 证明了关于积分方程抽象形式的解的定理. 如果 F 是定义域和值域都在空间 E 内的连续算子,又如果存在一个数 M, $0 < M < 1$, 使得对所有 E 中的 x' 与 x'' 都有 $\| F(x') - F(x'') \| \leqslant M \| x' - x'' \|$, 那么存在 E 中唯一的一个元素 x,满足 $F(x) = x$. 更重要的是下述定理:考虑方程

$$x + hF(x) = y, \tag{8}$$

其中 y 是 E 中的一个已知函数,F 是定义域和值域都在 E 内的加法连续算子,h 是一个实数. 令 M 是所有满足 $\| F(x) \| \leqslant M' \| x \|$ (对所有 x)的常数 M' 的最小上界. 那么对每一个 y 和每一个满足 $| hM | < 1$ 的 h 值,存在一个函数 x 满足(8),并且

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^n F^{(n)}(y),$$

其中 $F^{(n)}(y) = F(F^{(n-1)}(y))$. 这个结果是谱半径定理的一种形式,并且是 Volterra 解积分方程方法的推广.

Banach 在 1929 年① 引进了泛函分析这一学科的另一个重要

① *Studia Mathematica*, 1, 1929, 211～216.

概念，这就是一个 Banach 空间的对偶空间或伴随空间. 这个思想也由 Hahn[①] 独立地引进过，但 Banach 的工作更完全. 这种对偶空间就是已知空间上的全体连续有界线性泛函组成的空间. 这泛函空间的范数取为泛函的界，可以证明这空间是完备的赋范线性空间，即 Banach 空间. 实际上，这里 Banach 的工作推广了 Riesz 关于 L^p 与 L^q 空间的工作，其中 $q=p/(p-1)$，因为 L^q 空间等价于 L^p 空间在 Banach 意义下的对偶空间. 用 Riesz 表示定理(2)，把 Banach 的工作和这联系起来是很明显的. 换句话说，Banach 空间 E 和它的对偶空间的关系，就像 L^p 和 L^q 的关系一样.

Banach 从连续线性泛函(即定义域是空间 E 的连续实值函数)的定义着手，并证明每一个这样的泛函是有界的. 一个关键性的定理是今天所谓的 Hahn-Banach 定理，这推广了 Hahn 的工作中的一个定理. 设 p 是定义在一个完备的赋范线性空间 R 上的一个实值泛函，并且 p 对 R 中的所有 x 与 y 满足条件：

(a) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$；

(b) $p(\lambda x)=\lambda p(x)\quad(\lambda\geqslant 0)$.

这时就存在 R 上的一个加法泛函 f，使得

$$-p(-x)\leqslant f(x)\leqslant p(x)$$

对 R 中一切 x 成立. 还有好几个论述 R 上的连续泛函类的定理.

泛函方面的工作引导到伴随算子的概念. 设 R 和 S 是两个 Banach 空间，U 是定义域在 R 内取值在 S 内的连续线性算子. 用 R^* 和 S^* 分别表示定义在 R 和 S 上的全体有界线性泛函. 于是 U 诱导出一个从 S^* 到 R^* 中的变换如下：如果 g 是 S^* 的一个元素，则 $g(U(x))$ 对于 R 中的一切 x 是定义好了的. 但由 U 和 g 的线性性质可知这也是定义在 R 上的线性泛函，即 $g(U(x))$ 是 R^* 的一个元素. 换个说法是，如果 $U(x)=y$，则 $g(y)=f(x)$，其中 f

---

① *Jour. für Math.*, 157, 1927, 214～229.

是 R 上的一个泛函,即 R^* 的一个元素. 这个诱导出来的从 S^* 到 R^* 的变换 U^*,称为 U 的伴随算子.

运用这个概念,Banach 证明,如果 U^* 有一个连续逆,则 $y = U(x)$ 对 S 中的任一 y 是可解的. 而且,如果 $f = U^*(g)$ 对 R^* 的每一个 f 可解,则 U^{-1} 存在,并且在 U 的值域上是连续的,其中 U 在 S 内的值域是指所有这样的 y 的集合,对于它存在 S^* 的一个 g,使得 $g(y) = 0$ 只要 $U^*(g) = 0$. (最后这个命题是 Fredholm 择一定理的一个推广.)

Banach 把他的伴随算子理论应用到 Riesz 算子,这种算子是 Riesz 在他 1918 年的文章中引入的. 这是形如 $U = I - \lambda V$ 的算子 U,其中 I 是恒等算子,而 V 是一个全连续算子. 这时抽象理论可以应用到定义在[0, 1]上的函数空间 L^2 和算子

$$U_\lambda(x) = x(s) - \lambda\int_0^1 K(s, t)x(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\int_0^1\int_0^1 K^2(s, t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty$. 把一般理论应用到

$$y(s) = x(s) - \lambda\int_0^1 K(s, t)x(t)\mathrm{d}t \tag{9}$$

以及与它相应的转置方程

$$f(s) = g(s) - \lambda\int_0^1 K(t, s)g(t)\mathrm{d}t, \tag{10}$$

便知道如果 λ_0 是(9)的特征值,则 λ_0 是(10)的特征值,反之亦然. 进一步,(9)对于 λ_0 有有限多个线性无关的特征函数,并且这对(10)也是真的. 还有,当 $\lambda = \lambda_0$ 时(9)对所有的 y 没有解. 事实上,(9)有解的一个必要充分条件是,这 n 个条件

$$\int_0^1 y(t)g_0^{(p)}(t)\mathrm{d}t = 0,\ p = 1, 2, \cdots, n$$

都被满足,其中 $g_0^{(1)}, \cdots, g_0^{(n)}$ 是

$$0 = g(s) - \lambda_0\int_0^1 K(t, s)g(t)\mathrm{d}t$$

的线性无关解的集合.

4. Hilbert 空间的公理化

函数空间和算子理论,在 1920 年代似乎正在朝着只是为抽象而抽象的方向前进. 甚至 Banach 也没有运用过他的工作. 这种情况引起 Hermann Weyl 评论道:"从 1923 年开始……Hilbert 空间的谱理论被发现是量子力学的合用的数学工具,但这并不是功绩而是一种幸运."量子力学的研究表明,一个物理系统的可观测对象可以用 Hilbert 空间中的线性对称算子表示,而且表示能量的特殊算子的特征值和特征向量(特征函数),正是原子中一个电子的能级,并对应于这系统的稳定量子状态. 两个特征值之差给出放射光量子的频率,从而确定物质的辐射谱. 1926 年 Erwin Schrödinger 提出了他的基于微分方程的量子理论. 他还证明了这理论和 Werner Heisenberg 的无穷矩阵理论(1925 年)是一致的,后者曾被应用到量子论上. 但把 Hilbert 的工作和微分方程特征函数论统一起来的普遍理论还是缺门.

算子在量子理论中的应用,刺激了 Hilbert 空间和算子的抽象理论的研究. 这首先是由 John von Neumann(1903—1957)在 1927 年着手进行的. 他的方法是同时处理平方可和序列空间和定义在某公共区间上的 L^2 函数空间.

在两篇文章中①, von Neumann 提出了 Hilbert 空间以及 Hilbert 空间中的算子的公理方法. 虽然 von Neumann 公理的来源可以从 Norbert Wiener, Weyl 和 Banach 的工作中看到,但 von Neumann 的工作更完全、更有影响. 他的主要目标是对很大一类所谓 Hermite 算子阐述普遍的特征值理论.

他引入了定义在复平面的任一可测集 E 上的可测的、平方可

---

① *Math. Ann.*, 102,1929/1930,49～131 和 370～427=*Coll. Works*, 2,3～143.

积的复值函数所构成的空间 L^2. 他还引入了类似的复序列空间，也就是，全体复数列 $a_1, a_2, \cdots$ 所成的集合，它们具有性质 $\sum_{p=1}^{\infty} |a_p|^2 < \infty$. Riesz-Fischer 定理表明，在函数空间的函数同序列空间的序列之间，存在一个一一对应如下：在函数空间中选取一个完全的标准正交函数系 $\{\phi_n\}$，如果 f 是函数空间的一个元素，那么 f 关于 $\{\phi_n\}$ 的展开式的 Fourier 系数就是序列空间的一个序列；反过来，对于一个这样的序列，L^2 空间中存在唯一的（允许差一个积分为 0 的函数）一个函数，它以这个序列作为它关于 $\{\phi_n\}$ 的 Fourier 系数.

进一步，如果定义函数空间中内积 (f, g) 为

$$(f, g) = \int_E f(z)\,\overline{g(z)}\,\mathrm{d}z,$$

其中 $\overline{g(z)}$ 是 $g(z)$ 的复共轭，而在序列空间中，序列 a 和 b 的内积定义为

$$(a, b) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \bar{b}_p,$$

那么，在 f 对应于 a 而 g 对应于 b 时，有 $(f, g) = (a, b)$.

这些空间中的一个 Hermite 算子 R 定义为一个线性算子，具有这样的性质：对它定义域中的所有 f 与 g，都有 $(Rf, g) = (f, Rg)$. 类似地，在序列空间中，有 $(Ra, b) = (a, Rb)$.

von Neumann 的理论同时对函数空间和序列空间规定了公理方法. 他提出了下列的公理基础：

(A) H 是一个线性向量空间. 即在 H 上定义了加法和数乘，使得如果 f_1 和 f_2 是 H 的元素，a_1 和 a_2 是任意复数，则 $a_1 f_1 + a_2 f_2$ 也是 H 的元素.

(B) 在 H 上存在一个内积，即任两向量 f 与 g 的一个复值函数，用 (f, g) 表示，具有性质：(a) $(af, g) = a(f, g)$； (b) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$； (c) $(f, g) = \overline{(g, f)}$； (d)

$(f, f) \geqslant 0$;　(e) $(f, f) = 0$ 当且仅当 $f = 0$.

若 $(f, g) = 0$，则称 f 与 g 正交. f 的范数就是 $\sqrt{(f, f)}$，用 $\|f\|$ 表示. 量 $\|f - g\|$ 定义了空间的一个度量.

(C) 对刚才定义的度量来说 H 是可分的，即相对于度量 $\|f - g\|$，在 H 中存在一个可数的稠密集.

(D) 对每一个正整数 n，H 内存在 n 个线性无关的元素.

(E) H 是完备的. 就是说，如果 $\{f_n\}$ 使得 $\|f_n - f_m\|$ 当 m, n 趋向∞时趋向于 0，则在 H 中存在一个 f 使得 $\|f - f_n\|$ 当 n 趋向无穷时趋向于 0(这种收敛等价于强收敛).

从这些公理可推出一系列简单性质：Schwarz 不等式 $\|(f, g)\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$，$H$ 中的任一完全的标准正交集必是可数的，以及 Parseval 不等式：$\sum_{p=1}^{\infty} |(f, \phi_p)|^2 \leqslant \|f\|^2$.

von Neumann 接着研究了 H 的线性子空间和投影算子. 若 M 和 N 是 H 的闭子空间，则 $M - N$ 定义为 M 中所有与 N 的每一元素都正交的元素所构成的集合. 投影定理如下：设 M 是 H 的一个闭子空间，则 H 的任一元素 f 可以分解成 $f = g + h$，其中 g 属于 M，h 属于 $H - M$，并且这种分解是唯一的. 投影算子 P_M 定义为 $P_M(f) = g$；就是说，它是定义在整个 H 上的算子，它把元素 f 投影到 f 在 M 中的分量.

在他的第二篇文章中，von Neumann 在 H 中引入了两种拓扑：强的和弱的. 强拓扑就是通过范数定义的度量拓扑. 弱拓扑我们不严格叙述，它是由相应于弱收敛的一组邻域系提供的.

von Neumann 得到了许多关于 Hilbert 空间中算子的结果. 算子的线性是事先假定的，积分通常都了解为 Lebesgue-Stieltjes 积分. 线性有界变换或算子是指把一个 Hilbert 空间的元素变成另一个 Hilbert 空间的元素的变换，它满足线性条件(3)并且是有界的；所谓有界是说，存在一个数 M，使得这空间中受算子 R 作用

的所有 f 都有

$$\| R(f) \| \leqslant M \| f \|.$$

上述 M 的最小可能值称为 R 的模. 这最后一个条件等价于算子的连续性. 算子在一点连续连同算子的线性,充分保证了算子在所有点都连续,从而有界.

存在一个伴随算子 R^*,对于 Hermite 算子, $R = R^*$, 并称 R 为自伴的. 对于任何算子 R,如果 $RR^* = R^* R$, 就称 R 为正规的. 如果 $RR^* = R^* R = I$, 其中 I 是恒等算子,那么 R 和正交变换类似,从而称为酉算子. 对于酉算子 R,有 $\| R(f) \| = \| f \|$.

von Neumann 的另一个结果是,如果 R 在整个 Hilbert 空间上是一个 Hermite 算子,并且满足弱闭条件,即只要 f_n 趋向于 f, $R(f_n)$趋向于 g,就有 $R(f) = g$, 那么 R 是有界的. 进一步,如果 R 是 Hermite 算子,那么对实轴上的某个区间(m, M)外的所有复的和实的 λ,算子 $I - \lambda R$ 有逆算子存在,其中区间(m, M)是这样一个区间,当 $\| f \| = 1$ 时,$(R(f), f)$的值在此区间内. 一个更加基本的结果是,对应于每一个线性有界的 Hermite 算子 R,存在两个算子 E_- 和 E_+ (*Einzeltransformationen*),具有下列性质:

(a) $E_- E_- = E_-$, $E_+ E_+ = E_+$, $I = E_- + E_+$.

(b) E_- 和 E_+是可交换的,并且与任何同 R 可交换的算子是可交换的.

(c) RE_- 和 RE_+ 分别是负的与正的(所谓 RE_+ 是正的是指 $RE_+(f) \geqslant 0$ 对一切 f 成立).

(d) 对于所有使 $Rf = 0$ 的 f, $E_- f = 0$ 而 $E_+ f = f$.

von Neumann 还建立了 Hermite 算子和酉算子之间的一个联系,这就是 $U = e^{iR}$, U 为酉算子,R 为 Hermite 算子.

von Neumann 随后把他的理论推广到无界算子;虽然他的贡献以及其他人的这类结果是十分重要的,但是若对这些成果作叙述,就会使我们过分地深入到现代的发展.

泛函分析已经而且正在应用到广义矩量问题、统计力学、偏微分方程的存在唯一性定理以及不动点定理. 泛函分析现在在变分法和连续紧群的表示论中都起着作用. 它的内容还包含在代数、近似算法、拓扑和实变函数论中. 尽管有这多种的应用,但用到解决经典分析的大问题上却少得可怜. 这个失败使泛函分析奠基者们的希望落空了.

参 考 书 目

Bernkopf, M.: "The Development of Function Spaces with Particular Reference to their Origins in Integral Equation Theory", *Archive for History of Exact Sciences*, 3, 1966, 1~96.

Bernkopf, M.: "A History of Infinite Matrices", *Archive for History of Exact Sciences*, 4, 1968, 308~358.

Bourbaki, N.: *Eléments d' histoire des mathématiques*, Hermann, 1960, 230~245.

Dresden, Arnold: "Some Recent Work in the Calculus of Variations", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 32, 1926, 475~521.

Fréchet, M.: *Notice sur les travaux scientifiques de M. Maurice Fréchet*, Hermann, 1933.

Hellinger, E. and O. Toeplitz: "Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1923~1927, Vol 2, Part Ⅲ, 2nd half, 1335~1597.

Hildebrandt, T. H.: "Linear Functional Transformations in General Spaces", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 37, 1931, 185~212.

Lévy, Paul: "Jacques Hadamard, sa vie et son œuvre", *L' Enseignement Mathématique*, (2), 13, 1967, 1~24.

McShane, E. J.: "Recent Developments in the Calculus of Variations", *Amer. Math. Soc. Semicentennial Publications*, 2, 1938, 69~97.

Neumann, John von: *Collected Works*, Pergamon Press, 1961, Vol. 2.

Sanger, Ralph G.: "Functions of Lines and the Calculus of Variations", *University of Chicago Contributions to the Calculus of Variations for* 1931~1932, University of Chicago Press, 1933, 193~293.

Tonelli, L.: "The Calculus of Variations", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 31, 1925, 163~172.

Volterra, Vito: *Opere matematiche*, 5 vols., Accademia Nazionale dei Lincei, 1954~1962.

第 47 章

发 散 级 数

在这世纪初已认为要断然从严密数学中驱逐出去的那些级数,在这世纪末竟又重敲接纳之门,这确实是我们科学的一个奇怪的变迁.

James Pierpont

这级数是发散的;因此我们有可能用它来做些事情.

Oliver Heaviside

1. 引　言

从 19 世纪后期起,像发散级数这样一个课题的认真研究表明,数学家如何从根本上重新考虑他们自己关于数学本性的观念.在 19 世纪前期,他们接受了对发散级数的禁令,理由是,数学受某些内在要求或自然支配所限制,囿于一类固定的正确概念之内;但到这世纪之末他们却认识到,他们有自由接纳已显示出有用的任何思想.

我们可以回想一下,在整个 18 世纪,发散级数在或多或少意识到它们的发散性之下一直被使用着;因为只用很少几项它们确实给出函数的有用逼近.在 Cauchy 建立严密数学之后,多数数学家遵循他的意见,把发散级数作为不可靠的东西而摒弃.然而,有少数数学家(第 40 章第 7 节)继续维护发散级数,因为不论是函数的计算,还是作为导出它们的那些函数的分析等价物,它们都由于很有用处而给人以极深的印象.还有其他一些人维护发散级数,是因为发散级数是发现新事物的一种工具.例如 De Morgan① 说:

---

① *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 8, Part Ⅱ, 1844, 182～203, 1849 年出版.

"我们必须承认,很多级数我们现在不能可靠地使用,除非作为发现的一种工具,它们的结果是要随后加以验证的;而最坚决地摒弃所有发散级数的人,无疑是把它们的这种用处放在他的私室里的……"

天文学家甚至在发散级数被排斥之后仍旧继续使用它们,因为由于计算目的,他们的科学迫切需要它们.由于这种级数开始很少几项就给出有用的数值逼近,所以天文学家就不顾这些级数从整体看是发散的这一事实;然而数学家关心的却不是前 10 项或 20 项的性态,而是整个级数的特征,所以不能把这种级数的事情建筑在实用这一唯一的根据上.

然而,正如我们曾经指出过的(第 40 章第 7 节),Abel 和 Cauchy 两人并非不关切他们在排斥发散级数时丢掉了某些有用的东西.Cauchy 不仅继续使用它们(看下面),还写了题为《论发散级数的合理运用》(Sur l'emploi légitime des séries divergentes)的文章①,其中谈到 $\log\Gamma(x)$或 $\log m!$ 的 Stirling 级数(第 20 章第 4 节),他指出,这级数虽然对所有的 x 值发散,但当 x 是很大的正数时,可以用来计算 $\log\Gamma(x)$.事实上他证明了,若固定所取的项数 n,则求和过程停在第 n 项时所产生的绝对误差小于下一项的绝对值,而且当 x 增大时误差变小.Cauchy 试图弄明白为什么这级数所提供的逼近会这样好,但他失败了.

发散级数的用途终于使数学家们确信,一定有某种特性存在,只要加以提炼,就会显示出为什么它们会提供良好的逼近.这正如 Oliver Heaviside 在《电磁理论》第 2 卷(1899)中所表述的,"对广义微分和发散级数这个题目,我必须说几句话……在被严密主义者的湿毛毯人为地冷却下来之后,要激起任何热情是不容易的……一定会出现发散级数的理论,或者说比现在范围要大的函数论,它把收敛级数与发散级数包括在同一个谐和的整体里."

---

① *Comp. Rend.*, 17, 1843, 370～376 = *Œuvres*, (1), 8, 18～25.

Heaviside 在作这个评论的时候,他不知道某些步骤已经开始了.

数学家们推进发散级数这门学科的意愿,无疑由于已经逐渐渗入到数学领域的其他影响而得到加强,这就是非 Euclid 几何和新代数. 数学家们缓慢地开始意识到数学是人为的,Cauchy 的收敛定义不再被认为是某种神力所施的一种高度的必然. 他们在 19 世纪末叶,在对那些给函数提供有用逼近的各种发散级数的本质进行提炼的过程中取得了成功. Poincaré 称这些级数为渐近级数,虽然在这一世纪它们被称为半收敛级数,这后一术语是 Legendre 在他的《数论论文》(*Essai de la théorie des nombers*, 1798, p. 13)中引入的,它也被用来称呼振荡级数.

发散级数理论有两个主题. 第一个是已经作过简短介绍的,就是某些这种级数,在取固定项数时,能逼近一个函数,变量愈大,逼近得愈好. 事实上,Legendre 在他的《椭圆函数论》(*Traité des fonctions elliptiques*, 1825—1828)中已经用下述性质表征过这种级数:中止于任何一项所产生的误差,都与省去的第一项同阶. 发散级数论的第二个主题是可和性概念. 有可能用一种全新的方法定义级数的和,它为 Cauchy 意义下发散的级数给出有限的和.

2. 发散级数的非正式应用

我们曾经有机会叙述过 18 世纪收敛级数与发散级数两者都被应用的研究工作. 在 19 世纪,在 Cauchy 摒弃发散级数以前和以后,某些数学家与物理学家仍继续使用它们. 一个新的应用是用级数对积分估值. 自然,作者们那时并没有意识到,他们是在寻求整个渐近级数展开,还是在寻求积分的渐近级数展开的开头几项.

积分的渐近估值至少可追溯到 Laplace. 在他的《概率的解析

理论》(*Théorie analytique des probabilités*, 1812)中①, Laplace 用分部积分得到了误差函数的展开式

$$\operatorname{Erfc}(T)=\int_T^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1-\frac{1}{2T^2}+\frac{1\cdot 3}{(2T^2)^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2T^2)^3}+\cdots\right\}.$$

他注明了这个级数是发散的,但他对很大的 T 用它来计算 $\operatorname{Erfc}(T)$.

Laplace 在同一书②中还指出,积分

$$\int\phi(x)\{u(x)\}^s dx$$

当 s 很大时依赖于 $u(x)$ 在其平稳点(使 $u'(x)=0$ 的 x 值)附近的值. Laplace 用这个观察结果证明了

$$s!\sim s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}+\cdots\right),$$

这个结果也可以从 $\log s!$ 的 Stirling 逼近得到(第 20 章第 4 节).

Laplace 在他的《概率的解析理论》③中曾有机会研究过形如

$$f(x)=\int_a^b g(t)e^{xh(t)}dt \tag{1}$$

的积分,其中 g 可以是复的,h 和 t 是实的,而 x 是大的正数. 他明确指出,对积分的主要贡献来自积分区域中使 $h(t)$ 达到它的绝对极大的那些点的直接邻域. Laplace 所说的贡献,就是我们今天所谓的积分的渐近级数估值的第一项. 如果 $h(t)$ 刚好在 $t=a$ 取得一个极大值,那么 Laplace 的结果便是:当 x 趋向于 ∞ 时

$$f(x)\sim g(a)e^{xh(a)}\sqrt{\frac{-\pi}{2xh''(a)}}.$$

如果要估计的积分不是(1)而是

$$f(x)=\int_a^b g(t)e^{ixh(t)}dt, \tag{2}$$

---

① 第二版,1820, 88 ~ 109 = *Œuvres*, 7, 89~110.

② *Œuvres*, 7, 128~131.

③ 第二版, 1820, Vol. 1, Part 2, Chap. 1 = *Œuvres*, 7, 89~110.

其中 t 和 x 是实的并且 x 很大;这时 $|e^{ixh(t)}|$ 是一个常数,因而 Laplace 的方法不能用. 在这种情形,可以引用 Cauchy 在他关于波的传播的主要论文[①]中所提到的方法(现在称为驻波原理). 这个原理说,对积分的最重要的贡献来自 $h(t)$ 的平稳点(使 $h'(t)=0$ 的点)的直接邻域. 这个原理直观上看是有道理的,因为被积函数可以想象为以 $|g(t)|$ 为振幅的振荡电流或波. 如果 t 是时间,则波的速度正比于 $xh'(t)$;又如果 $h'(t)\neq 0$,则当 x 变为无穷时振荡的速度也无限增加. 这时振荡是如此之快,使得在一个整周期里 $g(t)$ 近似于常数而 $xh(t)$ 近似于线性函数,因而在一个整周期上积分等于0. 这个理由对于使 $h'(t)=0$ 的 t 是不成立的. 因此 $h(t)$ 的平稳点很可能对 $f(x)$ 的渐近值提供主要的贡献. 如果 τ 是使 $h'(t)=0$ 的 t 的值,又 $h''(\tau)>0$,则当 x 变为无穷时,

$$f(x)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{xh''(\tau)}}g(\tau)e^{ixh(\tau)+i\pi/4}.$$

这个原理曾由 Stokes 在 1856 年的文章[②]中用来对 Airy 积分(看后面)进行估值,原理曾由 Lord Kelvin 确切地叙述过[③]. 它的第一个令人满意的证明是由 George N. Watson(1886—1965)给出的[④].

在 19 世纪最初几十年里,Cauchy 和 Poisson 把许多含有参数的积分化为参数的幂级数. 对 Poisson 来说,积分是在地球物理的热传导和弹性振动问题中出现的;而 Cauchy 涉及的是水波、光学和天文. 例如,Cauchy 在研究光的衍射时[⑤]把 Fresnel 积分表示成发散级数:

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci. Inst. France*, 1,1827,Note 16=*Œuvres*, (1),1,230.

② *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9,1856,166～187 = *Math. and Phys. Papers*, 2,329～357.

③ *Phil. Mag.*,(5),23,1887,252～255=*Math. and Phys. Papers*,4,303～306.

④ *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 19,1918,49～55.

⑤ *Comp. Rend.*, 15,1842,554～556 和 573～578 = *Œuvres*, (1),7,149～157.

$$\int_0^m \cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)dz = \frac{1}{2} - N\cos\frac{\pi}{2}m^2 + M\sin\frac{\pi}{2}m^2,$$

$$\int_0^m \sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)dz = \frac{1}{2} - M\cos\frac{\pi}{2}m^2 - N\sin\frac{\pi}{2}m^2,$$

其中
$$M = \frac{1}{m\pi} - \frac{1\cdot 3}{m^5\pi^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{m^9\pi^5} - \cdots$$

$$N = \frac{1}{m^3\pi^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{m^7\pi^4} + \cdots$$

在整个19世纪还创立了其他几种方法(例如最速下降法)来计算积分值.所有这些方法的完满的理论,以及很好地搞清楚逼近究竟是什么,是级数的一些单项还是整个级数,不得不有待于渐近级数理论的建立.

许多用上述方法展开的积分最早是作为微分方程的解出现的.发散级数的另一用法是直接解微分方程.这种用法至少可追溯到Euler的著作①,在关于解非均匀弦振动问题的研究(第22章第3节)中,他给出一个常微分方程(本质上就是$\frac{r}{2}$阶Bessel方程,其中r是整数)的渐近级数解.

Jacobi②对很大的x给出了$J_n(x)$的渐近形式:

$$J_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\times\left\{1-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!(8x)^2}+\cdots\right\}-\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\left.\times\left\{\frac{4n^2-1^2}{1!8x}-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!(8x)^3}+\cdots\right\}\right].$$

发散级数在解微分方程中的一个稍微不同的用法是Liouville提出的.他寻找③微分方程

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9,1762/1763,246～304,pub. 1764 = *Opera*, (2),10,293～343.

② *Astronom. Nach.*, 28,1849, 65 ～ 94 — *Werke*, 7,145～174.

③ *Jour. de Math.*, 2,1837,16～35.

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+(\lambda^2 q_0+q_1)y=0 \tag{3}$$

的近似解，其中 p, q_0 和 q_1 是 x 的正的函数，λ 是参数；要求在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上求解. 在这里，同边值问题要找 λ 的离散值相反，他感兴趣的是对大的 λ 值得到 y 的某种近似式. 为此，他引入变量

$$t=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{q_0}{p}\right)^{\frac{1}{2}}dx,\ w=(q_0 p)^{\frac{1}{4}}y, \tag{4}$$

从而得到

$$\frac{d^2 w}{dt^2}+\lambda^2 w=rw, \tag{5}$$

其中

$$r=(q_0 p)^{-1/4}\frac{d^2}{dt^2}(q_0 p)^{1/4}-\frac{q_1}{q_0}.$$

然后他运用一系列步骤，用现代语言来说，相当于用逐次逼近法求解一个 Volterra 型积分方程，这就是

$$w(t)=c_1\cos\lambda t+c_2\sin\lambda t+\int_{t_0}^{t}\frac{\sin\lambda(t-s)}{\lambda}r(s)w(s)ds.$$

Liouville 接着论证了对充分大的 λ 值，方程(5)的第一近似应当是

$$w\sim c_1\cos\lambda t+c_2\sin\lambda t. \tag{6}$$

如果现在把由(4)给出的 w 与 t 的值用来求(3)的近似解，从(6)就有

$$\begin{aligned} y\sim\ & c_1\frac{1}{(q_0 p)^{1/4}}\cos\left\{\lambda\int_{x_0}^{x}\left(\frac{q_0}{p}\right)^{\frac{1}{2}}dx\right\} \\ & +c_2\frac{1}{(q_0 p)^{1/4}}\sin\left\{\lambda\int_{x_0}^{x}\left(\frac{q_0}{p}\right)^{\frac{1}{2}}dx\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

不过 Liouville 并没有意识到，他已经对于大的 λ 得到了(3)的一个渐近级数解的第一项.

Green① 在研究波在管道中传播时用过同样的方法. 这方法

① *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 6, 1837, 457～462 = *Math. Papers*, 225～230.

被推广到形如

(8) $$y'' + \lambda^2 q(x, \lambda) y = 0$$

的方程,其中 λ 是大的正参数,而 x 可以是实数或复数. 它的解现在通常表示为

(9) $$y \sim q^{-1/4} \exp\left(\pm i\lambda \int_0^x q^{1/2} dx\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right].$$

误差项 $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 意味着,精确的解应当包含一项 $F(x, \lambda)/\lambda$,其中 $|F(x, \lambda)|$ 对所考虑区域中的所有 x 和 $\lambda > \lambda_0$ 是有界的. 当限制在复 x 平面的一个区域内时,这误差项的形式也是对的. Liouville 和 Green 都没有提供这误差项或者使他们的解成立的条件. 更加一般和准确的逼近,是在 Gregor Wentzel(1898—?)①, Hendrick A. Kramers(1894—1952)②, Léon Brillouin(1889—1969)③以及 Harold Jeffreys(1891—1989)④等人的文章中弄清楚的,并且成了人们熟知的 WKBJ 解. 这些人都是研究量子论中的 Schrödinger 方程的.

Stokes 在 1850 年宣读的一篇文章中⑤,考虑了 Airy 积分

(10) $$W = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2}(w^3 - mw) dw$$

当 $|m|$ 很大时的值. 这个积分表示衍射光接近焦散面时的强度. Airy 曾经给出 W 展为 m 的幂的一个级数,虽然它对所有的 m 收敛,但在计算上当 $|m|$ 很大时却不适用. Stokes 的方法是构造一个微分方程,使这个积分是它的一个特解,而以在计算中可用的发散级数(他称这种级数为半收敛的)来解微分方程.

---

① *Zeit. für Physik*, 38,1926,518～529.

② *Zeit. für Physik*, 39,1926,828～840.

③ *Comp. Rend.*, 183,1926,24～26.

④ *Proc. London Math. Soc.*, (2),23,1923,428～436.

⑤ *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9,1856, 166 ～ 187 = *Math. and Phys. Papers*, 2,329～357.

在说明 $U=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3}W$ 满足 Airy 微分方程

(11) $$\frac{d^2U}{dn^2}+\frac{n}{3}U=0,\ n=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}m$$

之后,Stokes 证明,对于正的 n 有

(12) $$U=An^{1/4}\left(R\cos\frac{2}{3}\sqrt{\frac{n^3}{3}}+S\sin\frac{2}{3}\sqrt{\frac{n^3}{3}}\right)$$
$$+Bn^{-1/4}\left(R\sin\frac{2}{3}\sqrt{\frac{n^3}{3}}-S\cos\frac{2}{3}\sqrt{\frac{n^3}{3}}\right),$$

其中

(13) $$R=1-\frac{1\cdot5\cdot7\cdot11}{1\cdot2\cdot16^2\cdot3n^3}+\frac{1\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot16^4\cdot3^2n^6}\cdots$$

(14) $$S=\frac{1\cdot5}{1\cdot16(3n^3)^{1/2}}-\frac{1\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot16^3(3n^3)^{3/2}}+\cdots$$

使 U 成为解的量 A 和 B 是用特殊的办法确定的(在这里 Stokes 使用了驻波原理).对负的 n,他也给出了类似的结果.

级数(12)和负的 n 的级数,取其若干项,其性态很像收敛级数,但实在都是发散的. Stokes 注意到,它们可以用于计算.给定 n 的一个值,可以用从第一项起直到对所给 n 值为最小的那一项止.他给出一种定性的论证,说明为什么级数对于数值工作是可用的.

在对正的和负的 n 求解(11)时,Stokes 遇到了特殊的困难.他不可能通过使 n 越过 0 而从正的 n 的级数过渡到负的 n 的级数,因为这级数对 $n=0$ 没有意义.他因此尝试通过 n 的复值从正的 n 过渡到负的 n,但这并不产生正确的级数和常数因子.

经过一翻努力以后①,Stokes 终于发现,如果在 n 的某一辐角范围内,一个通解用两个作为特解的渐近级数的某一线性组合表示,那么在 n 的辐角范围的一个邻域内,这两个基本渐近展开式的

① *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 10,1857, 106～128 = *Math. and Phys. Papers*, 4,77～109.

同一个线性组合,决非必然表示同一个通解. 他发现,当跨越由 n 的辐角 = 常数给出的某些直线时,这线性组合的常数突然改变了. 这些直线现在称为 Stokes 线.

虽然 Stokes 本来主要关心的是积分值的计算,但是他很清楚,发散级数可以一般地用来解微分方程. Euler, Poisson 和其他人,也曾用这种办法解出个别的微分方程,但他们的结果看来是给出特殊物理问题的解的一些诀窍. 在 1856 年和 1857 年的文章中, Stokes 实际上给出了几个例子.

上面关于用发散级数计算积分与解微分方程的工作,是许多数学家和物理学家所完成的工作的一个样品.

3. 渐近级数的正式理论

在函数表示和计算中有用的那些发散级数,对它们本性的完整认识,以及这些级数的正式定义,是 1886 年由 Poincaré 和 Stieltjes 独立地完成的. Poincaré 称这些级数为渐近级数,而 Stieltjes 则继续使用半收敛级数这个名称. Poincaré① 研究这个课题是为了进一步研究线性微分方程的解. 受发散级数在天文学上的用途所感动,他力图找出什么东西是有用的以及为什么会有用. 在去伪存真与确切陈述本质方面他获得了成功. 形如

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots \tag{15}$$

的级数,其中 a_i 与 x 无关,我们说它对于大的 x 值渐近地表示函数 $f(x)$,是指

$$\lim_{x\to\infty} x^n\left[f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)\right] = 0 \tag{16}$$

对 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 成立. 这级数一般是发散的,但在特殊情形

① *Acta Math.*, 8,1886, 295 ~ 344 = *Œuvres*, 1,290~332.

可以是收敛的.这级数与 $f(x)$ 的关系表示为

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

这样的级数是函数在 $x = \infty$ 的邻域内的展开式. Poincaré 在他 1886 年的文章中考虑了实的 x 值. 然而,该定义对复的 x 也成立,只要用 $|x| \to \infty$ 代替 $x \to \infty$ 就行了;虽然表示的正确性就要被限制在复平面上的一个以原点为顶点的扇形内.

级数(15)是在 $x = \infty$ 的邻域内渐近于 $f(x)$. 然而这定义已经被推广了:人们说级数

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

在 $x = 0$ 渐近于 $f(x)$,如果

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right] = a_n.$$

虽然在某些渐近级数的情形,人们知道中止于某一项将会出现什么样的误差;但对于一般的渐近级数,人们还不知道关于数值误差的这种信息. 然而,渐近级数对于大的 x 可以用来给出相当精确的数值结果,只要取那样一些项,当所取的项愈来愈多时,这些项的数值大小是递减的. 到任何一步,误差大小的数量级等于丢掉的第一项大小的数量级.

Poincaré 证明,两个函数的和、差、积、商,可用它们各自的渐近级数的和、差、积、商渐近地表示,只要作为除数的级数的常数项不为 0. 还有,如果

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

那么

$$\int_{x_0}^{x} f(z)\mathrm{d}z \sim C + a_0 x + a_1 \log x - \frac{a_2}{x} - \frac{1}{2}\frac{a_3}{x^2} - \cdots$$

积分的运用包含着原来定义的一个微小的推广,这就是

$$\phi(x) \sim f(x) + g(x)\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right),$$

只要
$$\frac{\phi(x)-f(x)}{g(x)}\sim a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots$$
即使当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 本身没有渐近级数表示时也成立. 至于微分，如果已知 $f'(x)$ 有渐近级数表示，那么它可以从 $f(x)$ 的渐近级数经逐项微分得到.

若一已知函数有一个渐近级数表示，则它是唯一的；但反过来不成立，因为，例如，$(1+x)^{-1}$ 与 $(1+e^{-x})\cdot(1+x)^{-1}$ 就有相同的渐近表示.

Poincaré 把他的渐近级数理论应用于微分方程，在他的天体力学著作《天体力学的新方法》(*Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*)①中就有很多这样的应用. 在他 1886 年的文章中所研究的方程类是

(17) $$P_n(x)y^{(n)}+P_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_0(x)y=0,$$
其中 $P_i(x)$ 是 x 的多项式. 实际上 Poincaré 只研究了二阶的情形，但他的方法可以用于(17).

方程(17)的奇点只有 $P_n(x)$ 的零点和 $x=\infty$. 对于正则奇点(*Stelle der Bestimmtheit*)，存在由 Fuchs 给出的积分的收敛表达式(第 29 章第 5 节). 于是考虑一个非正则奇点. 用线性变换可以把这个点移到∞去，而使方程保持其形式. 如果 P_n 是 p 次的，则 $x=\infty$ 是正则奇点的条件是，P_{n-1}, P_{n-2}, …, P_0 的次数最多分别是 $p-1$, $p-2$, …, $p-n$. 对于非正则奇点，这些次数中的一个或多个必须大些. Poincaré 证明，对于形如(17)的微分方程，只要 P_i 的次数不超过 P_n 的次数，则存在 n 个形如
$$e^{ax}x^{\alpha}\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\cdots\right)$$
的级数，它们形式地满足微分方程. 他还证明，对应于每一个这样的级数，存在一个表成积分的精确解，以这级数为它的渐近表示.

---

① Vol. 2, Chap. 8, 1893.

Poincaré 的结果包括在下述的 Jakob Horn(1867—1946)[1]定理中. Horn 处理方程

$$(18)\qquad y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y^n=0,$$

其中系数都是 x 的有理函数,并且假设对于充分大的正 x,可以展成形如

$$a_r(x)=x^{rk}\left[a_{r,0}+\frac{a_{r,1}}{x}+\frac{a_{r,2}}{x^2}+\cdots\right],\ r=1,2,\cdots,n$$

的收敛级数或渐近级数,其中 k 是正整数或 0. 如果对于上面的方程(18),特征方程即代数方程

$$m^n+a_{1,0}m^{n-1}+\cdots+a_{n,0}=0$$

的根 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 互不相同,则方程(18)有 n 个线性无关的解 $y_1, y_2, \cdots, y_n$,对充分大的正 x,它们也可以渐近地展成形式:

$$y_r\sim e^{f_r(x)}x^{\rho_r}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_{r,j}}{x^j},\ r=1,2,\cdots,n,$$

其中 $f_r(x)$是 x 的 $k+1$ 次多项式,它的 x 的最高次幂的系数是 $m_r/(k+1)$, 而 ρ_r 与 $A_{r,j}$是常数,但 $A_{r,0}=1$. Poincaré 和 Horn 的结果已推广到许多其他类型的微分方程,并且推广到特征方程的根不一定互不相同的情形.

当(18)中的自变量允许取复值时,渐近级数解的存在、形式和范围,首先由 Horn[2] 处理过. George David Birkhoff(1884—1944)给出了一个普遍的结果,他是美国早期的大数学家之一[3]. Birkhoff 在这篇文章中不是考虑方程(18),而是考虑更一般的方程组

$$(19)\qquad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{j-1}^{n}a_{ij}(x)y_j,\ j=1,2,\cdots,n,$$

其中当 $|x|>R$ 时,对于每个 a_{ij} 都有

---

① *Acta Math.*, 24,1901,289～308.

② *Math. Ann.*, 50,1898,525～526.

③ *Amer. Math. Soc. Trans.*, 10,1909,436～470 = *Coll. Math. Papers*, 1,201～235.

$$a_{ij}(x) \sim a_{ij}x^q + a_{ij}^{(1)}x^{q-1} + \cdots + a_{ij}^{(q)} + a_{ij}^{(q+1)}\frac{1}{x} + \cdots$$

并且对于(19)而言,特征方程

$$|a_{ij} - \delta_{ij}\alpha| = 0$$

有互不相同的根.他给出了 y_i 的渐近级数解,它们在复平面上以 $x=0$ 为顶点的各扇形中成立.

尽管 Poincaré 和其他人的上述展开式都是由自变量的幂构成的,但是微分方程渐近级数解的进一步研究却回到了 Liouville 最早考虑过的含参数的问题(第 2 节). Birkhoff 给出了这个问题的普遍结果①.他考虑

$$(20)\qquad \frac{d^n z}{dx^n} + \rho a_{n-1}(x,\rho)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + \rho^n a_0(x,\rho)z = 0,$$

其中$|\rho|$是大的,并且 $x \in [a, b]$. 函数 $a_i(x,\rho)$假设对复参量 ρ 在$\rho=\infty$ 处是解析的,并且对实变量 x 有各阶微商.对 $a_i(x,\rho)$所作的假设蕴含了

$$a_i(x,\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(x)\rho^{-j},$$

也蕴含了特征方程

$$w^n + a_{n-1,0}(x)w^{n-1} + \cdots + a_{00}(x) = 0$$

的根 $w_1(x), w_2(x), \cdots, w_n(x)$对每一个 x 是互不相同的.他证明(20)有 n 个无关解

$$z_1(x,\rho), \cdots, z_n(x,\rho),$$

这些解在 ρ 平面(由 ρ 的辐角确定)的区域 S 中关于 ρ 是解析的,使得对任一整数 m 和充分大的$|\rho|$都有

$$(21)\qquad z_i(x,\rho) = u_i(x,\rho) + \exp\left[\rho\int_a^x w_i(t)dt\right]E_0\rho^{-m},$$

其中

① *Amer. Math. Soc. Trans.*, 9,1908,219～231 和 380 ～ 382 = *Coll. Math. Papers*, 1,1～36.

$$(22)\qquad u_i(x,\rho)=\exp\left[\rho\int_a^x w_i(t)\mathrm{d}t\right]\sum_{j=0}^{m-1}u_{ij}(x)\rho^{-j},$$

而 E_0 是 x, ρ, m 的函数,且对于所有$[a, b]$中的 x 与 S 中的 ρ 有界. 这些 $u_{ij}(x)$本身是可确定的. 由于(22),结果(21)表明 z_i 是由 $1/\rho$ 直到 $1/\rho^{m-1}$ 诸项加上一个余项(即右边第二项,它包含 $1/\rho^m$)所得级数给出的. 此外,由于 m 是任意的,人们可以在 $u_i(x, \rho)$的表达式中随意取 $1/\rho$ 的任意多少项. 因 E_0 有界,余项对 $1/\rho$ 来说比 $u_i(x, \rho)$的阶更高. 于是,令 m 变为无穷所得到的无穷级数,在 Poincaré 意义下渐近到 $z_i(x,\rho)\Big/\exp\left[\rho\int_a^x w_i(t)\mathrm{d}t\right]$.

在 Birkhoff 定理中,复数 ρ 的渐近级数只在复 ρ 平面的一个扇形区域 S 内成立. Stokes 现象就出现了. 也就是说,$z_i(x, \rho)$的越过 Stokes 线的解析开拓,并不能由 $z_i(x, \rho)$的渐近级数的解析开拓给出.

渐近级数的运用,或微分方程解的 WKBJ 逼近的运用,提出了另一个问题. 假设我们考虑方程

$$(23)\qquad y''+\lambda^2q(x)y=0,$$

其中 x 在$[a, b]$中取值. 对于充分大的 λ,由于(7),WKBJ 逼近在 $x>0$ 处给出两个解,在 $x<0$ 处也给出两个解. 而在使 $q(x)=0$ 的 x 处发生了问题. 这样的点称为过渡点、转折点或 Stokes 点. 然而,(23)的精确解在这种点处却是有穷的. 问题是要连接在转折点各侧的 WKBJ 解,使它们在微分方程的求解区间$[a, b]$内表示同一个精确解. 为了把问题提得明确些,假设上面的方程中$q(x)$对于实的 x 是实的,并且 $x=0$ 时 $q(x)=0$, $q'(x)\neq 0$. 还假设$q(x)$对于正的 x 是负的(或者反过来). 对 $x<0$, 给定两个 WKBJ 解的一个线性组合,对 $x>0$, 则给定另一个线性组合. 问题在于对 $x>0$ 成立的哪个解应当与 $x<0$ 的哪个解连接起来. 连接公式提供了答案.

解决越过 $q(x)$ 的零点的方案首先由 Lord Rayleigh① 提出，并由熟悉 Rayleigh 工作的 Richard Gans(1880—1954)②作了推广. 他们两人都是研究光在变介质中的传播的.

连接公式的第一个系统研究是由 Harold Jeffreys③ 独立于 Gans 作出的. Jeffreys 考虑方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2X(x)y=0, \tag{24}$$

其中 x 是实的，λ 是充分大的实数，$X(x)$ 只有一个单零点，譬如说 $x=0$. 他导出了连接(24)在 $x>0$ 和 $x<0$ 时的渐近级数解的公式，用的是(24)的一个近似方程，即

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2xy=0, \tag{25}$$

它是用 x 的一个线性函数代替(24)中的 $X(x)$. (25)的解是

$$y_{\pm}(x)=x^{1/2}J_{\pm\frac{1}{3}}(\xi), \tag{26}$$

其中 $\xi=(2/3)\lambda x^{3/2}$. 对充分大的 x，这些解的渐近展开式可以用来连接 $x=0$ 两边的渐近解. 在连接过程中，必须考虑涉及 x 及 λ 变域的许多细节，这里不讨论. 在大量文章中，连接公式的研究已推广到(24)中的 $X(x)$ 有多重零点或 n 个不同的零点，以及更复杂的二阶方程与高阶方程，或复的 x 与 λ 等各种情形.

渐近级数的理论，无论是用来计算积分或者微分方程近似解，近年来都有巨大的拓广. 特别值得指出的是，数学发展表明，18、19 世纪的人，最有名的是 Euler，他们觉察到发散级数的巨大功用，并坚持认为这些级数可以用作它们所表示的函数的分析等价物，即级数的运算对应于函数的运算. 他们的路子是正确的. 虽然他们

---

① *Proc. Roy. Soc.*, A 86, 1912, 207 ~ 226 = *Sci. Papers*, 6, 71~90.

② *Annalen der Phys.*, (4), 47, 1915, 709~736.

③ *Proc. London Math. Soc.*, (2), 23, 1922~1924, 428~436.

不能提炼出本质的严密的概念,但是,基于直观和所得到的结果,他们看到了发散级数和它们所表示的函数是密切地关联着的.

4. 可 和 性

迄今谈到的发散级数的研究,都在于寻找渐近级数去表示函数,这些函数或者是有已知显式的,或者隐含在微分方程的解中.大概从 1880 年开始,数学家们研究的另一个问题,本质上是求渐近级数的反问题.给定一个在 Cauchy 意义下发散的级数,能够赋予这级数一个"和"吗? 如果级数是变项级数,这个"和"就会是一个函数,对这个函数来说,这发散级数也可能是也可能不是一个渐近展开式.但是函数仍然可以取作级数的"和",而这个"和"可以服务于某些有用的目的,即使级数肯定不收敛到这个函数,或者对于计算函数近似值来说可能用不上.

求发散级数的和的问题,在 Cauchy 引进收敛与发散的定义以前,实际上多多少少已经在做了.数学家们遇到发散级数并求出它们的和,其机会与他们对收敛级数所做的几乎一样多,因为这两类级数并没有严格区别开来.唯一的问题是,合适的和是什么? 例如,Euler 的原则是(第 20 章第 7 节),一个函数的幂级数展开,以导出这个级数的函数的值作为它的和;即使对于 x 的某些值这级数在 Cauchy 意义下是发散的,这个原则也对这级数给定一个和.同样,在他的级数变换中(第 20 章第 4 节),他把发散级数变换成收敛级数,从不怀疑实际上每一个级数都应当有一个和.然而,在 Cauchy 确实作出了收敛与发散的区别之后,求发散级数的和的问题就在一个不同的水平上开始探讨.人们不再接受 18 世纪关于所有级数各有其和的相对朴素的看法.新的定义规定了现在所谓的"可和性"(summability),把它与 Cauchy 意义下的收敛性概念区别开来.

事后人们可以看到,可和性的概念事实上就是 18 世纪和 19 世纪初期的人们所提出的. 这就是与刚刚所述的 Euler 求和法相当的东西. 事实上,Euler 在他 1745 年 8 月 7 日致 Goldbach 的信中,认定幂级数的和是导出这个级数的函数的值,还认定每个级数都必须有和,但因"和"这个词隐含通常的相加过程,而在发散级数的情形,例如 $1-1!+2!-3!+\cdots$,这个过程又不导致"和",所以对于发散级数的"和",我们应当用"值"这个词.

Poisson 也引进了一种在今天看来就是可和性的概念. Euler 把级数由之而来的函数的值作为这级数的和. 隐含在 Euler 这个定义中的思想是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{27}$$

(上式中记号 1－是指 x 从左边趋向于 1.)根据(27),$1-1+1-1+\cdots$ 的和是

$$\lim_{x\to 1-}(1-x+x^2-x^3+\cdots) = \lim_{x\to 1}(1+x)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Poisson① 曾感到级数

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots$$

难以考虑,它除了 θ 是 π 的倍数以外处处是发散的. 他的想法是,就整个 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{28}$$

来说,人们应当考虑相关的幂级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n, \tag{29}$$

并且定义(28)的和就是级数(29)当 r 从左边趋向于 1 时的极限. 自然,Poisson 并没有意识到他是提出了关于发散级数的和的一个定义,因为正如曾经说明过的,收敛和发散之间的区别在他那个时

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, 11,1820,417～489.

候还不是紧要的.

Poisson所用的定义现在称为Abel求和法,因为它还受到Abel的一个定理①的启发,这个定理说,如果幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

有收敛半径 r,并且在 $x=r$ 收敛,则

$$\lim_{x\to r}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n. \tag{30}$$

于是由级数在 $-r<x\leqslant r$ 内所定义的函数 $f(x)$ 在 $x=r$ 左方连续.然而,如果 $\sum a_n$ 不收敛而极限(30)在 $r=1$ 存在,那就有了发散级数和的一个定义.对于在Cauchy意义下发散的级数,这个可和性的正式定义,直到19世纪末,由于即将说明的原因,一直没有被提出.

重新考虑发散级数求和法的动力之一,除了这些级数在天文研究中继续有用之外,是解析函数论中的所谓边值(*Grenzwert*)问题.一个幂级数 $\sum a_nx^n$ 可以在以 r 为半径的圆的内部表示一个解析函数,但不包括圆周上的 x 值.问题在于能否找到一种和的概念,使得幂级数在 $|x|=r$ 时可以有和,并且使得这个和就是 $f(x)$ 当 $|x|$ 趋向 r 时的值.正是这个延拓解析函数幂级数表示范围的尝试,推动了Frobenius, Hölder和Ernesto Cesàro的工作.Frobenius证明②,如果幂级数 $\sum a_nx^n$ 的收敛区间是 $-1<x<1$,又如果

$$s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n, \tag{31}$$

则

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1},$$

只要右边的极限存在.因此,对 $x=1$ 在正常意义下发散的幂级数可以有一个和.此外,如果 $f(x)$ 是这幂级数所表示的函数,则

---

① *Jour. für Math.*, 1, 1826, 311～339 = *Œuvres*, 1, 219～250.

② *Jour. für Math.*, 89, 1880, 262～264 = *Ges. Abh.*, 2, 8～10.

Frobenius对级数在 $x=1$ 的值的定义与 $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$一致.

脱离与幂级数的这种联系,Frobenius 的工作提出了发散级数的一种可和性定义. 如果 $\sum a_n$ 发散,s_n 有(31)中的意义,则可以把和取作

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1},$$

只要这个极限存在. 例如,对于级数 $1-1+1-1+\cdots$, S_n 的值是 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \cdots$从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}$. 如果 $\sum a_n$ 收敛,则 Frobenius 的"和"就是通常的和. 这种取级数部分和的平均的思想,可以在较早的文献中找到. Daniel Bernoulli① 与 Joseph L. Raabe(1801—1859)②对特殊类型的级数就用过.

在 Frobenius 发表他的文章之后不久,Hölder③ 作出了一种推广. 给定级数 $\sum a_n$,令

$$s_n^{(0)} = s_n,$$

$$s_n^{(1)} = \frac{1}{n+1}(s_0^{(0)}+s_1^{(0)}+\cdots+s_n^{(0)}),$$

$$s_n^{(2)} = \frac{1}{n+1}(s_0^{(1)}+s_1^{(1)}+\cdots+s_n^{(1)}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$s_n^{(r)} = \frac{1}{n+1}(s_0^{(r-1)}+s_1^{(r-1)}+\cdots+s_n^{(r-1)}).$$

于是和为

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n^{(r)}, \tag{32}$$

只要这极限对某个 r 存在. Hölder 的定义现在叫(H, r)求和法.

Hölder 给了一个例子. 考虑级数

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 16,1771,71~90.

② *Jour. für Math.*, 15,1836,355~364.

③ *Math. Ann.*, 20,1882,535~549.

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=-1+2x-3x^2+4x^3-\cdots$$

这个级数当 $x=1$ 时发散. 然而对 $x=1$ 有

$$s_0=-1,\ s_1=1,\ s_2=-2,\ s_3=2,\ s_4=-3,\ \cdots$$

因此

$$s_0^{(1)}=-1,\ s_1^{(1)}=0,\ s_2^{(1)}=-\frac{2}{3},\ s_3^{(1)}=0,\ s_4^{(1)}=-\frac{3}{5},\ \cdots$$

$$s_0^{(2)}=-1,\ s_1^{(2)}=-\frac{1}{2},\ s_2^{(2)}=-\frac{5}{9},\ s_3^{(2)}=-\frac{5}{12},\ s_4^{(2)}=-\frac{34}{75},\ \cdots$$

几乎显然地有 $\lim_{n\to\infty} s_n^{(2)}=-1/4$, 而这就是 Hölder 和 $(H,2)$. 这也是 Euler 根据他的原则给予这个级数的值, 他的原则是, 和等于导出这个级数的函数的值.

可和性的另一个在现在来说是很标准的定义, 是由那不勒斯(Naples)大学教授 Cesàro 给出的①. 设级数是 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, 令 s_n 为 $\sum_{i=0}^{n} a_i$. 那么 Cesàro 和就是

$$s=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(r)}}{D_n^{(r)}}\quad (r\text{ 整数且 }\geqslant 0), \tag{33}$$

其中

$$S_n^{(r)}=s_n+rs_{n-1}+\frac{r(r+1)}{2!}s_{n-2}+\cdots+\frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!}s_0$$

以及

$$D_n^{(r)}=\frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+n)}{n!}.$$

$r=1$ 的情形包含了 Frobenius 的定义. Cesàro 的定义现在叫做 (C,r) 求和法. Hölder 与 Cesàro 的方法给出相同的结果. Hölder 可求和隐含 Cesàro 可求和, 是由 Konrad Knopp(1882—1957)在 1907 年的一篇没有发表的学位论文中证明的, 逆定理则是由 Walter Schnee(1885 年生)证明的②.

---

① *Bull. des Sci. Math.*, (2), 14, 1890, 114~120.

② *Math. Ann.*, 67, 1909, 110~125.

某些可和性定义的有趣特点是，当应用到收敛半径为 1 的幂级数时，它们不仅给出与 $\lim_{x\to 1-} f(x)$ 一致的和(其中 $f(x)$ 是由级数给出其幂级数表示的函数)，而且还有进一步的性质，这就是他们在 $|x|>1$ 的区域内保持有意义，并且在这些区域内提供了原来幂级数的解析开拓.

求发散级数的“和”的更进一步的动力，来自一个完全不同的方向，这就是 Stieltjes 对连分式的研究. 连分式可以变换成发散级数或者收敛级数，反过来也成立，这一事实曾经被 Euler 利用过①. Euler 希望(第 20 章第 4、6 节)为发散级数

$$1-2!+3!-4!+5!-\cdots \tag{34}$$

找到一个和. 在他论发散级数的文章②以及与 Nicholas Bernoulli (1687—1759)的通信③中，Euler 首先证明级数

$$x-(1!)x^2+(2!)x^3-(3!)x^4+\cdots \tag{35}$$

形式地满足微分方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x,$$

而对这方程他得到了积分解

$$y=\int_0^\infty \frac{xe^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t. \tag{36}$$

然后应用他导出的把收敛级数变换成连分式的规则，Euler 把(35)变换成

$$\frac{x}{1+}\frac{x}{1+}\frac{x}{1+}\frac{2x}{1+}\frac{2x}{1+}\frac{3x}{1+}\frac{3x}{1+}\cdots \tag{37}$$

这个工作包含两个特点. 一方面，Euler 得到了一个积分，可以当

① *Novi Comm. Acad. Sci Petrop.*, 5, 1754/1755, 205～237, pub. 1760 = *Opera*, (1), 14, 585～617, 和 *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, 2, 1784, 36～45, pub. 1788 = *Opera*, (1), 16, 34～43.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1754/1755, 205～237, pub. 1760 = *Opera*, (1), 14, 585～617.

③ Euler 的 *Opera Posthuma*, 1, 545～549.

作发散级数(35)的“和”;后者事实上是这积分的渐近级数.另一方面他表明,如何把发散级数变换成连分式.事实上他用了 $x=1$ 的连分式去计算级数(34)的值.

这类性质的研究,在18世纪后期偶然地有一些,而在19世纪便有了很多,其中最值得注意的是 Laguerre 的工作①.他首先证明积分(36)可以展成连分式(37).他还处理了发散级数

$$1+x+2!x^2+3!x^3+\cdots \tag{38}$$

因为
$$m!=\Gamma(m+1)=\int_0^\infty e^{-z}z^m dz,$$
这级数可以写成
$$\int_0^\infty e^{-z}dz+x\int_0^\infty e^{-z}z\,dz+x^2\int_0^\infty e^{-z}z^2dz+\cdots$$
如果形式地交换积分与求和的次序,就得到
$$\int_0^\infty e^{-z}(1+xz+x^2z^2+\cdots)dz,$$
或
$$f(x)=\int_0^\infty e^{-z}\frac{1}{1-zx}dz. \tag{39}$$
这样导出来的 $f(x)$,对所有正实数之外的复的 x 是解析的,并且可以当作级数(38)的和.

Stieltjes 在他1886年的学位论文中着手研究发散级数②.在这里 Stieltjes 引进了一个级数渐近于一个函数的定义,完全与 Poincaré 引进的相同;然而在其他方面,他却只限于某些特殊级数的计算.

Stieltjes 继续研究发散级数的连分式展开,在1894—1895年写了两篇关于这个课题的著名文章③.这个工作是连分式解析理

① *Bull. Soc. Math. de France*, 7,1879, 72 ~ 81 = *Œuvres*, 1,428~437.

② “Recherches sur quelques séries semi-convergentes,” *Ann. de l' Ecole Norm. Sup.*, (3),3,1886, 201 ~ 258 = *Œuvres complètes*, 2,2~58.

③ *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*, 8,1894,J. 1~122 和 9,1895, A, 1 ~ 47 = *Œuvres complètes*, 2,402~559.

论的开端，它研究了收敛性问题以及定积分与发散级数的联系. 就在这两篇文章中，他引进了后来以他的名字命名的积分.

Stieltjes 从连分式

$$(40)\qquad \frac{1}{a_1 z+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3 z+}\,\frac{1}{a_4+}\,\frac{1}{a_5 z+}\cdots\frac{1}{a_{2n}+}\,\frac{1}{a_{2n+1} z+1}\cdots$$

出发，其中 a_n 是正实数而 z 是复数. 他接着证明，当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，连分式(40)收敛到一个函数 $F(z)$，这函数在复平面上除去负实轴和原点以外是解析的，并且

$$(41)\qquad F(z)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\phi(u)}{u+z}.$$

当 $\sum a_n$ 收敛时，(41)的奇部分和与偶部分和收敛到不同的极限 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$，这里

$$F_1(z)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}g_1(u)}{z+u},\ F_2(z)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}g_2(u)}{z+u}.$$

现在，人们知道，连分式(40)能形式地展成级数

$$(42)\qquad \frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\frac{c_3}{z^4}+\cdots$$

其中 c_i 是正的. 这种对应(在一定限制下)还是可逆的. 对于每一个级数(42)，都对应着一个带正 a_n 的连分式(40). Stieltjes 说明了如何由 a_n 定出 c_i；他还在 $\sum a_n$ 发散的情况下证明了比值 c_n/c_{n-1} 是递增的. 如果它有一个有穷的极限 λ，则级数在 $|z|>\lambda$ 时收敛；但是如果这个比递增而无极限，则级数对一切 z 发散.

级数(42)和连分式(40)之间的关系说得更为详细. 虽然级数收敛时连分式就收敛，但反过来却不真. 当级数(42)发散时，必须按照 $\sum a_n$ 发散还是收敛而分成两种情况. 在前一种情况，正如我们已经说过的，连分式给出一个而且只有一个与之等价的函数，这可以当作发散级数(42)的和. 当 $\sum a_n$ 收敛时，从连分式得到的是两个不同的函数，一个从偶部分和收敛得到，另一个从奇部分和收

敛得到.但对于级数(42)(在它发散时)却有无穷多个函数与它对应,其中每一个都以这级数作为渐近展开.

Stieltjes 的结果还有这样的意义:这些结果表明,发散级数至少分为两类,一类是,存在适当的单个等价函数,以这级数为它的展开,另一类则是至少存在两个等价函数以这级数作为展开.连分式只是级数与积分之间的一个中介物;也就是说,给定一个级数,通过连分式可得到积分.因此,一个发散级数总是属于一个或多个函数,这些函数可以在和的一种新的意义下当作这级数的和.

Stieltjes 还提出并解决了一个反问题.为了叙述简单,我们假设 $\phi(u)$可微,因而积分(41)可以写成

$$\int_0^\infty \frac{f(u)}{z+u}\mathrm{d}u.$$

对应于发散级数(42)以及在 $\sum a_n$ 发散的情形,存在一个这种形式的积分.问题就是已知道级数去找 $f(u)$.积分的形式展开表明

$$c_n=\int_0^\infty f(u)u^n\mathrm{d}u,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{43}$$

因此知道了 c_n 之后,必须确定 $f(u)$,使它满足无穷多个方程(43).这就是 Stieltjes 所谓的"矩量问题".它并非只有唯一解,因为 Stieltjes 本人就给出了函数

$$f(u)=\mathrm{e}^{\sqrt[4]{u}}\sin\sqrt[4]{u},$$

它使得 $c_n=0$ 对一切 n 成立.如果加上补充条件:$f(u)$在积分限之间是正的,则只有单独一个 $f(u)$是可能的.

可和性级数理论的系统发展是从 Borel 自 1895 以来的工作开始的.他首先给出 Cesàro 定义的推广.然后他仿效 Stieltjes 的工作,给出一个积分定义①.如果把 Laguerre 所用的过程用到任何一个形如

① *Ann. de l' Ecole Norm. Sup.*, (3),16,1899,9～136.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{44}$$

的收敛半径有限(包括 0)的级数上,就导致积分

$$\int_0^\infty e^{-z} F(zx)\,dz, \tag{45}$$

其中 $$F(u) = a_0 + a_1 u + \frac{a_2}{2!}u^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}u^n + \cdots.$$

这个积分就是 Borel 在其上建立他的发散级数理论的表达式. 它被 Borel 当作级数(44)的和. 级数 $F(u)$称为原来级数的关联级数(associated series).

如果原来的级数(44)有大于 0 的收敛半径 R,则关联级数代表一个整函数. 这时积分 $\int_0^\infty e^{-z}F(zx)dz$ 当 x 在收敛圆内时有意义,并且积分值和级数值相等. 但是这积分也可能对收敛圆外的 x 值有意义,这时这积分就提供了原来级数的一个解析开拓. Borel 称这个级数在 x 点(在这点积分有意义)是可和的(summable)(在刚才解释过的意义下).

如果原级数(44)发散 ($R = 0$), 则关联级数可以收敛也可以发散. 如果它只在平面 $u = zx$ 的一部分上收敛,我们就不仅把关联级数的值,也把它的解析开拓的值看成 $F(u)$. 于是积分 $\int_0^\infty e^{-z}F(zx)dz$ 可以有意义,并且正如我们看到的,就是从原来的发散级数得到的. 使原来的级数可和的 x 值的区域的确定,曾由 Borel 研究过,他考虑了原来级数收敛 ($R > 0$) 与发散 ($R = 0$) 这两种情形.

Borel 还引进了绝对可和性(absolute summability)的概念. 原来级数是绝对可和的,如果

$$\int_0^\infty e^{-z}F(zx)\,dz$$

绝对收敛,并且后续的积分

$$\int_0^{\infty} e^{-z}\left|\frac{d^{\lambda}F(zx)}{dz^{\lambda}}\right|dz,\ \lambda=1,2,\cdots$$

都有意义.接着 Borel 证明,绝对可和的发散级数可以完全像收敛级数那样进行运算.换句话说,这级数代表一个函数,并且可以代替函数进行运算.例如,两个绝对可和级数的和、差、积是绝对可和的,并且分别是每个级数所代表的函数的和、差、积.类似的事实对绝对可和级数的微商也成立.此外,对收敛级数来说,上述意义的和与通常的和是一致的,而减去前 k 项所得级数的和化为整个级数的"和"减去前 k 项的和.Borel 强调指出,求和性的任何令人满意的定义必须具有这些性质,虽然不是所有的定义都这样.他不要求任何两种定义必须有相同的和.

这些性质有可能把 Borel 的理论直接应用到微分方程.事实上,如果微分方程

$$P(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

对 x 来说在原点是解析的,对 y 和它的微商来说是代数的,则形式上满足微分方程的任何绝对可和的级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

都定义一个解析函数作为这方程的解.例如,Laguerre 级数

$$1+x+2!x^2+3!x^3+\cdots$$

形式地满足微分方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x-1)y=-1,$$

因此函数(看(39))

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-z}}{1-zx}dz$$

必定是这方程的解.

可和性概念一经获得一定的承认,成打的数学家就引进各式各样的新的定义,它们满足 Borel 或其他人提出的部分或全部要求.许多可和性定义被推广到多重级数.另外,各种包含可和性概

念的问题被提出来了，并且有许多得到了解决. 例如，假设一个级数用某种方法可和，需要对级数加上什么条件，在承认它的可和性下，还使得它在 Cauchy 意义下是收敛的? 这样的定理为了纪念 Alfred Tauber(1866 年生)而命名为 Tauber 型定理. 例如 Tauber 证明了①，如果 $\sum a_n$ Abel 可和到 s，并且当 n 趋向无穷时 na_n 趋向于 0，则 $\sum a_n$ 收敛到 s.

可和性的概念确实容许我们对大量的发散级数给出它们的和或值. 因此怎样才算完成这个问题就不可避免地提出来了. 如果一个已知的级数是直接从物理现象提出来的，和的任何定义是否合适必然完全取决于这个和在物理上是否有意义，正如任何几何的物理应用取决于这几何是否描述物理空间. Cauchy 的和的定义是经常适合的一种，因为他基本上说的是，这和是按通常意义将愈来愈多的项接连相加而得到的. 然而在逻辑上没有什么理由宁愿要和的这个概念而不要介绍过的其他概念. 确实的，用级数来表示函数的范围由于应用这些较新的概念而大大地扩大了. 例如 H. A. Schwarz 的学生 Leopold Fejér (1880—1959)说明了可和性在 Fourier 级数理论中的价值. Fejér 在 1904 年证明②，如果在区间$[-\pi, \pi]$上，$f(x)$是有界的而且(Riemann)可积，或者是无界的但积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，那么在区间中每个使 $f(x+0)$ 与 $f(x-0)$ 存在的点上，Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

的 Frobenius 和是 $[f(x+0)+f(x-0)]/2$. 在这个定理中加在 $f(x)$ 上的条件弱于以前各种定理中使 Fourier 级数收敛到 $f(x)$ 的条件.

Fejér 的基本结果成了级数可和性的一系列广泛而富有成果

① *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 8,1897,273～277.
② *Math. Ann.*, 58,1904,51～69.

的研究的开始.我们在很多场合看到了用无穷级数表示函数的需要.例如在解偏微分方程的初值问题或边值问题中为了满足初始条件,通常需要把给定的初值函数 $f(x)$ 用特征函数表示出来,这些特征函数是把边界条件用到从分离变量法得出的常微分方程去时得到的.这些特征函数可能是 Bessel 函数、Legendre 函数,或者其他任何一类特殊函数.然而这样的特征函数级数在 Cauchy 意义下不一定收敛到已知的 $f(x)$,但这级数却又确实可能在这种或那种可和性的意义下可和到 $f(x)$,并且初始条件由此得到满足.可和性的这些应用显示了这个概念的巨大成功.

发散级数理论的形成与被接受,是数学成长的又一个显著的例子.首先它说明,当一个概念或技巧证明是有用的时候,即使它的逻辑含糊不清甚至不存在,但通过持续的研究仍将会揭出逻辑上的正确性.这纯粹是一种事后思考.它还证明,数学家对数学是人为的这一点认识到了何种程度.可和性的定义并不是愈来愈多的项连续相加的自然概念(这概念 Cauchy 只不过是把它严密化了而已),它们是人造的(artificial).但它们为数学目的服务,其中甚至包括了用数学去解决物理问题;而这些现在成了承认它们属于合法数学的充分根据.

参考书目

Borel, Emile: *Notice sur les travaux scientifiques de M. Emile Borel*, 2nd ed., Gauthier-Villars, 1921.

Borel, Emile: *Leçons sur les séries divergentes*, Gauthier-Villars, 1901.

Burkhardt, H.: "Trigonometrische Reihe und Integrale", *Encyk. der Math. Wiss.*, B.G. Teubner, 1904～1916, Ⅱ, A 12,819～1354.

Burkhardt, H.: "Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750～1860", *Math. Ann.*, 70,1911,169～206.

Carmichael, Robert D.: "General Aspects of the Theory of Summable Series", *Amer.*

Math. Soc. Bull., 25,1918/1919,97～131.

Collingwood, E. F.: "Emile Borel", *Jour. Lon. Math. Soc.*, 34,1959,488～512.

Ford, W. B.: "A Conspectus of the Modern Theories of Divergent Series", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 25,1918/1919,1～15.

Hardy, G. H.: *Divergent Series*, Oxford University Press, 1949. 看各章末的历史说明.

Hurwitz, W. A.: "A Report on Topics in the Theory of Divergent Series", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 28,1922,17～36.

Knopp, K.: "Neuere Untersuchungen in der Theorie der divergenten Reihen", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 32,1923,43～67.

Langer, Rudolf E.: "The Asymptotic Solution of Ordinary Linear Differential Equations of the Second Order", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 40,1934,545～582.

McHugh, J. A. M.: "An Historical Survey of Ordinary Linear Differential Equations with a Large Parameter and Turning Points", *Archive for History of Exact Sciences*, 7,1971,277～324.

Moore, C. N.: "Applications of the Theory of Summability to Developments in Orthogonal Functions", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 25,1918/1919,258～276.

Plancherel, Michel: "Le Développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle", *L'Enseignement Mathématique*, 24,1924/1925,19～58.

Pringsheim, A.: "Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1898～1904, IA3, 47～146.

Reiff, R.: *Geschichte der unendlichen Reihen*, H. Lauppsche Buchhandlung, 1889, Martin Sandig (reprint), 1969.

Smail, L. L.: *History and Synopsis of the Theory of Summable Infinite Processes*, University of Oregon Press, 1925.

Van Vleck, E. B.: "Selected Topics in the Theory of Divergent Series and Continued Fractions", *The Boston Colloquium of the Amer. Math. Soc.*, 1903, Macmillan, 1905,75～187.

第 48 章

张量分析和微分几何

> 于是,或者作为空间基础的客体必须形成一个离散的流形,或者我们必须从它的外部关系中,从作用于它上面的各约束力中,去寻找其度量的根据.这就把我引到另一门科学——物理学的领域,而我工作的目的不允许我今天进入那个领域.
>
> Bernhard Riemann

1. 张量分析的起源

常常被当作一个全新的数学分支的张量分析,它的开始创建,或者是为了适应某种特殊的目的,或者只是为了适应数学家的爱好.实际上,它不过是一个老题目——主要与 Riemann 几何相联系的微分不变量研究——的一种变形.我们可能记得(第 37 章第 5 节),这些不变量就是这样一些表达式,它们在任何坐标变换下保持其形式和值不变,因为它们代表几何性质或物理性质.

微分不变量的研究是由 Riemann, Beltrami, Christoffel 和 Lipschitz 开创的.新的方法是巴勒莫(Palermo)大学的数学教授 Gregorio Ricci-Curbastro(1853—1925)创建的.他受 Luigi Bianchi 的影响,后者的工作则追随 Christoffel. Ricci 企图促进一种研究工作,为几何性质和物理规律的表示式寻找一种在坐标变换下不变的形式.关于这个课题,他的主要工作是在 1887—1896 年这段时间做的,虽然在 1896 年以后他和一个意大利学派,仍继续在这个课题上工作了 20 年或更多.在这段主要的时期里,Ricci 完成了他称之为绝对微分学(absolute differential calculus)的方法和

紧凑的表示法. Ricci 在 1892 年发表的一篇文章①中,给出了他的方法的第一个系统报告,并把它应用于微分几何和物理学的某些问题中.

9 年以后,Ricci 和他著名的学生 Tullio Levi-Civita(1873—1941)合写了一篇总结性文章《绝对微分法及其应用》(Methods of the Absolute Differential Calculus and Their Applications)②. Ricci 和 Levi-Civita 的工作,对这个算法给出了更为明确的阐述. 至于这门学科变成通常所说的张量分析,那是在 1916 年 Einstein 给它以这个名称之后. 考虑到 Ricci 及后来的 Levi-Civita 和 Ricci 在记法上的许多变更,我们将使用现在已变成较为标准的那种记号.

2. 张量的概念

为了建立由 Ricci 所引进的张量的概念,我们考虑函数 $A(x^1, x^2, \cdots, x^n)$. 我们用 A_i 表示$\partial A/\partial x^i$. 于是,表达式

$$\sum A_j \mathrm{d}x^j \tag{1}$$

在形如

$$x^i = f_i(y^1, y^2, \cdots, y^n) \tag{2}$$

的变换下是一个微分不变量. 这里假定函数 f_i 具有所需要的各阶导数,并且变换是可逆的,从而有

$$y^i = g_i(x^1, x^2, \cdots, x^n). \tag{3}$$

在变换(2)下,表达式(1)变成

$$\sum \overline{A}_j(y^1, y^2, \cdots, y^n)\mathrm{d}y^j. \tag{4}$$

然而,$\overline{A}_j$ 并不等于 A_j. 而是

---

① *Bull. des Sci. Math.*, (2),16,1892, 167 ~ 189 = *Opere*, 1,288~310.

② *Math. Ann.*, 54,1901, 125 ~ 201 = Ricci, *Opere*, 2,185~271.

$$(5)\qquad \overline{A}_j = \frac{\partial \overline{A}}{\partial y^j} = A_1 \frac{\partial x^1}{\partial y^j} + A_2 \frac{\partial x^2}{\partial y^j} + \cdots + A_n \frac{\partial x^n}{\partial y^j},$$

在这里 A_i 中所有的 x^i 应当理解为要换成它们用所有 y^i 表示的式子. 这样,$\overline{A}_j$ 就通过变换(5)的特殊规则同 A_j 相联系,在(5)中包含变换的一阶导数.

Ricci 的想法是:不把注意力集中在不变的微分形式(1)上,只要处理函数组

$$A_1, A_2, \cdots, A_n,$$

就够了,而且更为迅捷,他把这个分量组称为一个张量,只要在坐标变换下新的分量组

$$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n$$

同原来的分量组有变换规则(5)的那种关系. 正是这种明确地突出函数组(或系)与变换规则,成了 Ricci 对微分不变量这一课题的研究方法的标志. 数量函数 A 的梯度的分量 A_j 所构成的组,是1阶协变张量(covariant tensor)的一个例子. 一个函数组(或系)表征一个不变量,这一概念本来并不新鲜,因为在 Ricci 时代向量已经为人所共知. 向量用它在一个坐标系中的分量表示,并且,如果向量在坐标变换下保持不变,如像它本来应该的那样,那么这些分量也要受一个变换规则的制约. 但是,Ricci 所引进的新的系统却更要一般得多,并且着重于变换规则这一点也是新的.

作为 Ricci 所引进的观点的另一个例子,我们考虑距离元素的表达式. 它由下式给出:

$$(6)\qquad \mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j.$$

根据几何的理由,在坐标变换下距离 $\mathrm{d}s$ 的值应保持不变. 然而,如果我们作变换(2)并把新的表达式写成形式

$$(7)\qquad \overline{\mathrm{d}s^2} = \sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}\,\mathrm{d}y^i \mathrm{d}y^j,$$

则 $g_{ij}(x^1, \cdots, x^n)$ 将不等于 $G_{ij}(y^1, \cdots, y^n)$(这时全体 y^i 的值和

全体 x^i 的值表示同一个点),而有关系式

$$G_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l}, \tag{8}$$

这时 g_{ij} 中所有的 x^i 要代以它们用所有 y^i 表示的值. 为了证明(8)式成立,我们只需在(6)式中代 dx^i 以

$$dx^i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k,$$

代 dx^j 以

$$dx^j = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} dy^l,$$

再提出 $dy^k dy^l$ 的系数. 这样,虽然 G_{kl} 并不就是 g_{kl},我们却知道如何从 g_{kl} 得到 G_{kl}. 基本二次形式的 n^2 个系数 g_{ik} 所形成的一组数是一个 2 阶协变张量,其变换规则由(8)给出.

Ricci 还引进了反变(contravarient)张量. 考虑前面用过的变换的逆变换. 若这个逆变换是

$$y^j = g_j(x^1, x^2, \cdots, x^n), \tag{9}$$

则

$$dy^j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k. \tag{10}$$

现在,如果把所有的 dx^k 看做构成一个张量的一组量,那么我们可以看到,当然 $dy^j \neq dx^j$,但是用(10)说明的变换规则,我们能够从所有的 dx^j 得到所有的 dy^j. 元素 dx^k 所成的组称为 1 阶反变张量,反变这个词是指在这个变换中出现的那些 $\partial y^j/\partial x^k$,同(8)和(5)中出现的导数 $\partial x^i/\partial y^j$ 相反. 这样,变换变量的各个微分就构成一个 1 阶反变张量.

相应地,我们能够有两个指标反变的 2 阶张量. 如果在变换(9)下,函数组 $A^{kl}(x^1, x^2, \cdots, x^n)(k, l = 1, 2, \cdots, n)$ 的变换规则是

$$\overline{A}^{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} A^{kl}, \tag{11}$$

则这个组是一个 2 阶反变张量. 此外,我们能够有所谓混合(mixed)张量,它的某些指标是协变的,而另一些指标是反变的. 例如,数组 A^k_{ij} $(i, j, k = 1, 2, \cdots, n)$ 表示一个混合张量,其中(按照 Ricci 的表示法)两个下标是协变的,一个上标是反变的. 元素为 A^k_{ij} 的张量称为 3 阶张量. 我们还能够有 r 阶的协变、反变和混合张量. 一个 r 阶的 n 维张量将有 n^r 个分量. 在第 37 章中的方程(21)表明 Riemann 的四指标记号 (rk, ih) 是一个 4 阶协变张量. 1 阶协变张量是一个向量. 对于一个向量, Levi-Civita 如下定义一个与之相关的反变向量:如果组 λ_i 是一个协变向量的分量,则组

$$\lambda^i = \sum_{k-1}^{n} g^{ik}\lambda_k$$

是一个相关的反变向量;g^{ik} 是一个商,它的分子是全部 g_{ik} 所形成的行列式中元素 g_{ik} 的余子式,它的分母是行列式的值 g.

张量有运算. 例如,如果我们有两个同类的张量,即有相同个数协变指标和相同个数反变指标的张量,我们就可以通过把它们具相同指标的分量相加而把这两个张量加起来. 例如

$$A^j_i + B^j_i = C^j_i.$$

必须而且能够证明,C^j_i 构成一个具协变指标 i 和反变指标 j 的张量.

可以把指标遍历 1 到 n 的任意两个张量相乘. 举一个例子就足以说明这个意思. 例如

$$A^h_i B^k_j = C^{hk}_{ij},$$

对于具有这 n^4 个分量 C^{hk}_{ij} 的张量,能够证明,它的下标是协变的而上标是反变的. 张量没有除法运算.

缩并运算(operation of contraction)可用下述例子来说明:给定张量 A^{hs}_{ir},定义量

$$B_i^h = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}^{hr},$$

这里在右边我们把分量加起来. 能够证明,数组 B_i^h 是一个具协变指标 i 和反变指标 h 的 2 阶张量.

总之,一个张量是一组函数(分量),它们相对于一个参考标架或坐标系而言是固定的,在坐标变换下它们按一定的规则变换. 一个坐标系中的每一个分量,是另一个坐标系中的所有分量的线性齐次函数. 如果在同一个坐标系中,一个张量的所有分量等于另一个张量的所有分量,那么它们在所有坐标系中都是相等的. 特别,如果在一个坐标系中的分量全为 0,那么在所有坐标系中也全为 0. 于是,张量的相等相对于参考系的变换是不变的. 一个张量在一个坐标系中所具有的物理的、几何的甚至纯数学的意义,在坐标变换下保持不变,所以在第二个坐标系中仍然具有这些意义. 这个性质在相对论中有重要的意义,在相对论中每一个观测者都有他自己的坐标系. 因为客观的物理规律是对所有观测者都成立的规律,所以为了反映同坐标系的这种无关性,这些规律都表示成张量.

利用掌握的张量概念,可以把 Riemann 几何中的许多概念重新用张量形式来表示. 或许最重要的就是空间的曲率. Riemann 的曲率概念(第 37 章第 3 节)可以用多种方式表示成一个张量. 近代的表示法使用 Einstein 所引进的求和约定,即如果在两个记号的乘积中有一个指标是重复的,那就理解成为求和. 例如

$$g^{ij}\lambda_j = \sum_{j=1}^{n} g^{ij}\lambda_j.$$

用这种记号表示曲率张量(参看第 37 章的[20]),有

$$R_{\lambda\mu\rho\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}[\mu\sigma, \lambda] - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}[\mu\rho, \lambda] + \{\mu\rho, \varepsilon\}[\lambda\sigma, \varepsilon] - \{\mu\sigma, \varepsilon\}[\lambda\rho, \varepsilon],$$

或等价地

$$R^i_{jlk} = \frac{\partial}{\partial x^l}\{jk, i\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\{jl, i\} - [\{sk, i\}\{jl, s\} - \{sl, i\}\{jk, s\}],$$

其中,方括号表示第一类 Christoffel 记号,大括号表示第二类 Christoffel 记号.这二种形式中的任何一种现在都叫 Riemann-Christoffel 曲率张量.由于在分量之间有某些关系(这些关系我们不准备叙述),这个张量的不同分量的数目是 $n^2(n^2-1)/12$. 当 $n=4$ 时(在广义相对论中就是这种情形),不同分量的数目是 20. 在二维 Riemann 空间中,只有一个不同的分量,它可以取为 R_{1212}. 这时 Gauss 的总曲率 K 可以证明是

$$K = \frac{R_{1212}}{g},$$

其中 g 是所有 g_{ij} 的行列式或 $g_{11}g_{22}-g_{12}^2$. 如果所有的分量全是零,空间便是 Euclid 的.

Ricci 从 Riemann-Christoffel 张量用缩并的方法得到一个张量,现在称为 Ricci 张量或 Einstein 张量.这个张量的分量 R_{jl} 是 $\sum_{k-1}^{n} R^k_{jlk}$. 当 $n=4$ 时,Einstein① 用这个张量表示他的空-时 Riemann 几何的曲率.

3. 协变微分

Ricci 还在张量分析②中引进了一种运算,后来他和 Levi-Civita称之为协变微分(covariant differentiation).这种运算早在 Christoffel 和 Lipschitz 的工作③中已经出现过. Christoffel 曾经给出一种方法(第 37 章第 4 节),从包含基本形式 ds^2 和函数

---

① *Zeit. für Math. und Phys.*, 62,1914,225~261.

② *Atti della Accad. dei Lincei, Rendiconti*, (4),3,1887,15~18 = *Opere*, 1, 199~203.

③ *Jour. für Math.*, 70,1869,46~70 和 241~245,以及 71~102.

$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的导数的微分不变量，用这种方法可以推出一个包含高阶导数的不变量. Ricci 认识到这个方法对于他的张量分析的重要性并采用了它.

Christoffel 和 Lipschitz 处理整个形式的协变微分，而 Ricci 根据他侧重于一个张量的全部分量的观点，对这些分量作协变微分. 例如，如果 $A_i(x^1, x^2, \cdots, x^n)$是一个向量或 1 阶张量的协变分量，$A_i$ 的协变导数不简单地是对 x^l 的导数，而是 2 阶张量

$$(12)\qquad A_{i,l}=\frac{\partial A_i}{\partial x^l}-\sum_{j=1}^{n}\{il, j\}A_j,$$

其中大括号表示第二类 Christoffel 记号. 同样地，如果 A_{ik} 是一个 2 阶协变张量的分量，则它关于 x^l 的协变导数是

$$(13)\qquad A_{ik,l}=\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l}-\sum_{j=1}^{n}\{il, j\}A_{jk}-\sum_{j=1}^{n}\{kl, j\}A_{ij}.$$

对于一个具有分量 A^i 的 1 阶反变张量，其协变导数 $A^i_{,l}$为

$$A^i_{,l}=\frac{\partial A^i}{\partial x^l}+\sum_{j=1}^{n}A^j\{jl, i\},$$

而这是一个 2 阶混合张量. 对于具有分量 A^h_i 的混合张量，其协变导数是

$$A^h_{i,l}=\frac{\partial A^h_i}{\partial x^l}-\sum_{j=1}^{n}A^h_j\{il, j\}+\sum_{j=1}^{n}A^j_i\{jl, h\}.$$

一个纯量不变量 ϕ 的协变导数是协变向量，其分量由 $\phi_i=\partial\phi/\partial x^i$ 给出. 这个向量叫做纯量不变量的梯度.

从纯数学观点来看，一个张量的协变导数乃是协变指标高一阶的张量. 这个事实是重要的，因为它使得在张量分析的范围内处理这种导数成为可能. 这个事实也有几何意义. 假定在平面中我们有一个常向量场，即在每点有一个向量的向量组，所有的向量有相同的大小和方向. 那么任何一个向量关于一个直角坐标系表出的所有分量也都是常数. 然而，这些向量关于极坐标系的分量(一个分量沿着向径，另一个垂直于向径)却是逐点而异的，因为在这种

坐标系中取分量所沿的方向是逐点而异的. 如果取这些分量关于坐标 r 和 θ 的导数,则由这些导数表示的变化率,反映了由于坐标系的变化,而不是由于向量本身的任何变化所产生的分量的变化. 在 Riemann 几何中所用的坐标系是曲线坐标系. 坐标系的曲线性的影响用第二类 Christoffel 记号(这里用大括号表示)给出. 一个张量的整个协变导数,既给出由原来张量所表示的基本(underlying)物理量或几何量的实际变化率,又给出基本坐标系的变化所引起的变化率.

在 Euclid 空间中 ds^2 总能化简为具有常系数的平方和,由于 Christoffel 记号为 0,协变导数简化为通常的导数. 还有,在一个 Riemann 度量中每个 g_{ij} 的协变导数都是 0. 这后一个事实是由 Ricci① 证明的,因而称为 Ricci 引理.

协变微分的概念使我们容易把向量分析中早已知道的、而刚才在 Riemann 几何中可以处理的概念的张量推广表示出来. 例如,如果 $A_i(x^1, x^2, \cdots, x^n)$是一个 n 维向量 A 的分量,则

$$\theta = \sum_{i,\,l=1}^{n} g^{il} A_{i,\,l} \tag{14}$$

是一个微分不变量,其中 g^{il} 在上面已经说明过. 当基本度量是在一直角坐标系中表出时(在 Euclid 空间中),除了 $i = l$ 的情形外常数 $g^{il} = 0$, 这时协变导数和通常的导数是一致的. 于是,(14)变成

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x^i},$$

而这就是三维 Euclid 空间中的所谓散度在 n 维 Euclid 空间中的类似物. 因此(14)也叫分量为 A_i 的张量的发散量. 用(14)还能证明:如果 A 是一个数量点函数,则 A 的梯度的发散量为

$$\Delta_2 A = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{g} A^l), \tag{15}$$

---

① *Atti della Accad. dei Lincei, Rendiconti*, (4),5,1889, 112～118 = *Opere*, 1,268～275.

其中
$$A^l = \sum_{i=1}^{n} g^{il} \frac{\partial A}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} g^{il} A_i.$$

$\Delta_2 A$ 的这个表达式也就是 Riemann 几何中 $\Delta_2 A$ 的 Beltrami 的表达式(第 37 章第 5 节).

虽然 Ricci 和 Levi-Civita 在 1901 年的文章大部分篇幅致力于建立张量分析技术,但是他们主要关心的是发现微分不变量.他们提出下述一般问题:给定一个正的二次微分形式 ϕ 和任意多个与之相关联的函数 S,要从 ϕ 的系数、函数组 S、和系数及函数的直到一定阶数 m 的导数,构造出所有的绝对微分不变量.他们给出了一个完全的解.为此,只需要求出一个系统的代数不变量,这个系统由下列元素组成:基本二次微分形式 ϕ,任意关联函数组 S 的直到 m 阶的协变导数,且当 $m > 1$ 时还有一个四线性形式 G_4,其系数是 Riemann 表达式 (ih, jk),以及它的直到 $m-2$ 阶的协变导数.

在他们文章的结尾,指出了如何把某些偏微分方程及物理规律表示成张量的形式,以便使它们与坐标系无关.这是 Ricci 所明确声明的目标.这样,在 Einstein 为了把物理规律表成数学不变式这个目的而使用张量分析之前许多年,张量分析就已经用于这一目的了.

4. 平 行 位 移

从 1901 年到 1915 年,张量分析的研究只限于极少数的数学家.然而,Einstein 的工作改变了这个局面.当时,在瑞士专利局中被聘为工程师的 Albert Einstein(1879—1955),以他狭义或特殊相对论[①]的报告极大地震动了科学界.1914 年,Einstein 接受邀

---

① *Annalen der Phys.*, 17, 1905, 891~921;在 A. Einstein 的 Dover 版"*The Principle of Relativity*"(1951)中可以找到英译本.

请，到柏林的普鲁士科学院，作为著名的物理化学家 Jacobus Van't Hoff(1852—1911)的继任者. 两年以后他发表了他的广义相对论①.

Einstein 关于物理现象相对性的革命性观点，在全世界的物理学家、哲学家和数学家中激起了强烈的兴趣. 数学家主要是被几何的本性所激动，因为 Einstein 发现这种本性在他理论的创建中是有用的.

涉及四维伪 Euclid 流形(空-时)的性质的狭义理论，其解释最好用向量和张量来讲，而涉及四维 Riemann 流形(空-时)的性质的广义理论，其解释需要使用与这种流形相联系的特殊张量计算. 幸而这种计算早已被发展，只是当时还没有受到物理学家的特别注意罢了.

实际上，Einstein 关于狭义理论的工作并没有用 Riemann 几何或张量分析②. 但是，狭义理论不涉及引力的作用. 于是 Einstein 开始从事于无引力的问题的研究，并通过在他的空-时几何中加进一种结构以说明它的效应，加进的结构使得物体自动地沿着这样一条轨道运动，这轨道与假设物体受引力作用时所运行的轨道相同. 在 1911 年他发表一种理论，这种理论认为引力是这样的：它在整个空间都具有相同的方向，他当然知道这种理论是不现实的. 直到这时 Einstein 只用了一些最简单的数学工具，并且甚至怀疑应用"高等数学"的必要性，他认为"高等数学"常常会使读者惊呆. 然而，在布拉格他同他的一位同事、数学家 Georg Pick 的讨论，使他的问题获得了进展，Pick 让他注意 Ricci 和 Levi-Civita 的数学理论. 在苏黎世，Einstein 遇见一位朋友，Marcel Grossmann(1878—1936)，后者帮助他学习这种理论；并且以此为基础，他成功地用公

---

① *Annalen der Physik*, 49, 1916, 769～822.

② 这度量是 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$，这是一个常曲率空间. 被平面 $t = \text{const.}$ 所截的任何截口是 Euclid 的.

式表示了他的广义相对论.

为了表示他的四维世界——三个空间坐标和一个表示时间的第四坐标,Einstein 用了 Riemann 度量

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij}\, dx_i\, dx_j, \tag{16}$$

其中 x_4 表示时间. 这里 g_{ij} 的选取要能反映各个区域中物质的存在. 并且,因为这个理论涉及到长度、时间、质量和其他物理量由不同的观测者进行确定的问题,而这些观测者彼此相对地以任意的方式运动,所以空-时中的"点"要用不同的坐标系表示,一个坐标系隶属于一个观测者. 一个坐标系同另一个坐标系的关系由变换

$$x_i = \phi_i(y_1, y_2, \cdots, y_4), \ (i = 1, \cdots, 4)$$

给出. 自然界的规律应当是对所有的观测者都相同的那些关系或表达式. 因此,它们是在数学意义下的不变量.

从数学的观点来看,Einstein 的工作的重要性,就像已经指出的,在于促使对张量分析和 Riemann 几何的兴趣的增长. 从相对论之后,张量分析中的第一个革新归于 Levi-Civita. 在 1917 年他改进了 Ricci 的一个想法,引进了①向量的平行位移(parallel displacement)或平行转移(parallel transfer)的概念. 同一年 Gerhard Hessenberg 也独立地提出了这个思想②. 在 1906 年 Brouwer 已经对常曲率曲面引进了这个概念. 平行位移概念的目的是要说明一个 Riemann 空间中平行向量是什么意思. 这样做的困难可以这样看出:考虑一球的表面,把这个曲面本身看成一个空间,曲面上的距离由大圆弧给出,这样球面就是一个 Riemann 空间. 如果一个向量,例如起点在一个纬度圆上并指向北方(这个向量将与球面相切),让它的起点沿着圆周移动并且在 Euclid 三维空间中保持

---

① *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 42,1917,173～205.

② *Math. Ann.*, 78,1918,187～217.

与自己平行,则当它在环绕圆周的半途中时,它不再同球相切,从而它不在那个 Riemann 空间中.为了得到适合于 Riemann 空间的向量平行性概念,就要推广 Euclid 的平行性概念,但是在推广的过程中要失去某些熟悉的性质.

Levi-Civita 用以定义平行转移或平行位移的几何概念,在曲面的情形是容易理解的.考虑曲面上的一条曲线 C,让一个一端在 C 上的向量在下述意义下作跟它自身平行的移动:在 C 的每一点有一个切平面,这族平面的包络是一个可展曲面,而当这个可展曲面在一个平面上展开时,沿着 C 平行的向量在 Euclid 平面上就真的是平行的.

Levi-Civita 推广这个思想以适合 n 维 Riemann 空间.在 Euclid 平面上下述事实成立:当一个向量的起点沿着一直线——平面上的测地线——作平行于它自己的移动时,这个向量同这直线总是交成相同的角.根据这一点,在一个 Riemann 空间中,平行性定义如下:当空间中的一个向量作平行于它自身的移动,使起点沿一条测地线运动时,这个向量同测地线(测地线的切线)必须仍然交成相同的角.特别,测地线的一条切线沿这测地线移动时保持同它自己平行.按照定义,这平移的向量仍旧有相同的大小.这里理解为这个向量始终保持在 Riemann 空间中,即使这 Riemann 空间被嵌在一个 Euclid 空间中也是这样.平行转移的定义还要求:当两个向量每一个都沿着同一条曲线 C 作平行于自己的移动时,它们之间的夹角保持不变.一般地说,沿一任意闭曲线 C 的平行转移,初始向量与最后向量通常不会有相同的(Euclid)方向.方向的偏差将与道路 C 有关.例如,考虑一个向量,它从球的一个纬度圆上一点 P 出发,沿一子午线与球相切.当它沿着圆作平行转移时,它将终止于 P 点并切于曲面;但是如果 ϕ 是 P 的余纬度(co-latitude),那么这向量最后将与原向量交成一个角 $2\pi-2\pi\cos\phi$.

如果用 Riemann 空间中沿一曲线平行位移的一般定义,就得到一个解析条件.沿一曲线平行转移的反变向量的分量 X^{α} 满足微分方程(省略了求和号)

$$(17)\qquad \frac{\mathrm{d}X^{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\{\beta r,\alpha\}X^{\beta}\frac{\mathrm{d}u^{\gamma}}{\mathrm{d}t}=0,\ \alpha=1,2,\cdots,n,$$

其中事先假定 $u^{i}(t)$, $i=1, 2, \cdots, n$ 定义一条曲线.对于协变向量 X_{α},条件是

$$(18)\qquad \frac{\mathrm{d}X_{\alpha}}{\mathrm{d}t}-\{\alpha l, j\}X_{j}\frac{\mathrm{d}u^{l}}{\mathrm{d}t}=0,\ \alpha=1,2,\cdots,n.$$

这些方程可以用来定义沿任何一条曲线 C 的平行转移.由一个定点 P 处的所有分量的值唯一确定的解,是在 C 的每一点有值的向量,并且由定义,它和 P 点的初始向量平行.方程(18)说明 X_{α} 的协变导数是 0.

一旦引进了平行位移的概念,就可以用它来描述一个空间的曲率,特别是用无穷小向量以无穷小步长作平行位移所带来的变化来描述.即使在 Euclid 空间中,平行性也是曲率概念的基础;因为一个无穷小弧的曲率依赖于走遍这弧的切向量的方向的变化.

5. Riemann 几何的推广

Riemann 几何在相对论中的成功运用使数学界恢复了对这门学科的兴趣.然而,Einstein 的工作提出了一个甚至更为广泛的问题.他用 g_{ij} 的适当函数使空间中的质量的引力效应具体化.结果,他的空-时中的测地线经证明恰恰就是物体自由运动的轨道,例如正像地球围绕太阳运转一样.与 Newton 力学中的情况不同,为了解释运动的轨道不需要引力.重力的消失提出了另一个问题,那就是用空间的度量去解释电荷的吸力和斥力.这样一种成就将会给

重力和电磁学提供一种统一的理论. 这个工作已经导致 Riemann 几何的种种推广,这些推广总称为非 Riemann 几何.

在 Riemann 几何中, ds^2 把空间中的点与点互相联系起来. 它通过规定点与点之间的距离来指明空间中的点彼此是怎样联系的. 在非 Riemann 几何中,点与点之间的联系不一定要用依赖于一个度量的方式来规定. 这些几何的差异是很大的,并且每一种几何都有像 Riemann 几何本身那样广阔的发展. 因此,我们将只给出这些几何中的基本概念的某些例子.

这方面的工作主要是由 Hermann Weyl① 开创的,他引进的那类几何通称为仿射联络空间的几何. 在 Riemann 几何中,一个张量的协变导数本身是一个张量,其证明只依赖于形如

$$(19)\qquad \overline{\{ik,\ h\}} = \{ab,\ j\}\frac{\partial x^a}{\partial y^i}\frac{\partial x^b}{\partial y^k}\frac{\partial y^h}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^i \partial y^k}\frac{\partial y^h}{\partial x^j}$$

的关系,其中左边是在坐标从 x^i 到 y^i 的变换下 $\{ab,\ j\}$ 的变换式. 这些关系被 Christoffel 记号所满足,而这些记号本身是用基本形式的系数定义的. 考虑用 x^i 的函数 L^i_{jk} 和 y^i 的函数 $\overline{L}^i_{jk}$ 来代替这些记号,这些函数满足相同的关系(19),但是只规定作为给定的函数而同基本二次形式无关. 与一个空间 V_n 相联系并具有变换性质(19)的一组函数 L^i_{jk},说是构成一个仿射联络(affine connection). 这些函数称为这个仿射联络的系数,而空间 V_n 叫做仿射联络空间或仿射空间. Riemann 几何是仿射联络空间几何的一种特例,在其中仿射联络的系数是第二类 Christoffel 记号,并且是由空间的基本张量导出. 给定了所有的 L -函数,可以引进类似于 Riemann 几何中的一些概念,诸如协变微分、曲率和其他概念等. 然而,在这种新的几何里,不能说向量的大小那样的话.

在一个仿射联络空间中,一条曲线,如果它的所有切线关于这

① *Mathematische Zeitschrift*, 2, 1918, 384 ~ 411 = *Ges. Abh.*, 2, 1~28.

条曲线都是平行的(在该空间的平行位移的意义下),就称它为这空间的一条道路(path).这样,道路乃是 Riemann 空间的测地线的一种推广.具有相同 L-函数组的所有仿射联络空间有相同的道路.这样,仿射联络空间的几何便不需要 Riemann 度量. Weyl 从空间的性质导出了 Maxwell 方程,但是这个理论整个说来并没有与其他已经确定的事实相一致.

另一种非 Riemann 几何称为道路几何,将归于 Luther P. Eisenhart(1876—1965)和 Veblen①,处理办法稍有不同.它从 n^3 个给定的函数 $\Gamma^i_{\lambda\mu}(x^1, \cdots, x^n)$出发. n 个微分方程的方程组

$$(20) \qquad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \sum_{\lambda,\mu} \Gamma^i_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = 0, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

确定一族称为道路的曲线,方程中的 $\Gamma^i_{\lambda\mu} = \Gamma^i_{\mu\lambda}$. 这是几何的测地线.(在 Riemann 几何中,方程(20)正好是测地线的方程.)给定了刚才所述意义下的测地线,就能用完全类似于 Riemann 几何中的做法建立道路几何.

Riemann 几何的另一种不同的推广,是 Paul Finsler(1894—1970)1918 年在格丁根他的一篇(未发表)论文中提出来的.在这种几何中,Riemann 度量 ds^2 代之以坐标及其微分的更一般的函数 $F(x, dx)$. 对 F 要加一些限制以保证极小化积分 $\int F(x, (dx/dt))dt$ 的可能性,从而得到测地线.

推广 Riemann 几何的概念以便把电磁现象和引力现象结合起来的尝试,至今仍未成功.然而,数学家还是继续在抽象几何方面从事工作.

参考书目

Cartan, E.: "Les récentes généralisations de la notion d'espace", *Bull. des Sci.*

① *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 8,1922,19～23.

Math., 48, 1924, 294~320.

Pierpont, James: "Some Modern Views of Space", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 32, 1926, 225~258.

Ricci-Curbastro, G.: *Opere*, 2 vols., Edizioni Cremonese, 1956~1957.

Ricci-Curbastro, G., 和 T. Levi-Civita: "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", *Math. Ann.*, 54, 1901, 125~201.

Thomas, T. Y.: "Recent Trends in Geometry", *Amer. Math. Soc. Semicentennial Publications* Ⅱ, 1938, 98~135.

Weatherburn, C. E.: *The Development of Multidimensional Differential Geometry*, Australian and New Zealand Association for the Advancement of Science, 21, 1933, 12~28.

Weitzenbock, R.: "Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differential-invarianten", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1902~1927, Ⅲ, Part Ⅲ, El, 1~71.

Weyl, H.: *Mathematische Analyse des Raumproblems* (1923), Chelsea (reprint), 1964.

第 49 章

抽象代数的出现

> 也许我可以并非不适当地要求获得数学上的亚当这一称号，因为我相信数学理性创造物由我命名的(已经流行通用)比起同时代其他数学家加在一起还要多.
>
> J. J. Sylvester

1. 19 世纪历史背景

正如在 20 世纪中发展起来的许多其他数学分支一样，抽象代数的基本概念和目标在 19 世纪就已经确定下来了. 19 世纪有成打的发明创造表明了这样一个事实：代数能够处理不一定是实数或复数的对象所组成的集合. 向量、四元数、矩阵、二次型如 $ax^2 + bxy + cy^2$、各种形式的超复数、变换、替换或置换等等，都是这种对象的例子，这些对象在各自集合所特有的运算和运算规律下联系起来. 代数数方面的工作虽然处理的是某些类型的复数，却使各种代数涌现出来，因为它证实了，只有某些性质能适用于这些类型的复数而不适用于整个复数体系.

这些不同类型的对象，是按照它们的运算特性互相区别的；我们已经看到，群、环、理想和域这样一些概念，以及子群、不变子群和扩域这样一些从属的概念，它们的引进是为了识别各种集合. 可是，19 世纪关于各种代数的著作，几乎全是讨论上述的具体体系的. 仅在 19 世纪的最后 10 年，数学家才认识到，对许多不相联系的代数抽出它们共同的内容来进行综合的研究，可以提高效率到一个新的水平. 例如，置换群，Gauss 研究过的二次型组成的群，加法的超复数系，以及变换群，通过如下的说法，它们就可以在统一

的形式下进行探讨:即它们都是由一些元素或对象组成的集合,服从一种运算,而这种运算的特性仅仅由某些抽象性质来规定,其中最主要的一条是:运算作用在该集合的任两元素上就产生这集合的第三个元素.用这种观点去处理构成环和域的各种集合,可以获得同样的便利.这种对抽象集合行之有效的想法,虽然是走在Pasch,Peano,Hilbert的公理体系之前,但是后者的发展无疑地加速了人们对代数抽象方法的承认.

因而,抽象代数产生于对所有各种类型的代数做有意识的研究之时.这些代数,就其个体讲,不仅是具体的,而且是为特殊领域服务的.例如,置换群在方程论中就是这样.通过抽象而获得可用于许多特殊领域的结果,这种好处很快就被忽视了,而抽象结构的研究和它们性质的推导却变成了它本身的目的.

抽象代数曾经是20世纪人们喜爱的领域之一,而到今天范围广阔.我们只讲这个课题的起源,并且指出继续深入研究几乎具有无限的机会.讨论这个领域里已有的成就,遇到的最大困难就是专门名词.不同的作者引用不同的名词,而且一个名词从一个时期到另一个时期会改变其含义,除去这些通常的困难以外,抽象代数的特征和缺陷是:引进成百个新名词.概念上的每一个很小的变化,却是用一个新的而且常常是堂皇响亮的名词来显示区别的.把用过的名词编成一部完全的字典将成一大本书.

2. 抽象群论

第一个要引进并加以探讨的抽象结构便是群.抽象群论的很多基本思想,至少可以回溯到1800年,就能或隐或现地找到踪迹.既然抽象理论是存在的,历史学家喜爱的一种活动,便是去追索有多少抽象概念预伏在Gauss,Abel,Galois,Cauchy,以及成打的其他作者的具体著作中.我们不打算费篇幅去重新考察这段历史.唯

一值得提及的有意义的一点是，抽象的观念一经获得，那么对于抽象群论的创始人来说，重温这些过去的著作以得到概念和定理，是相对地容易的.

在考察抽象群概念的发展之前，可以指出过去人们是朝着什么方向努力的. 今天通常用的群的一个抽象定义是：一些元素（个数有限或无限）组成的集合，和一种运算，当对集合中任两元素施行这个运算时，所得结果仍然是这集合中的一个元素（封闭性）. 这个运算是结合的；集合中存在一个元素，设为 e，使得对于这集合中任何一个元素 a 恒有 $ae = ea = a$；而且对集合中每一元素 a，存在一个逆元素 a'，使得 $aa' = a'a = e$. 若这运算是交换的，这个群就叫交换群或 Abel 群，这时这个运算叫做加法，用"＋"表示. 这时元素 e 记作 0，叫做零元素. 如果这运算是不交换的，则叫做乘法，并把元素 e 记作 1，叫做单位元素.

抽象群的概念及其性质是逐渐地揭示出来的. 我们可以回忆一下（第 31 章第 6 节），Cayley 曾经在 1849 年提出过抽象群，但这个概念的价值当时没有被认识到. 远远超越时代的 Dedekind① 在 1858 年给有限群下了一个抽象的定义，这个群是他从置换群引导出来的. 他又在 1877 年②注意到，他的代数数模（即对模中任两元素 α, β, $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 仍属于这个模）可以推广到元素并不限于代数数而且运算可以普遍化，但必须要求每一元素有一个逆元素，并且这运算是可交换的. 这样他就提出了一个抽象的有限交换群. Dedekind 对抽象的价值的了解是值得注意的. 他在他的代数数理论的著作中清楚地看到了理想（ideal）和域（field）这种结构的价值. 他是抽象代数的卓有成效的创始人.

Kronecker③ 从 Kummer 的理想数的工作出发，也给了一个

---

① *Werke*, 3,439～446.

② *Bull. des Sci. Math.*, (2),1,1877,17～41,特别 p. 41. = *Werke*, 3,262～296.

③ *Monatsber. Berliner Akad.*, 1870,881～889 = *Werke*, 1,271～282.

相当于有限 Abel 群的抽象定义,类似于 Cayley 在 1849 年的概念. 他规定了抽象的元素,抽象的运算,它的封闭性,结合性,交换性,以及每一元素的逆元素的存在和唯一. 接着他证明了一些定理. 在任一元素 θ 的各个方幂中,存在一个方幂等于单位元素 1. 如果 ν 是使 θ^ν 等于单位元素的最小正指数,则对于 ν 的每个因子 μ,就有一个元素 ϕ 使得 $\phi^\mu = 1$. 如果 θ^ρ 和 ϕ^σ 都等于 1 而 ρ 和 σ 分别是使这关系成立的最小正整数,而且它们互素,则 $(\theta\phi)^{\rho\sigma} = 1$. Kronecker 还给出了现在所谓的基定理(basis theorem)的第一个证明. 存在由有限多个元素构成的基本组 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$,使得乘积

$$\theta_1^{h_1}\theta_2^{h_2}\theta_3^{h_3}\cdots,\ h_i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n_i,$$

表示群中全部元素,而且表示是唯一的. 对应于 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$ 的最小可能值 $n_1, n_2, \cdots$(即使 $\theta_i^{n_i} = 1$),使得每个 n_{i+1} 整除 n_i,而且乘积 $n_1n_2n_3\cdots$ 等于群的元素个数 n. 因而 n 的全部素因子都在 n_1 中出现.

1878 年 Cayley 又写了四篇关于有限抽象群的文章①. 跟他 1849 年和 1854 年的文章一样,在这些文章中他强调,一个群可以看作一个普遍的概念,毋需只限于置换群;虽然,他指出,每个有限群可以表示成一个置换群. Cayley 的这几篇文章比他早期的文章有更大的影响,因为抽象群比置换群包含更多的东西,这种认识在当时已经成熟了.

Frobenius 和 Ludwig Stickelberger(1850—1936)合作的一篇文章②把认识又推进了一步,认为抽象群的概念应包含同余,Gauss 的二次型合成以及 Galois 的置换群. 他们提到无限群.

虽然 Eugen Netto 在他的《置换理论及其对代数的应用》(*Sub-*

---

① *Math. Ann.*, 13, 1878, 561～565; *Proc. London Math. Soc.*, 9, 1878, 126～133; *Amer. Jour. of Math.*, 1, 1878, 50～52 和 174～176; 全在他的 *Collected Math. Papers*, Vol. 10 中.

② *Jour. für Math.*, 86, 1879, 217～262 = Frobenius, *Ges. Abh.*, 1, 545～590.

stitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra, 1882)一书中只限于讨论置换群,但他的概念和定理的措词则已认识到概念的抽象性. 超出他的前人所得到的结果的总和,Netto 探讨了同构(isomorphism)和同态(homomorphism)的概念. 前者意指两个群之间的一个一一对应,使得如果第一个群的三个元素 a, b, c 满足 $a\cdot b=c$,则第二个群中的对应元素 a', b', c'满足 $a'\cdot b'=c'$. 而同态则是一个多对一的对应,在其中从 $a\cdot b=c$ 仍可推出 $a'\cdot b'=c'$.

到了 1880 年间,关于群的新概念引起了人们的注意. 在 Jordan 关于置换群的著作的影响下,Klein 在他的埃尔兰根纲领(Erlanger Programm)(第 38 章第 5 节)中指出,无限的变换群,即具有无限多个元素的群,可以用来对几何进行分类. 而且这些群在如下意义下是连续的,即任意小的变换包含在任何群中,或者换句话说,变换中出现的参数可以取任何实数值. 例如,在表示绕轴旋轴的变换群中,旋转角 θ 可以取一切实数值. Klein 和 Poincaré 在他们的自守函数工作中曾经用到其他类型的无限群,即离散群或不连续群(第 29 章第 6 节).

1870 年左右,曾经同 Klein 工作过的 Sophus Lie 着手研究连续变换群的概念,不过不是为了几何分类而是为了其他目的. 他观察到用较老方法可积分出来的常微分方程,其大多数在某些类型的连续变换群下是不变的. 因而他想到用它能够阐明微分方程的解,并将它们分类.

1874 年 Lie 引进了他的变换群的一般理论①. 这样的一个群可表成如下形式:

(1) $\quad x_i'=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n), \; i=1, 2, \cdots, n,$

其中 f_i 对 x_i 和 a_i 都是解析的. x_i 是变量而 a_i 是参量,$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示 n 维空间中的一点. 变量和参量都取实数值或复数

① *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1874,529~542 = *Ges. Abh.*, 5,1~8.

值.例如在一维的情况,下面这样一类变换就是一个连续群:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d},$$

其中 a, b, c, d 取实数值.用(1)表示的群叫做有限的,这里有限一词是指参数的个数有限.变换的个数当然是无限的.一维的情形是一个三参数变换群,因为变换仅仅和 a, b, c 对 d 的比值有关.在一般情形,变换

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n),$$
$$x_i'' = f_i(x_1', \cdots, x_n', b_1, \cdots, b_n)$$

的乘积是

$$x_i''' = f_i(x_1, \cdots, x_n, c_1, \cdots, c_n),$$

其中 c_i 是诸 a_i 和 b_i 的函数.对一个变量的情形,Lie 把它叫做单扩充流形;对于 n 个变量的情形,他把它叫做任意扩充流形.

1883 年,Lie 在另一篇关于连续群的文章中也引进了无限连续群,这篇文章发表在一个没有名气的挪威杂志上①.这种群不是由形如(1)的一组方程而是借助一组微分方程来定义的.所得的变换并不依赖于有限多个连续的参量,而是依赖于任意的函数.没有抽象群概念和这些无限连续群相当,因而,对它虽有大量的著作,我们这里就不去讨论了.

考察一下下面的事实也许是有益的.Klein 和 Lie 在他们初期的工作中,定义一个变换群为只具有封闭性的群.至于其他性质,如每个元素的逆元素的存在性,则可以根据变换的性质建立起来;或者,如像结合律的情形,则作为变换的一条自明的性质来使用.Lie 在他的工作过程中认识到,每个元素的逆元素的存在性应该作为一条公设放在群的定义中.

到了 1880 年间,已经知道有四种主要类型的群.它们是有限阶不连续群(置换群是其典型例子);无限不连续(或离散)群(如在自守函数理论中出现的群);有限连续 Lie 群(Klein 的变换群以及

---

① *Ges. Abh.*, 5,314~360.

更一般的解析变换 Lie 群是其典型例子)；由微分方程定义的无限连续 Lie 群.

群论的三个主要来源——方程式论、数论和无限变换群——由于 Walter von Dyck(1856—1934)的工作而都被纳入抽象群概念之中. Dyck 受 Cayley 的影响，是 F. Klein 的学生. 在 1882 年和 1883 年[①]他发表了关于抽象群的文章，其中包含离散群和连续群. 他的群的定义是：一个由元素组成的集合，一种满足封闭性的运算，结合律成立但不要求交换性，每个元素存在一个逆元素.

Dyck 很明确地运用了一个群的生成元(generator)这一概念，这在 Kronecker 的基定理中是隐晦的，而在 Netto 关于置换群的著作中是明显的. 生成元指的是群的一个固定子集，它们是独立的，使得群中每个元素可以表成这些生成元和它们的逆的方幂的乘积. 当生成元之间没有任何约束时，这个群就叫做一个自由群. 如果 A_1, A_2, …是一组生成元，则表达式

$$A_1^{\mu_1}A_2^{\mu_2}\cdots$$

叫做一个字(word)，其中 μ_i 为正或负整数. 在生成元之间可以存在一些关系，这种关系可以取如下的形式：

$$F_i(A_i)=1;$$

就是说，一个字或字的组合等于群的单位元素. Dyck 接着指出，关系的出现意味着该自由群 G 的一个不变子群和一个商群 $\overline{G}$. 在他 1883 年的文章中，他把抽象群理论应用于置换群，有限旋转群(多面体的对称)，数论中出现的群以及变换群.

一个抽象群的独立公理系统由 Huntington[②], E. H. Moore[③], Leonard E. Dickson(1874—1954)[④]给出过. 这几种以及

---

① *Math. Ann.*, 20, 1882, 1～44 和 22, 1883, 70～118.

② *Amer. Math. Soc. Bull.*, 8, 1902, 296～300 和 388～391，和 *Amer. Math. Soc. Trans.*, 6, 1905, 181～197.

③ *Amer. Math. Soc. Trans.*, 3, 1902, 485～492 和 6, 1905, 179～180.

④ *Amer. Math. Soc. Trans.*, 6, 1905, 198～204.

其他公理系统相互间的差别并不大.

在完成群的抽象概念之后,数学家们转到求证抽象群的一些定理,他们都是从具体情形的已知结果中启发得来的. 例如 Frobenius① 证明了关于有限抽象群的 Sylow 定理(第 31 章第 6 节). 有限群的阶是指它包含的元素的个数,如果一个有限群的阶能被一个素数 p 的方幂 p^ν 整除,则它恒包含一个 p^ν 阶子群.

除了寻找一些具体群,其性质对于抽象群可能成立以外,许多人给抽象群直接引进新概念. Dedekind② 和 George A. Miller (1863—1951)③探讨了非 Abel 群,其中每个子群都是正规(不变)子群. Dedekind 在他 1897 年的文章中和 Miller④ 都引进了换位子(commutator)和换位子群的概念. 如果 s, t 是群 G 的任何两个元素,则称元素 $s^{-1}t^{-1}st$ 为 s 和 t 的换位子. Dedekind 和 Miller 两人用这个概念证明了一些定理. 例如,群 G 的元素对(有序的)全体的所有换位子集合生成 G 的一个不变子群. 一个群的自同构是指群的元素到它们自身的一一对应,使得如果 $ab = c$, 则 $a'b' = c'$. Hölder⑤ 和 E. H. Moore⑥ 在一组抽象的基上研究了群的自同构.

抽象群理论的进一步发展在许多方向继续进行. 其中之一是由 Hölder 从置换群继承过来的,写在他的 1893 年的文章中,问题是找出具有给定阶的群的全体. 这个问题 Cayley 在他的 1878 年的文章中⑦也曾提到过. 这个问题一般还解决不了,因而只研究了一些特殊的阶,如 p^2q^2 阶,其中 p, q 都是素数. 与它相关的一个

---

① *Jour. für Math.*, 100,1887,179～181 = *Ges. Abh.*, 2,301～303.

② *Math. Ann.*, 48,1897,548～561 = *Werke*, 2,87～102.

③ *Amer. Math. Soc. Bull.*, 4,1898,510～515 = *Coll. Works*. 1, 266～269.

④ *Amer. Math. Soc. Bull.*, 4,1898,135～139 = *Coll. Works*, 1, 254～257.

⑤ *Math. Ann.*, 43,1893,301～412.

⑥ *Amer. Math. Soc. Bull.*, 1,1895,61～66 和 2,1896,33～43.

⑦ *Coll. Math. Papers*, 10,403.

问题是,各种次数的非传递群,本原群和非本原群的次数问题(一个置换群的次数是指置换群中文字的个数).

另一研究方向是:确定复合群或可解群和单群(单群是指这样的群,它除单位群和自身外没有其他不变子群). 这个问题当然是来自 Galois 理论. Hölder 在引进因子群①的抽象概念之后,讨论了单群②和复合群③. 其结果中有:一个素数阶循环群是单群,n 个 ($n \geqslant 5$) 文字的全部偶置换组成的交代群是单群. 还发现了许多其他有限的单群.

至于可解群,Frobenius 有几篇文章研究这问题. 例如④,他发现,阶不能被一个素数的平方整除的群全都是可解的⑤. 研究何种群是可解的,这是确定一个已知群的结构这种更广泛的问题的一部分.

Dyck 在他 1882 年和 1883 年的文章中引进了用生成元和生成元之间的关系去定义一个群的抽象观点. 假设一个已知群是用有限多个生成元和关系来定义的,按照 Max Dehn⑥ 的说法,恒等或字的问题是:确定任何一个"字"或元素的乘积是否等于单位元素. 可以给定任何一组关系,因为至少只有一个单位元素的平凡群就满足这组关系. 要确定一个由生成元和关系给出的群是不是一个平凡群,这个问题本身却是不平凡的. 事实上还没有一个有效的方法. 当这种关系仅由一个定义关系组成时,Wilhelm Magnus (1907—1990)证明了字的问题是可解的⑦. 但是一般问题却是不

---

① *Math. Ann.*, 34,1889,26~56.

② *Math. Ann.*, 40,1892,55~88,和 43,1893,301~412.

③ *Math. Ann.*, 46,1895,321~422.

④ *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1893,337~345,和 1895,1027~1044 = *Ges. Abh.*, 2,565~573, 677~694.

⑤ 近来一个重大的成果已由 Walter Feit(1930—)和 John G. Thompson (1932—)得到(*Pacific Jour. of Math.*, 13, Part 2, 1963,775—1029). 全部奇数阶群都是可解的. Burnside 在 1906 年曾把这作为一个猜想提出过.

⑥ *Math. Ann.*, 71,1911,116~144.

⑦ *Math. Ann.*, 106,1932,295~307.

可解的①.

普通群论中另一个尚未解决的著名问题是 Burnside 问题. 任何有限群有这样的性质,即它是有限生成的而且每一个元素是有限阶的. 1902 年② William Burnside(1852—1927)问道,是否逆定理成立;就是说,如果一个群 G 是有限生成而且每一个元素是有限阶的,G 就是有限的吗? 这个问题曾经引起许多人的注意,而获得解决的却仅仅是它的一些特殊情形. 还有另一个问题,即同构问题,是要确定两个由生成元和关系定义的群何时同构.

群论中的惊人转变之一是在群的抽象理论开创之后不久,数学家为了获得抽象群的某些结果,转而借助更具体的代数来表示群. Cayley 在他 1854 年的文章中指出,任何有限抽象群能够用一个置换群来表示. 我们也已经提到过(第 31 章第 6 节),Jordan 在 1878 年引进了置换群的线性变换表示. 这些变换或它们的矩阵,业已证明是抽象群的最有效的表示法,这种表示叫做线性表示.

一个群 G 的矩阵表示,是 G 的元素 g 到一组固定阶的非奇异方阵 $A(g)$ 的一个同态映射,其中矩阵的元素是复数. 这个同态意味着

$$A(g_i \cdot g_j) = A(g_i) \cdot A(g_j)$$

对于 G 的所有元素 g_i, g_j 成立. 一个群有许多矩阵表示,因为矩阵的阶(行数或列数)可以变更,并且即使对于一个给定的阶,对应关系也可以变更. 我们还可以把两个表示加起来. 如果对于 G 的每一个元素 g,A_g 是一个 n 阶表示的对应矩阵而 B_g 是另一个 n 阶表示的对应矩阵,则

$$C_g = \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{pmatrix}$$

---

① 这个已于 1955 年由 P. S. Novikov 加以证明,见 *Amer. Math. Soc. Trans.*, (2),9,1958,1～122.

② *Quart. Jour. of Math.*, 33,230～238.

就是 G 的第三个表示,它叫做上述两个表示的和.同样,如果

$$E_g = \begin{pmatrix} B_g & C_g \\ 0 & D_g \end{pmatrix}$$

是一个表示,而且对于每一个 $g \in G$ 来说,B_g 和 D_g 分别为 m 阶和 n 阶非奇异矩阵,那么 B_g 和 D_g 也是 G 的表示,阶比 E_g 的低. E_g 叫做分级表示.分级表示以及与一个分级表示等价($F^{-1}E_gF$ 和 E_g 叫做等价的,其中 F 是与 E_g 同阶的非奇异矩阵而且与 g 无关)的表示叫做可约的.一个不与任何分级表示等价的表示叫做不可约的.由 n 个变量的一组线性变换组成的不可约表示其基本含义是:它是一个同态的或同构的表示而且不存在数目少于 n 的 m 个线性函数(是给定的 n 个变量的线性函数)使得在上述不可约表示中的每个线性变换下,这 m 个线性函数的每一个仍然变成这 m 个线性函数的线性组合.一个表示,如果它等价于一些不可约表示的和,则叫做完全可约的.

每一个有限群有一个特别的表示叫做正则表示.假设群的元素用脚标记作 $g_1, g_2, \cdots, g_n$.设 a 是 g_i 的任一个.我们考虑由 a 确定一个 $n \times n$ 矩阵如下.设 $ag_i = g_j$.于是在这个矩阵的 (i, j) 位置上放一个 1,对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 和固定的 a 都这样做,然后在其他位置都放上 0.这样就得到一个由 a 确定的矩阵.于是对于群的每一个元素 g 都有这样一个矩阵与它对应,这些矩阵组成的集合就叫做这群的一个左正则表示.同样作右乘 $g_ia = g_k$,我们得到一个右正则表示.重排群的元素 g,就得到其他正则表示.正则表示的概念是由 Charles S. Peirce 于 1879 年引进的①.

把置换群用形如

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \ i = 1, 2, \cdots n$$

的线性变换来表示,是由 Jordan 首创的,后来在 19 世纪末和 20

---

① *Amer. Jour. of Math.*, 4, 1881, 221~225.

世纪初由 Frobenius, Burnside, Theodor Molien(1861—1941)和 Issai Schur(1875—1941)推广到一切有限抽象群的表示的研究. Frobenius[①] 对有限群引进了可约和完全可约表示的概念,而且证明了一个正则表示包含所有不可约表示. 他在 1897 年到 1910 年间发表的其他文章中(有些与 Schur 的工作相联系)还证明了许多其他的结果,其中有:仅存在少数几个不可约表示,其他所有表示都是由它们组合成的.

Burnside[②] 给出了另一个主要结果,即要一个群可约,n 个变量的线性变换群的系数所应满足的一个必要充分条件. 由线性变换组成的任何有限群是完全可约的,这个事实首先由 Heinrich Masohke(1853—1908)证明[③]. 有限群的表示理论已经引出了抽象群的一系列重要定理. 在本世纪的第二个四分之一里,表示理论已经推广到连续群,但是这方面的发展不准备在这里讲.

群特征标(group character)的概念有助于群表示的研究. 这个概念可以回溯到 Gauss, Dirichlet 和 Heinrich Weber(下页注 2)的工作. Dedekind 在 Dirichlet 的著作《数论讲义》(*Vorles-ungen über Zahlentheorie*, 1879)第三版上对 Abel 群的特征标作了一般的描述. 一个群 G 的特征标是一个定义在群 G 的所有元素 s 上的函数 $\chi(s)$,函数值处处不为 0,并且 $\chi(ss') = \chi(s)\chi(s')$. 两个特征标是互不相同的,如果至少对群的一个 s 有 $\chi(s) \neq \chi'(s)$.

这个概念由 Frobenius 推广到一切有限群. 开始的定义叙述颇为复杂[④],他后来给了一个较简单的定义[⑤],成为现在的标准形式. 特征标函数是群的一个不可约表示的矩阵的迹(即主对角线上

---

① *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1897, 994~1015 = *Ges. Abh.*, 3, 82~103.

② *Proc. London Math. Soc.*, (2), 3, 1905, 430~434.

③ *Math. Ann.*, 52, 1899, 363~368.

④ *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1896, 985~1021 = *Ges. Abh.*, 3, 1~37.

⑤ *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1897, 994~1015 = *Ges. Abh.*, 3, 82~103.

元素的和). 这一概念后来由 Frobenius 和其他人应用到无限群上.

特别,群特征标可用来确定一个已知的有限群能够用线性变换群来表示所需要的变量的最小数目. 对于交换群来说,群特征标还可以确定全部子群.

显示出对时尚的通常的热忱,19 世纪末 20 世纪初的许多数学家都以为,全部值得纪念的数学终究将会包括在群论之内. 特别是 Klein,他虽然不喜欢抽象群论的形式主义,却偏爱群这个概念,因为他认为群会把数学统一起来. Poincaré 是同样地热情. 他曾说过[①]:“……可以说,群论就是那摒弃其内容而化为纯粹形式的整个数学.”

3. 域的抽象理论

在 Galois 的著作里,由 n 个量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 生成的域 R,是指这些量经过加、减、乘和除(除去用 0 作除数以外)得到的一切量所构成的集合,而扩域这个概念就是添加 R 以外的一个新元素 λ 到 R 所形成的. 他的域就是由一个方程的系数生成的域,他的扩张是经添加方程的一个根做成的. 在 Dedekind 和 Kronecker 关于代数数的著作里(第 34 章第 3 节),域这个概念有着完全不同的起源. 事实上,“域(field)”(体 *Körper*)这个词是出自 Dedekind.

域的抽象理论是由 Heinrich Weber 开始的. 他已经拥护群的抽象观点. 在 1893 年[②]他曾经给 Galois 理论以抽象的阐述,其中他引进了(交换)域作为群的派生. 按照 Weber 的说明,一个域是指一个由元素组成的集合,具有两种运算,叫做加法和乘法,都满足封闭条件,结合律,交换律以及分配律. 而且每一个元素在每一种运算下必有一个唯一的逆元素(除去 0 作除数以外). Weber 强

① *Acta Math.*, 38,1921,145.

② *Math. Ann.*, 43,1893,521~549. 对于群参看 *Math. Ann.*, 20,1882,301~329.

调群和域是代数的两个主要概念. 稍后,Dickson① 和 Huntington② 给出了一个域的独立的公理系统.

在 19 世纪已经知道的域有:有理数域、实数域、复数域、代数数域和一个或多个变数的有理函数域. Kurt Hensel 又发现了另一类型的域即 p 进域,它在代数数方面开辟了新的工作(《代数数论》(*Theorie der algebraischen Zahlen*, 1908)). Hensel 首先观察到任何一个普通整数 D 能够用一种方式而且只有一种方式表成一个素数 p 的方幂的和,即

$$D = d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \cdots + d_k p^k,$$

其中 d_i 是适当的整数且 $0 \leqslant d_i \leqslant p-1$. 例如, $p = 3$,

$$14 = 2 + 3 + 3^2,$$

$$216 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4.$$

同样,任何有理数 $r(\neq 0)$能唯一地写成

$$r = \frac{a}{b} p^n,$$

其中 a, b 是不能被 p 整除的整数,n 是 0 或一个正或负的整数. Hensel 根据这个观察推广并引进了 p 进数. p 进数是如下形式的表达式:

$$\sum_{i=-\rho}^{\infty} c_i p^i, \tag{2}$$

其中 p 是一个素数,系数 c_i 是普通有理数,已约简成最简分数,其分母不能被 p 整除. 这种表达式一般并不一定有普通的数作为它的值. 但无论如何,根据定义,它们表示数学实体.

Hensel 对这种数规定了四种基本运算,并证明它们是一个域. p-进数的一个子集能够和普通的有理数成一一对应,而且事实上这个子集就是在两个域同构的完整意义下同有理数域同构

① *Amer. Math. Soc. Trans.*, 4,1903,13～20,和 6,1905,198～204.

② *Amer. Math. Soc. Trans.*, 4,1903,31～37,和 6,1905,181～197.

的. 在 p 进数的域内 Hensel 定义了 p-进整数，单位(即 p-进整数中的可逆元素)和其他类似于普通有理数中的那些概念.

Hensel 引进了以 p-进数作系数的多项式和这种多项式的 p-进根的概念，而且把有关代数数域的所有概念推广到这些根上. 这样就有 p-进整代数数，更一般地就有 p-进代数数，而且可以构成 p-进代数数域，这是由(2)定义的"有理"的 p-进数域的扩张. 事实上，有关代数数的所有一般理论都可以搬到 p-进数上. 也许令人惊奇的是，p-进代数数的理论引出普通代数数的一些结果. 在探讨二次型的理论中已经显出它的作用，而且导致赋值域的观念.

Weber 的著作给予 Ernst Steinitz(1871—1928)非常大的影响，在域的日益增长的变化的激励下，Steinitz 着手对抽象域进行综合的研究；他把研究的成果都写进他的基本论文《域的代数理论》(*Algebraischen Theorie der Körper*)①. 按照 Steinitz 的观点，一切域可以分成两个主要类型. 设 K 是一个域. 考虑 K 的所有子域(例如，有理数域是实数域的一个子域). 所有子域的公共元素也是一个子域，叫做 K 的素域，记为 P. 素域有两种可能的类型. 单位元素 e 总是包含在 P 内，因而

$$e,\ 2e,\ \cdots,\ ne,\ \cdots$$

也包含在 P 内. 这些元素，或者两两不相同，或者存在一个普通整数 p 使得 $pe = 0$. 在第一种情况 P 必须包含所有分数 ne/me，由于这些元素形成一个域，所以 P 必须和有理数域同构. 这时我们说 K 有特征 0.

另一方面，如果 $pe = 0$，容易证明，这样的 p 的最小者必是一个素数，因而域 P 必须和整数模 p 的同余类域 $\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$ 同构. 这时我们说 K 是一个特征为 p 的域. K 的任何一个子域都有同一特征. 于是 $pa = (pe)a = 0$；这就是说，K 中所有表达式可以按模 p 来化简.

---

① *Jour. für Math.*, 137, 1910, 167～309.

不管素域 P 属于刚才描述过的哪一种类型,原来的域 K 可以从 P 经过添加的手续而得到.方法是:首先在 K 内取一个不在 P 内的元素 a,并作 a 的系数属于 P 的有理函数,它们全体构成一个子域 $R(a)$,然后,如有必要,再在 K 内取一个不在 $R(a)$内的元素 b,按照对待 a 的办法来对待 b,作出 $R(a)$的扩张,如此继续进行直至满足需要.

从一个任意的域 K 出发,可以作出各种类型的添加.一个单纯的添加就是添加单个元素 x.这个扩大了的域必包含所有如下形式的表达式:

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, \tag{3}$$

其中 a_i 属于 K.如果这些表达式两两不相等,那么这个扩域就是 x 的有理函数全体构成的域 $K(x)$,其系数属于 K.这样的添加叫做一个超越添加,$K(x)$叫做一个超越扩张.如果(3)中表达式有某些彼此相等,可以证明,必定存在一个关系(这时用 α 代替 x)

$$f(\alpha)=\alpha^m+b_1\alpha^{m-1}+\cdots+b_m=0,$$

其中系数 $b_i\in K$ 而且 $f(x)$在 K 内不可约.这时表达式

$$C_1\alpha^{m-1}+C_2\alpha^{m-2}+\cdots+C_m,\ C_i\in K$$

的全体构成一个域 $K(\alpha)$,是由添加 α 到 K 而形成的.这个域叫做 K 的一个单纯代数扩张.$f(x)$在 $K(\alpha)$内有一个根 α.反之,如果取定一个在 K 内不可约的任意多项式 $f(x)$,就可以造一个域 $K(\alpha)$使得 $f(x)$在 $K(\alpha)$内有一个根.

由 Steinitz 获得的一个基本结果是,每一个域 K 可以从它的素域出发,经过如下的添加而得到:首先作一系列(可能无限多的)超越添加得到一个超越扩张,然后对这个超越扩张又作一系列代数添加.如果一个域 K'能够从一个域 K 经过一串单纯代数添加而得到,就说 K'是 K 的一个代数扩张.如果添加的次数是有限的,就说 K'是 K 的有限代数扩张.

并不是每一个域都可以经过代数添加而扩大.例如复数域就

不能这样扩大,因为每一个次数高于 1 的复系数多项式 $f(x)$在复数域内是可约的. 这种不能经代数添加而扩大的域叫做代数封闭的. Steinitz 还证明:对于每一个域 K,存在一个唯一的代数封闭域 K',而且 K'是 K 的代数扩张. 这里"唯一"的意思是:K 上(包含 K)所有其他代数封闭域恒包含一个与 K'同构的子域.

Steinitz 还考虑了这样一个问题:确定这样的域,在其中 Galois 的方程理论有效. 我们说 Galois 理论在一个域中有效,意思是:一个给定域 K 上的 Galois 域 $\overline{K}$ 是一个代数域,而且 $K(x)$中每一个不可约多项式 $f(x)$在 $\overline{K}$ 上或者保持不可约或者完全分解成一次因式的乘积*. 对每个 Galois 域 $\overline{K}$,都有一组自同构,每一个自同构是 $\overline{K}$ 到自身上的一个映射 $\alpha\to\alpha'$,使得 $\alpha\pm\beta$ 和 $\alpha\cdot\beta$ 分别映到 $\alpha'\pm\beta'$ 和 $\alpha'\cdot\beta'$, 而且它保持 K 中每一个元素不动(即元素对应到自身). 这组自同构形成一个群 G,叫做 $\overline{K}$ 关于 K 的 Galois 群. Galois 理论的主要定理断言:在 G 的子群与 $\overline{K}$ 的子域(包含 K)之间存在一个唯一的一一对应,使得对于 G 的每一个子群 G'有一个子域 K'与 G'对应,而 K'是由在 G'下保持不动的元素全体组成;而且反之也对. 只要这个定理在一个域中成立,就说 Galois 理论在这个域中有效. Steinitz 的基本结果主要是说:如果一个域 $\overline{K}$ 可从一个已知域 K 经过添加一系列无重根的不可约多项式的全部根而得到,则 Galois 理论在 $\overline{K}$ 内有效. 如果一个域 K 上的所有不可约多项式在 K 的任何扩域中都无重根,则 K 叫做完备的.

如 Steinitz 的分类所指出的,域的理论还包含特征 p 的有限域. 它的一个简单的例子就是整数模素数 p 所得到的余数的全体组成的集合. 有限域的概念属于 Galois. 1830 年他发表了一篇

* 这个定义确切陈述应为:称 K 的扩域 $\overline{K}$ 是域 K 上的 Galois 域,如果 $\overline{K}$ 是 K 上的可分代数扩张,而且 K 上的任一个不可约多项式 $f(x)$只要在 $\overline{K}$ 内有一个根,则它在 $\overline{K}$ 内完全分解成一次因式的乘积.

决定性的文章《关于数论》(Sur la théorie des nombres)[①]. Galois 企望求解同余式

$$F(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ p),$$

其中 p 是一个素数,$F(x)$是一个 n 次整系数多项式. 他假设 $F(x)$(mod p)不可约,使得这个同余式没有整根或无理根. 这就迫使他去考虑其他的解. 由虚数得到启示,Galois 用 i 表示 $F(x)$(mod p)的一个根(i 并不是 $\sqrt{-1}$). 他于是考虑表达式

$$(4)\qquad a_0+a_1i+a_2i^2+\cdots+a_{n-1}i^{n-1},$$

其中 a_i 是整数. 当这些系数都分别取(mod p)的最小非负剩余时,这个表达式只能取 p^n 个值,因而只有 p^n-1 个非零的值. 假设 α 是其中一个非零的值. α 的一切方幂均取(4)的形式,因而这些方幂不能全相异. 于是必定最少有一个方幂 $\alpha^m=1$. 假定 m 是满足这个等式的最小正整数. 于是共有 m 个不同的值:

$$(5)\qquad 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{m-1}.$$

如果我们用(4)中另一个表达式 β 乘(5)中各元素,我们就得到不同于(5)的另外 m 个元素,它们彼此不同. 再用上两组以外的另一表达式 γ 乘(5)中各元素,将得到更多这样的元素,直到我们得到形如(4)的全部表达式为止. 因此,m 必定整除 p^n-1, 即 $\alpha^{p^n-1}=1$, 因而 $\alpha^{p^n}=\alpha$. (4)中这 p^n 个元素组成一个有限域. Galois 曾经就这个具体情况证明:在一个特征 p 的 Galois 域中,元素的个数是 p 的一个幂.

E. H. Moore[②] 曾经证明,任何一个有限抽象域都与某一个 Galois 域同构,后者的元素个数为 p^n,p 为某一素数. 对于每一个素数 p 和每一个正整数 n,都存在 p^n 个元素的有限域. Joseph H. M. Wedderburn(1882—1948)是普林斯顿(Princeton)大学的教

---

① *Bulletin des Sciences Mathématiquesde Férussac*, 13, 1830, 428～435 = *Œuvres*, 1897, 15～23.

② *N.Y. Math. Soc. Bull.*, 3, 1893, 73～78.

授①,他和 Dickson 同时证明了:任何有限域必须是交换的(意思是说,域的乘法交换律可以从域的其余的公理推证出来.参看下一节).为确定包含在 Galois 域内的加法群的构造以及域本身的构造,已做了大量的工作.

4. 环

虽然环和理想的构造是熟知的并在 Dedekind 和Kronecker关于代数数的著作中被利用过,但抽象理论却完全是 20 世纪的产物.理想一词已经被采用(第 34 章第 4 节).Kronecker 把环叫做"序(order)",环(ring)这个词是 Hilbert 引进的.

讨论历史以前,先讲清这些概念的现代意义是适宜的.一个抽象的环是一组元素组成的集合,它关于一种运算形成一个交换群,而且它还受制于可作用于任何两个元素的第二种运算;这第二种运算是封闭的并且是结合的,但可以是,也可以不是交换的;可以有,也可以没有单位元素.它还适合分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 和 $(b+c)a=ba+ca$.

环 R 的一个理想是这样一种子环 M:如果 a 属于 M,r 属于 R,则 ar 和 ra 都属于 M.如果只有 ar 属于 M,则 M 叫做右理想;如果只有 ra 属于 M,则 M 叫做左理想;如果一个理想既是右理想又是左理想,则它叫做双边理想.单位理想是指整个环.由一个元素 a 生成的左理想 (a) 是由下面形式的元素全体组成的:

$$ra+na,$$

其中 $r\in R$, n 为任一整数.如果 R 有一个单位元素 e,则

$$ra+na=ra+nea=(r+ne)a=r'a,$$

而 r' 则是 R 的任一元素.由一个元素生成的理想叫做主理想.仅由零元素组成的理想叫零理想,记作 0.0 和 R 以外的理想叫做真

① *Amer. Math. Soc. Trans.*, 6,1905,349~352.

理想. 类似地,如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是环 R 中给定的 m 个元素,R 有单位元素,则所有和数

$$r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_ma_m,\ r_i \in R$$

的集合是 R 的一个左理想,记作 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$. 它是包含 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的最小的左理想. 如果一个交换环 R 的每一个理想都可表成如上的形式,则 R 叫做 Noether 环.

因为环中任何一个理想都是环的加法群的一个子群,所以环 R 可以按理想 M 分成一些剩余类. 如果 R 中的两元素 a, b 满足 $(a-b) \in M$,则说 a, b 关于 M 同余,记作 $a \equiv b(\bmod M)$. 如果环 R 到环 R' 的一个映射 $a \to T(a)$ 满足

$$T(a+b) = T(a) + T(b),$$

$$T(a \cdot b) = T(a) \cdot T(b),\ T(1) = 1',$$

则 T 叫做环 R 到环 R' 的一个同态. 在同态 T 下,R 中对应到 R' 的零的元素全体叫做 R 的核,它是 R 的一个(双边)理想. 当 T 呈满同态时,R' 同构于 R 的以核为模的剩余类所成的环. 反之,给定 R 的一个(双边)理想 L,可作 R 模 L 的剩余类环,记作 R/L,叫做 R 模 L 的商环,于是有 R 到 R/L 的同态,以 L 作为它的核.

环的定义并不要求每一元素(非零)关于乘法有逆元素存在. 如果单位元素存在,而且每一个非零元素都有逆元素,则这个环叫做除环(或可除代数);实际上它是一个非交换(或斜)域. Wedderburn 的结果已经指出(1905),一个有限除环是一个交换域. 直到 1905 年已知的除环仅有交换域和四元数. 后来 Dickson 作出一串新的除环,交换的和非交换的都有. 1914 年他[①]和 Wedderburn[②] 给出了非交换域的第一个例子,它关于中心(与域中一切元素都交

---

① *Amer. Math. Soc. Trans.*, 15,1914,31~46.

② *Amer. Math. Soc. Trans.*, 15,1914,162~166.

换的元素全体)的阶是 $n^2$①.

在 19 世纪晚期,已经造出了大量的各种具体的线性结合代数(第 32 章第 6 节). 这些代数,抽象地看都是环,当抽象环的理论形成之际,这些具体的代数就被吸收和推广. 当 Wedderburn 在他的文章《论超复数》(On Hypercomplex Numbers)②中继续 Elie Cartan(1869—1951)的工作③并推广了他的结果时,线性结合代数的理论和整个抽象代数的课题就受到新的推动. 回想一下,超复数就是如下形式的数:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n, \tag{6}$$

其中 e_i 是量的单位,x_i 是实数或复数. Wedderburn 把 x_i 取作一个任意域 F 中的元素. 他把这个推广了的线性结合代数简称为代数. 处理这类广义代数,他不得不放弃他前人的方法,因为一个任意的域不都是代数封闭的. 他也采取了而且完成了 Benjamin Peirce 关于幂等元素的技巧.

在 Wedderburn 的著作中,一个代数便是由形如(6)的线性组合的全体所组成,组合的系数现在是域 F 中元素. 这些 e_i 叫做基,个数有限,而且这个个数就叫这代数的阶. 这样的两个元素的和由下式给出:

$$\sum x_ie_i + \sum y_ie_i = \sum (x_i + y_i)e_i.$$

这代数中的一个元素 x 和域 F 中的一个元素 a 的乘积 ax 定义为

$$ax = a\sum x_ie_i = \sum ax_ie_i,$$

---

① 1958 年 Michel Kervaire(1927—)在 *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 44,1958,280～283 和 John Milnor(1931—)在 *Annals of Math.*, (2),68, 1958,444～449,两人都用 Raoul Bott(1923—)的一个结果,证明了:具有实系数的唯一可能的可除代数(不假定乘法结合律和交换律)只有实数、复数、四元数和 Cayley 数.

② *Proc. London Math. Soc.*, (2),6,1907,77～118.

③ *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*, 12B,1898,1～99 = *Œuvres*, Part Ⅱ, Vol. 1, 7～105.

而这代数中两元素的积定义为

$$\left(\sum x_i e_i\right)\left(\sum y_i e_i\right)=\sum_{i,j} x_i y_j e_i e_j.$$

这定义的完成只需再用一个表来把每一乘积 $e_i e_j$ 表成所有 e_i 的某一线性组合,其系数属于 F. 乘法要求满足结合律. 总可以添加一个单位元素(模)1 到代数中去使得对于每个 x 都有 $x\cdot 1=1\cdot x=x$, 于是系数域 F 就成为这代数的一部分.

设 A 为一个代数. 如果 A 的一个子集 B 对于 A 的运算也构成一个代数,则 B 叫做 A 的一个子代数. 此外,如果对于 A 中元素 x,B 中元素 y,还有 xy 和 yx 都在 B 中,则 B 叫做 A 的不变子代数. 如果一个代数 A 可写成两个不变子代数的和,而这两个子代数除零元素外无公共元素,则 A 叫做可约的. 这时 A 也叫做这两个子代数的直和.

如果一个代数除(0)和它本身外没有不变子代数,则它叫做单代数. Wedderburn 也引用而且修改了 Cartan 关于半单代数的概念. 为此 Wedderburn 利用幂零元素这一概念. 一个元素 x 叫做幂零的(nilpotent),如果对于某正整数 n,有 $x^n=0$. 一个元素 x 叫做真正幂零的,如果对于代数 A 中每一元素 y 而言,xy 和 yx 都是幂零的. 可以证明,一个代数 A 中真正幂零元素的全体所组成的集合是 A 的一个不变子代数(因而也是幂零不变子代数). 于是一个半单代数就是一个没有幂零不变子代数(不计仅由零元素组成的幂零不变子代数)的代数.

Wedderburn 证明了,每一个半单代数可以表成不可约代数的直和,而每一个不可约代数等价于一个矩阵代数和一个可除代数(Wedderburn 叫它为本原代数)的直积. 这意思是说,这不可约代数的每一个元素可以表成一个矩阵,其元素取在该可除代数中. 因为半单代数可以分解成一些单代数的直和,这个定理等于确定了一切半单代数. 还有另外一个结果用到全矩阵代数的概念,它正

好就是所有 $n\times n$ 矩阵组成的代数. 如果一个代数的系数域 F 是复数而且没有真正幂零元素,那么它就等于一些全矩阵代数的直和. 这是由 Wedderburn 得到的结果的一个样品,它可以作为广义线性结合代数工作的一个指示.

环和理想的理论由 Emmy Noether(1882—1935)把它置于更为系统化和公理化的基础之上. Noether 是少数几个伟大的女数学家之一,她于 1922 年成为格丁根的讲师. 当她开始她的工作时,环和理想的许多结果都已经知道,但是由于适当地确切表述了抽象概念,使她能够将这些结果纳入抽象理论之中. 例如,她把 Hilbert 的基定理(第 39 章第 2 节)重新表述如下:一个系数环上的任何多个变量的多项式所成的环,当这系数环有一个单位元素和一组有限基时,这多项式环本身也有一组有限基. 在这种重新表述下,她把不变量理论变成了抽象代数的一部分.

多项式环的理想的理论已由 Emanuel Lasker(1868—1941)① 发展了. 他给出一种决定一个已知多项式是否属于一个理想的方法,这理想是由 r 个多项式生成的. 1921 年② Emmy Noether 证明,这种多项式理想理论能由 Hilbert 基定理推出. 由此,为整代数数的理想理论和整代数函数(多项式)的理想理论建立了一个共同的基础. Noether 和其他人对环和理想的抽象理论作了非常深透的研究,并把它应用到微分算子环以及其他代数上去. 可是这方面工作的报道过于专门,已超出本书范围了.

5. 非结合代数

近代环论,或者更恰当地说,环论的一个推广,也包含非结合代数. 这里乘法运算是非结合的而且是非交换的;线性结合代数的

① *Math. Ann.*, 60,1905,20～116.

② *Math. Ann.*, 83,1921,24～66.

其他性质则仍然保持. 今天已有好几种重要的非结合代数. 历史上最重要的一种类型是 Lie 代数. 习惯上用 $[a, b]$ 表示这种代数的两个元素 a, b 的积. 乘法的运算规律是

$$[a, b] = -[b, a],$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0.$$

两者取代了交换律和结合律. 上述第二个性质叫 Jacobi 恒等式. 两个向量的向量积就满足这两个性质.

Lie 代数 L 中的一个理想 L_1 是这样一个子代数,它使得 L 的任何一个元素 a 和 L_1 的任何一个元素 b 的积 $[a, b]$ 仍属于 L_1. 一个单 Lie 代数是没有非平凡理想的 Lie 代数. 如果一个 Lie 代数没有交换理想,就叫它做半单 Lie 代数.

Lie 代数产生于 Sophus Lie 对连续变换群的结构的研究. 为此,Lie 引进无穷小变换的概念.①粗略地说,一个无穷小变换是,将点移动一个无穷小距离的变换. Lie 将它用符号表示成

(7) $$x_i' = x_i + \delta t X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中 δt 是一个无穷小量,或者表成

(8) $$\delta x_i = \delta t X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

这个 δt 是对群的参数作一个小的改变所引起的结果. 例如,假设一个变换群是由下式给出:

$$x_1 = \phi(x, y, a), \ y_1 = \psi(x, y, a).$$

设 a_0 是参数 a 的值使得 ϕ 和 ψ 在 $a = a_0$ 时表示恒等变换:

$$x = \phi(x, y, a_0), \ y = \psi(x, y, a_0).$$

如果 a 从 a_0 改变到 $a_0 + \delta a$, 则按 Taylor 定理有

$$x_1 = \phi(x, y, a_0) + \frac{\partial\phi}{\partial a}\delta a + \cdots,$$

$$y_1 = \psi(x, y, a_0) + \frac{\partial\psi}{\partial a}\delta a + \cdots,$$

---

① *Archiv for Mathematik Naturvidenskab*, 1,1876,152～193 = *Ges. Abh.*, 5, 42～75.

从而忽略 δa 的高次幂就得到

$$\delta x = x_1 - x = \frac{\partial \phi}{\partial a}\delta a, \ \delta y = y_1 - y = \frac{\partial \psi}{\partial a}\delta a.$$

对于固定的 a_0，$\frac{\partial \phi}{\partial a}$和$\frac{\partial \psi}{\partial a}$是 x 和 y 的函数，可写成

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = \xi(x, y), \ \frac{\partial \psi}{\partial a} = \eta(x, y).$$

于是

$$\delta x = \xi(x, y)\delta a, \ \delta y = \eta(x, y)\delta a. \tag{9}$$

如果 δa 是 δt，就得到(7)或(8). 方程(9)表示群的一个无穷小变换.

如果 $f(x, y)$是 x 和 y 的解析函数，对它施以一个无穷小变换的效应是用 $f(x+\xi\delta a, y+\eta\delta a)$ 替换 $f(x, y)$，按 Taylor 定理，计算到一阶，

$$\delta f = \left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta a.$$

算子

$$\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$$

是无穷小变换(9)的另一种表现形式，因为只要知道其中一个就可给出另一个. 这样的算子在微分算子的通常意义下可以相加与相乘.

独立的无穷小变换的个数，或者对应的独立算子的个数，就是原来变换群中参数的个数. 现在用 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，表示(独立的)无穷小变换或对应的算子，它们确定了变换的 Lie 群. 但同样重要的是，它们本身是一个群的生成元. 虽然乘积 X_iX_j 不是线性算子，但表达式

$$X_iX_j - X_jX_i$$

是一个线性算子，称为 X_i 和 X_j 的交错子(alternant)，记作$[X_i, X_j]$. 对于这个乘法运算，算子群就变成一个 Lie 代数.

Lie 的工作是从研究具有 r 个参数的有限单(连续)群的结构开始的. 他发现 Lie 代数的四种主要类型. Wilhelm K. J. Killing (1847—1923)①发现,就全部单代数来说,不仅有这四个类型而且还有五个例外情况,它们是含 14, 52, 78, 133 和 248 个参数的单代数. Killing 的工作有缺陷,由 Elie Cartan 作了弥补.

Cartan 在他的博士论文《论有限和连续变换群的构造》(*Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*)②中给出了变数和参变数取值在复数域中的全部单 Lie 代数的一个完全分类. 像 Killing 一样,Cartan 发现,全部单 Lie 代数分成四个类型和五个例外代数. Cartan 明显地构造出这些例外代数. 1914 年③ Cartan 又确定了实变数和实参变数的全部单代数. 这些结果现在仍然是基本的.

很像抽象群的情形,用表示论来研究 Lie 代数已经进行得很多. Cartan 在他的博士论文和 1913 年的一篇文章④中,发现了单 Lie 代数的不可约表示. 一个关键性的结果是由 Hermann Weyl⑤得到的. 特征为 0 的一个代数封闭域上的半单 Lie 代数的任何表示都是完全可约的.

6. 抽象代数的范围

我们对抽象代数领域内的成就所作的不多的说明,肯定不能给出哪怕是在这个世纪的头四分之一里创造出来的成果的全貌.

---

① *Math. Ann.*, 31,1888,252～290,和 33,34,36 各卷中.

② 1894, 2nd. ed., Vuibert, Paris,1933=*Œuvres*, Part Ⅰ, Vol. 1,137～286.

③ *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, 31,1914,263～355 = *Œuvres*, Part Ⅰ, Vol. 1,399～491.

④ *Bull. Soc. Math. de France*, 41,1913,53～96 = *Œuvres*, Part Ⅰ, Vol. 1, 355～398.

⑤ *Mathematische Zeitschrift*, 23,1925,271～309 和 24,1926,328～395 = *Ges. Abh.*, 2,543～647.

但是不管怎样,去说明由于有意识地向抽象化转变而开辟的广阔领域,可能是有帮助的.

截至 1900 年前后,已被研究过的各种代数课题,不管是矩阵,二元、三元或 n 元二次型的代数,超数系,同余式,还是多项式方程的解的理论,都是建立在实数系和复数系之上的.无论如何,抽象代数活动的结果产生了抽象群、环、理想、可除代数和域.除了研究这些抽象结构的性质和关系如同构、同态之外,数学家现在发现,几乎对任何代数课题和出现的问题,都可能用任何一种抽象结构去代替实数系和复数系.例如,替代元素为复数的矩阵,我们去研究元素属于一个环或域的矩阵.同样,我们对待数论的问题,用一个环去代替正整数,负整数和 0,重新考虑普通整数已经证明了的每一个问题.我们甚至可以考虑系数属于任意域的函数和幂级数.

像这样一些推广确实已经作过.我们曾提到 Wedderburn 在他 1907 年的著作里推广了他前人关于线性结合代数(超复数系)的工作,用任何域代替实系数或复系数.我们也可以用一个环代替域.并研究在这种替换下仍然有效的定理.甚至系数属于任意域或有限域的方程论也已经研究过了.

作为普遍化这一现代趋势的另一例子,试考虑二次型.整系数二次型在整数表成平方和的研究中,和实系数二次型在圆锥面和二次曲面的表示的研究中,都是重要的.20 世纪研究了系数属于任意域的二次型.由于引进了更抽象的结构,所有这些都能够用作老的代数理论的基础或系数域.而且这种推广的过程可以无限地进行下去.抽象概念的这种应用需要用到抽象代数的技巧;这样,许多表面上不同的课题都被吸取到抽象代数里来了.数论(包括代数数)的大部分就是这样的情形.

然而,抽象代数已经毁坏了它自己在数学中所起的作用.抽象代数概念的系统阐述是为了统一各种表面上千差万别的数学领

域,例如群论就是这样.抽象理论一经正式形成,数学家们就离开原来的具体领域转而把注意力集中在抽象结构上.通过成百个从属概念的引进,这课题就如雨后春笋般地发展起来,形成一团混乱的细小分支,它们彼此之间,以及和原来的具体领域之间,都没有多少联系.统一性通过多样化和特殊化而取得成功.确实的,抽象代数领域里的大多数工作者都不再知道抽象结构的来源,他们也不关心他们的结果对具体领域的应用.

参考书目

Artin, Emil: "The Influence of J. H. M. Wedderburn on the Development of Modern Algebra", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 56,1950,65～72.

Bell, Eric T.: "Fifty Years of Algebra in America, 1888～1938", *Amer. Math. Soc. Semicentennial Publications*, Ⅱ. 1938,1～34.

Bourbaki, N.: *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1960,pp. 110～128.

Cartan, Elie: "Notice sur les travaux scientifiques", *Œuvres complètes*. Gauthier-Villars, 1952～1955, Part Ⅰ, Vol. 1, pp. 1～98.

Dicke, Auguste: *Emmy Noether*, 1882～1935, Birkhäuser Verlag, 1970.

Dickson, L. E.: "An Elementary Exposition of Frobenius's Theory of Group-Characters and Group Determinants", *Annals of Math.*, 4,1902,25～49.

Dickson, L. E.: *Linear Algebras*, Cambridge University Press, 1914.

Dickson, L. E.: *Algebras and Their Arithmetics* (1923), G. E. Stechert (reprint), 1938.

Frobenius, F. G.: *Gesammelte Abhandlungen*,共3卷,Springer-Verlag, 1968.

Hawkins, Thomas: "The Origins of the Theory of Group Characters", *Archive for History of Exact Sciences*, 7,1971,141～170.

MacLane, Saunders: "Some Recent Advances in Algebra", *Amer. Math. Monthly*, 46,1939,3～19.也见于 Albert, A. A. 主编的 *Studies in Modern Algebra*, The Math. Assn. of Amer., 1963, pp. 9～34.

MacLane, Saunders: "Some Additional Advances in Algebra", 见于 Albert, A. A., 主编的 *Studies in Modern Algebra*, The Math. Assn. of Amer., 1963, pp. 35～

58.

Ore, Oystein: "Some Recent Developments in Abstract Algebra", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 37,1931,537～548.

Ore, Oystein: "Abstract Ideal Theory", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 39,1933,728～745.

Steinitz, Ernst: *Algebraische Theorie der Körper*, W. de Gruyter, 1910;修订第2版. 1930; Chelsea (reprint), 1950,第一版相同于论文,见 *Jour. für Math.*, 137, 1910,167～309.

Wiman, A.: "Endliche Gruppen linearer Substitutionen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1898～1904, I Part 1,522～554.

Wussing, H. L.: *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969.

第 50 章

拓扑的开始

> 我相信我们缺少另一门分析的学问,它是真正几何的和线性的,它能直接地表示位置,如同代数表示量一样.
>
> G. W. Leibniz

1. 拓扑是什么

19 世纪的若干发展结晶成几何的一个新分支,过去一个长时期中叫做位置分析(analysis situs),现在叫做拓扑(topology). 暂且粗浅地讲,拓扑所研究的是几何图形的那样一些性质,它们在图形被弯曲、拉大、缩小或任意的变形下保持不变,只要在变形过程中既不使原来不同的点熔化为同一个点,又不使新点产生. 换句话说,这种变换的条件是:在原来图形的点与变换了的图形的点之间存在一个一一对应,并且邻近的点变成邻近的点. 这后一性质叫做连续性;因而要求的条件便是,这变换和它的逆两者都是连续的. 这样的一个变换叫做一个同胚(homeomorphism)或拓扑变换. 拓扑有一个通行的形象的外号——橡皮几何学(rubber-sheet geometry),因为如果图形都是用橡皮做成的,就能把许多图形变形成同胚的图形. 例如,一个橡皮圈能变形成一个圆周或一个方圈,它们同胚;但是一个橡皮圈和阿拉伯数字 8 这个图形不同胚,因为不把圈上的两个点熔化成一个点,圈就不会变成 8.

通常习惯于把图形都看作是安放在一个包围它们的空间之中. 从拓扑的目的来说,即使不能把包围一个图形的空间拓扑地变换成包围另一个图形的空间,这两个图形还能同胚. 例如,取一长

方形纸条,把它的两条短边连接起来,就得到柱形式圆箍.如果采用另一个办法,先把一条短边扭转360°之后,再把它跟另一条短边连接起来,那么得到的就是一个扭转过的圆箍.这两个圆箍是同胚的.但是不能把这三维空间拓扑地变成自己,同时把第一个圆箍变成第二个圆箍.

按照20世纪所理解的,拓扑分裂而形成两个有些分立的部分:点集拓扑和组合拓扑(或代数拓扑).前者把几何图形看作是点的集合,又常把这整个集合看作是一个空间.后者把几何图形看作是由较小的构件组成的,正如墙壁是用砖砌成的一样.点集拓扑的概念,组合拓扑当然也要用,特别是在研究那些极广泛的几何结构的时候.

拓扑有很多不同的起源.跟数学的大多数分支一样,先有了许多成果,只是后来才认识到它们归属于一个新科目或被一个新科目所概括.现在就拓扑而论,Klein在他的埃尔兰根纲领(Erlanger Programm)(第38章第5节)里就至少勾画出了这一新而重要的研究领域的可能性.那时候,他正在推广射影几何和代数几何里所研究的那种变换,并且通过Riemann的工作,他已经感觉到同胚的重要性了.

2. 点 集 拓 扑

从Cantor开创点集理论(第41章第7节)到Jordan,Borel和Lebesgue扩展它(第44章第3～4节)的时候,点集理论本来并不涉及变换和拓扑性质.但是另一方面,拓扑所感兴趣的,是把点集作为一个空间看待.点集只是互不相关的一堆点,而空间则通过某种捆扎的概念使点与点之间发生关系;这是空间不同于点集的关键.例如Euclid空间中距离这一概念就表明点与点之间有多远,尤其是使我们能定义一个点集的极限点.

我们已经谈过点集拓扑的起源(第46章第2节).由于想要把Cantor的集合论和函数空间(即以函数作为点的空间,这在变分法中已经是习以为常的了)的研究统一起来,Fréchet在1906年发动了抽象空间的研究.Hilbert空间、Banach空间的引进,泛函分析的兴起,更增加了把点集作为空间来研究的重要性.泛函分析中起作用的性质都是拓扑性质,主要因为序列的极限居重要的地位.再者,泛函分析的算子就是从一个空间到另一个空间的变换①.

Fréchet指出,这捆扎概念不必就是Euclid的距离函数.他引进了(第46章第2节)几种不同的概念,都能用来确定什么时候一个点是一个点序列的极限点.特别地,他推广了距离这个概念,引进了度量空间这一类空间.Euclid平面就是一个度量空间.对于度量空间,说到一个点的邻域时,指的是离开这点不到某个量ϵ那么远的全部点.这些邻域是圆形的.我们也能用正方形的邻域.对于一个给定的点集,甚至不必引进度量,还能用一些方式来确定某些子集作为邻域.这样的空间叫做具有邻域拓扑的空间.这是度量空间的一个推广.Felix Hausdorff(1868—1942)在他的《点集论纲要》(*Grundzüge der Mengenlehre*, 1914)中使用了邻域概念(这一概念,Hilbert在1902年进行Euclid平面几何对一种特殊的公理化研究方法时已经使用过),并且根据这个概念建立了抽象空间的完整理论.

Hausdorff把拓扑空间定义为一个集合,连带着它的每一元素x所联系的一族子集U_x.这些子集叫作邻域,它们必须满足下列条件:

(a) 每个点x至少有一个邻域U_x,每一个U_x含有这个点x.

(b) x的两个邻域的交含有x的一个邻域.

---

① 点集的基本性质,如紧致性和可分性,不同的作者用不同的定义,还未标准化.我们采用现在通常所理解的意义.

(c) 如果 y 是 U_x 的一个点，则存在一个 U_y 使得 $U_y \subseteq U_x$.

(d) 如果 $x \neq y$，则存在 U_x 与 U_y，使得 $U_x \cdot U_y = 0$.

Hausdorff 还引进了两条可数性公理：

(a) 对于每一个点 x，子集 U_x 所组成的集是可数集.

(b) 所有不同的邻域所组成的集是可数集.

点集拓扑的基础是若干基本概念的定义. 邻域空间中一个点集的一个极限点是这样一个点，它的每一邻域都至少含有这集合的一个点. 如果这集合的每个点都能被包围在只由这集合的一部分点所组成的一个邻域之中，这集合就是开集. 如果一个集合含有它的所有极限点，它就是闭集. 一个空间或一个空间的子集叫做紧致的，如果每一个无穷子集都有极限点. 因此，通常的 Euclid 直线上的点不成为一个紧致空间，因为相当于整数的点的无穷集没有极限点. 如果一个集合不管怎样分成两个互不相交的子集，其中一个子集至少含有另一个的一个极限点，这个集合就是连通的. 曲线 $y = \tan x$ 不是连通的，但是曲线 $y = \sin 1/x$ 加上 y 轴上的区间 $(-1, 1)$ 就是连通的. 可分离性是 Fréchet 在 1906 年的论文中引进的，这是另一个基本概念. 如果一个空间就是它的一个可数子集的闭包(即子集本身加上它的极限点)，它就叫做可分离的.

至此还能够引进连续变换和同胚的概念. 连续变换通常有两个内容：对于一个空间的每一个点，对应着第二个空间或象空间的唯一的一个点；并且对于一个象点的任一给定的邻域，原来的点(或每一个原来的点，如果多于一点的话)有一个邻域，它的每一个点的象点都被包含在象空间的该给定的邻域里. 这个概念不外是连续函数的 ε-δ 定义的一种推广，其中 ε 确定象空间中一点的邻域；而 δ 确定原来的一点的一个邻域. 两个空间 S 和 T 之间的一个同胚是一个一一对应，并且两个方向(即从 S 到 T 和从 T 到 S)都连续. 点集拓扑的基本任务是发现在连续变换和同胚下保持不

变的性质.上面提到的所有性质都是拓扑不变性.

Hausdorff在度量空间的理论方面增添了许多成果.特别是在关于Fréchet在他的1906年论文中所引进的完全性概念这方面.考虑一个度量空间中满足下列条件的点序列$\{a_n\}$:对于任意给定的ε,存在一个N,使得$|a_n-a_m|<\varepsilon$对于大于N的所有m和n都成立.如果一个空间中的每一个满足这条件的序列都有极限点,这空间就是完全的.Hausdorff证明了,每一个度量空间能够并且只能够按一种方式扩展成一个完全的度量空间.

抽象空间的引进提出了若干问题,而这些问题发动了许多研究工作.例如,如果一个空间是用邻域定义的,这个空间是否必然是可度量的?即是否能在这空间中引进一种度量,保持这空间的结构,使得极限点仍然是极限点?这问题是Fréchet提出来的.Paul S. Urysohn(1898—1924)的一个结果说:每一个正规的拓扑空间是可度量的①.一个正规空间是这样一个空间,它的任意两个不相交的闭集都可以各自被包含在一个开集之中,而这两个开集不相交.他还证明了②一个相当重要的有关结果:每一个可分离的度量空间,即每一个具有一个稠密的可数子集的度量空间,同胚于Hilbert方体的一个子集;方体即是以满足$0\leqslant x_i\leqslant 1/i$的无穷序列$\{x_i\}$为点的空间,其中的距离定义为

$$d=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}.$$

我们已经注意到,维数(dimension)问题已经由Cantor在直线和平面之间的一一对应(第41章第7节)和装满一个正方形的Peano曲线(第42章第5节)的证明中提出来了.Fréchet(已经在研究抽象空间)和Poincaré已经看到需要给维数下一个定义,使它既可应用于抽象空间,又可以使直线和平面具有通常的维数.通

① *Math. Ann.*, 94,1925,262~295.

② *Math. Ann.*, 94,1925,309~315.

常所采用的心照不宣的定义是:维数就是确定一个点所需要的坐标的个数.这个定义不适用于一般空间.

1912 年,Poincaré 给出一个递归定义①.一个连续统(一个闭的连通集)叫做 n 维的,如果它能分成两部分,其公共边界是由 $n-1$ 维的连续统组成的. Luitzen E. J. Brouwer(1881—1966)指出这定义对于两叶的锥面不适用,因为一个点就分开这两叶. Brouwer②, Urysohn③ 和 Karl Menger(1902—1985)④改进了 Poincaré 的定义.

Menger 和 Urysohn 的定义相似,人们都认为,现在所采用的定义是他们两人的.他们的概念是规定一个局部的维数. Menger 的提法如下:空集定义为 -1 维的.我们说一个集合 M 在一点 P 处是 n 维的,如果 n 是这么一个最小的数,使得存在 P 的任意小的邻域,它们在 M 中的边界的维数小于 n. 集合 M 叫做 n 维的,如果它在它的所有点处至多是 n 维的,而在至少某个点处是 n 维的.

另一个广泛采用的定义是 Lebesgue 的⑤.一个空间是 n 维的,如果 n 是这样的最小数,即直径任意短的闭集所组成的覆盖都含有属于这覆盖的闭集中 $n+1$ 个集的公共点.根据这些定义的任一个,Euclid 空间都有恰当的维数,并且任意空间的维数都是拓扑不变的.

维数论中的一个关键的结果是 Menger(《维数论》(*Dimensionstheorie*),1928,第 295 页)和 A. Georg Nöbeling(1907—?)的一个定理⑥.这个定理说:每一个紧致的度量空间同胚于 $2n+1$ 维

---

① *Revue de Mètaphysique et de Morale*, 20,1912,483～504.

② *Jour. für Math.*, 142,1913,146～152.

③ *Fundamenta Mathematicae*, 7,1925,30～137 和 8,1926,225～359.

④ *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 33,1923,148～160 和 34,1926,137～161.

⑤ *Fundamenta Mathematicae*, 2,1921,256～285.

⑥ *Math. Ann.*, 104,1930,71～80.

的 Euclid 空间中的某一子集.

Jordan 和 Peano 的工作所引起的另一个问题是曲线本身的定义(第42章第5节).有了维数论方面的工作,才能够作出答案.Menger① 和 Urysohn② 定义曲线为一维的连续统,连续统是闭的连通集.(这个定义要求把抛物线那样的开曲线用一个无穷远点封闭起来.)这个定义排除了装满空间的曲线,并反映了曲线在同胚下不变的这一性质.

点集拓扑这一学科继续很活跃.对于各种类型的空间的公理基础,引进变种、特殊化以及推广,都是比较容易的.曾经引进了成百个概念,证明了成百个定理,虽然这些概念的最终价值大多数是可疑的.跟在别的领域中一样,数学家们毫不迟疑地投身于点集拓扑的纵深发展.

3. 组合拓扑的开始

早在1679年,Leibniz 就在他的《几何特性》(*Characteristica Geometrica*)里,试图阐述几何图形的基本几何性质,采用特别的符号来表示它们,并对它们进行运算来产生新的性质.他把他的研究叫做位置分析或位置几何学(*geometria situs*).1679年,他在给 Huygens 的一封信里,说明他不满意坐标几何研究几何图形的方法,因为这方法除了不直接和不美观之外,关心的还只是量,而"我相信我们缺少另一门分析的学问,它是真正几何的和线性的,它能直接地表示位置[*situs*],如同代数表示量一样."③Leibniz 对于他

---

① *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 33, 1923, 148～160 和 *Math. Ann.*; 95, 1926, 277～306.

② *Fundamenta Mathematicae*, 7, 1925, 30～137, 特别是第93页.

③ Leibniz, *Math. Schriften*, 1 Abt., Vol. 2, 1850, 19～20 = Gerhardt, *Der Briefwechsel von Leibniz mit Mathematikern*, 1, 1899, 568 = Chr. Huygens, *Œuv. Comp.*, 8, No. 2192.

所拟建立的东西给出了少数例子.虽然他的着眼点在于那些几何算法,认为它们会给出纯几何问题的解,他的例子仍然含有度量性质.或许因为他对于所寻求的那种几何并不明确,他的想法和符号没有引起 Huygens 的热忱.就 Leibniz 所达到的清楚程度来看,他是预想到了现在所称的组合拓扑.

几何图形的一个组合性质跟 Euler 的名字联在一起,虽然 Descartes 在 1639 年就知道这性质(通过 Descartes 的未发表的手稿),Leibniz 在 1675 年也知道这性质.如果数一数任何闭的凸多面体(例如立方体)的顶点数、棱数和面数,就有 $V-E+F=2$. Euler 在 1750 年发表了这个结果①. 1751 年他提出了一个证明②. Euler 对这一关系感兴趣是要用它来作多面体的分类.虽然 Euler 发现了所有闭的凸多面体的一个性质,但他没有想到连续变换下的不变性.他也未确定出满足这关系的这类多面体.

1811 年 Cauchy③ 给了另一个证明.他挖去了一个面的内部,把剩下的图形铺在一个平面上.这给出一个多边形,它在 $V-E+F$ 这个数应该是 1.他的证明是这样进行的:把这图形剖分为三角形,然后在一个个地抹掉三角形时计算这个数的改变.这个证明因为假设了任一闭的凸多面体同胚于球面,有不足之处;但 19 世纪的数学家都承认这个证明.

另一个著名的问题是哥尼斯堡(Koenigsberg)桥的问题.它是当时的一个游戏问题,后来才体会到它的拓扑意义.流经哥尼斯堡的普列格尔(Pregel)河湾处,有两个岛和七座桥(图50.1 中用 b 标出).老乡们为了消遣,试图在一次连续的散步中走过所有这七座桥,但不准在任何一座上通过两次. Euler 当时在圣彼得堡,听到

---

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 4, 1752~1753, 109~140, pub. 1758 = *Opera*, (1), 26, 71~93.

② *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 4, 1752~1753, 140~160, pub. 1758 = *Opera*, (1), 26, 94~108.

③ *Jour. de l'Ecol. Poly.*, 9, 1813, 68~86 和 87~98 = *Œuvres*, (2), 1, 7~38.

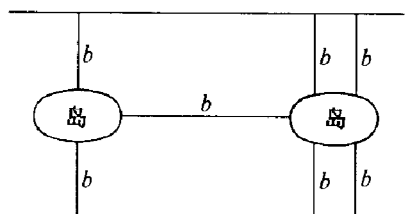
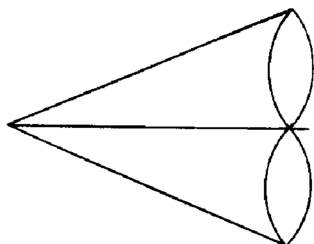


图 50.1


图 50.2

了这个问题,在 1735 年找到了解答①. 他简化了这个问题的表示法,用点代表陆地,用线段或弧代表桥,得到图 50.2. Euler 于是把问题提成这样:能否一笔画出这个图;即用铅笔连续不断地一次画出这个图,在每一条弧都只准画一次这条件下,他证明了,对于上图,一笔画是不可能的;并且对于任何一组给定的点和弧,给出了能否一笔画出的判别条件.

Gauss 时常谈到有必要研究图形的基本性质②,但并未做出杰出的贡献. 他的 1834 年的一位学生 Johann B. Listing(1806—1882,后来任格丁根的物理教授),在 1848 年出版了《拓扑学的初步研究》(*Vorstudien zur Topologie*). Listing 在这本书中用拓扑这个术语作为他所讨论的内容的名称;其实他认为宁愿用位置的几何这个名称,但他未用,因为 von Staudt 已经把射影几何叫做位置的几何了. 1858 年 Listing 开始了一系列拓扑研究,用《空间复形的概述》(*Der Census raümlicher Complexe*)这个题目发表③. Listing 寻求几何图形的定性规律. 例如,他企图推广 Euler 关系 $V-E+F=2$.

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1736, 128~140, pub. 1741. 这篇论文的英译本见 James R. Newman: *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, 1956 Vol. 1, 573~580. [中文再译文见姜伯驹:《一笔画和邮递路线问题》,数学小丛书(7),人民教育出版社,1964,33~39. ——译者注]

② *Werke*, 8, 270~286.

③ *Abh. der Ges. der Wiss. zu Gött.*, 10, 1861, 97~180,并在 1862 年以书的形式出版.

Möbius 是对拓扑研究的本性给出恰当提法的第一个人. 他是 Gauss 1813 年的助教. 他在把不同的几何性质分为射影的，仿射的，相似的，和全同的之后，到 1863 年在他的《初等关系的理论》(Theorie der elementaren Verwandschaft)①里，考虑了两个图形，它们的点成一一对应，并在这对应下，邻近的点对应着邻近的点；他建议研究这样联系着的两个图形之间的关系. 他从多面体的**位置几何**着手. 他强调把一个多面体看成二维多边形的一个集合；既然多边形能剖分成三角形，这就使得多面体是三角形的一个集合. 这个想法后来证明是基本的. 他还表明②有些曲面能够被剪开，被铺开成多边形；这多边形，连带由于剪开而产生的每对边恰当地等同起来，就是原来的曲面. 例如一个双环能够用一个多边形来表示(图 50.3)，只要把用相同字母标出的棱等同起来就行了.

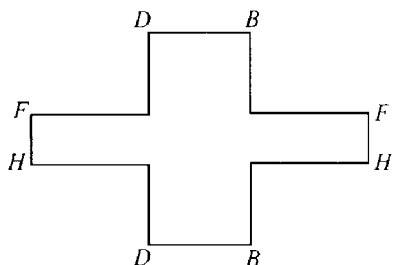


图 50.3

1858 年，Möbius 和 Listing 各自独立地发现了单侧的(one sided)曲面，其中最闻名的是 Möbius 带(图 50.4). 取一片长方纸条，把一个短边扭转 180°，然后把这边跟对边粘贴起来，就形成一条 Möbius 带. Listing 在《概述》中发表了这个图形；Möbius 在一

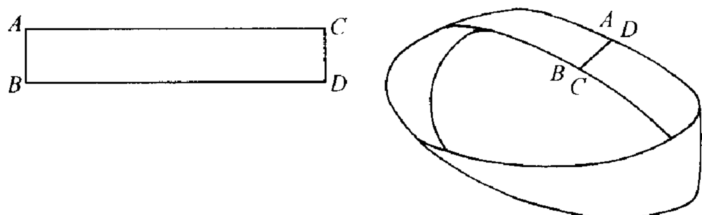


图 50.4

① *Königlich Sächsischen Ges. der Wiss. zu Leipzig*, 15, 1863, 18～57 = *Werke*, 2, 433～471.

② *Werke*, 2, 518～559.

篇论文[①]里也描写了它. 就 Möbius 带这个图形来说,它的单侧性的特征可以说明如下:用刷子油漆这个图形时,能连续不断地一次就刷遍整个曲面. 如果一个没有扭转过的带子的一面刷遍了,要想把刷子挪到另一面,就必须把刷子挪动跨过带子的一条边沿. 单侧性也可以利用曲面的垂线来定义. 让垂线有一个确定的方向. 如果这垂线能够在曲面上任意地挪动,并且在它回到原来地点时,它还必定有同一个方向,我们就说这曲面是双侧的(two-sided). 如果有一次方向颠倒了,这曲面就是单侧的. 对于 Möbius 带,垂线回到"背面"的那地点时,方向就颠倒了.

还有一个问题,地图问题(map problem),后来才看出它是拓扑性质的. 这问题是要证明:四种颜色就足够把所有地图涂上色,使得具有至少一条曲线公共边界的国家都被涂上了不同的颜色. 一位不闻名的数学教授 Francis Guthrie(? —1899)在 1852 年作出猜测:四种颜色就足够了,他的弟弟 Frederick 把这个猜测转告 De Morgan. 专论这问题的第一篇文章是 Cayley 的[②];他在文章里说他没有能够证明. 一些数学家试图证明;有些发表了的证明当时被接受了,后来却被指出是错误的. 这问题至今未解决*.

拓扑研究的最大推动力来自 Riemann 的复变函数论工作. Riemann 在 1851 年他的博士论文中以及在他的 Abel 函数的研究里[③],都强调说,要研究函数,就不可避免地需要位置分析学的一些定理. 在他的这些研究里,他发现有必要引进 Riemann 面的连

---

① *Königlich Sächsischen Ges. der Wiss. zu Leipzig*, 17, 1865, 31 ~ 68 = *Werke*, 2, 473~512;也见第 519 页.

② *Proceedings of the Royal Geographical Society*, 1, 1879, 259 ~ 261 = *Coll. Math. Papers*, 11, 7 ~ 8.

③ *Jour. für Math.*, 54, 1857, 105 ~ 110 = *Werke*, 91~96;也看 *Werke*, 479 ~ 482.

*请参看 K. Appel 和 W. Haken 的"Every planar map is four colorable", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(1976), 711~712. ——译者注

通性. 他的连通性定义如下:"如果在[具有边界的]曲面 F 上能画 n 条闭曲线 a_1, a_2, $\cdots$, a_n,它们各自单独地或集体地都不能包围曲面 F 的一部分,但是它们连同任意另一条闭曲线就能包围,这曲面就说是 $n+1$ 阶连通的."关于降低连通性的阶,Riemann 写道:

> 利用一条横剖线(Querschnitt),即,整个位于曲面内部并连接曲面的一个边界点到另一边界点的一条线,能把一个 $n+1$ 阶连通的曲面变成一个 n 阶连通的曲面 F'. 由于沿着割线剪开而产生的边界部分,在尔后剪开时仍起着边界的作用,因而一条横剖线不能通过一个点多于一次,但能以它的早先的点之一作为端点……要把这些考虑应用到无边界的曲面,即闭曲面,必须先任意地指定一点,把这曲面变成有边界的,使得第一次剪开曲面时就利用这个点以及一条以这点作起点和终点的横剖线,即一条闭曲线.

Riemann 给出锚环或环面(图 50.5)这个例子. 它是三阶连通的[亏格 1 或一维 Betti 数 2];利用一条闭曲线 abc 和一条横剖线 $ab'c'$,就把它变成单连通的曲面.

Riemann 就这样按照曲面的连通性把曲面分类,并且认识到,他已经引进了一个拓扑性质. 若用 19 世纪后期代数几何学家所使用的曲面的亏格这个术语来说,Riemann 事实上已经对闭曲面按亏格分类;如果曲面是亏格 p 的,把它剪成单连通的曲面所需要的纽形剖线[Rückkerschnitte]的个数就是 $2p$,并且 $2p+1$ 条就能把这曲面剪成两片. 他认为下述断言在

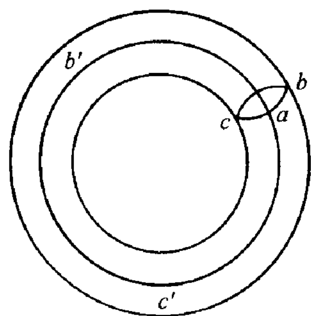


图 50.5

直观上是明显的:如果两个(能定向的)闭 Riemann 曲面拓扑等价,它们就具有相同的亏格.他还看出,所有亏格零的闭的(代数的)曲面,即闭连通的曲面,都拓扑地(保角地并且双有理地)等价.每一个都能拓扑地映射成球面.

因为 Riemann 曲面的结构复杂,而拓扑等价的图形有相同的亏格,所以一些数学家寻找较简单的结构. William K. Clifford 证明了[①]:具有 w 个支点的 n 值函数的 Riemann 曲面能够变换成具有 p 个洞的球面,这里 $p=(w/2)-n+1$ (图 50.6). Riemann 可能知道并且用了这个模型. Klein 提出具有 p 个柄的球面作为另一种拓扑模型(图 50.7)[②].

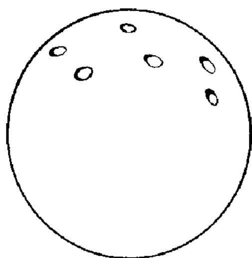


图 50.6 有 p 个洞的球面

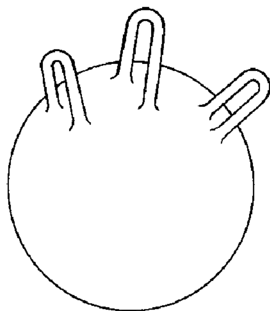


图 50.7 有 p 个柄的球面

许多人研究了闭曲面的拓扑等价问题.要想叙述这方面的主要结果,必须注意能定向的(orientable)曲面这一概念.一个能定向的曲面是这样一个曲面:它能三角剖分,并且能指定全体(弯曲的)三角形的定向,使得在作为两个三角形的一条公共边的任一边上所诱导出来的定向相反.例如球面是能定向的,但是射影平面(见下文)是不能定向的.这是 Klein 发现的[③].他在这篇论文里所澄清的主要结果是:两个能定向的闭曲面同胚,当且仅当它们具有

① *Proc. Lon. Math. Soc.*, 8, 1877, 292～304 = *Math. Papers*, 241～254.

② *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, B. G. Teubner, 1882;Dover 重印英译本,1963,也见 Klein 的 *Ges. Math. Abh.*, 3,499～573.

③ *Math. Ann.*, 7,1874, 549～557 = *Ges. Math. Abh.*, 2,63～77.

相同的亏格. Klein 还指出:对于具有边界的能定向的曲面,还必须加上边界曲线的条数相等这一条件. 这个定理是 Jordan 早先证明过的①.

Klein 在 1882 年引进现在所谓的 Klein 瓶这一曲面(图 50.8)时[见 272 页注②所引的论文的第 23 节],就强调过:即使是二维的闭图形,情况也可以很复杂. Klein 瓶的瓶颈穿进了瓶,但不跟瓶相交,然后终于跟瓶底沿着 C 光滑地粘连起来. 沿着 D,曲面并未被穿破,而管子进入了曲面. Klein 瓶无边,无内并且无外;它是单侧的,它的一维连通数是 3,即亏格是 1. 在三维 Euclid 空间中做不出 Klein 瓶.

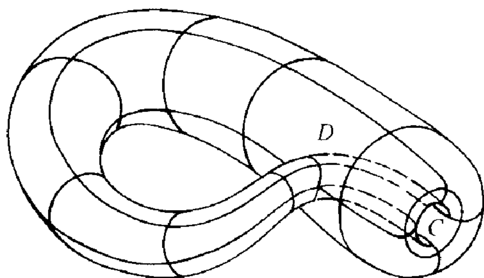


图 50.8

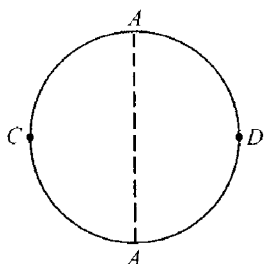


图 50.9

射影平面是颇为复杂的闭曲面的另一例. 它可以拓扑地表示成一个圆域,其每一对对径的边界点互相等同起来(图 50.9). 无穷远直线用半圆周 CAD 表示. 这曲面是闭的,它的连通数是 1,即它的亏格是 0. 也可以把一个圆域的圆周跟一条 Möbius 带的边界(只这一条边界)粘连起来,做成射影平面,虽然在三维 Euclid 空间中还是不能做出射影平面,使得应该不同的点不重合.

拓扑研究的另一推动力来自代数几何. 我们已经提到过(第 39 章第 8 节),几何学家曾经转而研究表示两复变数代数函数的定义域的四维"曲面",并且,以跟二维 Riemann 曲面上的代数函数和积分的理论相仿的方式,引进了四维曲面上的积分. 为了研究

① *Jour. de Math.*, (2),11,1866, 105 ~ 109 = *Œuvres*, 4,85~89.

这些四维图形,探讨了它们的连通性,并且看出这样的图形不能用一个数字来刻画,像用亏格来刻画 Riemann 曲面一样. Emile Picard 在 1890 年左右的一些研究中揭露:刻画这样的图形,至少需要一个一维的和一个二维的连通数.

Eurico Betti(1823—1892)是比萨大学的一位数学教授,他认识到研究更高维图形的连通性的必要.他进而断定考虑 n 维同样地有意义.他曾在意大利见到过 Riemann,当时 Riemann 因为健康的原因在意大利度过几个冬季. Betti 从 Riemann 知道 Riemann 本人以及 Clebsch 的工作. Betti① 引进了从 1 到 $n-1$ 维的每一维的连通数.如果在一个几何图形上能画若干条闭曲线,而不把图形分成不相连的区域,这种闭曲线的最多条数就是一维连通数(这个数加 1 就是 Riemann 的连通数).如果图形上能作若干个闭曲面,而它们集体地不成为这图形的任何三维区域的边界,这种闭曲面的最多个数就是二维连通数.更高维的连通数有相仿的定义.这些定义中所涉及的闭曲线、闭曲面和更高维的闭图形叫作闭链(如果一个曲面有边界,曲线必须是横剖线;即从一个边界的一点到另一个边界的一点的曲线.所以,一个有限长的空心管子的一维连通数是 1,因为能作从一端到另一端的一条横剖线,而不把曲面分隔成两部分).对于用来表示复数代数函数 $f(x, y, z)=0$ 的四维图形,Betti 证明了一维连通数等于三维连通数.

4. Poincaré 在组合拓扑方面的工作

19 世纪快结束时,组合拓扑中发展得颇为完善的唯一区域是闭曲面理论. Betti 的工作只是一个更广的理论的起点.最先系统地一般地探讨几何图形的组合理论的人,公认为是组合拓扑的奠基者,即 Henri Poincaré(1854—1912).他是巴黎大学的数学教

① *Annali di Mat.*, (2),4,1870~1871,140~158.

授，被认为是 19 世纪最后四分之一和本世纪初期的领袖数学家，并且是对于数学和它的应用具有全面知识的最后一个人．他写了大量研究论文、教本和通俗论文，涉及几乎数学的所有基本领域以及理论物理、电磁理论、动力学、流体力学和天文学的主要领域．他的最杰出的著作是《天体力学的新方法》(*Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*，三卷，1892—1899)．自然科学问题是他的数学研究的动机．

Poincaré 在从事于我们即将说明的组合理论之前，对微分方程的定性理论这个拓扑的另一领域作出了贡献(第 29 章第 8 节)．这个理论所处理的是积分曲线的形状和奇异点的性质，所以基本上是拓扑工作．对于组合拓扑的贡献是由下述问题激发出来的：当 x，y，z 都是复数时，确定代表代数函数 $f(x, y, z) = 0$ 的四维"曲面"的结构．他断定系统地研究一般的或 n 维的图形的位置分析是必要的．他在 1892 和 1893 年的《报告》(*Comptes Rendus*)中发表了一些短文，然后于 1895 年发表了一篇基本性的论文[①]，接着是一直到 1904 年发表在几种期刊上的五篇长的补充．他认为他在组合拓扑方面的工作与其说是拓扑不变性的一种研究，不如说是研究 n 维几何的一种系统方法．

Poincaré 在他的 1895 年的论文里，企图通过用 n 维图形的解析表示来建立 n 维图形的理论．在这样的研究中他没有取得很多的进展，因而他转向流形的即 Riemann 曲面的推广的纯几何理论．如果一个图形的每一个点有一个邻域，同胚于 $n-1$ 维实心球的内部，这图形就是一个 n 维的闭流形．所以圆周(以及任何同胚图形)是一个一维流形．球面或环面是二维流形．闭流形之外，有带边界的流形．正方体或实心环是带边界的三维流形．每一个边界点的邻域只是二维球的内部的一部分．

Poincaré 最后所采用的办法出现在他的第一个补充性的附录

① *Jour. de l'Ecole Poly.*，(2)，1，1895，1 ~ 121 = *Œuvres*，6，193~288.

里①. 他研究流形使用的是弯曲的胞腔或图形小块,但我们阐述他的思想却将使用后来 Brouwer 所引进的术语:单形(simplex)和复形(complex). 一个单形只不过是一个 n 维的三角形. 就是说,零维单形是一个点;一维单形是一条线段;二维单形是一个三角形;三维单形是一个四面体;n 维单形是一个具有 $n+1$ 个顶点的广义的四面体. 一个单形的较低维的面还是单形. 一个复形是具有下述性质的一组有限多个单形:组中任何二个单形的交,如果有的话,是一个公共的面,并且组中每一个单形的每一个面也是组中的一个单形. 单形也叫胞腔(cell).

为了组合拓扑的目的,我们对每一维数的每一个单形赋予一个定向. 例如,以 a_0, a_1 和 a_2 为顶点的二维单形(一个三角形),通过选定顶点的一个顺序,譬如说是 $a_0a_1a_2$,就给了它一个定向;把这样定了向的这二维单形记作 E^2. 从这顺序经过偶数个置换所得到的任何顺序,都说是具有同一个定向. 所以,$(a_0a_1a_2)$、$(a_2a_0a_1)$ 或 $(a_1a_2a_0)$ 都给出 E^2. 从这个基本的顺序经过奇数个置换所得到的任何顺序,都代表相反定向的单形. 所以 $-E^2$ 由 $(a_0a_2a_1)$ 或 $(a_1a_0a_2)$ 或 $(a_2a_1a_0)$ 给定.

一个单形的边缘由这单形所包含的低一维的单形组成. 所以一个二维单形的边缘由三个一维单形组成. 但是边缘必须取适当的定向. 我们按照下述规律来得到定了向的边缘:单形 E^k

$$a_0a_1a_2\cdots a_k$$

在它的边缘的每一个 $k-1$ 维的单形上诱导出定向

$$(1)\qquad (-1)^i(a_0a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_k).$$

以这里的 k 个点为顶点的一个定向单形 E_i^{k-1} 可以具有(1)所给出的定向;这时候,我们说 E_i^{k-1} 跟 E^k 的关联数(incidence number)是 1,以表示 E_i^{k-1} 的定向相对于 E^k 的关系. E_i^{k-1} 可以具有相反的

① *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 13, 1899, 285 ~ 343 = *Œuvres*, 6, 290~337.

定向,这时候关联数是 -1. 不管关联数是 1 或 -1,基本的事实是:E^k 的边缘的边缘是 0.

对于一个给定的复形,可以作它的 k 维定向单形的线性组合. 例如,如果 E_i^k 是一个 k 维定向单形,并且 c_i 是一个正或负的整数,

$$(2)\qquad C^k = c_1E_1^{k-1} + c_2E_2^{k-1} + \cdots + c_lE_l^{k-1},$$

这样的一个线性组合叫做一个链(chain). 整数 c_i 只不过告诉我们应计算这给定的单形多少次,负数还表明这单形的定向的改变. 如果我们的图形是由四个点($a_0a_1a_2a_3$)确定的四面体,我们能作链 $C^3 = 5E_1^3$. 任一链的边缘是这链的所有单形的所有低一维的单形的和,每一单形都带上适当的关联数,并且带上(2)中出现的次数. 链的边缘既然是链中出现的每一个单形的边缘的和,链的边缘的边缘便是零.

一个边缘为零的链叫作一个闭链(cycle). 所以,有些链是闭链. 闭链之中有些是其他链的边缘. 例如单形 E_1^3 的边缘是一个闭链,并且是 E_1^3 的边界. 但是,如果我们原来考虑的图形不是这个三维单形,而是这个三维单形的边界曲面,我们还会有这同一个闭链,但它已不是边界. 举另一例,平环(图 50.10)上的链

$$C_1^1 = (a_0a_1) + (a_1a_2) + (a_2a_3) + \cdots + (a_5a_0)$$

是一个闭链;因为 a_1a_2 的边缘是 $a_2 - a_1$ 等,整个链 C_1^1 的边缘是零. 但是 C_1^1 并不是任何一个二维链的边缘. 这在直观上是明显的,因为所讨论的复形是平环,因而内洞的内部不是图形的部分.

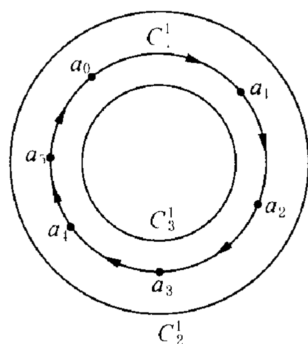


图 50.10

有可能两个闭链中的每一个都不是边缘,但它们的和或差却是一个区域的边界. 例如,C_2^1 和 C_3^1(图 50.10)的和就是这平环的整个面积的边界.

这样的两个闭链叫做相关的. 一般地说,闭链 C_1^k, C_2^k, …, C_r^k 叫做相关的,如果

$$\sum_{i=1}^{r} c_i C_i^k$$

是边缘,其中 c_i 不都是零.

然后 Poincaré 引进他称之为 Betti 数(为了归功于 Enrico Betti)的那些量. 考虑复形中某一个维数的所有可能的单形,该维数的无关的闭链的个数就叫做该维数的 Betti 数(Poincaré 实际上用的数是 Betti 的连通数加 1). 例如,对于平环这个例子,零维 Betti 数是 1,因为任一点都是一个闭链,但两个点是连接它们的线段的边缘. 一维 Betti 数是 1,因为存在不为边缘的一维闭链,但任意两个这样的闭链(它们的和或差)就是边缘. 二维 Betti 数是零,因为二维单形的链中无闭链. 人们可用圆域跟环作比较,来领会这些数的意义. 圆域的每一个一维闭链都是边缘,从而一维 Betti 数是零.

在 1899 年的这篇论文里,Poincaré 还引进了他所称的挠系数(torsion coefficient). 一个更复杂的结构,例如射影平面,可能有一个不为边缘的闭链,而 2 倍这闭链却是边缘. 例如,如果把三角形都像图 50.11 所表明的那样定向,四个三角形的边界就是 BB 这条直线的 2 倍(我们必须记着 AB 和 BA 是同一条线段). 这个数 2 就叫做一个挠系数,并且这相应的边线 BB 叫做一个挠闭链.

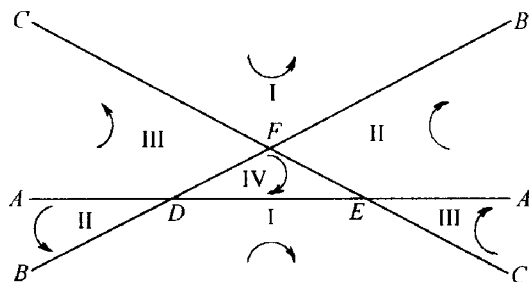


图 50.11

即使从这些极简单的例子已经清楚可见，一个几何图形的 Betti 数和挠系数确实能够以一种方式把一个图形跟另一个区别开来，例如平环不同于圆域.

Poincaré 在他的第一篇(1899)和第二篇补充中①，介绍了一个复形的 Betti 数的算法. 每一个 q 维单形 E_q 的边缘上的 $q-1$ 维单形有关联数 $+1$ 或 -1；指定不在 E_q 的边缘上的一个 $q-1$ 维单形以零为关联数. 然后能作一个矩阵，它表明第 j 个 $q-1$ 维单形的，相对于第 i 个 q 维单形而说的关联数 ε_{ij}^q. 对于每一个非零的维数 q，有这样的一个矩阵 T_q. T_q 的行数是复形中的 q 维单形的个数，列数是 $q-1$ 维单形的个数. 据此，T_1 给出顶点相对于棱的关联数，T_2 给出一维单形相对于二维单形的关联数，等等. 通过对矩阵作初等运算，能够使非主对角线上的元素都变成零，并使这对角线上的元素是正整数或零. 设这些对角线上的元素中 γ_q 个是 1. Poincaré 证明了：q 维的 Betti 数 p_q(即 Betti 的连通数加 1)是

$$p_q = \alpha_q - \gamma_{q+1} - \gamma_q + 1,$$

这里 α_q 是 q 维单形的个数.

Poincaré 把具有挠系数的复形跟不具有挠系数的复形区别开来了. 在后一情形，对于所有的 q，主对角线上的所有数都是零或 1. 大于 1 的数表明挠系数的出现.

他还引进了 n 维复形 K^n 的示性数(characteristic) $N(K^n)$. 如果复形有 α_k 个 k 维单形，按定义

$$N(K^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k.$$

这个量是 Euler 数 $V-E+F$ 的一个推广. 关于这个示性数，Poincaré 的结果是：如果 p_k 是 K^n 的 k 维 Betti 数，那么②

---

① *Proc. Lon. Math. Soc.*, 32, 1900, 277～308 = *Œuvres*, 6, 338～370.

② 这些 p_k 比 Poincaré 的小 1. 这里我们使用现在习惯的说法.

$$N(K^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_k.$$

这个结果叫做 Euler-Poincaré 公式.

Poincaré 在他 1895 年的论文中介绍了一个基本定理,称为对偶定理(duality theorem). 它涉及一个闭流形的 Betti 数. 我们已经说过,一个 n 维闭流形是一个复形,它的每一点有一个邻域同胚于 n 维 Euclid 空间的一个区域. 这定理说:在一个 n 维的能定向的闭流形中,p 维的 Betti 数等于 $n-p$ 维的 Betti 数. 然而他的证明并不完全.

Poincaré 在致力于区别复形时,另外引进了(1895)复形的基本群(fundamental group)这一概念,也称为 Poincaré 群或第一同伦群. 它今天在拓扑中起着相当重要的作用. 想法来自考虑单连通的平面区域与多连通的平面区域的区别. 在圆域的内部,所有闭曲线都能缩成一点. 但是在平环上,一条闭曲线能否缩成一点,要看它是否包围平环的内圆边界而定.

考虑以这复形的一点 y_0 为起点和终点的全体闭曲线,就可以得到更明确的理解. 然后在这些闭曲线中,把能通过在复形空间的连续运动而从一条变成另一条的那些闭曲线说成是互相同伦的(homotopic),并把它们归于一类. 这样平环中的从 y_0 开始而又回到 y_0 的(图 50.12)、并且不包围内边界的闭曲线就是一类;而那些从 y_0 开始而又回到 y_0 的,确实包围内边界的,是另一类. 那些从 y_0 开始而又回到 y_0 的,并且包围内边界 n 次的,又是另一类.

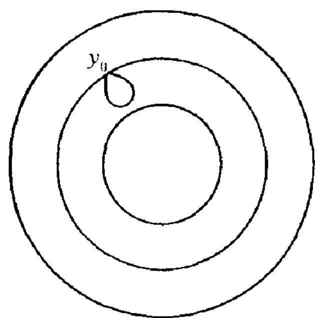


图 50.12

现在能够在类和类之间定义一种运算,几何地说,就是从 y_0 开始,描出一类中的任一曲线,然后描出第二类中的任一曲线. 两条曲线选取的顺序,以及描出一条曲线

时所取的方向，都加以区别。于是类就形成一个群，叫作这复形 K 相对于基点 y_0 的基本群。现在把这个非交换的群记作 $\pi_1(K, y_0)$。对于道路连通的复形，这个群并不真正依赖于 y_0 这个点。换句话说，在 y_0 处的这个群和在 y_1 处的同构。平环的基本群是无穷循环群。分析学中常用的单连通区域，例如圆周和它的内部，它的基本群就只有一个元素，恒同元素。正如圆域跟平环由于它们的基本群而有区别一样，也能把更高维的复形在这方面显著地区别出来。

Poincaré 遗留下了一些重要的猜测。他在他的第二篇补充里断言，如果两个闭流形有相同的 Betti 数和挠系数，它们就同胚，但是在第五篇补充[①]里，他给出了一个三维流形，它的 Betti 数和挠系数跟三维球(四维实心球的表面)的相同，但它不单连通。因此他增加单连通性作为一个条件。他然后指出存在三维流形，它们具有相同的 Betti 数和挠系数，但具有不同的基本群，从而它们不同胚。James W. Alexander(1888—1971)是普林斯顿(Princeton)大学的数学教授，后来在高等学术研究所，他证明了[②]两个三维流形可以有相同的 Betti 数、挠系数和基本群，却还是不同胚。

Poincaré 在他的第五篇补充(1904)里作了一个颇加限制的猜测，即，每一个单连通的、闭的、能定向的三维流形同胚于三维球。这个闻名的猜测曾经被推广成：每一个单连通的、闭的 n 维流形，如果具有 n 维球的 Betti 数和挠系数，它就同胚于 n 维球。Poincaré 的猜测以及这推广了的推测都还没有证明[③]。

另一个闻名的猜测，叫作 Poincaré 的主猜测(Hauptvermu

① *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 18, 1904, 45～110 = *Œuvres*, 6, 435～498.

② *Amer. Math. Soc. Trans.*, 20, 1919, 339～342.

③ 对于 $n \geq 5$，这推广的猜测曾经被 Stephen Smale (*Amer. Math. Soc. Bull.*, 66, 1960, 373～375), John R. Stallings (*ibid.*, 485～488)和 E. C. Zeeman (*ibid.*, 67, 1961, 270)证明。后来 $n = 4$ 时也被证明，现在只剩下 $n = 3$。

tung,最重要的猜测).这个猜测说,如果 T_1 和 T_2 是同一个三维流形的单纯(不必是平直的)剖分,那么 T_1 和 T_2 有同构的重分①.

5. 组合不变量

确立组合性质的不变性的问题,就是要证明:如果任一复形在点集的意义下同胚于一已知复形,它就和这已知复形有相同的组合性质. Betti 数和挠系数是组合不变量,这是由 Alexander 首先证明的②,他的结果是:如果 K 和 K_1 是任意两个同胚的(作为点集的)多面体 P 和 P_1 的任意单纯剖分(不必平直的),那么 P 和 P_1 的 Betti 数相同,挠系数也相同.逆命题不成立,即两个复形的 Betti 数相同,挠系数也相同,并不保证这两个复形同胚.

L. E. J. Brouwer 贡献了另一个重要的不变量.通过函数论的问题,他对拓扑产生了兴趣.他寻求证明亏格 $g>1$ 的 Riemann 曲面,在保角变换下,有 $3g-3$ 个等价类,因而被引导到考虑相关的拓扑问题.他证明了③在下述意义下复形的维数的不变性:如果 K 是一个多面体 P 的一个 n 维的单纯剖分,那么 P 的每一个单纯剖分,以及同胚于 P 的任何多面体的每一个这种剖分,也是 n 维复形.

这个定理的证明,跟 Alexander 的定理的证明一样,都运用了 Brouwer 的一个方法④,即连续变换的单纯逼近.单纯变换(单形到单形)本身只不过是连续变换的更高维的模拟,而连续变换的单

---

① 已经证明:对于低于三维的有限的单纯复形(这比流形广),主猜测成立,但对于不低于五维的这种流形,主猜测错误.对于不高于三维的流形,主猜测正确,但对于不低于四维的流形,主猜测对否是一个未解决的问题.见 John Milnor, *Annals of Math.*, (2),74,1961,575～590.

② *Amer. Math. Soc. Trans.*, 16,1915,148～154.

③ *Math. Ann.*, 70,1910/1911,161～165 和 71,1911/1912,305～313.

④ *Math. Ann.*, 71,1911/1912,97～115.

纯逼近是用于连续函数的线性逼近的模拟. 如果逼近的定义区域小,那么,对于不变性证明的目的来说,逼近就能用来替代连续变换.

6. 不动点定理

组合的方法,除了服务于判别复形之外,还产生了不动点定理(fixed point theorems). 这些定理有重大的几何意义,又在分析学中有应用. Brouwer 通过引进从一个复形到另一个的映射类①和一个映射的映射度②这些概念(这里不详说),能够第一次处理所谓一个流形上的向量场的奇点. 考虑圆周 S^1、球面 S^2 和 $n+1$ 维 Euclid 空间中的 n 维球 $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$. 在 S^1 上,能够在每一点处都取一个切向量,使得这些向量的长和方向绕着这圆周连续地变,而无一个向量的长是零. 我们把这说成:S^1 上有一个无奇点的连续向量场. 但是,S^2 上不存在这样的一个场. Brouwer 证明了③ S^2 上出现的情形必也出现在每一个偶数维的球上;即,偶维球上的连续向量场必定至少有一个奇点.

复形到复形的连续变换理论跟奇点理论有密切关系. 特别有兴趣的是在这种变换下的不动点(fixed point). 如果用 $f(x)$ 表示一点 x 在这种变换下的象点,那么一个不动点就是满足 $f(x)=x$ 的点. 可以在任一点 x 处,引进从 x 到 $f(x)$ 的一个向量. 在一不动点处,这向量不确定,这个点是一个奇点. 关于不动点的基本定理是 Brouwer 的④. 这定理适用于 n 维单形(或它的同胚象),定理

---

① *Proceedings Koninklijke Akademie von Wettenschappen te Amsterdam*, 12, 1910, 785～794.

② *Math. Ann.*, 71, 1911/1912, 97～115.

③ *Math. Ann.*, 71, 1911/1912, 97～115.

④ *Math. Ann.*, 71, 1911/1912, 97～115.

说:n 维单形到它自己的连续变换至少有一个不动点. 例如,一个圆盘到自己的连续变换至少有一个不动点. 在同一篇论文里 Brouwer 还证明了:偶维球到它自己的每一个一一的连续变换,如果能形变为恒同变换,它就至少有一个不动点.

Poincaré 在 1912 年逝世前不久,还论证了[①]:如果某拓扑定理成立,有限制的三体问题中将会存在周期轨道. 这个拓扑定理说的是,如果两个圆之间的平环到自己的一个拓扑变换,把每一个圆变成自己,把一个圆沿着一个方向转动,而把另一个圆沿着相反的方向转动,同时保持面积不变,那么在平环里至少存在两个不动点. Poincaré 的这个"最后定理"是 George D. Birkhoff 证明的[②].

Birkhoff 和 Oliver D. Kellogg 在他们合写的一篇论文里[③],把不动点定理推广到了无穷维的函数空间, Jules P. Schauder (1899—1943) 在一篇文章里[④],以及 Schauder 和 Jean Leray (1906—1998)在合写的一篇论文里[⑤],应用不动点定理来证明微分方程的解的存在. 这些应用所运用的一个关键定理是:如果 T 是 Banach 空间中一个闭的、凸的紧致集到这集自身的一个连续映射,那么 T 有一个不动点.

如何运用不动点定理来证明微分方程的解的存在,最好是从一个颇为简单的例子来理解. 考虑区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y),$$

初始条件是 $x = 0$ 处 $y = 0$. 解 $\phi(x)$ 显然满足方程

---

① *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 33, 1912, 375 ~ 407 = *Œuvres*, 6, 499~538.

② *Amer. Math. Soc. Trans.*, 14, 1913, 14 ~ 22 = *Coll. Math. Papers*, 1, 673 ~681.

③ *Amer. Math. Soc. Trans.*, 23, 1922, 96 ~ 115 = Birkhoff, *Coll. Math. Papers*, 3, 255~274.

④ *Studia Mathematica*, 2, 1930, 170~179.

⑤ *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, 51, 1934, 45~78.

$$\phi(x) = \int_0^1 F(x, \phi(x))\mathrm{d}x.$$

我们引进一般的变换

$$g(x) - \int_0^x F(x, f(x))\mathrm{d}x,$$

这里的 $f(x)$ 是一个任意函数. 这个变换把 f 联系到 g, 并且能证明它在由 $[0, 1]$ 上的连续函数所形成的空间中是连续的. 我们所寻找的解 ϕ 便是这个函数空间的一个不动点. 如果我们能证明这函数空间满足使一条不动点定理成立的条件, 那么 ϕ 的存在就证明了. 这恰恰是适用于函数空间的那些不动点定理所做的事. 这个简单的例子所说明的方法, 还使我们能证明非线性的偏微分方程的解的存在, 这些方程在变分学和流体动力学里是常见的.

7. 定理的推广和领域的扩展

掌握了 Poincaré 和 Brouwer 的思想的一些人, 已经把拓扑扩展到很大的范围, 使得它成为今天数学的最活跃领域之一. Brouwer 自己扩展了 Jordan 曲线定理①. 这一定理(第 42 章第 5 节)可叙述如下: 设 S^2 为二维球(曲面), J 为 S^2 上的一条闭曲线(拓扑等价于一个 S^1), 则 $S^2 - J$ 的零维 Betti 数是 2. 既然这个 Betti 数是分支的个数, J 就把 S^2 分开成两个区域. Brouwer 的推广说: 一个 $n-1$ 维流形把 n 维 Euclid 空间分开成两个区域. Alexander② 推广了 Poincaré 的对偶定理, 因而间接地推广了 Jordan 曲线定理. Alexander 的定理说: n 维球 S^n 上的一个复形 K 的 r 维 Betti 数等于余空间 $S^n - K$ 的 $n-r-1$ 维 Betti 数, $r \neq 0$ 和 $r \neq n-1$; 而当 $r = 0$ 时, K 的零维 Betti 数等于 1 加上 $S^n - K$ 的 $n-1$ 维 Betti 数, 当 $r = n-1$ 时, K 的 $n-1$ 维 Betti 数等于 $S^n - K$ 的零维

① *Math. Ann.*, 71, 1911/1912, 314～319.

② *Amer. Math. Soc. Trans.*, 23, 1922, 333～349.

Betti数减1[①]. 这定理推广了Jordan曲线定理,因为如果取 $n-1$ 维球 S^{n-1} 当作 K,这定理就是说: S^{n-1} 的 $n-1$ 维Betti数(那是1)等于 S^n-S^{n-1} 的零维Betti数减1,所以 S^n-S^{n-1} 的零维Betti数是2,即 S^{n-1} 分开 S^n 成两个区域.

Betti数的定义有各种的改变和推广. Veblen和Alexander[②]引进了模2链和闭链;换句话说,用不定向的单形替代定向的单形,把整数系数取模2. 链的边缘也这样算. Alexander后来引进了[③]系数为整数模 m 的链和闭链. Solomon Lefschetz(1884—1972)建议用有理数做系数[④]. Lev S. Pontrjagin(1908—1988)更进一步推广,用一个交换群的元素做链的系数[⑤]. 这一概念包括了上述的各类系数,以及还用过的实数模1的另一类系数. 所有这些推广,虽然确实导致了更广的定理,但并未使Betti数和挠系数在区别复形方面更加有效.

在基本的组合性质的确切叙述方面,从1925到1930年一些人作了另一改变,可能是Emmy Noether建议的. 这就是把链、闭链和边缘链的理论用群论的语言改写一遍. 同维的链可以按照明显的方式相加,即把同一个单形的系数相加;并且,既然闭链也是链,它们也能相加,而且它们的和还是闭链. 所以链和闭链都组成群. 在给定的复形 K 上,每一个 k 维链有一个 $k-1$ 维边缘链,并且两个链的和的边缘是这两个链各自的边缘链的和. 因此,从链到边缘这种关系建立了从 k 维链的群 $C^k(K)$ 到 $k-1$ 维链的群的一个子群 $H^{k-1}(K)$ 的一个同态. 所有 k 维闭链($k>0$)是 $C^k(K)$ 的一个子群 $Z^k(K)$,并且在这同态下的象就是 $C^{k-1}(K)$ 的恒同元素

---

① Alexander是在链的系数是整数模2(见下一段)这个条件下叙述他的定理的. 我们的叙述中用通常的整数系数.

② *Annals of Math.*, (2),14,1913,163～178.

③ *Amer. Math. Soc. Trans.*, 28,1926,301～329.

④ *Annals of Math.*, (2),29,1928,232～254.

⑤ *Annals of Math.*, (2),35,1934,904～914.

或 0. 既然每一个边缘链是一个闭链，$H^{k-1}(K)$ 就是 $Z^{k-1}(K)$ 的一个子群.

有了这些事实，就可以作下述定义：对于任何一个 $k \geqslant 0$，k 维闭链的群 $Z^k(K)$，模边缘链的群 $H^k(K)$ 这个子群，所作成的商群，叫作 K 的第 k 个同调群(homology group)，记作 $B^k(K)$. 这个商群的线性无关的母元的最大个数叫作这复形的第 k 个 Betti 数，记作 $p^k(K)$. 第 k 个同调群也可以含有有限循环群，这些对应着挠闭链. 事实上，这些有限群的阶就是挠系数. 复形的同调群有了这群论的确切叙述之后，许多旧结果都能同样地重新叙述.

20 世纪初期的最有意义的推广，是引进一般空间的同调论，例如紧致度量空间的同调群，它不同于起初研究的复形的同调论. 基本的设计来自 Paul S. Alexandroff(1896—1982)①，Leopold Vietoris(1891—?)②和 Eduard Čech(1893—1960)③. 因为它们牵涉到同调论的崭新的研究途径，这里不作介绍. 但是，我们应该指出，这方面的工作标志着把点集拓扑和组合拓扑融合起来的一步.

参考书目

Bouligand, Georges: *Les Définitions modernes de la dimension*, Hermann, 1935.

Dehn, M., and P. Heegard: "Analysis Situs", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907～1910, Ⅲ AB3, 153～220.

Franklin, Philip: "The Four Color Problem", *Scripta Mathematica*, 6, 1939, 149～156, 197～210.

Hadamard, J.: "L'Œuvre mathématique de Poincaré", *Acta Math.*, 38, 1921, 203～287.

Manheim, J. H.: *The Genesis of Point Set Topology*, Pergamon Press, 1964.

---

① *Annals of Math.*, (2), 30, 1928/1929, 101～187.

② *Math. Ann.*, 97, 1927, 454～472.

③ *Fundamenta Mathematicae*, 19, 1932, 149～183.

Osgood, William F. : "Topics in the Theory of Functions of Several Complex Variables", *Madison Colloquium*, American Mathematical Society, 1914, pp. 111～230.

Poincaré, Henri: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1916～1956, Vol. 6.

Smith, David E. : *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2,404～410.

Tietze, H. , and L. Vietoris: "Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1914～1931, Ⅲ AB13, 141～237.

Zoretti, L. , and A. Rosenthal: "Die Punktmengen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1923～1927, Ⅱ C9A,855～1030.

第 51 章

数 学 基 础

逻辑是不可战胜的，因为要反对逻辑还得使用逻辑.

Pierre Boutroux

我们知道，数学家对于逻辑不如逻辑学家对于数学那样关心. 数学和逻辑是精确科学的两只眼睛；数学派闭上逻辑眼睛，逻辑派闭上数学眼睛，各自相信一只眼睛能比两只看得更好.

Augustus de Morgan

1. 引　　言

20 世纪数学中最为深入的活动，是关于基础的探讨. 强加于数学家的问题，以及他们自愿承担的问题，不仅牵涉到数学的本性，也牵涉到演绎数学的正确性.

在这世纪的前期，有几种活动汇合起来把基础问题引到一个高潮. 首先是矛盾的发现，委婉地被称为悖论，在集合论中尤为突出. 已经提到过的 Burali Forti 悖论，就是这样的一个矛盾（第 41 章第 9 节）. 在 20 世纪的最初几年，还发现了一些其他的矛盾. 这些矛盾的发现显然深深地扰乱了数学家. 另外一个逐渐被认识到并在 20 世纪初显露出来的，是数学的相容性（consistency）问题（第 43 章第 6 节）. 鉴于集合论中的悖论，在这一领域中尤其应确立相容性.

在 19 世纪后期，有一些人已经开始重新考虑数学的基础，特别是数学对逻辑的关系. 这一方面的探讨（后面将较详细地说明）启示了某些数学家，认为数学可以建立在逻辑上. 另外一些人对于

逻辑原则的普遍应用,对于某些存在性证明之是否有意义,甚至对于信赖逻辑证明以作为数学结果的证实,都有疑问.在1900年以前已经冒了烟的争论,经悖论和相容性问题加上燃料,就爆发成大火.结果,全部数学的适当基础,就成了极其严重和普遍关心的问题.

2. 集合论的悖论

紧接在Cantor和Burali-Forti发现关于序数的悖论之后,又出现了一些另外的悖论或谬论.实际上悖论一词是含糊的,因为它可能是指一个貌似的矛盾.但是数学家实际上碰到的,都是毫无疑问的矛盾.我们先来看看它们是些什么.

Bertrand Russell(1872—1970)在1918年把一个悖论通俗化,成为"理发师"悖论.一个乡村理发师,自夸无人可与相比,宣称他当然不给自己刮脸的人刮脸,但却给所有自己不刮脸的人刮脸.一天他发生了疑问,他是否应当给自己刮脸.假如他自己刮脸的话,则按他声言的前一半,他就不应当给自己刮脸;但是假如他自己不刮脸的话,则照他自夸的,他又必须给自己刮脸.这理发师陷入了逻辑的窘境.

还有另一个悖论,是Jules Richard(1862年生)编造的[1].它的一种简化叙述是由G. G. Berry和Russell给出的,并由后者发表出来[2].这个简化了的悖论,也称为Richard悖论,它是这样说的:每一个整数都可用若干个字母的词描写出来.例如,36这个数可以描写为thirty-six(36)或four times nine(4乘9).第一种描写用了9个字母,第二种用了13个字母.描写任一给定的数都不止一种方法,但这是无关紧要的.现在把所有的正整数分成两组,第一

---

① *Revue Générale des Sciences*, 16,1905,541.

② *Proc. Lon. Math. Soc.*, (2),4,1906,29~53.

组包括所有那些(至少有一种方法)可以用不多于100个字母描写出来的数,第二组包括所有那些不论怎样描写都需要最少是101个字母的数.用100个或更少的字母只能描写有限多个数,因为用不多于100个字母最多只能有27^{100}个表达式(而且其中有些是没有意义的).于是在第二组中就有一个最小的整数.它可以用下列词组来描写:"the least integer not describable in one hundred or fewer letters."(不能用100个或更少的字母描写出来的最小的整数.)但是这一词组中的字母就少于100个.因此,不能用100个或更少的字母描写出来的最小的整数,就用少于100个字母描写出来了.

我们来看这个悖论的另一种形式,它最先是由Kurt Grelling(1886—1941)和Leonard Nelson(1882—1927)在1908年叙述的,发表在一个不著名的刊物[①]上.有些词是可以描写它们自身的.例如,"polysyllabic(多音节的)"这个词就是多音节的.另一方面,"monosyllabic(单音节的)"这个词却不是单音节的.我们称那些不能描写它们自身的词为异己的(heterological).换句话说,词X为异己的,若X自身并非X.现在我们把X换成"异己的"这个词.那么,"异己的"这个词就是异己的,如果异己的不是异己的.

Cantor在1899年给Dedekind的一封信中曾指出,人们要想不陷于矛盾的话,就不能谈论由一切集合所成的集合(第41章第9节).实质上这就是Russell的悖论的内容[《数学的原理》(*The Principles of Mathematics*),1903,p.101].由一切人组成的类并不是一个人.但由一切概念组成的类却是一个概念;由一切图书馆组成的类是一个图书馆;由一切基数大于1的集合组成的类也是这样一个集合.因此,有一些类不是它们自己的元素,而有一些则是它们自己的元素.这个对于类的描述,包括了一切类,并且这两

① *Abhandlungen der Friesschen Schule*, 2,1908,301~324.

种类型是互相排斥的. 我们用 M 表示一切包含自己为元素的那些类所成的类, 用 N 表示一切不包含自己为元素的那些类所成的类. 现在, N 本身也是一个类, 我们要问它是属于 M 还是属于 N? 若 N 属于 N, 则 N 就是它自己的一个元素, 因而必须属于 M. 另一方面, 若 N 为 M 的一个元素, 则因 M 和 N 是互相排斥的类, N 就不会属于 N. 于是 N 不是它自己的元素, 因而由于 N 的定义, 它应当属于 N.

所有这些悖论的起因, 如 Russell 和 Whitehead 指出的, 都在于一个要定义的东西是用包含着这个东西在内的一类东西来定义的. 这种定义也称为说不清的(impredicative), 特别发生在集合论中. Zermelo 在 1908 年曾指出, 一组数的下界的定义, 以及分析中其他一些概念的定义, 都是这种类型的定义. 因此经典分析包含着悖论.

Cantor 关于实数集合不可数的证明(第 41 章第 7 节)也用到了这样一个说不清的集合. 假定在所有正整数组成的集合与所有实数组成的集合 M 之间有一个一一对应. 而每一个实数又对应于一组整数. 于是每一个整数 k 都对应着一个集合 $f(k)$. 而 $f(k)$ 或是包含 k 或是不包含 k. 命 N 为所有那些使 k 不属于 $f(k)$ 的 k 所组成的集合. 这个集合 N(取某一顺序)为一个实数. 因而, 按假定的一一对应, 就应有一个整数 n 对应于 N. 若 n 属于 N, 则按 N 的定义, 它将不属于 N; 若 n 不属于 N, 则按 N 的定义, 它又应属于 N. 集合 N 的定义是说不清的, 这是因为要 k 属于 N, 必须且只须在 M 中有一个集合 K 使 $K = f(k)$ 并且 k 不属于 K. 这样, 在定义 N 时就用到了一些集合的全体 M, 它包含着 N 作为元素. 这就是说, 要定义 N, N 必须已经包含在 M 中.

在无意中陷入了引进说不清的定义的陷阱, 这是很容易的. 如定义一切包含多于 5 个元素的类所组成的类, 就定义了一个包含它自己的类. 同样, 一切能用 25 个或更少的字定义出来的集合所

组成的类 S,这句话就是以说不清的方式定义了 S.

正当数学家们不但接受了集合论并且还有大部分经典分析的时候,这些矛盾动摇了他们. 作为逻辑结构,数学已处于一种悲惨的境地,数学家们以向往的心情回顾这些矛盾被认识以前的美好时代.

3. 集合论的公理化

也许并不奇怪,数学家们首先是求助于把 Cantor 以相当随便的方式阐述的、现在所谓的朴素集合论加以公理化. 几何与数学的公理化曾解决了这些领域中的逻辑问题,似乎公理化也可能澄清集合论中的困难. 这项工作最先由德国数学家 Ernst Zermelo 所承担,他相信悖论起因于 Cantor 对集合的概念未加以限制. Cantor 在 1895 年[①]曾把一个集合定义为人们直观或思想中的不同事物的一个堆集. 这是有些含糊的,所以 Zermelo 希望,清楚明白的公理将会澄清集合的意义和集合应有的性质. Cantor 自己并非不知道他的集合概念是有麻烦的. 他在 1899 年给 Dedekind 的一封信[②]中,曾区别相容的和不相容的集合. Zermelo 认为他能够把集合限制为 Cantor 的相容的集合,而这对于数学就足够了. 他的公理系统[③]只包含由公理本身的叙述所定义的基本概念和关系. 在这些概念中有集合本身的观念和集合的属于关系. 只有公理所提供的集合的性质才可以用. 无穷集合的存在,以及集合的联合与子集的形成这样的运算,也由公理给出. 特别是 Zermelo 收入了选择公理(第 41 章第 8 节).

Zermelo 的计划是,只准许那些看来不大会产生矛盾的类进入集合论. 例如空类,任何一个有限类,以及自然数的类,看来是安

---

① *Math. Ann.*, 46,1895,481～512 — *Ges. Abh.*, 282～356.

② *Ges. Abh.*, 443～448.

③ *Math. Ann.*, 65,1908,261～281.

全地给定了一个安全的类，从它所形成的一些类，诸如任何一个子类，安全类的联合，以及一个安全类的所有子类所成的类，都应是安全类. 但是，他排除了求余，因为即使 x 是一个安全类，x 的余类，即在对象的某个大宇宙中所有的非 x(non-x)，也未必是安全的.

Abraham A. Fraenkel(1891—1965)①改进了 Zermelo 所发展的集合论，von Neumann② 又加以改革. 在 Zermelo-Fraenkel 系统中，避免悖论的希望寄托在对所容许的集合的类型加以限制，而同时又足够用来作为分析的基础. 但 von Neumann 的想法又略为大胆些. 他作了类(class)与集合(set)的区别. 类是大到不能包含在别的集合或类中的集合，而集合是限于可作为类的元素的类. 这样，集合就是安全的类. 如 von Neumann 指出的，导致矛盾并非由于承认了类，而是由于把它们当作别的类的元素.

Zermelo 的形式集合论，经过 Fraenkel，von Neumann 和他人的修改，对于开展可以说是全部经典分析所需要的集合论是适当的，而悖论也避免到这种程度，即至今在这个理论之内还未发现. 然而，公理化集合论的相容性尚未证明. 关于这个未解决的相容性问题，Poincaré 评论说："为了防备狼，羊群已用篱笆圈起来了，但却不知道在圈内有没有狼."

除开相容性的问题，集合论的公理化还用了选择公理，这是建立标准分析、拓扑和抽象代数的某些部分所需要的. 有些数学家认为这个公理应该反对，其中有 Hadamard，Lebesgue，Borel 和 Baire；而在 1904 年，当 Zermelo 用它去证明良序定理(第 41 章第 8 节)时，大量的反对意见涌现在刊物上③. 提出了这个公理是不是

---

① *Math. Ann.*，86，1921/1922，230～237 及后来的许多文章.

② *Jour. für Math.*，154，1925，219～240 及以后的文章.

③ 这些人的看法表现在一次著名的交换信件中. 见 *Bull. Soc. Math. de France*，33，1905，261～273. 还有 E. Borel：*Leçons sur la théorie des fonctions*，Gauthier-Villars，第 4 版，1950，150～158.

根本的,是否与其他公理相独立等问题,并且有一段时期没有解决(见第 8 节).

尽管相容性和选择公理的地位这些问题还未解决,集合论的公理化使数学家对于悖论可以放心,并且削弱了对基础的兴趣.但这时,无疑由于悖论和相容性问题所激发,关于数学基础的几派思想变得活跃而争论起来.这些哲学的提倡者不满意 Zermelo 等人所实行的公理方法.有些人反对它,是因为它假定了它所用的逻辑,而逻辑本身以及它与数学的关系也正处于研究的阶段中.另一些人更为彻底,反对依靠任何种类的逻辑,特别是把它用于无穷集合.要了解各派思想的论据,我们需要回顾一下过去.

4. 数理逻辑的兴起

有一种发展曾在集合论公理化中引起新的争论和不满,这种发展就是关于逻辑在数学中的地位的;它起源于 19 世纪逻辑的数学化.这个发展有它自己的历史.

在几何论证的符号化甚至机械化中显示出来的代数的威力,感动了 Descartes 和 Leibniz 一些人(第 13 章第 8 节),他们两人设想了一种比数量的代数更宽广的科学.他们设计了一种一般的或抽象的推理科学,它行使起来将有点像通常的代数,但可应用于一切领域中的推理.如 Leibniz 在他的一篇文章中所说的,“普遍的数学就好比是想象的逻辑,”应能论述“在想象范围内可精密确定的一切东西”.用这样的逻辑可建立思想的任何大厦,从它的简单元素到越趋复杂的结构.这种普遍代数将是逻辑的一部分,并且是代数化了的逻辑.Descartes 已经谨慎地开始了去建造逻辑的一种代数;这个工作的一个未完成的草稿现在还留存着.

Leibniz 追索着和 Descartes 相同的宽广目标,开创了一个更雄伟的方案.他一生都很注意逻辑,并且很早就神往于中世纪神学

家 Raymond Lull(1235—1315)的图式. Lull 的书《最大最终的艺术》(*Ars Magna et Ultima*)提出了结合已有的理念去产生新理念的朴素的机械方法,但他确实有可应用于一切推理的、关于逻辑的普遍科学的概念. Leibniz 离开了经院逻辑和 Lull,而为一种宽广演算的可能性所激动,这种演算将使人们在一切领域中能够机械地轻易地去推理. Leibniz 对于他的普遍符号逻辑的计划说道,这样一种科学,通常的代数只是它的一小部分,它将只受到必须服从形式逻辑的规律的约束. 他说,可以称它为"代数逻辑的综合".

这种广义的科学首先需要配备一种提供适合于思维的合理的普遍语言. 概念被分解成为一些原始的不相同的又不相重叠的概念,它们可以用一种几乎是机械的方式结合起来. 为了防止思想失误,他还认为必须利用符号. 在这里,代数符号对他思想的影响是明显的. 他想得到一种能明确表示人们的思想并有助于推理的符号语言. 这种符号语言正是他的"普遍的特征".

1666 年 Leibniz 写成他的《论组合的艺术》①,其中包括有他对于推理的普遍系统的早期计划. 后来他又写过许多片段,从未发表过,但可以在他的哲学著作的版本①中找到. 在他的最初尝试中,他把每一个原始概念配合上一个质数;由几个原始概念所组成的任一概念就表示为相应的质数的乘积. 例如,如果 3 代表"人"而 7 代表"有理性的",21 就代表"有理性的人". 随后他想要把通常三段论的法则翻译成为这个样式,但没有成功. 有时他还想用特殊的符号去代替质数,这时复杂的理念将表示为符号的结合. 实际上 Leibniz 认为原始理念的个数很少,但这被证明是错误的. 而只用合取(conjunction)这一个基本运算去结合原始理念也是不够的.

---

① 1690 年出版 = G. W. Leibniz: *Die philosophischen Schriften*, C. I. Gerhardt 主编,1875~1890, Vol. 4,27~102.

他还开始了真正逻辑代数的工作. 在他的代数中, Leibniz 已经直接间接地有了这样一些概念, 即我们现在所说的逻辑加法、乘法、等同、否定和空集. 他还注意到需要研究一些抽象关系, 如包含、一一对应、多一对应以及等价关系等. 他认识到其中有些具有对称和传递的性质. Leibniz 没有完成这项工作; 他未能超过三段论的法则, 他自己也认识到这是不能包括数学所用到的全部逻辑的. Leibniz 曾对 l'Hospital 等人说明过他的想法, 但他们未予注意. 他的逻辑工作直到 20 世纪初都未出版, 因而很少有直接的影响. 在 18 世纪和 19 世纪初, 有些人草拟过与 Leibniz 相似的计划, 但未能比他更前进一步.

Augustus De Morgan 采取了一种雄心较小却较为有效的办法. De Morgan 发表了《形式逻辑》(*Formal Logic*, 1847) 和很多文章, 其中有几篇发表在 *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 上. 他想修正并改进 Aristotle 的逻辑. 在他的《形式逻辑》中, 对 Aristotle 的逻辑增加了一条新的原则. 在 Aristotle 的逻辑中, 前提"有些 M 是 A"和"有些 M 是 B"是没有结论的; 并且事实上, 这种逻辑要求中项 M 必须用作全称的, 即必须出现"所有的 M". 但是 De Morgan 指出, 从"多数的 M 是 A"和"多数的 M 是 B"必定可以得出"有些 A 是 B". De Morgan 把这个事实表成定量的形式. 如果有 m 个 M, 而有 a 个 M 是 A 并有 b 个 M 是 B, 那么至少有 $(a+b-m)$ 个 A 是 B. De Morgan 的意见的要点就是: 词项(term)可以是定量的. 从而他就能够引进更多的正确的三段论式. 定量化还消去了 Aristotle 逻辑中的一个缺陷. 在 Aristotle 的逻辑中, 从"所有的 A 是 B"可以推出的结论"有些 A 是 B", 蕴含 A 的存在, 但它未必存在.

De Morgan 还开创了关系逻辑 (logic of relations) 的研究. Aristotle 的逻辑主要专注于"是"的关系, 并且不是肯定就是否定这个关系. De Morgan 指出, 这种逻辑不能证明: 如果马是动物, 那

么马尾巴是动物尾巴. 它肯定不能讨论像 x 爱 y 这样的关系. De Morgan 引进了讨论关系的符号,但没有把这个论题进行很远.

在符号逻辑领域内,De Morgan 以现在所谓的 De Morgan 法则而闻名. 照他的说法①,一个组(aggregate)的反面(contrary)是各个组(aggregates)的反面的复合(compound);一个复合的反面是各成分(components)的反面的组合. 这些法则表成逻辑记号便是

$$1-(x+y)=(1-x)(1-y),$$
$$1-xy=(1-x)+(1-y).$$

符号方法对于逻辑代数的功绩,重要的一步是 George Boole (1815—1864)做的,他基本上是由自学而成为科克(Cork)皇后学院的数学教授. Boole 确信语言的符号化会使逻辑严密. 他的《逻辑的数学分析》(*Mathematical Analysis of Logic*)是与 De Morgan 的《形式逻辑》同时出版的,和他的《思维规律的研究》(*An Investigation of the Laws of Thought*, 1854)这两本书包含着他的主要想法.

Boole 的办法是着重于外延逻辑(extensional logic),即类(class)的逻辑,其中类或集合用 x, y, z, …表示,而符号 X, Y, Z, …则代表个体元素. 用 1 表示万有类,用 0 表示空类或零类. 他用 xy 表示两个集合的交(他称这个运算为选拔(election)),即 x 与 y 所有共同元素的集合;他还用 $x+y$ 表示 x 中和 y 中所有元素的集合. (严格地讲,对于 Boole,加法或联合只用于不相交的集合;W. S. Jevons(1835—1882)推广了这个概念.)至于 x 的补则记作 $1-x$. 更一般地, $x-y$ 是由不是 y 的那些 x 所组成的类. 包含关系,即 x 包含在 y 中,他写作 $xy=x$. 等号表示两个类的同一性.

Boole 相信,头脑会立即允许我们作一些初等的推理规程,这就是逻辑的公理. 例如,矛盾律,即 A 不能既是 B 又是非 B,就是

---

① *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 10,1858,173～230.

公理.它可表示为

$$x(1-x)=0.$$

下列关系也是显然的:

$$xy=yx,$$

因而交的这个交换性是另一条公理.同样明显的是性质:

$$xx=x.$$

这条公理背离了通常的代数.Boole 认为可作为公理的还有

$$x+y=y+x$$

和

$$x(u+v)=xu+xv.$$

用这些公理就可把排中律说成

$$x+(1-x)=1;$$

就是说,任何东西不是 x 就是非 x.每一个 X 都是 Y 就变成 $x(1-y)=0$.没有 X 是 Y 可写成 $xy=0$;有些 X 是 Y 表成 $xy\neq 0$;而有些 X 不是 Y 表成 $x(1-y)\neq 0$.

Boole 想从这些公理用公理所许可的规程去导出推理的规律.作为平凡的结论,他有 $1\cdot x=x$ 和 $0\cdot x=0$.一个稍微复杂一点的论证可说明如下.从

$$x+(1-x)=1$$

可导出 $$z[x+(1-x)]=z\cdot 1,$$

从而有 $$zx+z(1-x)=z.$$

于是 z 这类东西就由那些在 x 中的,和那些在 $1-x$ 中的东西所组成.

Boole 看到了类的演算可以解释为命题的演算.如果 x 和 y 不是类而是命题,那么 xy 就是 x 和 y 的联合肯定,而 $x+y$ 就是 x 或 y 或两者的肯定. $x=1$ 这句话的意思是命题 x 是真的,而 $x=0$ 是说 x 是假的. $1-x$ 意为 x 的否定.可是 Boole 在他的命题演算上并未进行很远.

De Morgan 和 Boole,都可以看作是 Aristotle 逻辑的改造者

和逻辑代数的创始者.他们的工作的成效是建立一种逻辑科学,它从那以后便离开哲学而靠近数学.

Charles S. Peirce 推进了命题演算. Peirce 把命题(proposition)与命题函数(propositional function)区别开来.一个命题(如约翰是人)只包含常量;一个命题函数(如 x 是人)包含着变量.一个命题总是真的或假的,一个命题函数却可以对变量的某些值是真的,而对其他的值是假的. Peirce 还引进了两个变量的命题函数,例如,x 知道 y.

建立符号逻辑的人们一直都对逻辑及其数学化有兴趣.由于耶拿(Jena)的数学教授 Gottlob Frege(1848—1925)的工作,数理逻辑得到一个新方向,这个方向与我们对数学基础的说明很有关系. Frege 写了几部重要的著作,有《概念演算》(*Begriffsschrift*, 1879),《算术基础》(*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884)和《算术的基本法则》(*Grundgesetze der Arithmetik*; Vol. 1, 1893; Vol. 2, 1903).他的著作以精确和过细为特点.

在纯逻辑的领域中,Frege 扩展了变量、量词和命题函数的运用;这个工作的大部分是他独自完成的,与他的前人(包括 Peirce)无关. Frege 在他的《概念演算》中给出了逻辑的公理基础.他引进了很多区别,在后来是很重要的,例如一个命题的叙述与肯定它是真的这中间的区别.用符号 $\vdash$ 放在命题的前面表示肯定,他还把一个东西 x 与只包含 x 的集合 $\{x\}$,以及一个东西属于一个集合与一个集合包含在另一个中,都加以区别.像 Peirce 那样,他用了变量和命题函数,他还指明了他的命题函数的定量化,也就是使它们成为真的那个变量或那些变量的区域.他还引进了(1879)实性蕴涵(material implication)的概念:A 蕴涵 B 的意思是或者 A 真 B 也真,或者 A 假而 B 真,或者 A 假 B 也假.蕴涵的这种解释,对于数理逻辑更为合适. Frege 也研究了关系逻辑;例如,a 大于 b 所说的顺序关系,在他的工作中就是重要的.

Frege 一经把逻辑建立在明确的公理上，就在他的《算术基础》中通向他的真正目标，**作为逻辑的展延去建立数学**. 他把算术概念表示成为逻辑概念. 这样，数的定义和规律就从逻辑前提被推导出来. 我们将联系 Russell 和 Whitehead 的工作来考察这种构造. 不幸，Frege 的符号对数学家说来是太复杂而又生疏. 他的工作直到被 Russell 发现以前，实际上人们都不大知道. 很有风趣的是，正当《算术的基本法则》第二卷要付印的时候，他接到 Russell 的一封信，Russell 把集合论的悖论告诉了他. Frege 便在第二卷的结尾(第 253 页)说："一个科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成的时候它的基础垮掉了. 当这部著作只等付印的时候，Bertrand Russell 先生的一封信就使我处于这种境地."

5. 逻 辑 派

关于数学基础的工作，我们已经讲到集合论的公理化提供了一个基础，它避开了已知的悖论，却仍可以作为现有数学的逻辑依据. 我们曾指出，很多数学家对这种办法并不满意. 大家都承认，实数系和集合论的无矛盾性是尚待证明的；相容性已不再是一件小事情了. 选择公理的使用就有争论. 除去这些问题，还有一个总的疑问，就是数学的妥善的基础究竟是什么. 19 世纪末的公理化运动中集合论的公理化，假定了数学所用的逻辑是没有问题的，是以此为根据来进行的. 但是在 20 世纪初，就有了不再同意这个前提的几派思想. 以 Frege 为首的一派，要重建逻辑，并把数学建立在逻辑上. 这个计划，如已经指出的，由于矛盾的出现而受到挫折，但并未被放弃. 事实上，Bertrand Russell 和 Alfred North Whitehead 曾独立地设想过，并且施行了这个计划. Hilbert 已感到需要确立相容性，开始阐述了他自己的有系统的数学基础. 还有另一群数学家，称为直观主义者，不满意于 19 世纪在

分析中所引进的概念和证明. 这些人坚持这样一种哲学见解,不但与分析的方法论不能调和,而且对于逻辑的作用也提出疑问. 这几种哲学的发展乃是数学基础中的主要事迹,其结果是揭开了关于数学本性的整个问题. 这三个主要的思想派别的每一个,我们都要考察一下.

其中的第一个称为逻辑派(logistic school),其哲学称为逻辑主义. 创立人是 Russell 和 Whitehead. 他们与 Frege 独立无关地抱有这样的想法,即数学可以从逻辑推导出来,因而是逻辑的一种展延(extension). 其基本思想, Russell 在他的《数学的原理》(1903)中作了概要的说明;而在 Whitehead 和 Russell 的写得很详尽的著作《数学原理》(*Principia Mathematica*, 3 vols., 1910—1913)中作了发挥. 因为这部著作是权威性的论述,我们的说明将以此为本.

这个学派从逻辑本身的展开起始,由此导出数学,而不需要数学所特有的任何公理. 逻辑的展开就在于提出一些逻辑的公理,由此推出定理,它们可以用于以后的推理. 这样,逻辑的规律就由公理用形式的推导得出. 和任何公理化的理论一样,《原理》中也有不定义的概念. 因为若是不容许无限反复的定义,那就不可能把所有的词项都定义出来. 在这些不定义的概念中有:基本命题的概念,命题函数的概念,肯定一基本命题的真,一命题的否定,以及两个命题的析取.

Russell 和 Whitehead 解释了这些概念,虽然正如他们指出的,这种解释并不是逻辑展开的一部分. 他们所谓的命题是指陈述一个事实或一个关系的语句:例如,江是人;苹果是红的;等等. 一个命题函数则含有一个变量,把这个变量代换为一个值就给出一个命题. 例如"X 是一个整数"就是一个命题函数. 一个命题的否定是指:"这个命题成立不是真的",因此,如果 p 表示江是人这个命题,则 p 的否定,记作($\sim p$),就是指"江是人不真",或"江不是

人”. 两个命题 p 和 q 的析取，记作 $p \vee q$，是指 p 或 q. 这里“或”的意思正如“男人或女人皆可申请”这句话中所说的. 就是说，男人可以申请；女人可以申请；并且都可以申请. 在“人必为男的或女的”这句话中，“或”具有更通常的意义，就是说非此即彼而不能两全. 在数学中是按第一个意思来用“或”这个词的，虽然有时只有第二个意思是可能的. 例如，“三角形为等腰的或四边形为平行四边形”说的是第一个意思. 我们也说一个数必为正的或负的. 而关于正数和负数的一些事实说明两者不能都是真的. 因此，肯定 $p \vee q$ 就是指 p 并且 q，$\sim p$ 并且 q，以及 p 并且 $\sim q$.

在命题之间最重要的一种关系是蕴涵(implication)，即一个命题的真强制着另一个的真. 在《原理》中，蕴涵，$p \supset q$，定义为 $\sim p \vee q$，它的意思是指 $\sim p$ 并且 q，p 并且 q，或 $\sim p$ 并且 $\sim q$. 作为说明，我们来看这个蕴涵：若 X 是人，则 X 有死. 这里的情况可有

X 不是人并且 X 有死；

X 是人并且 X 有死；

X 不是人并且 X 没有死.

这些可能都是容许的. 蕴涵所排除的乃是

X 是人并且 X 没有死.

在《原理》中有几个公设是：

(a) 一个真的基本命题所蕴涵的命题是真的.

(b) $(p \vee p) \supset p$.

(c) $q \supset (p \vee q)$.

(d) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$.

(e) $[p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$.

(f) 由 p 的肯定和 $p \supset q$ 的肯定可得 q 的肯定.

这些公设的独立性和无矛盾性是不能证明的，因为通常的方法不适用. 作者们从这些公设出发推导出逻辑的定理，并且终

于导出算术和分析. 通常的 Aristotle 的三段论法则则作为定理出现.

为说明逻辑本身已经形式化,并成为演绎的,我们来看一下《原理》开头的几个定理:

2.01 $$(p \supset \sim p) \supset \sim p.$$

这就是"归谬"原理. 用话来说,若 p 这个假设蕴涵着 p 是假的,则 p 就是假的.

2.05 $$[q \supset r] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)].$$

这是三段论的一种形式. 用话来说,如果 q 蕴涵 r,那么就有:若 p 蕴涵 q,则 p 蕴涵 r.

2.11 $$p \vee \sim p.$$

这就是排中律:p 是真的或是假的.

2.12 $$p \supset \sim(\sim p).$$

用话来说,p 蕴涵着非 p 是假的.

2.16 $$(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p).$$

若 p 蕴涵 q,则非 q 蕴涵非 p.

命题是达到命题函数的一个步骤,命题函数是用性质来论述集合,而不用把集合中的东西指点出来. "x 是红的"这个命题函数,就表示由所有红的东西所组成的集合.

如果一个集合的元素都是单个的东西,那么适用于这些元素的命题函数就说是层次(type)为 0 的. 如果一个集合的元素本身就是命题函数,那么适用于这些元素的命题函数就说是层次为 1 的. 一般地,变量的层次小于和等于 n 的命题函数,其层次为 $n+1$.

层次论是想要避免这样的悖论,它的产生是由于一堆东西包含着一个元素,而这个元素只能用这个堆来定义. Russell 和 Whitehead 对这个困难的解决是要求"任何牵涉着一个集合的所有元素的东西,都不能成为这个集合的元素."为要在《原理》中贯

彻这个制约,他们申明,一个(逻辑)函数不能用由这个函数本身定义的东西作为变元.他们接着讨论了悖论,并说明层次论把悖论避开了.

但是,层次论引到一类语句,它们需要细致地按层次加以区别.要想按照层次论来建立数学,开展起来将极为复杂.例如,在《原理》中,两个东西 a 和 b 是相等的,如果对每个性质 $P(x)$,$P(a)$和 $P(b)$都是等价的命题(每一个蕴涵另一个).按照层次论,P 可以有不同的层次,因为它可以包含不同阶数的变元以及单个的东西 a 或 b,因而相等的定义必须适用于 P 的所有层次;换句话说,相等的关系有无穷多个,对每一层次的性质都有一个.同样,由 Dedekind 分割所定义的无理数,其层次分明比有理数要高,而有理数的层次又比自然数的高,因此连续统是由不同层次的数组成的.为了避免这种复杂性,Russell 和 Whitehead 引进了约化公理(axiom of reducibility),它对任何层次的一个命题函数都确认存在着一个等价的层次为 0 的命题函数.

在论述了命题函数以后,两位作者就讲到类的理论.粗略地讲,一个类(class)就是由满足某个命题函数的东西所组成的集合.而关系(relation)则表现为满足二元命题函数的偶(couple)所成的类.这样,"x 审查 y"就表示一个关系.作者是准备在这个基础上来引进基数的概念的.

基数(cardinal number)的定义是很有意思的.它的根据是先前引进过的类与类之间的一一对应关系.处在一一对应中的两个类,称为相似的.相似关系分明是自反的,对称的,并且是传递的.所有相似的类都具有一个共同的性质,这就是它们的数目.可是,相似的类可能具有多个共同的性质.Russell 和 Whitehead 在这一点上所做的,正如 Frege 做过的,是把一个类的数目定义为所有与它相似的类所组成的类.这样,3 这个数目就是所有的三元类所组成的类,而三元类的记号是 $\{x, y, z\}$,其中

$x \neq y \neq z$. 因为数目的定义事先假定了一一对应的概念,看起来这个定义似乎是循环的. 但是作者指出,一个关系是一一的,如果当 x 和 x' 都对 y 有这个关系时,x 与 x' 必是恒同的,而当 x 对 y 和 y' 都有这个关系时 y 与 y' 必是恒同的. 因此,一一对应的概念并未牵涉到数目 1.

有了基数或自然数以后,就能建立起实数系和复数系、函数、以及全部分析. 几何可以通过数来引进. 虽然《原理》在细节上有所不同,但我们对数系的和几何的基础的考察(第 41 和 42 章)都表明,这样的构造在逻辑上是可能的,不需要另外的公理.

这就是逻辑派的宏大计划. 他们在逻辑上的工作有很多可说的,我们在这里只是一提而过. 我们必须着重指出,他们在数学上的工作,就是要把数学奠基在逻辑上. 不需要任何的数学公理;数学不过是逻辑的主题和规律的自然延展. 但是逻辑的公设和它们所有的推论是任意的,而且还是形式的. 就是说,它们是没有内容的;它们只有形式. 结果,数学也就没有内容只有形式了. 我们对数和几何概念所给予的物理意义并不属于数学. 正是这种思想使 Russell 说道:数学是这样一门学科,在其中我们永远不会知道我们所讲的是什么,也不会知道我们所说的是不是真的. 实际上,当 Russell 在这世纪初开始这个计划的时候,他(以及 Frege)曾以为逻辑的公理都是真的. 但在《数学的原理》(*Principles of Mathematics*)1937 年的版本中,他放弃了这个看法.

逻辑派的做法受到了很多批评. 约化公理激起了反对,因为它太任意了. 它曾经被说成是可喜的意外的,而不是逻辑所必需的. 有人说,在数学中不能容许这个公理,只有用它才能证明的东西根本就不能认为是被证明了的. 另外一些人说,这个公理是智力的廉价品. 此外,Russell 和 Whitehead 的体系一直是未完成的,并且在很多细节上是不清楚的. 后来有许多工作是去简化和澄清它.

对整个逻辑派的观点,还有一种严重的批评.就是:假如逻辑派的看法是正确的,那么全部数学就是一门纯形式的、逻辑演绎的科学,它的定理可以从思维的规律得出;而思维规律的演绎的精致工作,怎么能够表现像声学、电磁学和力学这样广泛的自然现象,却没有解释.还有,在数学的创造中,必须由知觉的或想象的直观提供新概念,这是不是来自经验呢?不然的话,新的知识怎么会产生呢?但是,在《原理》中,所有的概念都化成为逻辑的了.

逻辑派设计的形式化,在任何真正的意义上都显然没有表现数学.它给我们显示外壳而不是内核.Poincaré 曾讥讽地说过(见 *Foundations of Science*,第 483 页):"逻辑派的理论并非不毛之地;它生长矛盾."若是承认了层次论,就不能这样讲了,但是这种层次论,正如已指出过的,是人为的.Weyl 也攻击过逻辑主义;他说,这个复杂的结构"对我们信仰力量的压制,不下于早期教会神父和中世纪经院哲学家的教条".

尽管有这些批评,逻辑派的哲学还是被不少数学家承认了.这个 Russell-Whitehead 构造在另一方面也作出了贡献,它以完全符号的形式实现了逻辑的彻底的公理化,从而大大地推进了数理逻辑这门学科.

6. 直 观 派

一群被称为直观主义者(intuitionist)的数学家,对数学采取了根本不同的研究途径.与逻辑主义的情况一样,直观主义哲学是在 19 世纪末创立的,当时的主要活动是数系和几何的严密化.悖论的发现刺激了它的进一步发展.

第一个直观主义者是 Kronecker,他在 19 世纪 70 年代和 80 年代中发表了他的看法.Kronecker 认为,Weierstrass 的严密性含有不能接受的概念,而 Cantor 关于超限数和集合论的工作不是数

学而是神秘主义. Kronecker 情愿接受整数,因为它们在直观上是清楚的. 它们"是神造的",其他的东西都是人造的,是可疑的. 他在1887年的文章《论数的概念》(Über den Zahlbegriff)[①]中,表明了某种类型的数,如分数,可以用整数定义出来. 这样定义的分数被认为是一种方便的写法. 他想砍掉无理数和连续函数的理论. 他的理想是,分析中的每个定理都应当可以解释为,它们给出只限于整数中间的关系.

Kronecker 对数学很多部分的另一个反对意见是,它们没有给出构造方法或判断准则,可用有限步骤去确定它们所研究的对象. 定义应当包括由有限步骤所定义的对象的计算方法,而存在性的证明对于要确立其存在的那个量,应当许可计算到任意的精确度. 代数学家愿意说,一个多项式 $f(x)$ 若有有理因子,就是可约的;在相反的情形,就是不可约的. 在他的纪念文章《代数量的一种算术理论之基础》(Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen)[②]中,Kronecker 说道:"可约的定义是没有可靠的基础的,除非给定了一个**方法**,用它可以断定一个函数是否可约的."

还有,虽然无理数的几种理论都对两个实数 a 和 b 相等、或 $a>b$、或 $b>a$ 给出了定义,但它们都未给出在已知情况中去确定哪一个成立的判别法. 因此,Kronecker 反对这样的定义,认为它们仅仅是表面上的定义. 他对无理数的整个理论都不满意. Lindemann 证明了 π 是超越数,有一天他对 Lindemann 说,"你对于 π 的美丽的研讨有什么用处? 无理数是不存在的,为什么要研究这种问题呢?"

除去批评对于仅仅确立了存在的那些量还缺少确定它们的构造程序以外,Kronecker 本人很少去开展直观主义哲学. 他曾尝试

---

① *Jour. für Math.*, 101,1887, 337 ~ 355 = *Werke*, 3,251~274.

② *Jour. für Math.*, 92,1882, 1 ~ 122 = *Werke*, 2,237~387.

重建代数,但未致力于重造分析. Kronecker 在算术和代数上做了美好的工作,但并不符合他自己的要求,正如 Poincaré 所说的[①]:他一时忘记了他自己的哲学.

在 Kronecker 那个时代,没有人支持他的哲学,将近 25 年中没有人探索他的思想. 可是,在发现了悖论以后,直观主义却复活了,并且成了广泛的认真的运动. 第二个强有力的倡导者是 Poincaré. 已经提到过,他因为集合论产生了悖论就反对集合论. 他也不承认逻辑派挽救数学的计划. 他嘲笑把数学奠基在逻辑上的企图,理由是数学将化为无限的同义反复. 他还挖苦(在他看来是)高度人为的数的推导. 例如《原理》中把 1 定义为 $\hat{\alpha}\{\exists x \cdot \alpha = i'x\}$, Poincaré 嘲讽地说,这对于从未听说过数目 1 的人来说,是一个令人赞叹的定义.

Poincaré 在他的《科学与方法》(见 *Foundations of Science*, 第 480 页)中宣称,

> 逻辑主义必须加以修正,而人们一点也不知道还有什么东西可以保留下来. 毋需多说,这指的是 Cantor 主义和逻辑主义;真正的数学,总有它实用的目的,它会按照它自己的原则不断地发展,而不理会外面狂烈的风暴,并且它将一步一步地去追寻它惯常的胜利,这是一定的,并且永远不会停止.

Poincaré 反对那种不能用有限个词来定义的概念. 例如,按选择公理选出来的一个集合,如果是从超限数个集合的每一个都需要作选取的话,那它就不是真正被定义了的. 他还争辩说,算术是不能由公理基础来判明它是正确的. 我们的直观是先于这样一个结构的. 尤其是数学归纳法,它是一种基本的直观,不只是公理系统中的一条有用的公理. 与 Kronecker 一样,他坚持所有的定义和

---

① *Acta Math.*, 22, 1899, 17.

证明都必须是构造性的.

他同意 Russell 的这种看法,即矛盾的来源是在一个东西的定义,这个东西是一些堆或集合,其中就包含所要定义的那个东西.如所有的集合所组成的集合 A,就包括 A. 但 A 是不能定义的,除非 A 的每个元素都已有了定义;而若 A 也是一个元素,则定义就成为循环的了.这种说不清的定义的另一个例子,是把定义在一个闭区间上的连续函数的极大值(maximum value),定义为函数在这个区间上的最大值(greatest value).这样的定义在分析中是常见的,尤其是在集合论中.

在 Borel, Baire, Hadamard 和 Lebesgue 中间往来的信件中①,展开并讨论了对现时数学的逻辑状况的进一步批评. Borel 支持 Poincaré 关于整数不能以公理为基础的论断.他也批评选择公理,因为它需要作不可数的无穷个选择,这对于直观讲来是不可理解的. Hadamard 和 Lebesgue 走得更远,宣称即使是可数无穷个相继的选择,也并不更直观一些,因为它需要无穷个运算,而这不可能被认为是确实可行的. Lebesgue 认为困难全在于,当人们说到某个数学对象存在的时候,要知道它的含义是什么.在选择公理的情形,他争论说,如果人们仅仅是"设想"了一个选择的方法,那么在推理的过程中这个选择法就不会改变吗?即使是在一个集合中选出一个东西来, Lebesgue 坚持说,也有同样的困难.因为我们必须知道这个东西是"存在"的;这就是说,我们必须把选取的东西明确地指出来.这样, Lebesgue 就驳斥了 Cantor 关于超越数存在的证明. Hadamard 指出, Lebesgue 的反对意见将导致否定所有实数组成的集合的存在,而 Borel 也得出完全相同的结论.

上述直观主义者所持的反对意见,都是零散的、片断的.近代直观主义的系统的创立者是 Brouwer. 和 Kronecker 一样,他的许

---

① 看 p. 294 注③.

多数学工作,尤其是在拓扑方面,并不符合他的哲学,但是毫无疑问,他的见解是重要的. Brouwer 从他的博士论文(On the Foundations of Mathematics, 1907)起,就开始建立直观的哲学. 自从 1918 年以后,他就在各种期刊上写文章来申张论述他的看法,包括 1925 年和 1926 年的数学年刊(*Mathematische Annalen*).

Brouwer 的直观主义观点起源于一种广泛的哲学. Brouwer 认为,基本的直观是按时间顺序出现的感觉. "当时间进程所造成的二重性(twoness)的本体(subject),从所有的特殊显象中抽象出来的时候,就产生了数学. 所有这些二重性的共同内容所留下来的空洞形式[n 到 $n+1$ 的关系]就变成数学的原始直观,并且由无限反复而造成新的数学对象."例如,由无限反复,头脑就形成了一个接一个的自然数的概念. Kant, William R. Hamilton(在他的《作为时间科学的代数》中)及哲学家 Arthur Schopenhauer 都曾经主张整数导源于时间的直观这种思想.

Brouwer 把数学思维理解为一种构造性的程序,它建造自己的世界,与我们经验的世界无关,有点像是自由设计,只受到应以基本数学直观为基础的限制. 这个基本直观的概念,不能设想为像公设理论中那种不定义的概念,而应设想为某种东西,用它就可以对于出现在各种数学系统中的不定义的概念,作直观上的理解,只要它们在数学思维中是确实有用的.

Brouwer 坚持认为:"数学的基础只可能建立在这个构造性的程序上,它必须细心地注意有哪些论点是直观所容许的,哪些不是."数学概念嵌进人们的头脑是先于语言、逻辑和经验的. 决定概念的正确性和可接受性的,是直观,而不是经验和逻辑. 当然必须记住,这些关于经验的作用的言论,是在哲学的意义上,而不是在历史的意义上来讲的.

对于 Brouwer,数学的对象是从理智的构造得来的,其中基本的数目 1, 2, 3, …提供了这种构造的原型. 从 n 到 $n+1$ 这一步骤

的空洞形式的无限反复的可能性,导致无穷集合. 但是,Brouwer的无穷是 Aristotle 的潜无穷;而近代数学,如 Cantor 所奠定的,则广泛地运用实无穷的集合,它们的元素是"一下子"就都出现了.

属于直观派(intuitionist school)的 Weyl,在联系到无穷集合的直观主义的概念时,说道:

> ……数目的序列,它会增长超过任何一个已经达到的阶段……它是一簇开向无穷的可能性;它永远是处于创造的状态中,并不是一个本来就存在着的封闭王国. 我们盲目地把一个转换成另一个,这才是我们的困难(包括那些矛盾)的真正根源——这是比 Russell 的恶性循环原理所指出的更为基本的根源. Brouwer 启开了我们的眼睛,使我们看到:在信仰超越一切人类所能实现的可能性的绝对中,培育起来的经典数学走过头了,它的言论离开以显然性为基础的真实意义和真理有多么远.

数学直观的世界与因果感觉的世界是对立的. 用以理解日常事物的语言,是属于因果世界的,而不属于数学. 词或词语的连结是用来交流真理的. 语言用符号和声音来引起人们头脑中思想的摹本. 但是思维永远不可能完全符号化. 这些话对于数学语言,包括符号语言在内,也是对的. 数学思想是独立于它的语言外衣的,而事实上要比它丰富得多.

逻辑是属于语言的. 它提供一套法则,用以导出更多的词语连接,这也是为了交流真理的. 但是,这些真理在它们还没有被经验时并不是真理,也不能保证它们是能够被经验到的. 逻辑并不是揭露真理的可靠工具,用别的方法不能得到的真理,逻辑也一样地不能推导出来. 逻辑的原则是在语言中归纳地观察到的规律性. 它们是运用语言的一种手段,或者说,它们是语言的表现理论. 数学中

最重要的进展都不是由于要把逻辑形式完美化而得到的，而是由于基本理论本身的变革. 是逻辑依靠数学，而不是数学依靠逻辑.

因为 Brouwer 不承认任何先验的不可违反的逻辑原则，他就不承认从公理推出结论的这种数学工作. 数学并不是非遵从逻辑的规律不可，由于这个原因，悖论并不要紧，纵然是我们接受了这些悖论所纠缠着的数学概念和构造也不要紧. 当然，如我们将要看到的，直观主义者是不会全部接受这些概念和证明的.

Weyl① 这样阐述逻辑的作用：

> 按照他的[Brouwer 的]看法和历史的研究，经典逻辑是从有限集合和它们的子集的数学抽象出来的……人们忘记了这个有限的来源，后来就错误地把逻辑看作是高于并且先于全部数学的某种东西，而终于没有根据地把它应用到无穷集合的数学上去了. 这就是集合论的堕落和原罪，它正因此而受到自相矛盾的惩罚. 使人惊奇的并不是这种矛盾的暴露，而是它在事情发展到这样晚的阶段才暴露出来.

在逻辑领域里有些事是清楚的，直观上可以接受的逻辑原则或程序，可以用来从旧的定理去断定新的定理. 这些原则是基本数学直观的一部分. 可是，并非所有的逻辑原则对于基本直观都是可接受的，对于自从 Aristotle 以来就一直被承认了的东西，必须持批判的态度. 因为数学家们把这些 Aristotle 的规律用得很随便，他们就招致自相矛盾. 所以，直观主义者就去分析，有哪些逻辑原则是可以容许的，以使通常的逻辑符合于正确的直观，并且把它恰当地表示出来.

作为逻辑原则被用得太随便了的一个独特的例子，Brouwer

① *Amer. Math. Monthly*, 53, 1946, 2～13 = *Ges. Abh.*, 4, 268～279.

举出了排中律. 这条原则是,它肯定每一句有意义的话不是真的就是假的,它是间接证明方法的根本. 在历史上它起源于推理在有穷集合的子集上的应用,并且是由此抽象出来的. 后来它就被认为是一条独立的先验的原则,并且没有根据地应用到无穷集合上去了. 对于有穷集合,可以用逐个检查的办法来断定,是否所有的元素都具有某一性质 P,但是这个办法对于无穷集合就不再是可能的了. 人们可能碰巧知道无穷集合的某个元素没有这个性质,也可能由集合的构造就能知道,或能够证明,它的每一个元素都具有这个性质. 无论如何,总不能用排中律来证明这个性质是成立的.

因此,如果有人证明了,在某个无穷集合中,并不是所有的元素都具有某一性质,那么 Brouwer 就反对要由此作结论说,至少有一个元素没有这个性质. 这样,从否定 $a^b = b^a$ 对所有的数都成立,直观主义者就不作这样的结论,说存在 a 和 b 使 $a^b \neq b^a$. 结果,很多存在性的证明都不为直观主义者所接受. 排中律可以用于这样的情形,其中的结论可以经过有限个步骤达到. 例如,来断定一本书是否包含印刷错误的问题. 在另外一些情形,直观主义者否认断定的可能性.

对排中律的否认,产生了新的可能性——不可断定的命题. 对于无穷集合,直观主义者主张还有第三种状况,即可以有这样的命题,既不是可以证明的,也不是不可以证明的. 作为这种命题的一个例子,我们定义 π 在十进位展开中的第 k 个位置为第一个零的位置,在它的后面跟着 1, …, 9 这些数. Aristotle 的逻辑说,k 或者存在或者不存在,而数学家就跟着 Aristotle 在这两种可能性的基础上去进行论证. Brouwer 就反对所有这样的论证,因为我们并不知道我们是否能够证明,它或者存在或者不存在. 因而所有关于数目 k 的推理都为直观主义者所排斥. 这样就有了明明白白的数学问题,它们在数学公理条文的基础上,是永远得不到解决的. 这

种问题对于我们来说,似乎是可以断定的;但是我们所以期望它们必能断定的根据,实际上只不过是它们牵涉着数学的概念.

对于直观主义者认为在数学探讨中是合法的概念,他们坚持要有构造性的定义. 对于 Brouwer 以及所有的直观主义者,说无穷是存在的,它的意思就是说,人们总可以找到一个有穷的集合大于给定的一个. 要讨论任何其他类型的无穷,直观主义者就要求给出构造的方法或有限个步骤的定义. 这样,Brouwer 就排斥了集合论中的集合(aggregates).

可构造性的要求是另一个根据,用以排斥任何这样的概念,其存在是由间接推理来确立的,即其论证是由不存在导出矛盾. 即使不考虑这种存在性的证明要用到应该反对的排中律这一点,直观主义者对于这种证明还是不能满意,因为他们对于要确立其存在的那个对象要求一个构造性的定义. 这个构造性的定义必须由有限个步骤可以确定到任何需要的精确度. Euclid 关于存在无限多个质数的证明(第 4 章第 7 节)就不是构造性的;它没有提供确定第 n 个质数的方法. 因而是不能接受的. 还有,如果人们只是证明了满足 $x^n+y^n=z^n$ 的整数 x, y, z 和 n 的存在,直观主义者就不会接受这个证明. 另一方面,质数的定义是构造性的,因为它可以用来以有限个步骤去确定一个数是否为质数. 坚持构造性的定义,尤其适用于无穷集合. 由选择公理用于无穷多个集合而造成的集合,是不能接受的.

Weyl 曾对于非构造性的存在证明说过(*Philosophy of Mathematics and Natural Science*, p. 51),他们对世人宣称,有某一个珍宝是存在的,但是没有泄露它在什么地方. 通过公设法作出的证明,不能代替构造而不失掉它的意义和价值. 他还指出,主张直观主义哲学,就意味着要放弃经典分析的存在性定理,例如 Weierstrass-Bolzano 定理. 一个有界的单调的实数集合不必有一个极限. 对于直观主义者,如果一个实变函数按照他们的意思是存

在的,那么根据这个事实它就是连续的.超限归纳法及其在分析上的应用,以及 Cantor 理论的大部分,都被彻底地谴责了.分析,Weyl 说,是建立在沙滩上.

Brouwer 和他的学派并不局限于批判,他们曾力图在他们所接受的构造的基础上去建立一种新的数学.他们已经成功地把微积分带着它的极限程序拯救出来了,但是他们的构造是很复杂的.他们还重新构造了代数和几何的初等部分.和 Kronecker 不同,Weyl 和 Brouwer 承认几种无理数.显然,直观主义者的数学根本不同于数学家们在 1900 年以前几乎普遍接受的数学.

7. 形 式 派

数学的第三种主要的哲学,称为形式派(formalist school),它的领导人是 Hilbert.他从 1904 年开始从事于这种哲学工作.他在那时的动机是,给数系提供一个不用集合论的基础,并且确立算术的相容性.因为他自己对于几何的相容性的证明已约化成算术的相容性,算术的相容性就成了一个没有解决的关键性问题.他还曾企图去战胜 Kronecker 的必须抛掉无理数的论点.Hilbert 接受了实无穷并且称赞了 Cantor 的工作(第 41 章第 9 节).他想要保住无穷,保住纯粹存在性的证明,以及像最小上界这样一些概念,其定义似乎是循环的.

在 1904 年的国际数学会议上[①],Hilbert 提出一篇文章论述他的观点.有 15 年他都没有再做这个题目;后来,由于要回答直观主义者对经典分析的批评,他才开始研究基础问题,并且在他后来的科学事业中一直继续这方面的工作.他在 20 世纪 20 年代发表了几篇关键性的文章.他的观点逐渐地获得一些人的支持.

---

① *Proc. Third Internat. Congress of Math.*, *Heidelberg*, 1904, 174～185 = *Grundlagen der Geom.*, 第 7 版, 247～261;英译文在 *Monist*, 15, 1905, 338～352.

他们成熟的哲学包含着很多学说. 与这种新倾向一致,即数学的任何基础都必须注意到逻辑的作用,形式派主张逻辑必须和数学同时加以研究. 数学有好些个部门,每一部门都有它自己的公理基础. 它必定包含着逻辑的和数学的概念与原则. 逻辑是一种记号语言,它把数学的语句表达成公式,并且用形式的程序表示推理. 公理仅仅表示从公式得到公式的法则. 所有的记号和运算符号在内容上都与它们的意义无关. 这样,所有的含义都从数学符号上消除了. Hilbert 在他的 1926 年的文章①中说,数学思维的对象就是符号本身. 符号就是本质;它们并不代表理想的物理对象. 公式可能蕴涵着直观上有意义的叙述,但是这些涵义并不属于数学.

Hilbert 把排中律保留下来,因为分析需要它. 他说②:"禁止数学家用排中律,就像禁止天文学家用望远镜或拳师用拳一样." 因为数学只讨论符号的表达式,全部 Aristotle 逻辑的法则都可以用在这些形式表达式上. 在这个新的意义上,无穷集合的数学是可能的. 还有,Hilbert 希望,避免公开使用"一切(all)"这个词就可以避免悖论.

要用公式去表示逻辑的公理,Hilbert 引进了一组符号,来代表这样一些概念和关系,如"并且(and)"、"或者(or)"、"否定(negation)"、"存在(there exists)"等等. 碰巧逻辑演算(符号逻辑)已经被发展了(为了别的目的),因而 Hilbert 说,他手头上已经有了他需要的东西. 所有上述的符号都是构造理想表达式(即公式)的砖块.

为了处理无穷,除了通常的没有争议的公理外,Hilbert 用到超限公理

---

① *Math. Ann.*, 95, 1926, 161～190 = *Grundlagen der Geometrie*, 第 7 版, 262～288. 看 p. 319 注①.

② Weyl, *Amer. Math. Soc. Bull.*, 50, 1944, 637 = *Ges. Abh.*, 4, 157.

$$A(\tau A) \to A(a).$$

他说它的意思是:若谓词 A 适合于标准对象 τA,它就适合于每一个对象 a. 例如,假使 A 代表腐败,如果 Aristides the Just(古希腊大政治家 Aristides,被尊称为 the Just)是标准的并且是腐败的,那么每个人都是腐败的.

数学证明是由这样的程序组成的:肯定一个公式;肯定这个公式蕴涵着另一个公式;肯定这第二个公式. 一系列这样的步骤,其中所肯定的公式或蕴涵关系都是前面的公理或结论,这就构成了一个定理的证明. 还有一个许可的运算,就是用一个符号去替换另一个或一组符号. 这样,公式的推导就是,把操作符号的法则运用于以前已经建立了的公式上去.

一个命题是真的,必须且只须它是这样一串命题的最后一个,其中每一个命题,或者是形式系统的一条公理,或者是由一条推导法则所导出的命题. 每个人都可以验证,一个给定的命题是不是可以由一串适当的命题得出来. 这样,按照形式主义的观点,真理和严密就是确定的和客观的.

于是对于形式主义者来说,数学本身就是一堆形式系统,各自建立自己的逻辑,同时建立自己的数学;各有自己的概念,自己的公理,自己的推导定理的法则(如关于相等和替代的法则),以及自己的定理. 把这些演绎系统的每一个都开展起来,就是数学的任务. 数学就不成为关于什么东西的一门学科,而是一堆形式系统,在每一个系统中,形式表达式都是用形式变换从另一些表达式得到的. Hilbert 的方案中,关于数学本身的部分,就是这些.

然而我们现在必须问,这些推导是不是就没有矛盾呢? 这是未必能在直观上看出来的. 但是要证明没有矛盾,只须证明我们永远不会得出 $1 = 2$ 这个形式的语句. (因为由逻辑的一个定理,任何别的假命题都蕴涵着这个命题,我们只考虑这一个就够了.)

Hilbert 和他的学生 Wilhelm Ackermann(1896—1962),Paul

Bernays(1888—1977)和 von Neumann 在 1920—1930 年间逐步地开展了所谓的 Hilbert 的 *Beweistheorie*[证明论]或元数学(meta-mathematics),这是确立任何形式系统的相容性的一个方法. Hilbert 提议,在元数学中要用一种特殊的逻辑,它应该是基本的,并且是没有异议的. 它使用一种普遍承认的具体而有限的推理,很接近于直观主义的原则. 不使用那些有争议的原则,诸如由矛盾去证明存在,超限归纳,以及选择公理. 存在性证明必须是构造性的. 因为一个形式系统可以是没有尽头的,元数学必须接纳这样一些概念和问题,它们牵连着至少是潜无穷的系统. 但是,只能使用有限性的证明方法. 不能涉及到公式的无穷多个结构性质或无穷多个公式操作.

现在大部分经典数学的相容性,都能够化归到自然数的算术(数论)的无矛盾性,犹如这个理论大多概括在 Peano 公理中;或者化归到一种相当丰富的集合论,足以给出 Peano 公理. 因此,自然数的算术的无矛盾性就成了注意的中心.

Hilbert 和他的学派,确实证明了一些简单形式系统的无矛盾性,并且他们相信他们就将实现证明算术和集合论的无矛盾性这个目标了. 他在《论无限》(*Über das Unendliche*)一文①中说道,

> 在几何学和物理理论中,无矛盾性的证明是通过把它化归到算术的无矛盾性来完成的. 这个方法明显地不能用于对算术本身的证明. 因为我们的证明论……使得这最后一步成为可能,它就构成数学结构的不可缺少的基石. 而尤其值得注意的是,我们已经受过两次事件——首先是在微积分的悖论中,后来是在集合论的悖论中——在数学的领域中不会再发生了.

---

① *Math, Ann.*, 95,1926, 161～190 = *Grundlagen der Geometrie*, 第 7 版,262～288. 英译文见于 Paul Benacerraf and Hilary Putnam: *Philosophy of Mathematics*, 134～181, Prentice-Hall,1964.

但是随后 Kurt Gödel(1906—1978)上场了. Gödel 的第一篇主要文章是《论数学原理(*Principia Mathematica*)一书中的形式上不可断定的命题以及有关系统Ⅰ》(Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme Ⅰ)[①]. 在这里 Gödel 证明了,包含着通常逻辑和数论的一个系统的无矛盾性是不可能确立的,如果人们只限于运用在数论系统中可以形式表出的概念和方法. 实际这就是说,数论的相容性用元数学所容许的狭义逻辑是不可能确立的. 对于这个结果,Weyl 说道:上帝是存在的,因为数学没有矛盾;魔鬼也是存在的,因为我们不能证明这无矛盾性.

上述 Gödel 的结果,是他的更为惊人的结果的一个推论. 这个主要结果(Gödel 的不完备性定理(incompleteness theorem))说的是,如果一个足以容纳数论的形式理论 T 是无矛盾的,并且算术的形式系统的公理都是 T 的公理或定理,那么 T 就是不完备的. 这就是说,有这样一个数论的语句 S,使 S 和非 S 都不是这个理论的一个定理. 因为 S 或非 S 总有一个是真的;于是就有了一个数论的语句,它是真的又是不可证明的. 这个结果适用于 Russell-Whitehead 系统,Zermelo-Fraenkel 系统,以及 Hilbert 的数论公理化. 这是有点讽刺意味的,Hilbert 在 1928 年波洛尼亚(Bologna)国际数学会上的讲话中(看 p. 321 注)曾批评过先前通过范畴性作出的完备性的证明,而他很确信自己的系统是完备的. 实际上这些先前的证明牵涉到包含着自然数的系统,它们被承认为正确的,仅仅是因为集合论还没有被公理化,是在朴素的基础上使用的.

不完备性的不足之处就在于,形式系统还不足以用来证明所有在系统中可以作出的判断. 损伤更兼屈辱,系统中存在着这样的判断,它们是不可断定的,但在直观上又是真的. 不完备性是不能

---

① *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38,1931,173～198;看参考书目.

由添加 S 或～S 作为公理来补救的，因为 Gödel 证明了，包括着数论的任何系统都必定含有不可断定的命题. 这样，尽管 Brouwer 已经弄清楚了，直观上明确的东西不及数学上证明了的东西多；Gödel 却证明了，直观的正确会超过数学的证明.

Gödel 定理的一个涵义是，不仅是数学的全部，甚至是任何一个有意义的分支也不能用一个公理系统概括起来，因为任何这样的公理系统都是不完备的. 存在着这样的语句，它的概念属于这个系统，它不能在系统之内证明出来，但是却可以用非形式的论证来证明它是真的，事实上是用元数学的逻辑. 公理化的成就是有限度的，这个涵义与 19 世纪末的这种看法形成了尖锐的对比，即数学，与公理化了的各分支的总和具有相同的广度. Gödel 的结果给了内涵公理化(comprehensive axiomatization)一个致命的打击. 公理方法的这个缺陷本身并不是一个矛盾，但却是可惊的，因为数学家曾经期望任何一个真的语句一定会在某个公理系统的框架中确立起来. 当然，上述的论点并不排除新的证明方法的可能性，这种新方法将超出 Hilbert 元数学所容许的范围.

Hilbert 并不信服这些打击摧毁了他的计划. 他争辩说，即使要用到形式系统以外的一些概念，它们仍可以是有限的，并且在直观上是具体的，因而是可以接受的. Hilbert 是一个乐观主义者，他对人类的推理和理解的能力有无限的信心，他在 1928 年国际会议①上所作的讲话中曾经断言："……对于数学的理解是没有界限的，……在数学中没有 Ignorabimus[不可知]；更确切地说，我们总是能够回答有意义的问题的，……我们的理智并不具有任何秘密的技术，它只是按照十分确定的并且是可以说明白的法则行事，这些法则就是它的判断的绝对客观性的保证."每个数学家，他说，都会同样深信，任何确定的数学问题总是可以解决的. 这种乐观主

---

① *Atti Del Congresso Internazionale Dei Matematici*, Ⅰ, 135 ～ 141 = *Grundlagen der Geometrie*, 第 7 版, 313～323.

义给他以勇气和力量,但却阻止他去了解可能有不可断定的数学问题.

形式主义的计划,不管成功与否,对于直观主义者都是不能接受的.Brouwer 在 1925 年冲击了形式主义者①.他说,公理化的办法,形式主义的办法,当然都会避免矛盾,但是用这种办法不会得到有数学价值的东西.一个错误的理论,即使没有因矛盾而告终,也仍然是错误的,正如一种罪行,不论法庭是否禁止都是有罪的.他还讽刺地说:"数学的严密在哪里,对这个问题,这两派给出不同的回答.直观主义者说,是在人类的理智中;形式主义者说,是在纸上."Weyl 也攻击过 Hilbert 的计划."Hilbert 的数学或许是一种美妙的公式游戏,甚至比下棋更好玩;但是它与认识毫无关系,因为那是公认的,它的公式并不具有可借以表示直观真理的那种实在意义."为保卫形式主义哲学,可以指出,把数学化成没有意义的公式,其目的只在于要证明相容性,完备性,以及其他的性质.至于数学作为一个整体,即使形式主义者也反对说它仅仅是一种游戏的这种思想;他们认为它是一种客观的科学.

Hilbert 也反过来攻击 Brouwer 和 Weyl,说他们想要扔掉他们所不喜欢的每一件东西,并且专横傲慢地颁布一道禁令②.他称直观主义是对科学的一种背叛.(可是在他的元数学中,他却把自己局限于直观上明确的逻辑原则.)

8. 一些新近的发展

对基础的根本问题所提出的解答——集合论的公理化、逻辑主义、直观主义或形式主义——都没有达到目的,没有对数学提供

---

① *Jour. für Math.*, 154,1925,1.

② *Abh. Math. Seminar der Hamburger Univ.*, 1,1922, 157 ~ 177 = *Ges. Abh.*, 3,157~177.

一个可以普遍接受的途径. 在 Gödel 1931 年的工作以后的发展，也没有在实质上改变这种状况. 可是，有些动态和结果是值得一提的. 有些人对数学建立了妥协的途径，兼备两个根本学派的特色. 另一些人，特别是 Gerhard Gentzen(1909—1945)，Hilbert 学派的一员，放松了 Hilbert 元数学中对证明方法的限制，例如，设法用超限归纳(对超限数进行归纳)去确立数论和分析的一些受到限制的部分的相容性①.

在其他有意义的结果中，有两个特别值得提到. 在《选择公理和广义连续统假设二者与集合论公理的相容性》(*The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*，1940，修订版，1951)中，Gödel 证明了，如果 Zermelo-Fraenkel 公理系统在除去选择公理后是相容的，那么加上这条公理以后这个系统也是相容的；这就是说，这条公理是不能反证的. 同样，连续统假设(它说的是没有基数存在于$\aleph_0$与$2^{\aleph_0}$之间)与 Zermelo-Fraenkel 系统(除去选择公理)合在一起也是相容的. 1963 年，斯坦福(Stanford)大学的数学教授 Paul J. Cohen(1934—　)证明了②，所说的这两条公理对于 Zermelo-Fraenkel 系统是独立的；就是说，它们是不能以这个系统为基础去证明的. 还有，即使把选择公理保留在 Zermelo-Fraenkel 系统中，连续统假设也还是不能证明的. 这些结果意味着，我们可以随意去构造数学的新系统，在其中这两条有争议的公理有一个或者两个全都被否定了.

1930 年以后的全部发展还留下来两个没有解决的大问题：去证明不加限制的经典分析与集合论的相容性，以及在严格直观的根基上去建立数学，或者去确定这种途径的限度. 在这两个问题

---

① *Math. Ann.*，112，1936，493～565.

② *Proceedings of the National Academy of Sciences*，50，1963，1143～1148；51，1964，105～110.

中,困难的根源都在于无穷集合和无限程序中所用到的无限(infinity). 这个概念,即使对于希腊人也已经在无理数上造成了问题,而且他们在穷竭法中躲开它. 从那以后,无限这个概念一直是争论的题目,并使 Weyl 说道,数学是无限的科学.

关于数学的适当逻辑基础的问题,特别是直观主义的兴起,在某种较广的意义上,显示出数学走了一个圆圈. 这门学科是在直观的和经验的基础上起始的. 严密性在希腊时代就变成了一个目标,虽说直到 19 世纪以前在受到冲击时仍更加受到尊重,它似乎就要达到了. 但是,过分追求严密性,将引入绝境而失去它的真正意义. 数学仍然是活跃而富有生命力的,但是它只能建立在实用的基础上.

有些人看到了从当前的绝境中解脱出来的希望. 以 Nicolas Bourbaki 为笔名的一群法国数学家,提出了这种令人鼓舞的看法①:"经过了 25 个世纪,数学家们已经有了改正错误的锻炼,从而看到他们的科学是更加丰富了,而不是更贫困了;这就使他们有权去安详地展望未来."

不管乐观主义有没有根据,Weyl 对数学的现状作了恰当的描述②:"关于数学最终基础和最终意义的问题还是没有解决;我们不知道向哪里去找它的最后解答,或者根本就不能期望会有一个最后的客观回答. '数学化'(Mathematizing)很可能是人的一种创造性活动,像语言或音乐一样,具有原始的独创性,它的历史性决定不容许完全的客观的有理化(rationalization)."

参考书目

Becker, Oskar: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Verlag

---

① *Journal of Symbolic Logic*, 14,1949,2~8.

② *Obituary Notices of Fellows of the Royal Soc.*, 4,1944, 547 ~ 553 = *Ges. Abh.*, 4,121~129,特别是 p. 126.

Karl Alber, 1956,317～401.

Beth, E. W.: *Mathematical Thought: An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Gordon and Breach, 1965.

Bochenski, I. M.: *A History of Formal Logic*, University of Notre Dame Press, 1962;Chelsea (reprint), 1970.

Boole, George: *An Investigation of the Laws of Thought* (1854), Dover (reprint), 1951.

Boole, George: *The Mathematical Analysis of Logic* (1847), Basil Blackwell (reprint), 1948.

Boole, George: *Collected Logical Works*, Open Court, 1952.

Bourbaki, N.: *Eléments d'histoire des mathématiques*, 2nd ed. Hermann, 1969,11～64.

Brouwer, L. E. J.: "Intuitionism and Formalism", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 20, 1913/1914,81～96. 这是 Brouwer 接受阿姆斯特丹(Amsterdam)数学教授职位的就职演说的英译文.

Church, Alonzo: "The Richard Paradox", *Amer. Math. Monthly*, 41,1934,356～361.

Cohen, Paul J., and Reuben Hersh: "Non-Cantorian Set Theory", *Scientific American*, Dec. 1967,104～116.

Couturat, L.: *La Logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Alcan, 1901.

De Morgan, Augustus: *On the Syllogism and Other Logical Writings*, Yale University Press, 1966. 这是由 Peter Heath 编辑的 De Morgan 的论文集.

Dresden, Arnold: "Brouwer's Contribution to the Foundations of Mathematics", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 30,1924,31～40.

Enriques, Federigo: *The Historic Development of Logic*, Henry Holt, 1929.

Fraenkel, A. A.: "The Recent Controversies About the Foundations of Mathematics," *Scripta Mathematica*, 13,1947,17～36.

Fraenkel, A. A., and Y. Bar-Hillel: *Foundations of Set Theory*, North-Holland, 1958.

Frege, Gottlob: *The Foundations of Arithmetic*, Blackwell, 1953,英文和德文;也有只是英译的,Harper and Bros., 1960.

Frege, Gottlob: *The Basic Laws of Arithmetic*, University of California Press, 1965.

Gerhardt, C. I., ed: *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, 1875～1880, Vol. 7.

Gödel, Kurt: *On Formally Undecidable Propositions of* Principia Mathematica *and Related Systems*, Basic Books, 1965.

Gödel, Kurt: "What Is Cantor's Continuum Problem?" *Amer. Math. Monthly*, 54, 1947,515～525.

Gödel, Kurt: *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton University Press, 1940; rev. ed., 1951.

Kneale, William and Martha: *The Development of Logic*, Oxford University Press, 1962.

Kneebone, G. T.: *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, D. Van Nostrand, 1963,特别参看关于1939年以来的发展的附录.

Leibniz, G. W.: *Logical Papers*,由G. A. R. Parkinson编辑和翻译,Oxford University Press, 1966.

Lewis, C. I.: *A Survey of Symbolic Logic*, Dover (reprint), 1960, pp. 1～117.

Meschkowski, Herbert: *Probleme des Unendlichen*, *Werk und Leben Georg Cantors*, F. Vieweg und Sohn, 1967.

Mostowski, Andrzej: *Thirty Years of Foundational Studies*, Barnes and Noble, 1966.

Nagel, E., and J. R. Newman: *Gödel's Proof*, New York University Press, 1958.

Poincaré, Henri: *The Foundations of Science*, Science Press, 1946,448～485,这是三本书*Science and Hypothesis*, *The Value of Science*和*Science and Method*的合订本的重印本.

Rosser, J. Barkley: "An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorems and Church's Theorem", *Journal of Symbolic Logic*, 4,1939,53～60.

Russell, Bertrand: *The Principles of Mathematics*, George Allen and Unwin, 1903; 2nd ed., 1937.

Scholz, Heinrich: *Concise History of Logic*, Philosophical Library, 1961.

Styazhkin, N. I.: *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1969.

Van Heijenoort, Jean: *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, 1967.这是论数学基础和逻辑的重要论文的翻译.

Weyl, Hermann: "Mathematics and Logic", *Amer. Math. Monthly*, 53,1946, 2～13 = *Ges. Abh.*, 4,268～279.

Weyl, Hermann: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, 1949.

Whitehead, A. N., and B. Russell: Principia Mathematica, Cambridge University Press,3 vols.,1910～1913.

Wilder, R. L.: "*The Role of the Axiomatic Method*", *Amer. Math. Monthly*, 74, 1967,115～127.

杂志名称缩写一览表

Abh. der Bayer. Akad. der Wiss. Abhandlungen der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften (München)

Abh. der Ges. der Wiss. zu Gött. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Abh. König. Akad. der Wiss., Berlin Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Abh. Königlich Böhm. Ges. der Wiss. Abhandlungen der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften

Abh. Math. Seminar der Hamburger Univ. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Hamburgischen Universität

Acta Acad. Sci. Petrop. Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae

Acta Erud. Acta Eruditorum

Acta Math. Acta Mathematica

Acta Soc. Fennicae Acta Societatis Scientiarum Fennicae

Amer. Jour. of Math. American Journal of Mathematics

Amer. Math. Monthly. American Mathematical Monthly

Amer. Math. Soc. Bull. American Mathematical Society, Bulletin

Amer. Math. Soc. Trans. American Mathematical Society, Transactions

Ann. de l'Ecole Norm. Sup. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure

Ann. de Math. Annales de Mathématiques Pures et Appliquées

Ann. Fac. Sci. de Toulouse Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse

Ann. Soc. Sci. Bruxelles Annales de la Société Scientifique de Bruxelles

Annali di Mat. Annali di Matematica Pura ed Applicata

Annals of Math. Annals of Mathematics

Astronom. Nach. Astronomische Nachrichten

Atti Accad. Torino Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino

Atti della Accad. dei Lincei, Rendiconti Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti

Brit. Assn. for Adv. of Sci. British Association for the Advancement of Science

Bull. des Sci. Math. Bulletin des Sciences Mathématiques

Bull. Soc. Math. de France Bulletin de la Société Mathématique de France

Cambridge and Dublin Math. Jour. Cambridge and Dublin Mathematical Journal

Comm. Acad. Sci. Petrop. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae

Comm. Soc. Gott. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores

Comp. Rend. Comptes Rendus

Corresp. sur l'Ecole Poly. Correspondance sur l'Ecole Polytechnique

Encyk. der Math. Wiss. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften

Gior. di Mat. Giornale di Matematiche

Hist. de l'Acad. de Berlin Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin

Hist. de l'Acad. des Sci., Paris Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique

Jahres. der Deut. Math.-Verein. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Jour. de l'Ecole Poly. Journal de l'Ecole Polytechnique

Jour. de Math. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées

Jour. des Sçavans Journal des Sçavans

Jour. für Math. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik

Jour. Lon. Math. Soc. Journal of the London Mathematical Society

Königlich Sächsischen Ges. der Wiss. zu Leipzig Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig

Math. Ann. Mathematische Annalen

Mém. de l'Acad. de Berlin 见 *Hist. de l'Acad. de Berlin*

Mém. de l'Acad. des Sci., Paris 见 *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*; after 1795, Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France

Mém. de l'Acad. Sci. de St. Peters. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg

Mém. des sav. étrangers Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés à l'Académie Royal des Sciences, par Divers Sçavans, et Lus dans ses Assemblées

Mém. divers Savans 见 *Mém. des sav. étrangers*

Misc. Berolin. Miscellanea Berolinensia;亦作 *Hist. de l'Acad. de Berlin* (*q.v.*)

Misc. Taur. Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis (由 Accademia delle Scienze di Torino 出版)

Monatsber. Berliner Akad. Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

N. Y. Math. Soc. Bull. New York Mathematical Society, Bulletin

Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Nou. Mém. de l'Acad. Roy. des Sci., Bruxelles Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres, et des Beaux Arts de Belgique

Nouv. Bull. de la Soc. Philo. Nouveau Bulletin de la Société Philomatique de Paris

Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin

Nova Acta Acad. Sci. Petrop. Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae

Nova Acta Erud. Nova Acta Eruditorum

Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae

Phil. Mag. The Philosophical Magazine

Philo. Trans. Philosophical Transactions of the Royal Society of London

Proc. Camb. Phil. Soc. Cambridge Philosophical Society, Proceedings

Proc. Edinburgh Math. Soc. Edinburgh Mathematical Society, Proceedings

Proc. London Math. Soc. Proceedings of the London Mathematical Society

Proc. Roy. Soc. Proceedings of the Royal Society of London

Proc. Royal Irish Academy Proceedings of the Royal Irish Academy

Quart. Jour. of Math. Quarterly Journal of Mathematics

Scripta Math. Scripta Mathematica

Sitzungsber. Akad. Wiss zu Berlin Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Sitzungsber. der Akad. der Wiss., Wien Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse

Trans. Camb. Phil. Soc. Cambridge Philosophical Society, Transactions

Trans. Royal Irish Academy Transactions of the Royal Irish Academy

Zeit. für Math. und Phys. Zeitschrift für Mathematik und Physik

Zeit. für Physik Zeitschrift für Physik

人 名 索 引

---

① 为便于查阅,这里给出中文译名."240—3"表示第 240 至 243 页,其他同.——译者注

名 词 索 引

二 画

三 画

四 画

五　画

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十四画以上

[General Information]
书名=古今数学思想 第一册
作者=（美）莫里斯·克莱因（Morris Kline）著；张理京等译
页数=352
SS号=11109840
出版日期=2002
出版社=上海科学技术出版社